

„Opracowanie i wdrożenie kursu wyrównawczego z matematyki z wykorzystaniem technologii
informatycznych dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych”

Metodyka nauczania matematyki ze wspomaganie e-learningowym

Zdzisław Porosiński

Wstęp 2

Matematyka Re@ktywacja 6

Uczestnicy projektu 6

Wymagania techniczne 7

Funkcjonalność materiałów e-learningowych 8

Elektroniczna zawartość kursu wyrównawczego 8

Typy zadań i funkcjonowanie interaktywnych e-ćwiczeń 9

Metodyka nauczania 11

Wykłady i ćwiczenia 14

Elektroniczne sprawdziany 22

Szczegóły funkcjonowania sprawdzianów 25

Podsumowanie 27

Bibliografia 29

Dodatek 30

Podstawa programowa 23 grudnia 2008r - treści kształcenia matematyki dla szkół ponadgimnazjalnych 30

Opanowanie jakiejkolwiek dziedziny – od gry w piłkę nożną do teorii względności – wymaga wysiłku. Nie wymaga jednak nieprzyjemnego wysiłku, nudziarstwa. Głównym zadaniem każdego nauczyciela jest sprawić, aby jego przedmiot był interesujący.

W.W. Sawyer, „Matematyka nauką przyjemną”

Wstęp

Według założeń nowej podstawy programowej z 23 grudnia 2008r., po ukończeniu trzeciego etapu edukacji, gimnazjum, uczeń powinien poszerzyć i pogłębić wiedzę matematyczną zdobytą w szkole podstawowej osiągając następujące cele (w zakresie treści szczegółowo wymienionych w podstawie programowej):

1. **Wykorzystanie i tworzenie informacji.** Uczeń interpretuje i tworzy teksty o charakterze matematycznym, używa języka matematycznego do opisu rozumowania i uzyskanych wyników.
2. **Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.** Uczeń używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych, interpretuje pojęcia matematyczne i operuje obiektami matematycznymi.
3. **Modelowanie matematyczne.** Uczeń dobiera model matematyczny do prostej sytuacji, buduje model matematyczny danej sytuacji.
4. **Użycie i tworzenie strategii.** Uczeń stosuje strategię jasno wynikającą z treści zadania, tworzy strategię rozwiązania problemu.
5. **Rozumowanie i argumentacja.** Uczeń prowadzi proste rozumowania, podaje argumenty uzasadniające poprawność rozumowania.

Tak przygotowani uczniowie przechodzą na czwarty etap kształcenia – szkoły ponadgimnazjalne (licea i technika), w którym powinni, tak w zakresie podstawowym, jak i rozszerzonym, osiągnąć umiejętności niezbędne do sprostania wymogom egzaminu maturalnego, ale również przygotowania do życia we współczesnym świecie:

1. **Wykorzystanie i tworzenie informacji.** Uczeń interpretuje tekst matematyczny. Po rozwiązaniu zadania interpretuje otrzymany wynik. Uczeń używa języka matematycznego do opisu rozumowania i uzyskanych wyników.
2. **Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.** Uczeń używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych. Uczeń rozumie i interpretuje pojęcia matematyczne oraz operuje obiektami matematycznymi.

3. **Modelowanie matematyczne.** Uczeń dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu. Uczeń buduje model matematyczny danej sytuacji, uwzględniając ograniczenia i zastrzeżenia.
4. **Użycie i tworzenie strategii.** Uczeń stosuje strategię, która jasno wynika z treści zadania. Uczeń tworzy strategię rozwiązania problemu.
5. **Rozumowanie i argumentacja.** Uczeń prowadzi proste rozumowanie, składające się z niewielkiej liczby kroków. Uczeń tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność.

W szczególności kształcenie matematyczne ma pomóc uczniowi w poznawaniu i zrozumieniu świata, w zdobyciu umiejętności projektowania i wykonywania obliczeń, porządkowania, przetwarzania oraz interpretowania danych liczbowych w postaci graficznej oraz w podejmowaniu różnych działań.

Wymienione wyżej cele brzmią wspaniale, skąd więc tak mierne efekty edukacji?
Skąd bierze się powszechny lęk przed matematyką?

W badaniach Międzynarodowego Programu Oceny Umiejętności Uczniów (Programme for International Student Assessment – PISA) wzięło udział około 400 000 uczniów z całego świata, którzy reprezentowali ponad 20-milionową populację piętnastolatków. Zasadniczym narzędziem, stanowiącym podstawę badania umiejętności uczniów, był test kompetencyjny. W Polsce, oprócz piętnastolatków, których wyniki są porównywane międzynarodowo, badaniem objęto także uczniów pierwszej i drugiej klasy szkół ponadgimnazjalnych.

Celem badania było sprawdzenie:

- na ile młodzi piętnastoletni ludzie są przygotowani do życia we współczesnym świecie, w którym nauka i technika odgrywają coraz większą rolę,
- na ile swobodnie poruszają się wśród zagadnień związanych z rozumowaniem, zarówno w naukach przyrodniczych, jak i humanistycznych,
- czy potrafią odwoływać się do matematyki w rozwiązywaniu codziennych problemów.

Umiejętności matematyczne były badane w całym cyklu badań PISA (lata 2000, 2003, 2006 i 2009), przy czym matematyka była domeną główną w roku 2003. Dla zbadania umiejętności uczniów użyto wówczas 84 zadań. Pakiet 48 tych samych zadań rozwiązywali uczniowie w

badaniu PISA 2006. Wykorzystanie tych samych zadań w odstępie 3 lat pozwoliło na budowanie porównań wyników, jakie uzyskali uczniowie w kolejnych badaniach.

Zadania, w których polscy uczniowie wypadli powyżej średniej, odwołują się głównie do trzech umiejętności, zidentyfikowanych już po badaniu PISA 2003 jako mocne strony polskich uczniów:

- stosowanie znanych algorytmów,
- umiejętność odczytywania danych z wykresów, diagramów i tabel,
- wyobrażenia geometryczna.

Polscy uczniowie gorzej (poniżej średniej) poradzili sobie z zadaniami, w których uczeń musiał wyjść poza znane sobie, rutynowe sposoby postępowania:

- samodzielne opanowanie nieznanego wcześniej modelu lub kontekstu,
- zaprojektowanie strategii postępowania – odpowiedniego ciągu działań, składającego się z dobrze znanych operacji, prowadzącego do rozwiązania,
- przeprowadzenie rozumowania polegającego na analizie działania pewnego systemu i wyciągnięciu wniosków z tej analizy.

Wyniki polskich uczniów nasuwają ważne wnioski. Dane pozwalały na przedstawienie *problemu górnej ćwiartki*, czyli najlepszych polskich uczniów, którzy jednak uzyskali relatywnie słabsze wyniki niż analogiczna grupa z innych krajów. Przez *problem górnej ćwiartki* rozumiemy trudność w rozwijaniu przez polskie szkoły złożonych umiejętności uczniów, niezależnie od poziomu młodzieży objętej kształceniem.

W roku 2003 problem ten dotyczył wszystkich badanych dziedzin, jednak najsilniej zarysował się w matematyce. Rozwijanie umiejętności samodzielnego myślenia, rozumowania naukowego, modelowania i rozumowania matematycznego, formułowania hipotez, zwięzłego zapisania wniosków, dostrzegania alternatywnych rozwiązań problemu, stanowi piętę achillesową polskiej oświaty. Ten ogólny wynik został potwierdzony przez badanie PISA 2006. Nastąpiło zmniejszenie odsetka gimnazjalistów polskich na dwóch najniższych poziomach umiejętności i w roku 2006 odsetek ten jest niższy niż średnia. Odsetek gimnazjalistów na dwóch najwyższych poziomach umiejętności jest nadal znacznie niższy niż średnia dla wszystkich krajów.

Między rokiem 2003 a 2006 nastąpiła poprawa wyników (już dość wysokich w roku 2003) w zadaniach wymagających użycia znanego uczniom algorytmu. Mimo, że każda poprawa wyników wydaje się powodem do zadowolenia, to fakt, że poprawa ta nastąpiła jedynie w zadaniach tego typu może świadczyć o pogłębiającej się rutynizacji nauczania matematyki w gimnazjum. Polscy gimnazjaliści coraz bardziej specjalizują się w zadaniach odtwórczych, rutynowych i nadal nie potrafią radzić sobie w sytuacjach wymagających samodzielnego, twórczego myślenia i rozumowania.

Wydaje się, że w nauczaniu matematyki w gimnazjach, a także w liceach (o czym świadczą analizy wyników matur), nauczyciele zbyt wiele czasu poświęcają na proste umiejętności, rutynowe rachunki i rozumowania, które z natury rzeczy są nudne i nużące, gdy są wykonywane ponad potrzebę. Takie „sprawdzanie pamięci” u uczniów zdolnych niszczy zainteresowanie matematyką i chęć stawienia czoła problemom widzianym po raz pierwszy, co jest istotą „sprawdzania rozumowania”. Dla uczniów mało uzdolnionych w przedmiotach ścisłych nawet niski próg wymagań stanowi barierę zbyt wysoką, aby uzyskiwać choćby drobne sukcesy na tyle często, żeby mieć motywację do osiągnięcia wyższych kompetencji przez zwiększony wysiłek. Nauczycielom ukierunkowanym na „średniego” ucznia brakuje czasu na wykształcenie podstawowych kompetencji u uczniów mniej zdolnych i na rozwinięcie zainteresowań matematycznych u uczniów najzdolniejszych.

W klasycznym systemie uczenia matematyki, duża część zajęć audytoryjnych musi być przeznaczona właśnie na ćwiczenia „treningowe” polegające na stosowaniu znanych wzorów lub metod. Dostępne technologie komputerowe pozwalają zautomatyzować ćwiczenia tego typu poprzez interaktywne e-ćwiczenia lub e-zadania. Dzięki temu zajęcia audytoryjne i kwalifikacje nauczyciela mogą być wykorzystane na omówienie bardziej zaawansowanych zagadnień i na zastosowania.

Matematyka Re@ktywacja

Obok braku obowiązkowej matury z matematyki przez 20 lat (do 2010 roku) i niskiego poziomu nauczania przedmiotów ścisłych w części szkół, jedną z głównych przyczyn słabych umiejętności matematycznych uczniów jest brak pomocy uczniom mającym problemy z nauką matematyki. Największe trudności z uzyskaniem pomocy mają uczniowie z małych miejscowości i to oni uzyskują słabsze wyniki na egzaminach i testach kompetencyjnych.

Aby sprostać oczekiwaniom MEN podwojenia do 2015 roku liczby maturzystów wybierających w dalszej edukacji kierunki ścisłe i techniczne, należy podjąć działania rozwijające umiejętności uczniów w zakresie kluczowych kompetencji. Taki też jest cel projektu „Opracowanie i wdrożenie kursu wyrównawczego z matematyki z wykorzystaniem technologii informatyczno-komunikacyjnych dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych” realizowanego pod hasłem „Matematyka Re@ktywacja” w ramach Programu Operacyjnego Europejskiego Funduszu Społecznego. Pomysłodawcami i wykonawcami projektu są pracownicy Politechniki Wrocławskiej a koordynatorem projektu jest dr Jędrzej Wierzejewski z Instytutu Matematyki i Informatyki Politechniki Wrocławskiej.

Uczestnicy projektu

„Matematyka Re@ktywacja” wykorzystuje system wspomagania nauczania, w którym zaawansowane technologie są ściśle połączone z aktywnym udziałem nauczycieli i uczniów. Uczniowie otrzymują zdalny dostęp do wyczerpujących materiałów wykładowych oraz ogromnej liczby dynamicznych interaktywnych ćwiczeń i sprawdzianów z całego zakresu matematyki objętej programem nauczania w szkołach ponadgimnazjalnych. Materiały wykładowe i ćwiczenia przeplatają się ze sobą w taki sposób, aby uczeń poznający nowe zagadnienie lub metodę mógł natychmiast przystąpić do samodzielnego rozwiązywania zadań.

Uczeń przystępujący do projektu będzie jego uczestnikiem przez pełne trzy lata swojej edukacji ponadgimnazjalnej. Projekt nie zakłada rezygnacji z tradycyjnego sposobu uczenia. Natomiast zarówno nauczyciele, jak uczniowie – uczestnicy projektu – przejdą ścieżkę edukacyjną matematyki z zakresu szkoły ponadgimnazjalnej wspomagani przyjaznym w obsłudze i niezawodnym środowiskiem e-learningowym. Istotną częścią projektu będą zdawane przez każdego uczestnika w szkolnym laboratorium komputerowym e-sprawdziany – elektroniczne

„klasówki” z kolejnych partii materiału. W ten sposób ogromna liczba uczniów będzie mogła w regularny, a przy tym zautomatyzowany sposób kontrolować swoje postępy w nauce.

Projekt „Matematyka Re@ktywacja” uzupełnia ofertę dydaktyczną dla szkół ponadgimnazjalnych z zakresu matematyki o interaktywne zajęcia wyrównawcze; poprzez innowacyjne metody kształcenia przyczynia się do rozwijania zainteresowań uczniów naukami matematycznymi, wyrabia nawyk systematycznego uczenia się i korzystania z Internetu. W ten sposób orientuje kształcenie na efekty nauczania i uczenia się. Zwiększenie efektywności nauczania matematyki powinno zaowocować lepszym przygotowaniem kandydatów na studia techniczne, a w przyszłości wzrostem liczby absolwentów kierunków o kluczowym znaczeniu dla gospodarki.

Wymagania techniczne

Do korzystania z materiałów e-learningowych niezbędny jest komputer z dostępem do Internetu z zainstalowaną Wirtualną Maszyną Javy (jest to darmowy dodatek do przeglądarki internetowej). Wyrażenia matematyczne znajdujące się w tekście zakodowane są w specjalnym formacie MathML. W obecnej chwili najlepiej przystosowaną do wyświetlania tego formatu przeglądarką jest Mozilla Firefox. Przeglądarka Internet Explorer wymaga zainstalowania specjalnego darmowego dodatku pod nazwą MathPlayer. Szczegóły dotyczące przygotowania technicznego przeglądarki oraz inne szczegóły techniczne związane z użytkowaniem materiałów będzie można uzyskać w drodze planowanych specjalnie w tym celu konsultacji dla użytkowników.

Funkcjonalność materiałów e-learningowych

Powiedz mi, a zapomnę. Pokaż mi, a zapamiętam. Pozwól mi zrobić, a zrozumiem.

Konfucjusz

W 2004 roku dr Przemysław Kajetanowicz i dr Jędrzej Wierzejewski z Instytutu Matematyki i Informatyki Politechniki Wrocławskiej przeprowadzili eksperyment polegający na zaprojektowaniu i wykonaniu internetowej lekcji na temat funkcji kwadratowej wyposażonej w obszerny zestaw interaktywnych ćwiczeń i sprawdzianów. W centrum zainteresowania autorów znalazły się zagadnienia związane z zastosowaniem technologii komputerowych do automatyzacji najistotniejszego, a jednocześnie najbardziej czasochłonnego, elementu w procesie studiowania matematyki - samodzielnego rozwiązywania zadań przez ucznia. Autorzy przeprowadzili dodatkowo studia na temat istniejących rozwiązań w dziedzinie automatycznej kontroli postępów.

Zdobyte doświadczenia zostały następnie wykorzystane do zaprojektowania, wykonania i wdrożenia kompletnego e-kursu Algebry z geometrią analityczną według programu realizowanego na Politechnice Wrocławskiej. Pierwsza realizacja kursu (dla grupy 55 studentów) miała miejsce w semestrze letnim 2004/2005. W kolejnych semestrach kurs był sukcesywnie rozwijany i ulepszany, obejmując jednocześnie coraz liczniejsze grupy studentów (w semestrze zimowym roku akademickiego 2009/2010 w e-kursie uczestniczyło ponad 3000 studentów). W grudniu 2005 kurs otrzymał główną nagrodę na konferencji 6th International Conference Virtual University w Bratysławie.

Elektroniczna zawartość kursu wyrównawczego

Z funkcjonalnego punktu widzenia materiały można podzielić na strony wykładowe, strony z ćwiczeniami oraz sprawdziany. Elektroniczna zawartość kursu to komplet bardzo starannie przygotowanych materiałów obejmujących pełny zakres matematyki na poziomie ponadgimnazjalnym, zarówno w zakresie podstawowym, jak rozszerzonym. Z punktu widzenia organizacji i formy prezentacji materiały można podzielić na trzy rodzaje: wykłady (lekcje), ćwiczenia oraz sprawdziany:

- **Materiał wykładowy** ma postać stron WWW, na których dodatkowo osadzono aplety Java zawierające ćwiczenia związane z omawianymi w danym miejscu pojęciami i zagadnieniami.
- **Materiał ćwiczeniowy** ma postać stron WWW z e-ćwiczeniami o wspólnej tematyce i zróżnicowanym stopniu trudności.
- **Sprawdziany** są elektronicznym odpowiednikiem prawdziwych kartkówek, klasówek i egzaminów. Pojedynczy sprawdzian jest zestawem zadań, których doбором i stopniem trudności można sterować na poziomie niewymagającym interwencji w kod źródłowy. Sprawdzian może być dodatkowo wyposażony w mechanizmy identyfikacji ucznia oraz automatycznego zapisu wyników do bazy danych.

Materiał lekcyjny zawiera zadania oferowane uczniowi w postaci interaktywnych e-ćwiczeń. E-zadania obejmują praktycznie wszystkie typy zagadnień objęte programem podstawowym i rozszerzonym z nowej podstawy programowej matematyki w szkołach ponadgimnazjalnych. Materiał pokrywa z naddatkiem (np. zawiera dodatkowo elementy logiki i teorii mnogości) wymagane treści kształcenia.

Typy zadań i funkcjonowanie interaktywnych e-ćwiczeń

Pojedyncze e-ćwiczenie działa jako aplet Java udostępniający dowolną liczbę zadań danego typu z losowo generowanymi danymi. Parametry zadania mogą być sterowane przez projektanta bez konieczności interwencji w kod źródłowy. Należą do nich między innymi:

- Zakres danych generowanych losowo w konkretnym typie zadania - na przykład minimalna i maksymalna liczba równań i niewiadomych w układzie, minimalna i maksymalna wartość współczynników itp.
- Rozkład prawdopodobieństwa wylosowania danych prowadzących do określonego rodzaju rozwiązania - na przykład układu równań o nieskończonej liczbie rozwiązań lub układu sprzecznego.
- Maksymalna liczba punktów możliwa do zdobycia przez ucznia oraz system punktacji danego typu zadania.
- Krokowa prezentacja prawidłowego rozwiązania w każdym momencie pracy z zadaniem. Wywołanie tego mechanizmu przez ucznia automatycznie pozbawia go możliwości oceny własnego rozwiązania.

„Opracowanie i wdrożenie kursu wyrównawczego z matematyki z wykorzystaniem technologii
informatycznych dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych”

Zautomatyzowane e-ćwiczenia obejmują także zadania graficzne, w których rozwiązanie polega na sporządzeniu rysunku (np. zadanie narysowania prostej czy okręgu o podanym równaniu, czy narysowania podzbioru płaszczyzny określonego podanym równaniem lub nierównością). Okno e-ćwiczenia zawiera w takim przypadku specjalny zestaw narzędzi graficznych pozwalających na umieszczenie odpowiednich obiektów w obszarze układu współrzędnych. Uczeń ma również do dyspozycji wirtualną linijkę, kątomierz i gumkę do wycierania. System elektronicznych ćwiczeń i sprawdzianów umożliwia automatyzację administracyjnego procesu kontroli postępów ucznia. Taka dodatkowa funkcjonalność systemu, jak zaliczenia oparte na automatycznych sprawdzianach, w pełni sprawdziła się w praktyce w e-learningowych kursach Algebry z geometrią analityczną prowadzonych od kilku lat na wielu wydziałach Politechniki Wrocławskiej.

Metodyka nauczania

Zainteresowanie wiąże się bardzo ściśle z ufnością we własne siły. Jeśli czujemy, że coś potrafimy zrobić, jesteśmy z siebie zadowoleni. Lubimy poczucie, że udało nam się pokonać przygrodek, i poczucie że inni patrzą na nas z uznaniem. Chcemy nadal to robić, a im więcej się zajmujemy, tym sprawniej nam to idzie. Skutki bywają odwrotne, gdy rozpoczynamy od niepowodzeń. Nikt nie lubi wyjść na niedołęgę. W rezultacie staramy się unikać tej dziedziny albo próbujemy udawać, że nam na niej nie zależy.

W.W. Sawyer, „Matematyka nauką przyjemną”

Metodyka matematyki, jako przedmiot główny w bloku zajęć przygotowujących do zawodu nauczyciela matematyki, ma na celu kształcenie spojrzenia na matematykę szkolną z pozycji nauczyciela, przygotowanie do otwartej i twórczej postawy wobec aktualnych programów oraz zachodzących zmian w systemie edukacji, a także kształcenie umiejętności doboru rozwiązań metodycznych do psychofizycznego rozwoju ucznia.

Należy więc założyć, że nauczyciel matematyki:

- potrafi kształtować pojęcia matematyczne w nauczaniu matematyki;
- zna podstawowe techniki i strategie rozumowania stosowane w matematyce i możliwości użycia ich na różnych poziomach nauczania;
- potrafi wprowadzić definicje, twierdzenia i dowody (różne rodzaje definicji, ważne etapy definiowania, budowa twierdzenia i różne jego wersje, rodzaje dowodów);
- potrafi opracować metodycznie zagadnienia matematyki szkolnej;
- kształtuje, utrwala i sprawdza umiejętności przy pomocy odpowiednich zadań i ćwiczeń;
- potrafi zbadać wiedzę i ocenić osiągnięcia uczniów;
- potrafi tworzyć scenariusze lekcji nakierowane na łączenie treści z kształceniem następujących umiejętności:
 - pracy z tekstem matematycznym,
 - matematyzowanie sytuacji problemowej,
 - rozwiązywania problemów w twórczy sposób,
 - skutecznego komunikowania się i efektywnego współdziałania w grupie.

W zreformowanym nauczaniu naczelną rolę zajmują metody aktywizujące, w których uczeń stara się w sposób czynny zdobywać wiedzę, a nie tylko biernie ją przyjmować. Znacznie dłużej pamięta się informacje zdobyte w wyniku własnych poszukiwań, niż gotowe, podane przez nauczyciela; tradycyjne metody przekazywania wiedzy okazują się niestety mało skuteczne. Uczniowie uczą się w trakcie własnej aktywności. Chodzi o to, by potrzebną wiedzę i umiejętności nabywali w sposób trwały, skuteczny a dodatkowo przyjemny.

Uczeń będzie aktywny, gdy:

- cel jest dla niego bliski i wyraźny (ma poczucie sensu tego, co robi);
- uwzględnia się jego potrzeby i zainteresowania (zadania uznaje za własne);
- ma poczucie bezpieczeństwa (prawo do błędów, otrzyma konieczne wsparcie i informację zwrotną);
- działaniom towarzyszą odczucia i emocje;
- bierze udział w planowaniu i podejmowaniu decyzji (coś ode mnie zależy);
- odczuwa satysfakcję (lubi to robić);
- ma poczucie własnej wartości (ja to potrafię);
- dostrzega się jego wkład pracy, a nie tylko efekt (nauczyciel i grupa dostrzegają jego wysiłek i doceniają go).

Aktywizowanie uczniów jest obecnie powszechnym zjawiskiem w nauczaniu. Na różnego rodzaju kursach doskonalących nauczycieli zachęca się do stosowania metod aktywizujących na lekcjach oraz wskazuje je jako dające wspaniałe rezultaty w procesie nauczania.

Samodzielne dochodzenie uczniów do wiedzy powoduje, że staje się ona bardziej trwała. Wybór metod nauczania jest indywidualną decyzją samego nauczyciela, jednak nie ma najmniejszej wątpliwości, że należy dążyć do aktywizowania uczniów poprzez włączenie w proces uczenia i zapamiętywania jak najwięcej zmysłów. Zamiast podawać gotowe informacje (uczniowie pamiętają tylko 10% z tego, co słyszą), nauczyciel powinien zachęcać uczniów do stawiania pytań i poszukiwania na nie odpowiedzi, stwarzać warunki do bycia odkrywcą i eksperymentatorem.

Wprowadzenie atrakcyjnych środków dydaktycznych działających na wzrok powoduje już wzrost zapamiętywania informacji do 20%. Stworzenie uczniom możliwości rozmowy i dyskusji zwiększa ilość zapamiętywanej informacji do 40%. Natomiast umożliwienie uczniom uczenia się poprzez działanie powoduje, iż zapamiętują 90% tego, co robią. Przyjmując to za

fakt, nauczycielowi nie pozostaje nic innego, jak organizować zajęcia, w których uczniowie zaangażują się całym sobą, będą badać, doświadczać i działać.

W tym celu należy:

- ograniczyć stosowanie metod podających, służących przekazywaniu gotowych wiadomości;
- stosować metody i techniki aktywizujące, sprzyjające samodzielności myślenia i działania, a także kształtowaniu pozytywnej motywacji do uczenia się;
- organizować tak pracę, aby uczniowie mieli okazję zaspokoić swoje potrzeby (bezpieczeństwa, uznania kontaktów społecznych, komunikacji, aktywności, samorealizacji, itd.);
- uatrakcyjnić zajęcia poprzez wprowadzenie elementu zaskoczenia, zaciekawienia, nowości, zabawy, bo to wzmaga zaangażowanie uczniów;
- wykorzystać na zajęciach odpowiednio dobrane środki dydaktyczne;
- tworzyć małe grupy, które wymuszają aktywność wszystkich jej uczestników i sprzyjają obiektywnej ocenie i samoocenie;
- tworzyć sytuacje, w których uczniowie stają się eksperymentatorami i odkrywcami.

Każdą metodę nauczania można w pewnym stopniu przekształcić w metodę aktywizującą. Nawet wykład stanie się metodą aktywną, jeśli będzie odpowiednio prowadzony, a po wykładzie nastąpią metody aktywizujące – dyskusja, ćwiczenia utrwalające, zastosowania praktyczne. Podobnie można spojrzeć np. na czytanie tekstu matematycznego, które odpowiednio przygotowane i zakończone działaniami uczniów może być kształcącym elementem procesu dydaktycznego.

Wspomaganie e-learningowe w nauczaniu matematyki może być jedną z najefektywniejszych metod aktywizacji uczniów.

Uczelnie i szkoły od lat sięgają po technologie komputerowe, w tym Internet, jako środek do wspomagania nauczania. Niestety, zwykle takie wspomaganie sprowadza się do publikowania materiałów przeznaczonych bardziej do lektury niż do aktywnego uczestnictwa w procesie nabywania umiejętności matematycznych. Podejście autorów omawianych materiałów e-learningowych jest zupełnie inne. Opiera się na założeniu, że uczeń musi przede wszystkim mieć stałą możliwość ćwiczenia umiejętności. Warunkiem koniecznym jest więc dostarczenie praktycznie nieograniczonej liczby zadań każdego typu.

Należy podkreślić, że materiał e-learningowy nie zastąpi żywego kontaktu ucznia z nauczycielem. Może stanowić namiastkę lekcji, ale jego zasadniczą zaletą jest możliwość indywidualizacji tempa przyswajania wiedzy, wielokrotnego ćwiczenia zadań w różnych zestawach, co z jednej strony ułatwia aktywizację uczniów słabszych, a z drugiej strony uczniom zdolnym pozwala uniknąć znużenia niepotrzebnymi ćwiczeniami w tempie uczniów wolniej pracujących.

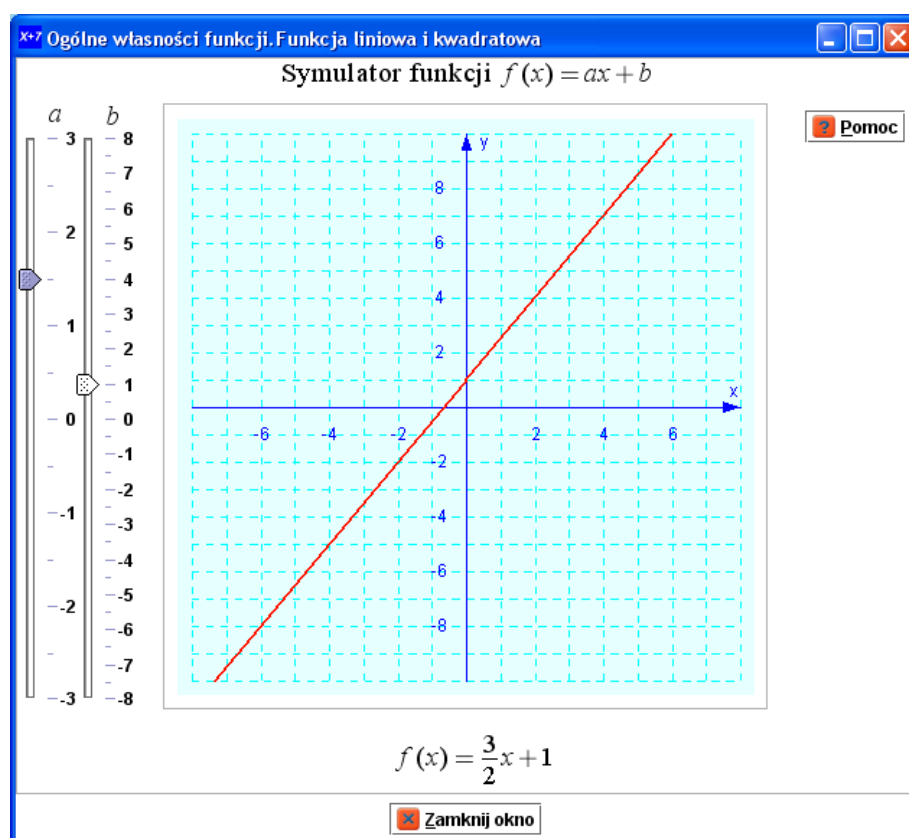
Wykłady i ćwiczenia

Strony wykładowe prezentują materiał w podobny sposób, jak w szkolnym podręczniku, tyle że wzbogacony o elementy pozwalające na aktywny udział ucznia w procesie zapoznawania się z materiałem. Zawierają one interaktywne symulatory pozwalające na samodzielne eksperymentowanie z pojęciami, a także interaktywne ćwiczenia, które pozwalają uczniowi na sprawdzenie zrozumienia przerabianego akurat fragmentu materiału. Ponieważ dowody twierdzeń są wstępnie ukryte pod przyciskami i można je śledzić krok po kroku, pozwala to wykorzystywać e-podręcznik w różny sposób. Można na przykład pominąć przy pierwszym czytaniu dowody (skupiając się na intuicjach) i dopiero po zrozumieniu i przećwiczeniu materiału wrócić do przestudiowania dowodów. Nauczyciel, w zależności od możliwości uczniów, może albo w ogóle pomijać dowody koncentrując się na podaniu metod i technik rachunkowych, albo wyłożyć pełny materiał lekcji (z dowodami). Uczniowie mogą także przestudiować dowody samodzielnie.

Materiały wykładowe nauczyciel może, o ile ma możliwości techniczne (komputer, ekran i projektor multimedialny), wykorzystać w trakcie lekcji do demonstracji części materiału. Na przykład realizując temat „rysowanie wykresu funkcji liniowej na podstawie jej wzoru” oraz „interpretacja współczynników funkcji liniowej”, zamiast wykonywać kilka rysunków ilustrujących wykresy funkcji liniowej w zależności od parametrów, może dokładnie omówić konstrukcję wykresu funkcji $f(x)=ax+b$, a do pokazania wpływu parametrów na położenie wykresu wykorzystać ćwiczenia e-learningowe lub symulator. W ten sposób zachęci uczniów do samodzielnego korzystania z materiałów i skróci czas poświęcony na omawianie zagadnień łatwych dla uczniów zdolnych, nie zaniedbując jednocześnie indywidualnych problemów uczniów słabszych.

„Opracowanie i wdrożenie kursu wyrównawczego z matematyki z wykorzystaniem technologii informacyjno-komunikacyjnych dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych”

Poniżej pokazano przykład symulatora – korzystając z wirtualnych suwaków ustalających wartości parametrów a i b można obserwować zmiany położenia wykresu funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ w układzie współrzędnych.

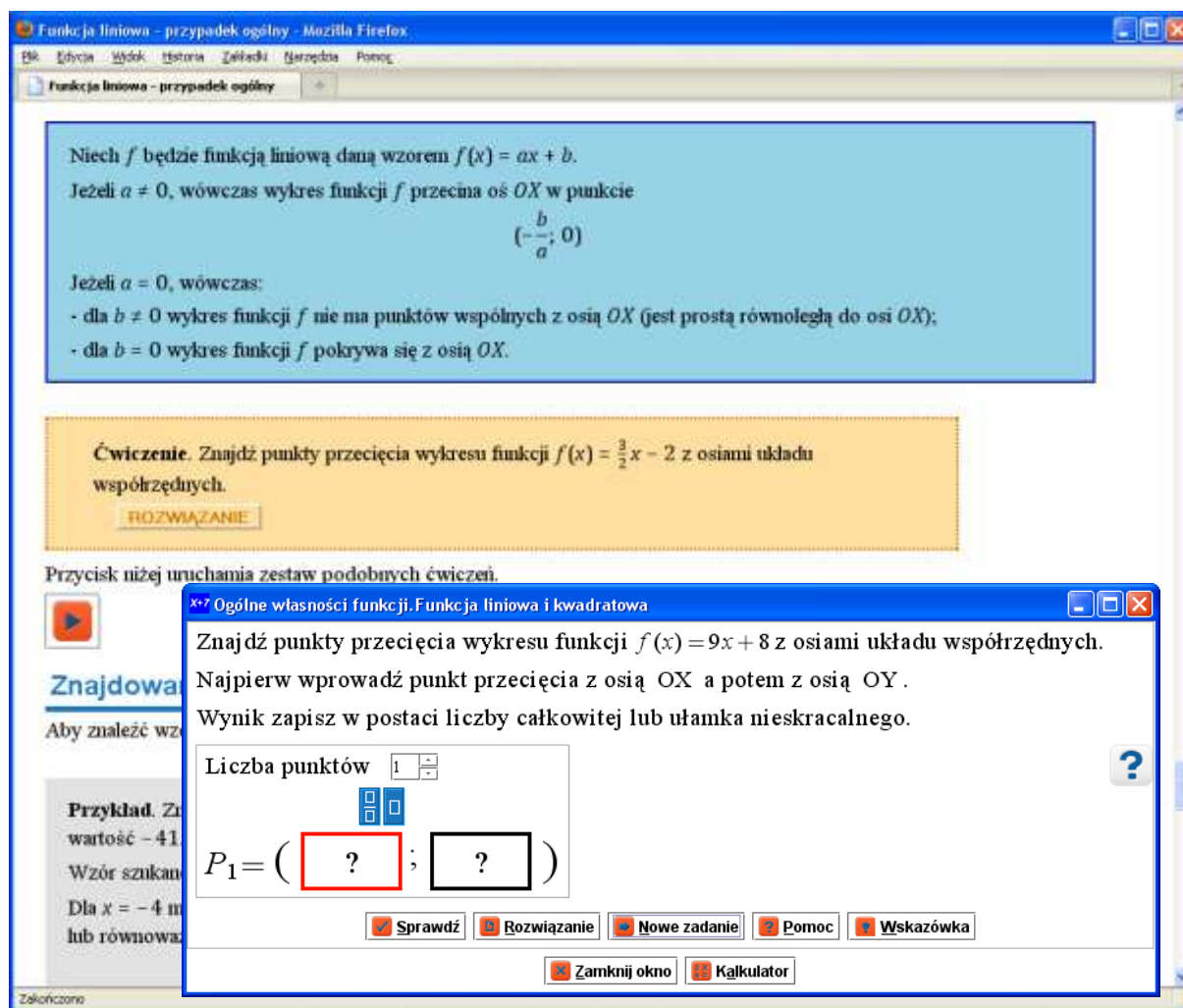


Demonstrując w czasie lekcji przykładowe rozwiązanie ćwiczenia zamieszczonego w materiałach wykładowych, nauczyciel może zachęcić uczniów, dla których jeszcze nie wszystko jest zrozumiałe, do samodzielnego wielokrotnego przećwiczenia podobnych zadań aż do uzyskania biegłości obliczeń i wyjaśnienia niezrozumiałych treści.

Interaktywne ćwiczenia są najważniejszym elementem systemu kontroli własnych postępów w nauce i systemu zbiorowej kontroli postępów. Pojedyncze ćwiczenie odpowiada jednemu typowi zadania (przykładowo: "Rozwiąż układ równań liniowych", czy "Narysuj wykres funkcji liniowej podanej wzorem").

„Opracowanie i wdrożenie kursu wyrównawczego z matematyki z wykorzystaniem technologii informacyjno-komunikacyjnych dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych”

Rysunek poniżej przedstawia przykładowy fragment strony wykładowej z uruchomionym zestawem ćwiczeń dotyczących znajdowania punktów przecięcia wykresu funkcji liniowej z osiami układu. Ćwiczenie otwiera się w nowym oknie, co umożliwia równoczesne studiowanie treści wykładu.



The screenshot shows a web browser window titled "Funkcja liniowa - przypadek ogólny - Mozilla Firefox". The main content area contains text about linear functions and their graphs. Below this, there is an exercise box with a yellow background. A smaller window titled "Ogólne własności funkcji. Funkcja liniowa i kwadratowa" is open over the main content, showing an exercise about finding the intersection points of a linear function with the coordinate axes.

Main Content Text:

Niech f będzie funkcją liniową daną wzorem $f(x) = ax + b$.
 Jeżeli $a \neq 0$, wówczas wykres funkcji f przecina oś OX w punkcie

$$\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$$

 Jeżeli $a = 0$, wówczas:
 - dla $b \neq 0$ wykres funkcji f nie ma punktów wspólnych z osią OX (jest prostą równoległą do osi OX);
 - dla $b = 0$ wykres funkcji f pokrywa się z osią OX .

Exercise Box:

Ćwiczenie. Znajdź punkty przecięcia wykresu funkcji $f(x) = \frac{3}{2}x - 2$ z osiami układu współrzędnych.
 ROZWIĄZANIE

Exercise Window:

Ogólne własności funkcji. Funkcja liniowa i kwadratowa
 Znajdź punkty przecięcia wykresu funkcji $f(x) = 9x + 8$ z osiami układu współrzędnych.
 Najpierw wprowadź punkt przecięcia z osią OX a potem z osią OY .
 Wynik zapisz w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

Liczba punktów

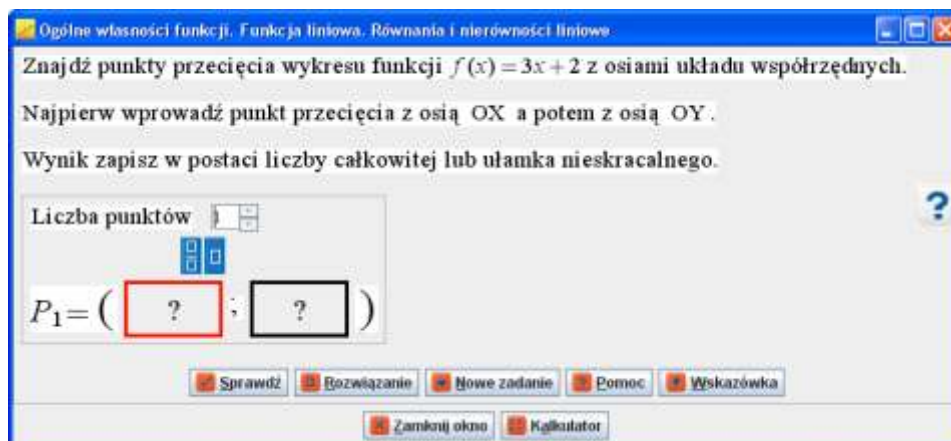
$P_1 = (\text{?} ; \text{?})$

Buttons: ☒ Sprawdź ☒ Rozwiązanie ☒ Nowe zadanie ☒ Pomoc ☒ Wskazówka

Buttons: ☒ Zamknij okno ☒ Kalkulator

Na przykładzie poniższego ćwiczenia omówimy funkcjonalność ćwiczeń występujących w kursie. Ćwiczenie dotyczy znajdowania punktów przecięcia wykresu funkcji liniowej z osiami układu współrzędnych.

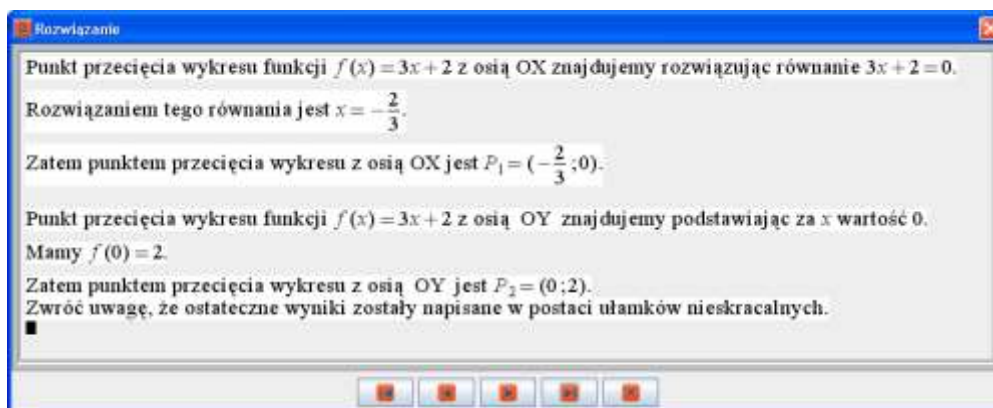
„Opracowanie i wdrożenie kursu wyrównawczego z matematyki z wykorzystaniem technologii informacyjno-komunikacyjnych dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych”



Rodzaj i liczba elementów interfejsu użytkownika w oknie z ćwiczeniem jest oczywiście zależna od konkretnego typu zadania. Wszystkie ćwiczenia są tak zaprojektowane, aby uwzględnić różne formaty wprowadzanych danych. Jeśli na przykład uczeń musi wprowadzić wynik liczbowy, to w zależności od wymaganego formatu ma do dyspozycji zestaw pól edycyjnych do postaci liczby wymiernej (wówczas ma do dyspozycji odpowiedni zestaw dwóch pól edycyjnych osobno dla licznika i mianownika), liczby w postaci dziesiętnej i/lub w postaci liczby mieszanej - tak jak to pokazano na rysunku powyżej.

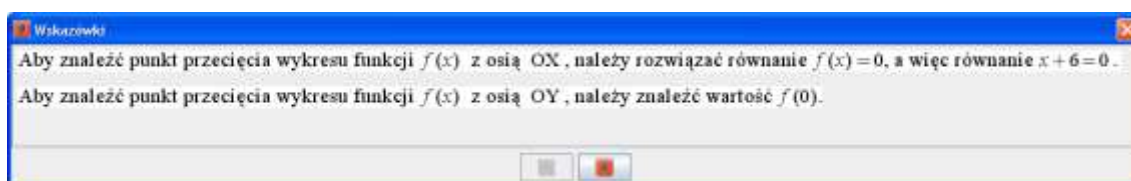
Funkcjonalność ćwiczenia obejmuje możliwości ukryte pod odpowiednimi przyciskami:

- **Sprawdź** - dostęp do natychmiastowej oceny poprawności wprowadzonej odpowiedzi,
- **Rozwiązanie** - prezentacja krok po kroku prawidłowego rozwiązania,

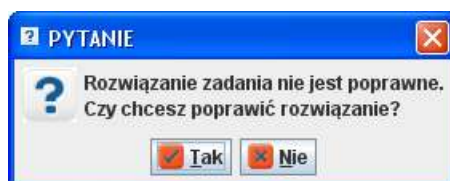


„Opracowanie i wdrożenie kursu wyrównawczego z matematyki z wykorzystaniem technologii informacyjno-komunikacyjnych dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych”

- **Nowe zadanie** - generowanie kolejnego zadania tego typu (z losowymi parametrami),
- **Pomoc** - podręczna pomoc dotycząca obsługi elementów interfejsu użytkownika,
- **Wskazówka** – wskazówka dotycząca sposobu rozwiązania zadania.



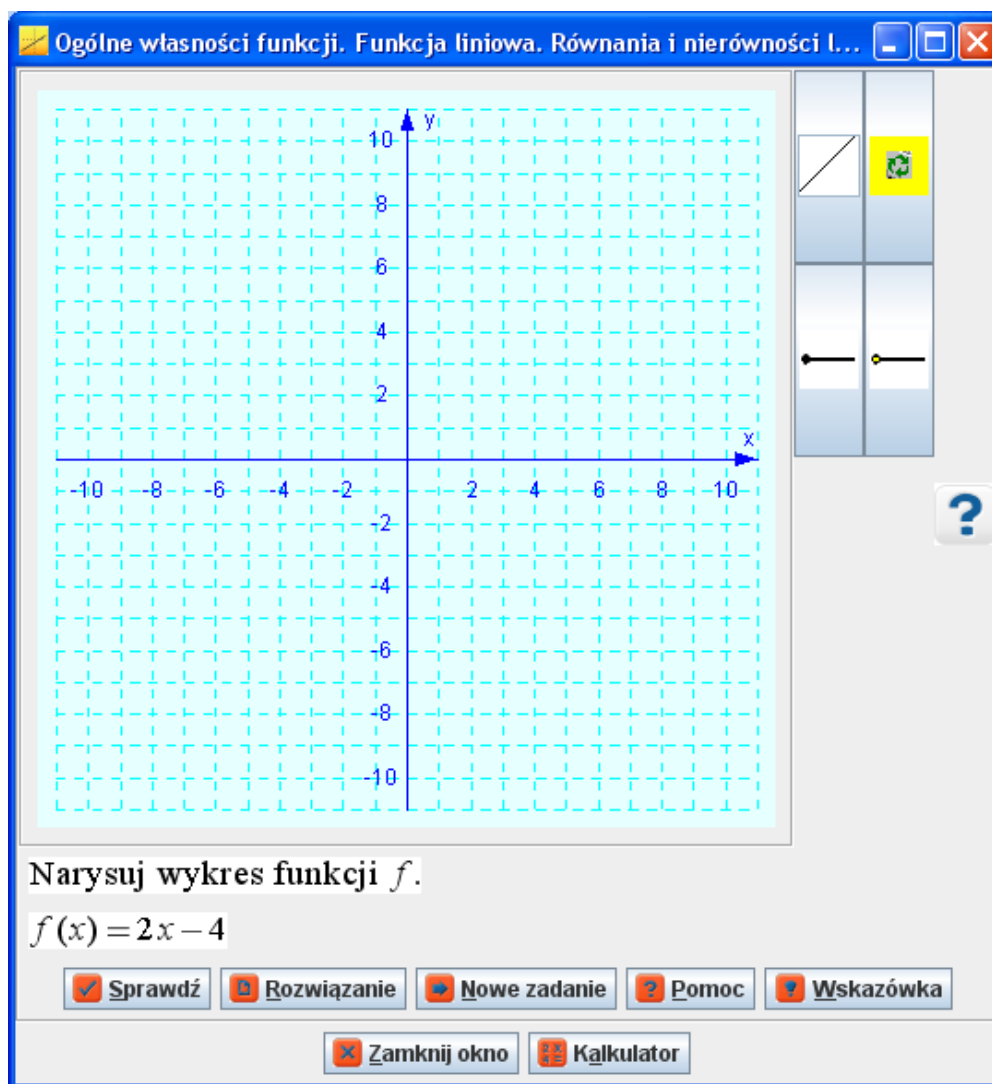
Oczywiście skorzystanie ze wskazówki powoduje, że uczeń może otrzymać za rozwiązanie tylko część punktów. Skorzystanie z prezentacji prawidłowego rozwiązania pozbawia ucznia możliwości oceny. Jednak uczeń może wygenerować kolejne zadania tego samego typu z innymi danymi. Ponadto uczeń ma szansę na poprawienie rozwiązania, jeśli okaże się ono błędne (uczeń może poprawiać swoje rozwiązanie bez ograniczeń liczby prób).



Możliwość porównania własnego rozwiązania z rozwiązaniem wzorcowym krok po kroku (także z wykorzystaniem wskazówek) jest metodycznie ważne jako wzmacniające pozytywne nastawienie do pracy po niewielkich nawet osiągnięciach („już to potrafię”).

Rysunek poniżej pokazuje wygląd okna z ćwiczeniem dotyczącym rysowania wykresu funkcji liniowej podanej wzorem.

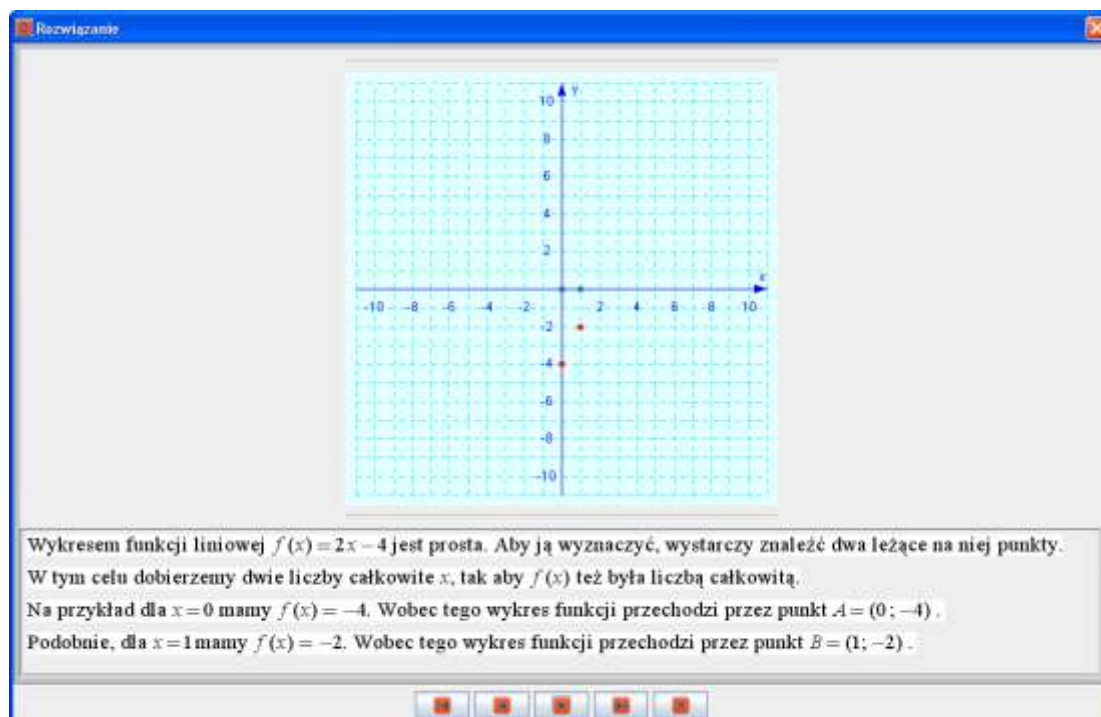
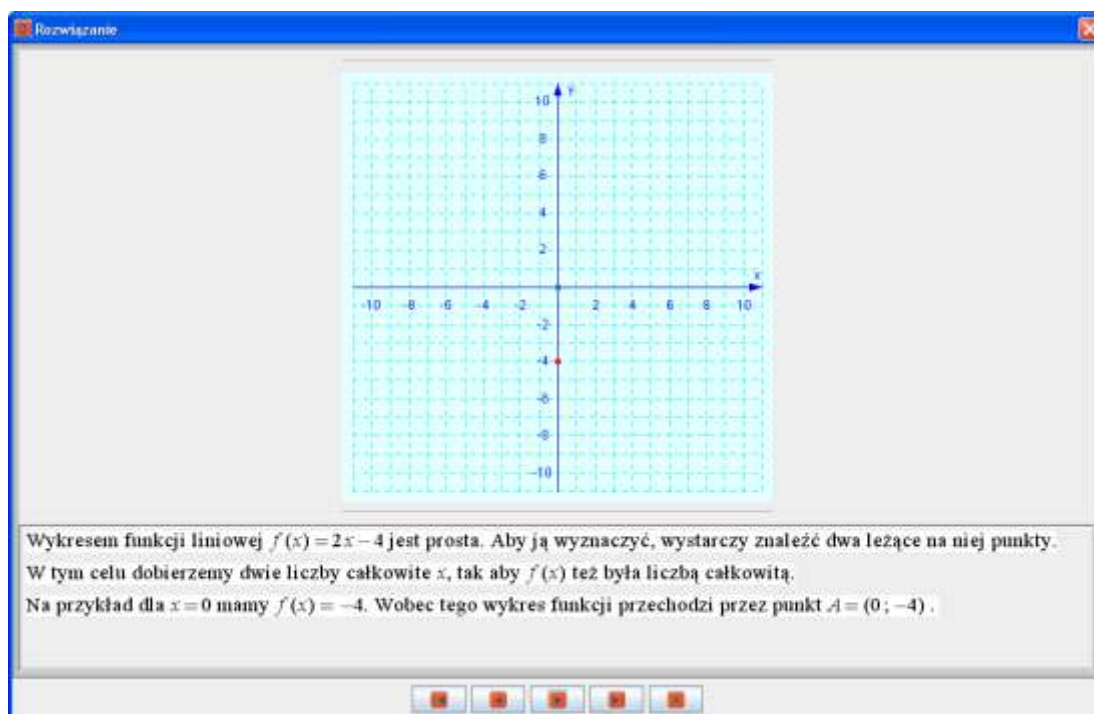
„Opracowanie i wdrożenie kursu wyrównawczego z matematyki z wykorzystaniem technologii informacyjno-komunikacyjnych dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych”



W zadaniach, w których rozwiązanie polega na wykonaniu rysunku, uczeń otrzymuje do dyspozycji wirtualne narzędzia graficzne służące do rysowania rozmaitych obiektów geometrycznych. Narzędzia takie widoczne są w prawej części okna na rysunku powyżej.

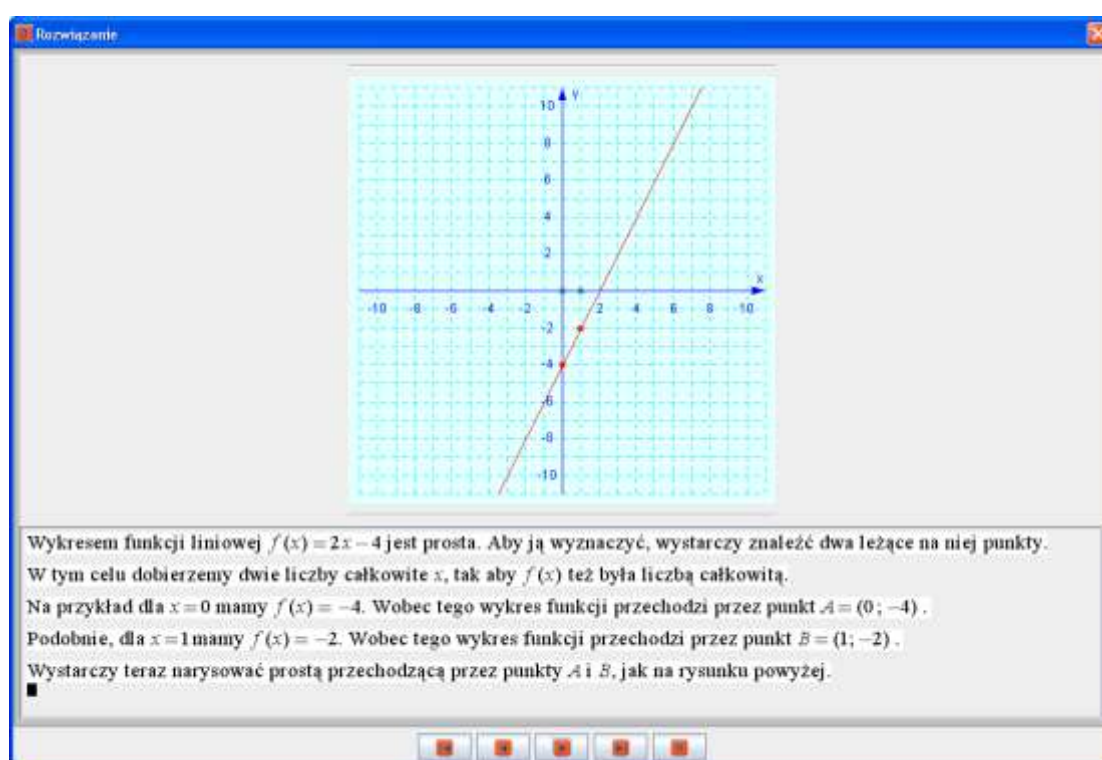
Kolejne rysunki przedstawiają rozwiązanie zadania przedstawione krok po kroku, co pozwala uczniowi na skoncentrowanie uwagi na kolejnych etapach z możliwością sprawdzania własnego rozwiązania etapowo.

„Opracowanie i wdrożenie kursu wyrównawczego z matematyki z wykorzystaniem technologii informacyjno-komunikacyjnych dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych”



„Opracowanie i wdrożenie kursu wyrównawczego z matematyki z wykorzystaniem technologii informacyjno-komunikacyjnych dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych”

Rozwiązanie sugeruje wyznaczenie dwóch punktów, przez które przechodzi prosta, w taki sposób, aby obie ich współrzędne były całkowite (co ułatwia wykonanie rysunku). Wskazuje takie przykładowe dwa punkty i podaje konstrukcję prostej, ale uczeń oczywiście może wskazać inne punkty niż sugerowane w rozwiązaniu – przy automatycznym ocenianiu poprawności rozwiązania istotna jest zgodność wykresu funkcji z jej wzorem.



Poza umieszczonymi w tekście wykładu zestawami ćwiczeń poświęconych pojedynczemu typowi zadania, uczeń otrzymuje osobne strony zawierające ćwiczenia dotyczące poszczególnych partii materiału. Odpowiadają one tym częściom klasycznego podręcznika, które zawierają zadania dotyczące pojedynczego tematu w książce. Podobnie, jak materiał wykładowy, ćwiczenia dotyczące zagadnień obowiązujących w programie rozszerzonym są wyraźnie zaznaczone.

„Opracowanie i wdrożenie kursu wyrównawczego z matematyki z wykorzystaniem technologii informacyjno-komunikacyjnych dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych”



Elektroniczne sprawdziany

Pojedyncze ćwiczenia można łączyć w sprawdziany imitujące klasówki z wybranej partii materiału. W skład sprawdzianu wchodzi kilka lub kilkanaście zadań. Na etapie projektowania sprawdzianu można ustalać wiele parametrów jego funkcjonowania: czas trwania sprawdzianu, punktację poszczególnych zadań, dobór zadań spośród dostępnych w kursie typów, dostępność (lub brak) wirtualnego kalkulatora, liczba dopuszczalnych prób poprawiania błędnych rozwiązań itp. Zadania mogą być dodatkowo permutowane.

Zadania można dobierać bardzo elastycznie pod kątem typów zagadnień, których dotyczą. Można zażądać od sprawdzianu, aby dane zadanie dotyczyło zawsze jednego wybranego za-

gadnienia (na przykład "zadanie pierwsze ma polegać na rozwiązaniu układu równań"). Można jednak również zażądać, aby dane zadanie dotyczyło jednego z czterech zagadnień (z zadaniem z góry prawdopodobieństwem pojawienia się każdego zagadnienia).

Ponieważ dane do każdego zadania są dobierane losowo, więc dwóch różnych uczniów praktycznie zawsze otrzymuje do rozwiązania zadania z różnymi danymi. Co więcej, dzięki możliwości losowego doboru samych typów zadań, dwóch uczniów może otrzymać zestawy zadań różniących się nie tylko danymi, ale i tematyką.

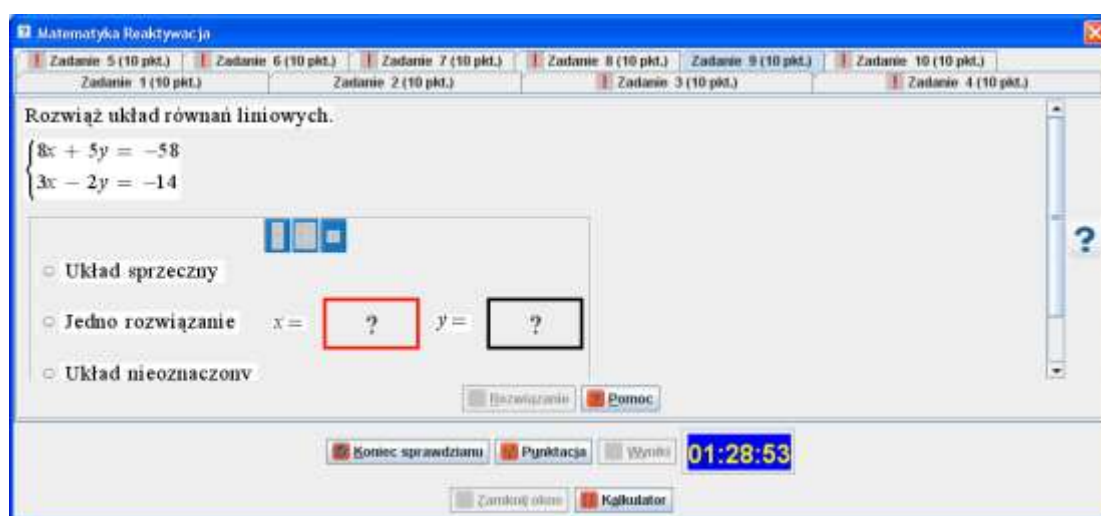
Rysunek poniżej przedstawia zadanie 2 (u góry ekranu widać zakładki zadań) z przykładowego sprawdzianu złożonego z 10 zadań.

The screenshot shows a window titled "Matematyka Reaktywacja". At the top, there are tabs for tasks 1 through 10, each worth 10 points. Task 2 is currently selected. The main text of the task reads: "Wsiadając do taksówki Krzysiek płaci za wejście do niej 5,8 zł oraz 2,2 zł za każdy przejechany kilometr. Napisz wzór funkcji opłata (s), opisującej ile musi zapłacić Krzysiek za przejazd trasą o długości s km. Następnie oblicz, jaki dystans może przejechać taksówką Krzysiek, jeśli ma 19 zł. Wynik zapisz w postaci liczby dziesiętnej." Below the text, there are input fields for the formula: "opłata (s) = [?] s + [?]" and "dystans = [?] km". At the bottom, there are buttons for "Rozwiązanie", "Pomoc", "Koniec sprawdzianu", "Punktacja", "Wyniki", "Zamknij okno", and "Kalkulator". A timer in the bottom right corner shows "01:29:32".

Uczeń musi rozwiązać zadania w określonym czasie – na ekranie widoczny jest czas do zakończenia sprawdzianu. Dostęp do prawidłowych rozwiązań zadań jest zablokowany do czasu zakończenia sprawdzianu (przycisk Rozwiązanie jest nieaktywny) a uzyskanie wskazówek w ogóle jest wyłączone.

W przykładowym sprawdzianie uczeń rozwiązuje zadanie 2 na kartce a następnie wprowadza wyniki w dostępne okna edycyjne. W zadaniu 9 (rysunek poniżej) uczeń rozwiązuje układ równań liniowych i w zależności od liczby rozwiązań zaznacza typ rozwiązania i ewentualnie

podaje rozwiązanie, gdy jest ono jedyne. Takie jednoznaczne rozwiązania są możliwe do automatycznego kontrolowania ich poprawności. W układzie nieoznaczonym, z powodu różnych możliwych parametryzacji, podanie rozwiązania nie jest wymagane (ocena automatyczna jest utrudniona). Istnieje jednak również e-ćwiczenie polegające na podaniu rozwiązania takiego układu w postaci graficznej.



Po przedłożeniu sprawdzianu do oceny przez ucznia (lub po upływie czasu przeznaczonego na rozwiązanie) system sprawdza wstępnie poprawność rozwiązań i - w zależności od ustalenia odpowiedniego parametru - pozwala uczniowi na jednokrotną lub wielokrotną próbę poprawienia tych rozwiązań, które są błędne. Na ogół uczeń otrzymuje jedną lub dwie takie szanse.

Wyniki ucznia są oceniane natychmiast po przedłożeniu sprawdzianu do oceny. Uczeń może od tego momentu studiować prezentacje prawidłowych rozwiązań (przycisk Rozwiązanie staje się aktywny) i dzięki temu przeanalizować własne błędy.

Technologia sprawdzianów umożliwia dodatkowo kontrolę tożsamości zdającego i automatyczny zapis wyników do bazy danych. Uwzględnione są przy tym wszystkie wymogi bezpiecznego przesyłania danych.

Materiały elektroniczne kursu są tak zorganizowane, że w końcu każdego rozdziału umieszczany jest sprawdzian z zakresu materiału objętego tym rozdziałem. Sprawdzian taki pełni

rolę treningową. Kolejne uruchomienia sprawdzianu prowadzą do zmieniających się pod względem tematyki zestawów zadań. W ten sposób cały materiał objęty rozdziałem można kilkakrotnie przećwiczyć w warunkach imitujących prawdziwą klasówkę.

Szczegóły funkcjonowania sprawdzianów

Poszczególne e-zadania można łączyć w sprawdziany pozwalające na efektywne i miarodajne badanie stopnia opanowania wybranego zakresu materiału przez ucznia. Zadania składające się na sprawdzian mogą być przedstawione uczniowi w określonej z góry kolejności lub dodatkowo permutowane. Projektant-nauczyciel ma możliwość sterowania czasem trwania sprawdzianu, liczbą zadań w sprawdzianie, ich stopniem trudności oraz punktacją. Dodatkowo sprawdziany są wyposażone w niżej wymienione mechanizmy istotnie zwiększające funkcjonalność:

- Typy zadań mogą być zdeterminowane lub częściowo zrandomizowane. To ostatnie oznacza, że można zadać prawdopodobieństwa pojawienia się w sprawdzianie zadań określonego typu. W połączeniu z losowym generowaniem danych do zadań umożliwia to generowanie sprawdzianów, w których dwie różne osoby nie otrzymają dwóch identycznych zestawów zadań.
- Bezpośrednio po zakończeniu sprawdzianu (bądź przez ucznia, bądź wskutek upływu czasu przeznaczonego na sprawdzian) uczeń ma dostęp do prezentacji prawidłowego rozwiązania w celu skonfrontowania z własnym rozwiązaniem. Warto wspomnieć, że mechanizm ten był powszechnie chwalony przez studentów Politechniki Wrocławskiej.
- Sprawdzian można zaprojektować do pracy w trybie ćwiczebnym lub w trybie administracyjnym. Tryb ćwiczebny pozwala uczniowi na wielokrotne zdawanie sprawdzianu (oczywiście z zachowaniem elementów imitujących prawdziwe warunki egzaminacyjne, na przykład niedostępność rozwiązań przed zakończeniem sprawdzianu czy ograniczenie czasowe). Tryb administracyjny włącza mechanizmy identyfikacji ucznia oraz zapisu wyników do bazy danych.
- Bezpośrednio po przedstawieniu sprawdzianu do oceny kontrolowana jest kompletność rozwiązania każdego z zadań: uczeń, który przez przeoczenie zapomniał wpisać otrzymane rozwiązanie w jedno lub więcej pól edycyjnych, jest natychmiast ostrzegany przez pro-

gram i ma możliwość powrotu do sprawdzianu. Mechanizm ten pozwala uczniowi uzupełniać rozwiązania „bez końca”.

Sprawdzian zawiera mechanizm wstępnej kontroli poprawności rozwiązań. Zdarza się, że uczeń rozwiąże zadanie poprawnie, natomiast wskutek pomyłki wpisze w oknie sprawdzianu wynik inny niż faktycznie otrzymany. Po przedłożeniu sprawdzianu i ewentualnym uzupełnieniu niekompletnych rozwiązań uczeń jest dodatkowo informowany (jeszcze przed wystawieniem właściwej oceny), które zadania nie są rozwiązane poprawnie. W zależności od konfiguracji sprawdzianu przez nauczyciela uczeń otrzymuje określoną liczbę „szans” poprawiania rozwiązań. Istnieje oczywiście możliwość takiej konfiguracji, aby uczeń mógł poprawiać wyniki „w nieskończoność”. Z oczywistych powodów nie jest ona stosowana w sprawdzianach stanowiących elementy formalnego systemu ocen (klasówka) - może jednak być zastosowana na przykład w sprawdzianach ćwiczebnych.

Potrzebę wprowadzenia mechanizmów kontroli kompletności i wstępnej kontroli poprawności rozwiązań autorzy zauważyli podczas pierwszej edycji kursu Algebra z geometrią analityczną na Politechnice Wrocławskiej. Studenci skarżyli się często, że w warunkach stresu egzaminacyjnego nie są w stanie uniknąć pomyłek przy wprowadzaniu do komputera dużej liczby danych, co skutkuje otrzymaniem niższej oceny mimo prawidłowo rozwiązanego „na papierze” zadania.

Podsumowanie

Z pewnością wśród zalet e-learningu wyliczyć można:

- Ułatwienie dostępu do edukacji.
- Personalizacja procesu uczenia się — w zależności od zdolności i przygotowania uczeń poświęca na naukę tyle czasu, ile potrzebuje. Pozwala to na szybkie i tanie uzupełnienie zaległości w edukacji. Studiujący uczy się w dogodnym dla siebie miejscu i czasie.
- Nauczanie zagadnień, które mogą być zalgorytmizowane i wykonywane przez komputer, staje się bardziej efektywne. Dzięki automatycznym ćwiczeniom uczeń może sam opanować standardowe techniki a nauczyciel może na zajęciach skupić się na trudniejszych zagadnieniach.
- Dobrze przygotowane e-kursy pozwalają na zautomatyzowanie procesu sprawdzania wiedzy. Rozwiązując e-sprawdzian uczeń natychmiast po jego zakończeniu zna wyniki oraz ma przedstawione prawidłowe rozwiązania. Nauczyciel jest zwolniony z poprawiania standardowych zadań a wyniki sprawdzianów (egzaminów) są natychmiast zapisane w bazie danych.
- Ciągłe stymulowanie do ćwiczenia omawianych zagadnień z dużym wkładem pracy własnej ucznia powoduje, że wyniki egzaminacyjne uzyskiwane przez uczestników e-kursu są znacznie lepsze od rezultatów uzyskiwanych w systemie tradycyjnym.

Należy oczekiwać, że zalety wspomagania e-learningowego, które ujawniły się w e-kursach Algebry z geometrią analityczną w Politechnice Wrocławskiej, potwierdzą się także w praktyce uczenia matematyki w szkołach ponadgimnazjalnych, wykazując znaczną przydatność tej formy wspomagania dydaktyki.

Korzystając z możliwości, jakie daje e-learning, uczeń:

- jest zmuszony do samodzielnego rozwiązywania zadań - nie przepisuje rozwiązań z tablicy;
- może sam ustalać liczbę rozwiązywanych zadań do chwili gdy uzna, że materiał opanował;
- ma możliwość osiągnięcia biegłości w standardowych sprawnościach typu rachunkowego;
- może łatwiej zrozumieć pojęcia i relacje między nimi.

„Opracowanie i wdrożenie kursu wyrównawczego z matematyki z wykorzystaniem technologii
informatyczno-komunikacyjnych dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych”

Korzyści odnosi także nauczyciel. E-learning bowiem

- ułatwia aktywizację uczniów;
- daje możliwość wykształcenia podstawowych kompetencji u uczniów słabych (o małych zainteresowaniach matematycznych bądź z trudnościami);
- daje możliwość rozwinięcia zainteresowań matematycznych u uczniów zdolnych,
- pozwala dobrze zaplanować i wykorzystać czas na naukę uczniów;
- pozwala zapobiec problemom związanym z dominowaniem uczniów wolniej pracujących (i powodowania ich bierności) przez uczniów zdolnych.

Bibliografia

1. Gucewicz-Sawicka, *Podstawowe zagadnienia dydaktyki matematyki*, PWN, Warszawa, 1982.
2. P.Kajetanowicz, J.Wierzejewski, [*E-lesson on Quadratic Function. A step Towards an Online Remedial Math Course*](#), Proceedings, 5th International Conference Virtual University, Bratislava, Slovakia, 2004.
3. P.Kajetanowicz, J.Wierzejewski, [*E-learning in College Mathematics – an Online Course in Algebra with Automatic Knowledge Assessment*](#), Proceedings, 6th International Conference Virtual University, Bratislava, Slovakia, 2005.
4. P.Kajetanowicz, J.Wierzejewski, *Jak automatyzować sprawdziany wiedzy z matematyki*, [*XII Ogólnopolska Konferencja Nauczania Matematyki w Uczelniach Technicznych*](#), Puck, 2006.
5. Z.Krygowska, *Zarys dydaktyki matematyki*, tom 1-3, WSiP, Warszawa, 1977.
6. W.Nowak, *Konwersatorium z dydaktyki matematyki*, PWN, Warszawa, 1989.
7. W.W. Sawyer, *Matematyka nauką przyjemną*, Wiedza Powszechna, Warszawa, 1974.
8. S.Turnau, *Wykłady o nauczaniu matematyki*, PWN, Warszawa, 1990.
9. <http://www.awans.net/strony/matematyka/gorajewska/gorajewska1.pdf>
10. <http://www.reformaprogramowa.men.gov.pl/dla-nauczycieli/edukacja-matematyczna-i-techniczna>

Dodatek

Podstawa programowa 23 grudnia 2008r - treści kształcenia matematyki dla szkół ponadgimnazjalnych

1. Liczby rzeczywiste. W zakresie podstawowym uczeń:

- 1) przedstawia liczby rzeczywiste w różnych postaciach (np. ułamka zwykłego, ułamka dziesiętnego, okresowego, z użyciem symboli pierwiastków, potęg);
- 2) oblicza wartości wyrażeń arytmetycznych (wymiernych);
- 3) posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosuje prawa działań na pierwiastkach;
- 4) oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych;
- 5) wykorzystuje podstawowe własności potęg (również w zagadnieniach związanych z innymi dziedzinami wiedzy, np. fizyką, chemią, informatyką);
- 6) wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym;
- 7) oblicza błąd bezwzględny i błąd względny przybliżenia;
- 8) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej;
- 9) wykonuje obliczenia procentowe, oblicza podatki, zysk z lokat (również złożonych na procent składany i na okres krótszy niż rok).

W zakresie rozszerzonym uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

- 1) wykorzystuje pojęcie wartości bezwzględnej i jej interpretację geometryczną, zaznacza na osi liczbowej zbiory opisane za pomocą równań i nierówności typu: $|x - a| = b$, $|x - a| < b$, $|x - a| \geq b$,
- 2) stosuje w obliczeniach wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu.

2. Wyrażenia algebraiczne. W zakresie podstawowym uczeń:

- 1) używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$.

W zakresie rozszerzonym uczeń ponadto:

- 1) używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^3$ oraz $a^3 \pm b^3$;
- 2) dzieli wielomiany przez dwumian $ax + b$;
- 3) rozkłada wielomian na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia lub wyłączając wspólny czynnik przed nawias;
- 4) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany;

- 5) wyznacza dziedzinę prostego wyrażenia wymiernego z jedną zmienną, w którym w mianowniku występują tylko wyrażenia dające się łatwo sprowadzić do iloczynu wielomianów liniowych i kwadratowych;
- 6) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli wyrażenia wymierne; rozszerza i (w łatwych przykładach) skraca wyrażenia wymierne.

3. Równania i nierówności. W zakresie podstawowym uczeń:

- 1) sprawdza, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania lub nierówności;
- 2) wykorzystuje interpretację geometryczną układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi;
- 3) rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą;
- 4) rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą;
- 5) rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą;
- 6) korzysta z definicji pierwiastka do rozwiązywania równań typu $x^3 = -8$;
- 7) korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x+1)(x-7) = 0$;
- 8) rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych,

W zakresie rozszerzonym uczeń ponadto:

- 1) stosuje wzory Viète’a;
- 2) rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem;
- 3) rozwiązuje układy równań, prowadzące do równań kwadratowych;
- 4) stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x - a$;
- 5) stosuje twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych;
- 6) rozwiązuje równania wielomianowe dające się łatwo sprowadzić do równań kwadratowych;
- 7) rozwiązuje łatwe nierówności wielomianowe;
- 8) rozwiązuje proste nierówności wymierne;
- 9) rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, o poziomie trudności nie wyższym niż: $|x+1|-2=3$, $|x+3|+|x-5|>12$.

4. Funkcje. W zakresie podstawowym uczeń:

- 1) określa funkcje za pomocą wzoru, tabeli, wykresu, opisu słownego;
- 2) oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu. Posługuje się poznanymi metodami rozwiązywania równań do obliczenia, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje daną wartość;
- 3) odczytuje z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak; punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą);

- 4) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x + a)$, $y = f(x) + a$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$;
- 5) rysuje wykres funkcji liniowej, korzystając z jej wzoru;
- 6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie;
- 7) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej;
- 8) szkicuje wykres funkcji kwadratowej, korzystając z jej wzoru;
- 9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie;
- 10) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje);
- 11) wyznacza wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym;
- 12) wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym);
- 13) szkicuje wykres funkcji $f(x) = a/x$ dla danego a , korzysta ze wzoru i wykresu tej funkcji do interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi;
- 14) szkicuje wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw;
- 15) posługuje się funkcjami wykładniczymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym.

W zakresie rozszerzonym uczeń ponadto:

- 1) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = |f(x)|$, $y = cf(x)$, $y = f(cx)$;
- 2) szkicuje wykresy funkcji logarytmicznych dla różnych podstaw;
- 3) posługuje się funkcjami logarytmicznymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym;
- 4) szkicuje wykres funkcji określonej w różnych przedziałach różnymi wzorami; odczytuje własności takiej funkcji z wykresu.

5. Ciągi. W zakresie podstawowym uczeń:

- 1) wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;
- 2) bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny;
- 3) stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego;
- 4) stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

W zakresie rozszerzonym uczeń ponadto:

- 1) wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem rekurencyjnym;
- 2) oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $1/n$, $1/n^2$ oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów;
- 3) rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumy.

6. Trygonometria. W zakresie podstawowym uczeń:

- 1) wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180° ;
- 2) korzysta z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych (odczytanych z tablic lub obliczonych za pomocą kalkulatora);
- 3) oblicza miarę kąta ostrego, dla której funkcja trygonometryczna przyjmuje daną wartość (miarę dokładną albo – korzystając z tablic lub kalkulatora – przybliżoną);
- 4) stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$ oraz $\sin (90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$;
- 5) znając wartość jednej z funkcji: sinus lub cosinus, wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego.

W zakresie rozszerzonym uczeń ponadto:

- 1) stosuje miarę łukową, zamienia miarę łukową kąta na stopniową i odwrotnie;
- 2) wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens dowolnego kąta o mierze wyrażonej w stopniach lub radianach (przez sprowadzenie do przypadku kąta ostrego);
- 3) wykorzystuje okresowość funkcji trygonometrycznych;
- 4) posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych (np. gdy rozwiązuje nierówności typu $\sin x > a$, $\cos x \leq a$, $\operatorname{tg} x > a$);
- 5) stosuje wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów;
- 6) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne typu $\sin 2x = \frac{1}{2}$, $\sin 2x + \cos x = 1$, $\sin x + \cos x = 1$, $\cos 2x < \frac{1}{2}$.

7. Planimetria. W zakresie podstawowym uczeń:

- 1) stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym;
- 2) korzysta z własności stycznej do okręgu i własności okręgów stycznych;
- 3) rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów;
- 4) korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi.

W zakresie rozszerzonym uczeń ponadto:

- 1) stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu;
- 2) stosuje twierdzenie Talesa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa do obliczania długości odcinków i ustalania równoległości prostych;
- 3) znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych w jednokładności (odcinka, trójkąta, czworokąta itp.);

- 4) rozpoznaje figury podobne i jednokładne; wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) ich własności;
- 5) znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów.

8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. W zakresie podstawowym uczeń:

- 1) wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej);
- 2) bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych;
- 3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt;
- 4) oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych;
- 5) wyznacza współrzędne środka odcinka;
- 6) oblicza odległość dwóch punktów;
- 7) znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych (punktu, prostej, odcinka, okręgu, trójkąta itp.) w symetrii osiowej względem osi układu współrzędnych i symetrii środkowej względem początku układu.

W zakresie rozszerzonym uczeń ponadto:

- 1) interpretuje graficznie nierówność liniową z dwiema niewiadomymi oraz układy takich nierówności;
- 2) bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań ogólnych;
- 3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci ogólnej i przechodzi przez dany punkt;
- 4) oblicza odległość punktu od prostej;
- 5) posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ oraz opisuje koła za pomocą nierówności;
- 6) wyznacza punkty wspólne prostej i okręgu;
- 7) oblicza współrzędne oraz długość wektora; dodaje i odejmuje wektory oraz mnoży je przez liczbę. Interpretuje geometrycznie działania na wektorach;
- 8) stosuje wektory do opisu przesunięcia wykresu funkcji.

9. Stereometria. W zakresie podstawowym uczeń:

- 1) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi, itp.), oblicza miary tych kątów;
- 2) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami), oblicza miary tych kątów;
- 3) rozpoznaje w walcach i w stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą), oblicza miary tych kątów;
- 4) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami;

- 5) określa, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną;
- 6) stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości.

W zakresie rozszerzonym uczeń ponadto:

- 1) określa, jaką figurą jest dany przekrój sfery płaszczyzną;
- 2) określa, jaką figurą jest dany przekrój graniastopuła lub ostrosłupa płaszczyzną.

10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka.

W zakresie podstawowym uczeń:

- 1) oblicza średnią ważoną i odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretuje te parametry dla danych empirycznych;
- 2) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania;
- 3) oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

W zakresie rozszerzonym uczeń ponadto:

- 1) wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych;
- 2) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe;
- 3) korzysta z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym.

11. Rachunek różniczkowy. W zakresie rozszerzonym uczeń:

- 1) oblicza granice funkcji (i granice jednostronne), korzystając z twierdzeń o działaniach na granicach i z własności funkcji ciągłych;
- 2) oblicza pochodne funkcji wymiernych;
- 3) korzysta z geometrycznej i fizycznej interpretacji pochodnej;
- 4) korzysta z własności pochodnej do wyznaczenia przedziałów monotoniczności funkcji;
- 5) znajduje ekstrema funkcji wielomianowych i wymiernych;
- 6) stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.