Kurs moodle

Dział: Funkcje wykładnicze i logarytmiczne - zastosowanie w fizyce

SŁOWNICZEK

Potęgowanie – szczególny przypadek mnożenia.

Notacja wykładnicza - używana do skrócenia zapisu wielocyfrowych liczb lub liczb o wielu miejscach po przecinku. W tym celu używamy potęgi liczby 10.

Amplituda – jest to największe wychylenie z położenia równowagi.

Asymptota – prosta, która ogranicza wykres funkcji. Wykres danej funkcji zbliża się do tej prostej, ale się z nią nie styka, ani nie może wyjść poza tą prostą.

Logarytm naturalny ln b – logarytm przy podstawie e, tzn.: $\log_e b$ **.**

Logarytm dziesiętny log b – logarytm przy podstawie 10, tzn.: $\log_{10} b$ **.**

Skala logarytmiczna – rodzaj skali pomiarowej, w której mierzona wartość wielkości fizycznej jest przekształcana za pomocą logarytmu.

Funkcja rosnąca – wraz ze wzrostem argumentów x wartości funkcji y rosną

Funkcja malejąca – wraz ze wzrostem argumentów x wartości funkcji y maleją

Funkcja stała – dla wszystkich argumentów x wartości funkcji y są takie same

CELE

1. **Cele główne:**

1. Zapoznanie ucznia z działaniami na potęgach, definicjami: logarytmu, funkcji potęgowej i logarytmicznej
2. Wykorzystanie wiadomości dotyczących potęg, logarytmów, funkcji potęgowej i logarytmicznej w zadaniach z zakresu fizyki

2. **Cele operacyjne (szczegółowe)**

Poziom wiadomości:

Uczeń:

1. Zna: działania na potęgach, pojęcie notacji wykładniczej, definicję i podstawowe twierdzenia dotyczące logarytmu, pojęcie funkcji potęgowej i logarytmicznej
2. Zna definicje dziedziny funkcji, zbioru wartości, miejsca zerowego, monotoniczności

3. Zna zależności dotyczące przekształcania wykresów funkcji
4. Rozumie pojęcie omawiane w danym zadaniu
5. Zauważa korelację między matematyką a fizyką

Poziom umiejętności:

Uczeń:

1. Korzysta z: działań na potęgach, notacji wykładniczej, definicji logarytmu, własności funkcji potęgowej i logarytmicznej, wykorzystuje zamianę jednostek do rozwiązywania zadań
2. Potrafi dokonać podstawowej analizy wykresu funkcji tzn. wyznaczyć dziedzinę funkcji, zbiór wartości, miejsca zerowe, monotoniczność i punkty przecięcia z osiami układu współrzędnych
3. Dokonuje przekształceń wzorów zarówno matematycznych jak fizycznych
4. Kształci umiejętność porządkowania i segregowania informacji
5. Prowadzi proste rozumowanie matematyczne i fizyczne
6. Poprawnie interpretuje rozwiązania zadań

3. **Cele wychowawcze**

1. Uczeń sprawnie planuje i organizuje pracę własną
2. Kształtowanie ciekawości poznawczej
3. Rozwijanie potrzeby dbania o własny rozwój

<u>**Lekcja 1**</u>

Temat: Potęga o wykładniku rzeczywistym- przypomnienie wiadomości

Potęgowania można zapisać przy pomocy mnożenia, gdyż wszystkie czynniki są jednakowe:

$$a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$$ *n – czynników w mnożeniu*

Działania na potęgach, gdzie $a \neq 0, b \neq 0, m \in C, n \in C, k \in C$

1. $a^m \cdot a^n = a^{n+m}$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

6. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-k} = \left(\frac{b}{a}\right)^k$

7. $a^{-k} = \left(\frac{1}{a}\right)^k$

8. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

9. $a^0 = 1$

Przykłady

$$2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{2+3} = \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}$$

$$3^{-3} \cdot 3^2 = 3^{-3+2} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$2^3 \div 2^2 = 2^{3-2} = 2^1 = 2$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \div \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$$

$$7^2 \cdot 4^2 = (7 \cdot 4)^2 = 28^2 = 784$$

$$\left(\frac{6}{7}\right)^2 = \frac{6^2}{7^2} = \frac{36}{49}$$

$$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4^1} = \sqrt{4} = 2$$

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$$

W fizyce często mamy do czynienia z liczbami bardzo małymi jak i bardzo dużymi. Zapisywanie ich w tradycyjnej formie, czyli używając kilkunastu lub kilkudziesięciu zer jest uciążliwe, a zarazem prowadzi do częstych pomyłek. Aby uniknąć tego typu sytuacji stosujemy zapis potęgowy korzystając z poniższych zależności.

Przedrostek	**skrót**	**Liczba przez którą mnożymy jednostkę**	**Przykład**
tera	T	x 1 000 000 000 000 = 10^{12}	Tm (terametr)
giga	G	x 1 000 000 000 = 10^{9}	GHz (gigahertz)
mega	M	x 1 000 000 = 10^{6}	MW (megawat)
kilo	k	x 1000 = 10^{3}	kg (kilogram)
hekto	h	x 100 = 10^{2}	hl (hektolitr)
deka	da	x 10	dag (dekagram)
decy	d	x 0, 1 = 10^{-1}	dm (decymetr)
centy	c	x 0, 01 = 10^{-2}	cm (centymetr)
mili	m	x 0, 001 = 10^{-3}	mg (miligram)
mikro	μ	x 0, 000 001 = 10^{-6}	μm (mikrometr)
nano	n	x 0, 000 000 001 = 10^{-9}	nm (nanometr)
piko	p	x 0,000 000 000 001 = 10^{-12}	pm (pikometr)

<u>Przykłady zamiany jednostek:</u>

20 min = 20 x 60 s =1 20 s

2 h = 2 x 60 min = 2 x 60 x 60 s= 7200 s

345 mm = 345 x 0,001 m = 0,345 m

62 cm = 62 x 0,01 m = 0,62 m

0,3 km = 0,3 x 1000 m = 300 m

250 g = 0,250 kg

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

15 dag = 0,15 kg

2 t = 2000 kg

Przykłady zapisu w notacji wykładniczej (patrz słownik)

$350000000 = 3{,}5 \cdot 10^{8}$

$0{,}0000008 = 8 \cdot 10^{-7}$

$1358000000 = 1{,}358 \cdot 10^{9}$

$0{,}00652 = 6{,}52 \cdot 10^{-3}$

Bibliografia

1. Marian Kozielski: *Fizyka i astronomia. Szkoły ponadgimnazjalne. Zakres podstawowy*. Warszawa: PWN, 2008. ISBN 978-83-7446-491-8.
2. http://krukd.republika.pl/online/uklad_si.pdf

TEST

1. Odległość między Ziemią a Słońcem wynosi $1{,}496 \cdot 10^{11}\,m$ co odpowiada

- 149 600 000 000 m **(+)**
- 14 960 000 000 m
- 14 960 000 000 000 m
- 1 496 000 000 000 m

2. 208 cm^{2} jaka to jest część m^{2}

- 0, 208
- 0, 0208 **(+)**
- 2, 08
- 0, 00208

3. 5,04 dm^2 jaka to jest część m^2

- 0, 504
- 5,04
- 0, 0504 **(+)**
- 0, 00504

4. Średnica jądra atomu wodoru wynosi $1{,}2 \cdot 10^{-15} m$ co odpowiada

- 120 000 000 000 000 m
- 1 200 000 000 000 000 m
- 0, 0000000000000012 m **(+)**
- 0, 000000000000012 m

5. Wyrażenie $10^3 m + 3 \cdot 10^2 m$ jest równe

- 13 m
- 130 m
- 1, 3 m
- 1300 m **(+)**

6. Wyrażenie $10^5 \cdot 10 \div (10^4 \cdot 10^{-7})$ jest równe

- 1 000 000 000 **(+)**
- 1 000
- 0, 001
- 0, 000000001

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Lekcja 2

Temat: Logarytmy

Logarytmem liczby *b* przy podstawie *a* nazywamy wykładnik potęgi, do której należy podnieść *a*, aby otrzymać liczbę *b.*

$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ **, gdzie** $a > 0, b > 0, a \neq 1$.

Zapamiętaj

1. **Logarytm naturalny** $\ln b$

$\ln b = \log_e b$

2. **Logarytm dziesiętny** $\log b$

$\log b = \log_{10} b$

Własności logarytmów

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a a^b = b$
4. $a^{\log_a b} = b$

Przykłady

$\log_2 8 = 3, bo\, 2^3 = 8$

$\log_6 6 = 1, bo\, 6^1 = 6$

$\log_8 1 = 0, bo\, 8^0 = 1$

$\log_3 3^2 = 2, bo\, 3^2 = 3^2$

$\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2, bo \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4$

$\log_4 2 = \frac{1}{2}, bo\, 4^{\frac{1}{2}} = 2$

$\ln 1 = \log_e 1 = 0, bo\, e^0 = 1$

$\log 100 = \log_{10} 100 = 2, bo\ 10^2 = 100$

$5^{\log_5 6} = 6$

Podstawowe twierdzenia

1. **Twierdzenie o logarytmie iloczynu**

$\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$ **gdzie** $a > 0, b > 0, c > 0, a \neq 1$

2. **Twierdzenie o logarytmie ilorazu**

$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$ **gdzie** $a > 0, b > 0, c > 0, a \neq 1$

3. **Twierdzenie o logarytmie potęgi**

$c \cdot \log_a b = \log_a b^c$ **gdzie** $a > 0, b > 0, a \neq 1, c \in \mathbb{R}$

4. **Twierdzenie o zmianie podstawy logarytmu**

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ **gdzie** $a > 0, b > 0, c > 0, a \neq 1, c \neq 1$

Przykłady

$\log_2 2 + \log_2 4 = \log_2 (2 \cdot 4) = \log_2 8 = 3, bo\ 2^3 = 8$

$\log_{\frac{1}{2}} 2 + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = \log_{\frac{1}{2}} \left(2 \cdot \frac{1}{4}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1, bo \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$

$\log_2 4 - \log_2 8 = \log_2 \left(\frac{4}{8}\right) = \log_2 \frac{1}{2} = -1, bo\ 2^{-1} = \frac{1}{2}$

$\log_{\frac{1}{2}} 2 - \log_{\frac{1}{2}} 16 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{16}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = 3, bo \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

$\log_2 4^3 = 3 \cdot \log_2 4 = 3 \cdot 2 = 6$

$\log_{\frac{1}{3}} 9^2 = 2 \cdot \log_{\frac{1}{3}} 9 = 2 \cdot (-2) = -4$

Zastosowanie logarytmów

Siłę trzęsienia ziemi oblicza się w skali Richtera ze wzoru

$$R = \log \frac{A}{A_0}$$

R – siła trzęsienia ziemi mierzona w stopniach w skali Richtera

A – amplituda trzęsienia ziemi (w cm)

A_0 **- amplituda wzorcowa (** 10^{-4} **cm)**

<u>Zadanie 1</u>

Oblicz amplitudę drgań trzęsienia ziemi o sile 6 w skali Richtera.

Odpowiedź

Amplituda drgań wynosiła 100 cm, bo

$$6 = \log \frac{A}{10^{-4}} \Leftrightarrow 10^6 = \frac{A}{10^{-4}}$$

$$A = 10^2$$

<u>Zadanie 2</u>

Jaka siła trzęsienia ziemi jeżeli amplituda drgań wynosi 1000 cm?

Odpowiedź

Siła trzęsienia ziemi wynosi 7 stopni w skali Richtera, bo

$$R = \log \frac{1000}{10^{-4}}$$

$$R = \log 10^7$$

R=7

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Poziom głośności dźwięku (w decybelach) można obliczyć ze wzoru:

$$L = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$$

L **- poziom głośności dźwięku (w decybelach)**

I **- natężenie dźwięku w** $\frac{W}{m^2}$

I_0 **- natężenie dźwięku odpowiadającego progowi słyszalności** $\left(I_0 = 10^{-12} \frac{w}{m^2} \right)$

<u>Poziomy głośności kilku wybranych dźwięków w decybelach</u>

Najcichszy dźwięk jaki można usłyszeć	0 dB
Szelest opadających liści	10 dB
Szept, tykanie zegarka z odległości 1m	30 dB
Śpiew ptaków	40 dB
Motocykl, pociąg, głośny krzyk	80 dB
Grzmot, samochód ciężarowy	100 dB
Próg bólu	**120 dB**
Startujący odrzutowiec	130 dB

<u>Zadanie 3</u>

Oblicz natężenie dźwięku śpiewu ptaków.

Odpowiedź

Natężenie dźwięku śpiewu ptaków wynosi $I=10^{-8}$, bo

$$40=10\cdot\log\frac{I}{10^{-12}}$$

$$4=\log\frac{I}{10^{-12}}$$

$$10^4=\frac{I}{10^{-12}}$$

$$I=10^{-8}$$

Bibliografia

1. Małgorzata Dobrowolska, Marcin Karpiński, Jacek Lech: *Matematyka z plusem II*. Gdańsk: Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, 2004.

TEST

1. $\log_{\sqrt{3}}27$ jest równy

- 1/2
- 3
- 6 **(+)**
- 3/2

2. $\log_5\left(5^3\right)^7$ jest równy

- 10
- 21 **(+)**
- -4
- 4

3. Po wyznaczeniu ze wzoru $P=Ma^t$ wielkości t otrzymamy wzór $t=\log_a\frac{M}{P}$

- prawda
- fałsz **(+)**

4. Natężenie dźwięku grzmotu wynosi

- 0,1
- 10
- 100
- 0,01 **(+)**

5. Amplituda drań trzęsienia ziemi o sile 8 w skali Richtera wynosi

- 10 000 cm **(+)**
- 1000 cm
- 0,00001 cm
- 0,0001 cm

6. Jakie natężenie dźwięku odpowiada progowi bólu

- 10
- 0,1
- 1 **(+)**
- 0

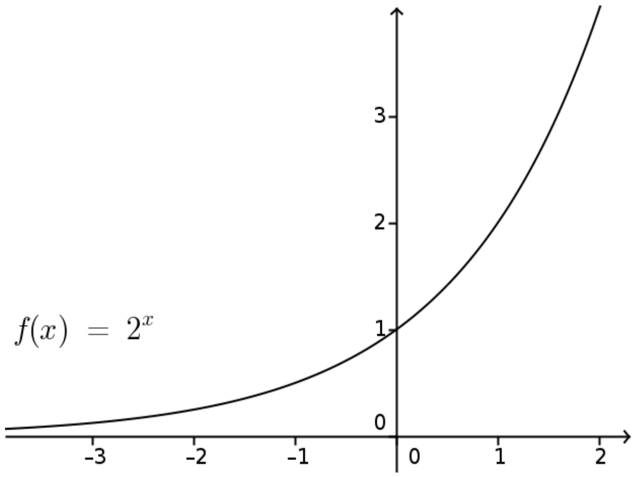
<u>Lekcja 3</u>

Temat: Funkcja wykładnicza

Każdą funkcję, którą można zapisać w postaci $y=a^x, a>0$ nazywamy funkcją wykładniczą. Dziedziną funkcji wykładniczej jest zbiór liczb rzeczywistych.

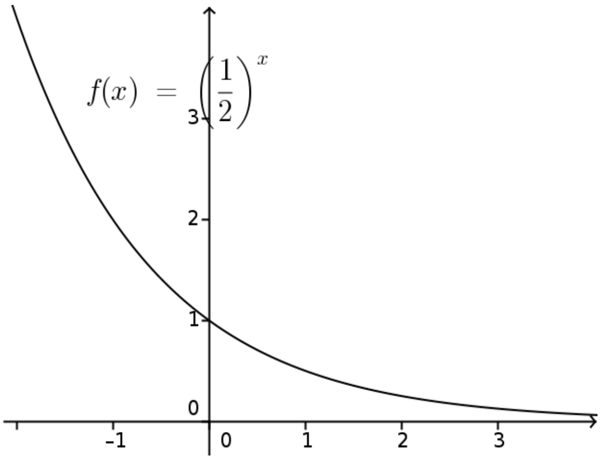
Omówmy własności poniższych funkcji

<u>Analiza wykresu funkcji</u> $y=2^x$



1. $Df: x \in R$
2. $Zwf: y \in (0, +\infty)$
3. miejsca zerowe - brak
4. funkcja rosnąca dla $x \in R$
5. $y > 0 \; dla \; x \in R$
6. $y < 0 \; dla \; x \in \varnothing$

Analiza wykresu funkcji $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{-x}$



1. $Df: x\in R$
2. $Zwf: y\in(0,+\infty)$
3. miejsca zerowe - brak
4. funkcja malejąca dla $x\in R$
5. $y>0\, dla x\in R$
6. $y<0\, dla x\in \emptyset$

Wnioski

1. **Wykresy funkcji $y=2^x$ i $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{-x}$ przecinają oś y w punkcie o współrzędnych (0,1).**
2. **Oś x dla obu wykresów jest asymptotą poziomą funkcji.**
3. **Jeżeli a>1 to funkcja $y=a^x$ jest rosnąca.**
4. **Jeżeli 0<a<1 to funkcja $y=a^x$ jest malejąca.**

**Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego**

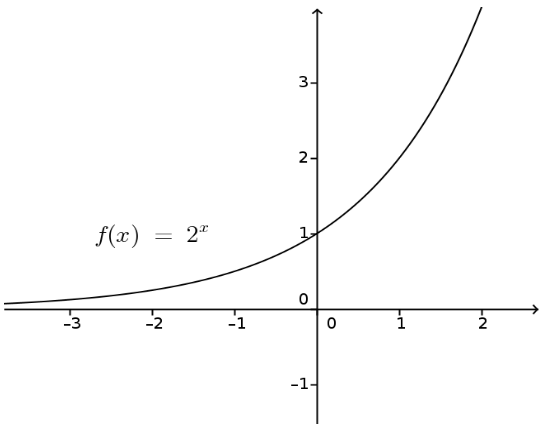
UWAGA!!!

Wzory funkcji po przekształceniach

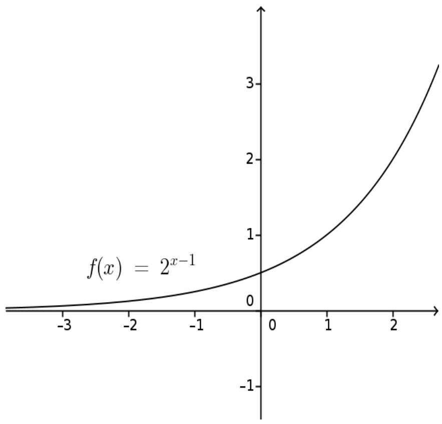
1. Po przesunięciu wykresu funkcji **y=f(x)** o p jednostek wzdłuż osi x i q jednostek wzdłuż osi y otrzymujemy funkcję opisaną wzorem **y=f(x-p)+q**
2. Wykres funkcji **y=f(x)** w symetrii względem osi x opisany jest wzorem **y=- f(x)**
3. Wykres funkcji **y=f(x)** w symetrii względem osi y opisany jest wzorem **y= f(- x)**

Przekształcenia wykresu funkcji wykładniczej.

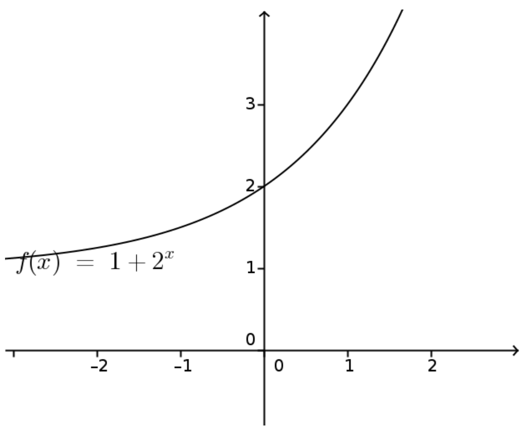
1. Wyjściowy wzór funkcji $y=2^x$



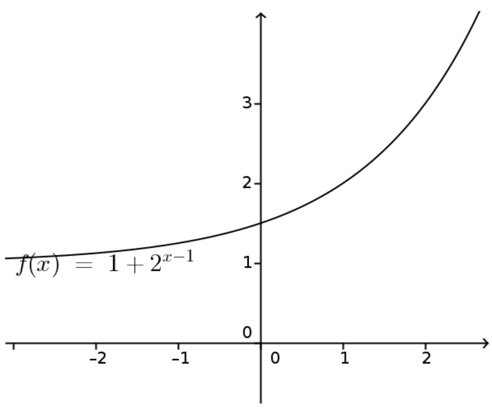
2. Przesunięcie wykresu funkcji $y=2^x$ o 1 jednostkę w prawo, a więc o wektor [1,0]



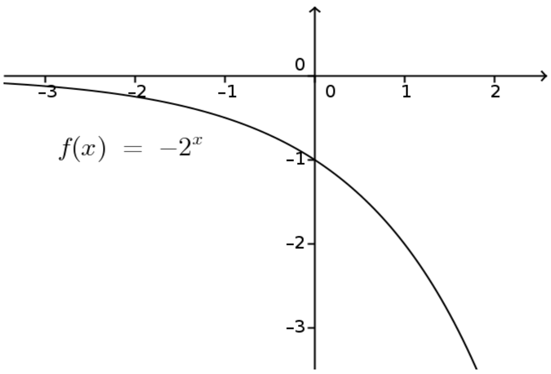
3. Przesunięcie wykresu funkcji $y=2^x$ o 1 jednostkę do góry, a więc o wektor [0,1]



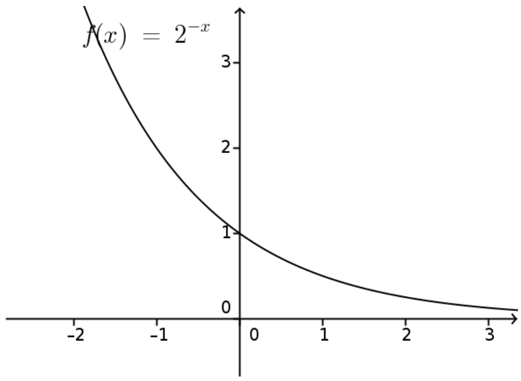
4. Przesunięcie wykresu funkcji $y=2^x$ o 1 jednostkę w prawo i 1 jednostkę do góry, a więc o wektor [1,1]



5. Symetria względem osi x wykresu funkcji $y = 2^x$



6. Symetria względem osi y wykresu funkcji $y = 2^x$



Wzory funkcji po kolejnych przekształceniach:

1. $y = 2^x$
2. $y = 2^{x-1}$
3. $y = 1 + 2^x$
4. $y = 1 + 2^{x-1}$
5. $y = -2^x$
6. $y = 2^{-x}$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykłady

Model wykładniczy można stosować do opisu wielkości, które zmieniają się w stałym tempie.

$$M(t) = b \cdot a^t$$

a, b – współczynniki stałe

t - czas

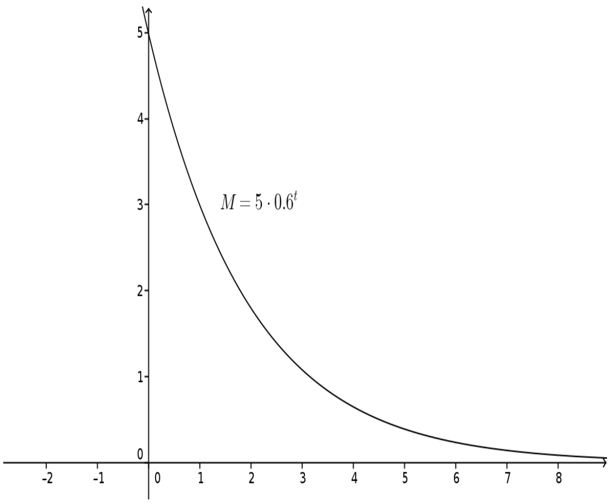
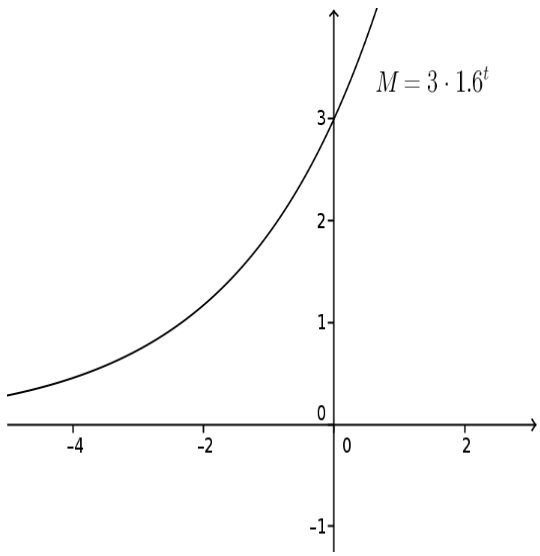
Zadanie 1

Masa M próbki zmienia się zgodnie z modelem wykładniczym. Określ czy masa próbki rośnie czy maleje?

1. $M = 5 \cdot 0{,}6^t$
2. $M = 3 \cdot 1{,}6^t$

Odpowiedź

Na podstawie własności funkcji wykładniczej $y = a^x$, jeżeli a>o to funkcja rośnie, zaś gdy 0<a<1 to funkcja maleje, rozwiązanie naszego zadania jest następujące:

1. Masa próbki maleje	4. Masa próbki rośnie
	

Temperaturę T przedmiotu po upływie czasu t przy założeniu, że temperatura otoczenia nie zmienia się możemy obliczyć ze wzoru:

$$T=T_0+(T_p-T_0)e^{-kt}$$

T_0 **- temperatura otoczenia w °C**

T_p **- początkowa temperatura przedmiotu w °C**

k – stała charakterystyczna dla danego przedmiotu

Zadanie 2

Biszkopt wyjęty z piekarnika stygnie w pomieszczeniu o temperaturze otoczenia równej 20°C. Temperaturę ciasta w °C po upływie t minut można obliczyć ze wzoru:

$$T=20+180\cdot e^{-0,1t}$$

1. Jaka będzie temperatura ciasta zaraz po wyjęciu?
2. Jaka będzie temperatura ciasta po 20 minutach?

Odpowiedź

1. Temperaturę ciasta obliczymy porównując współczynniki w ogólnym wzorze z wartością w naszym równaniu, tzn.: $T_p-T_0=180, T_0=20$

$T_p-20=180$

$T_p=200$

2. Około 44°C

Bibliografia

1. Małgorzata Dobrowolska, Marcin Karpiński, Jacek Lech: *Matematyka z plusem II*. Gdańsk: Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, 2004.
2. http://www.fuw.edu.pl

TEST

1. Po przekształceniu wykresu funkcji wykładniczej otrzymano funkcję określoną wzorem $y=2+3^{x+1}$. Przekształcenie, któremu uległ wyjściowy wykres funkcji to przesunięcie:

- o 1 jednostkę w prawo i o 2 jednostki do góry
- o 1 jednostkę w prawo i o 2 jednostki w dół
- o 1 jednostkę w lewo i o 2 jednostki do góry **(+)**
- o 1 jednostkę w lewo i o 2 jednostki w dół

2. Po przekształceniu wykresu funkcji wykładniczej otrzymano funkcję określoną wzorem $y=-2+3^{x-1}$. Przekształcenie, któremu uległ wyjściowy wykres funkcji to przesunięcie:

- o 1 jednostkę w prawo i o 2 jednostki do góry
- o 1 jednostkę w prawo i o 2 jednostki w dół **(+)**
- o 1 jednostkę w lewo i o 2 jednostki do góry
- o 1 jednostkę w lewo i o 2 jednostki w dół

3. Wzór określający masę próbki $M=35\cdot 0{,}2^{t}$ jest funkcją:

- rosnącą
- malejącą **(+)**

4. Temperatura ciasta po wyjęciu z piekarnika zmienia się według wzoru $T=23+200\cdot e^{-0{,}1\,t}$. Ciasto stygnie w pomieszczeniu o temperaturze otoczenia równej 23°C:

- prawda **(+)**
- fałsz

5. Temperatura ciasta po wyjęciu z piekarnika zmienia się według wzoru $T=25+200\cdot e^{-0{,}1\,t}$. Temperatura ciasta zaraz po wyjęciu wynosi:

- 175°C
- 225°C **(+)**
- 125°C
- 100°C

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

6. Zależność ciśnienia od wysokości opisuje wzór $p = p_0 \cdot e^{-\alpha h}$. Jeżeli współczynnik α dla powietrza wynosi 1/8 [1/km] oznacza to, że na wysokości 8 km ciśnienie powinno być:

- e razy większe
- e razy mniejsze **(+)**
- 1/e razy mniejsze
- 1/e razy większe

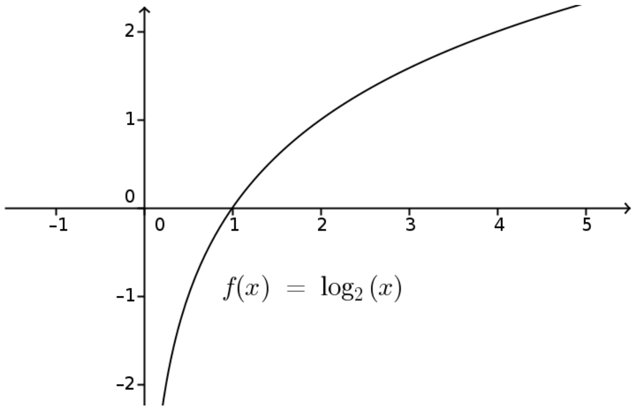
Lekcja 4

Temat: Funkcje logarytmiczne

Funkcją logarytmiczną nazywamy każdą funkcję, której wzór można zapisać w postaci $y=\log_a x$ **, gdzie** $a>0, a\neq 1, x>0$ **.**

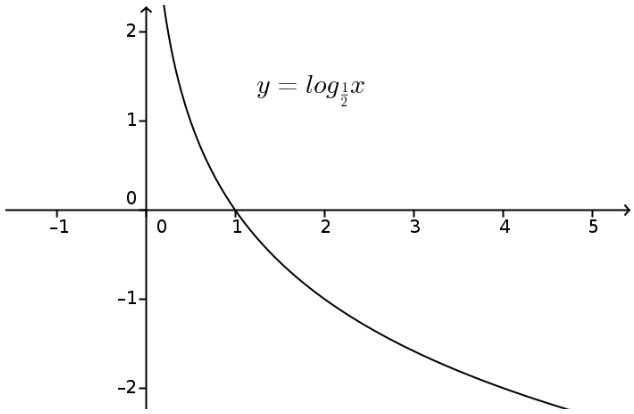
Omówmy własności poniższych funkcji

Analiza wykresu funkcji $y=\log_2 x$



1. $Df: x\in(0,+\infty)$
2. $Zwf: y\in R$
3. miejsca zerowe x=1
4. funkcja rosnąca dla $x\in(0,+\infty)$
5. $y>0\, dla\, x\in(1,+\infty)$
6. $y<0\, dla\, x\in(0,1)$

Analiza wykresu funkcji $y=\log_{\frac{1}{2}} x$

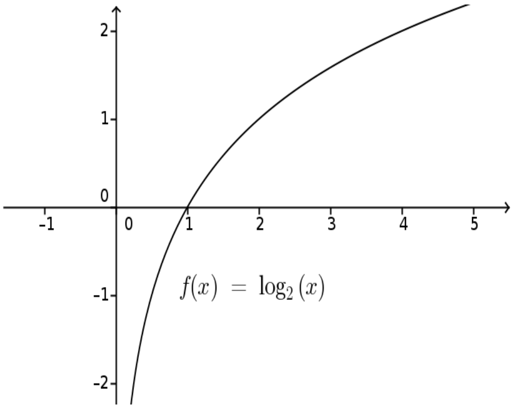
	1. $Df: x \in (0,+\infty)$ 2. $Zwf: y \in R$ 3. miejsca zerowe x=1 4. funkcja malejąca dla $x \in (0,+\infty)$ 5. $y > 0\, dla\, x \in (0,1)$ 6. $y < 0\, dla\, x \in (1,+\infty)$

Wnioski

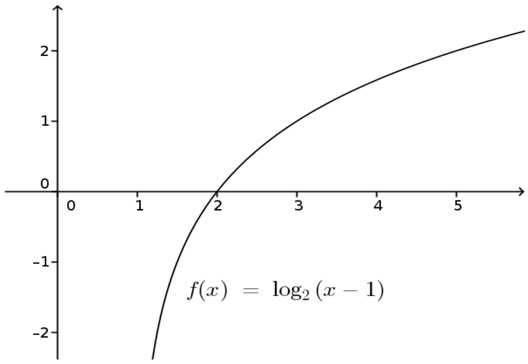
1. **Wykresy funkcji** $y=\log_2 x$ **i** $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ **przecinają oś x w punkcie o współrzędnych (1,0).**
2. **Oś y dla obu wykresów jest asymptotą pionową funkcji.**
3. **Jeżeli a>1 to funkcja** $y=\log_a x$ **jest rosnąca.**
4. **Jeżeli 0<a<1 to funkcja** $y=\log_a x$ **jest malejąca.**

Przekształcenia wykresu funkcji logarytmicznej.(Patrz UWAGA-lekcja3)

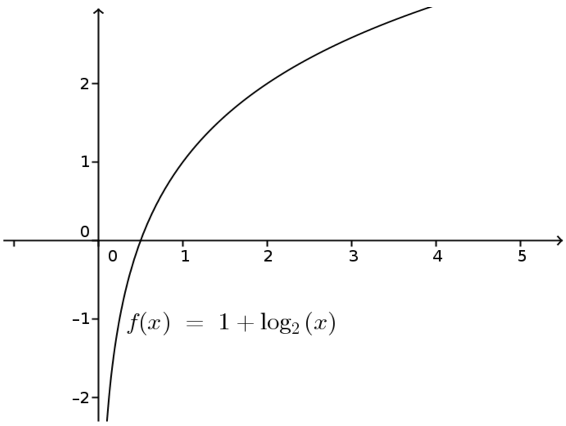
1. Wyjściowy wzór funkcji $y=\log_2 x$



2. Przesunięcie wykresu funkcji $y=\log_2 x$ o 1 jednostkę w prawo, a więc o wektor [1,0]

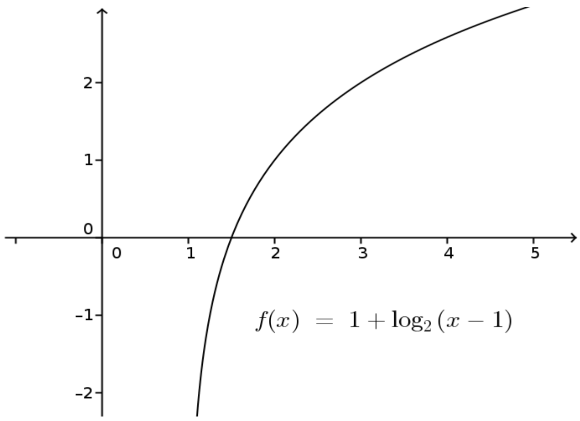


3. Przesunięcie wykresu funkcji $y=\log_2 x$ o 1 jednostkę do góry, a więc o wektor



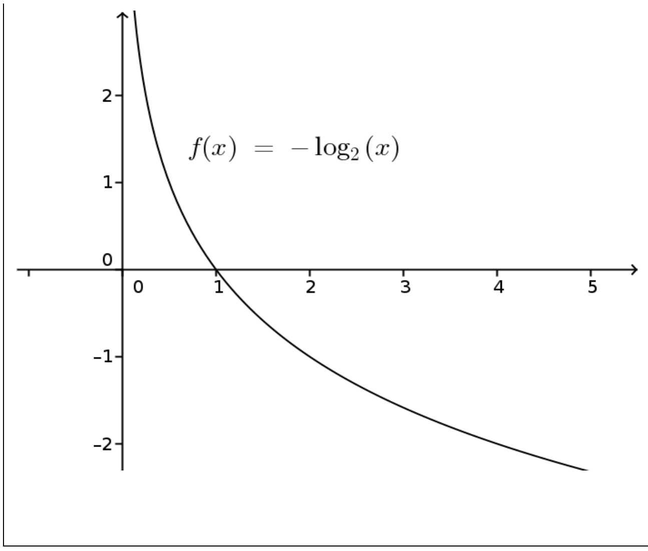
[0,1]

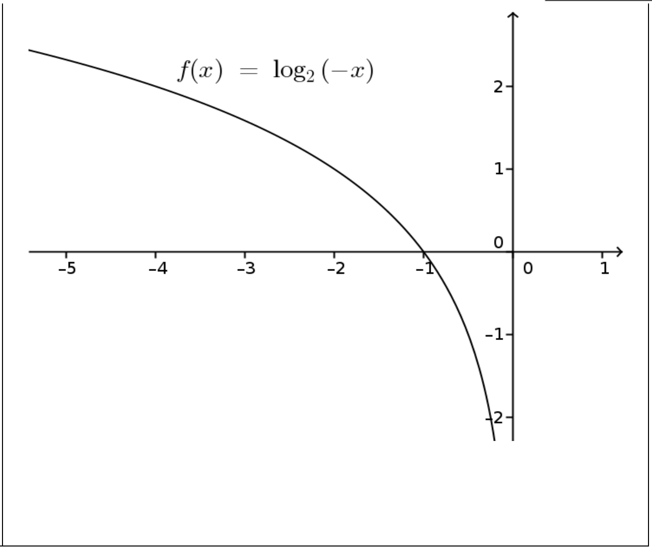
4. Przesunięcie wykresu funkcji $y=\log_2 x$ o 1 jednostkę w prawo i 1 jednostkę do góry, a więc o wektor [1,1]



5. Symetria względem osi x wykresu funkcji $y=\log_2 x$

6. Symetria względem osi y wykresu funkcji $y=\log_2 x$





Wzory funkcji po kolejnych przekształceniach:

1. $y=\log_2 x$
2. $y=\log_2(x-1)$
3. $y=1+\log_2 x$
4. $y=1+\log_2(x-1)$
5. $y=-\log_2 x$
6. $y=\log_2(-x)$

Skala logarytmiczna [patrz słownik]

Przykładami skal logarytmicznych są: <u>skala decybelowa w akustyce, skala Richtera określająca wielkości wstrząsów sejsmicznych, skala pH czy skala wielkości gwiazdowych.</u>

<u>Przepis na własnoręczne wykonanie Skali Logarytmicznej.</u>

Przyjmujemy na osi pewną jednostkową długość odcinka oznaczając go 1 – 10.

Znajdujemy za pomocą np. kalkulatora ile wynosi log 2 i log 3

log 2 = 0,3010 „2”, log 3 = 0,4771 „3”

Z twierdzeń dotyczących logarytmów otrzymujemy natychmiast:

log 4 = 2 log 2 = 0,6020 „4”

log 8 = 3 log 2 = 0,9030 „8”

log 9 = 2 log 3 = 0,9542 „9”

log10 = 1 „10”

log 1 = 0 „1”

log 6 = log 2 + log 3 = 0,7781 „6”

log 5 = log10 – log 2 = 0,6990 „5”

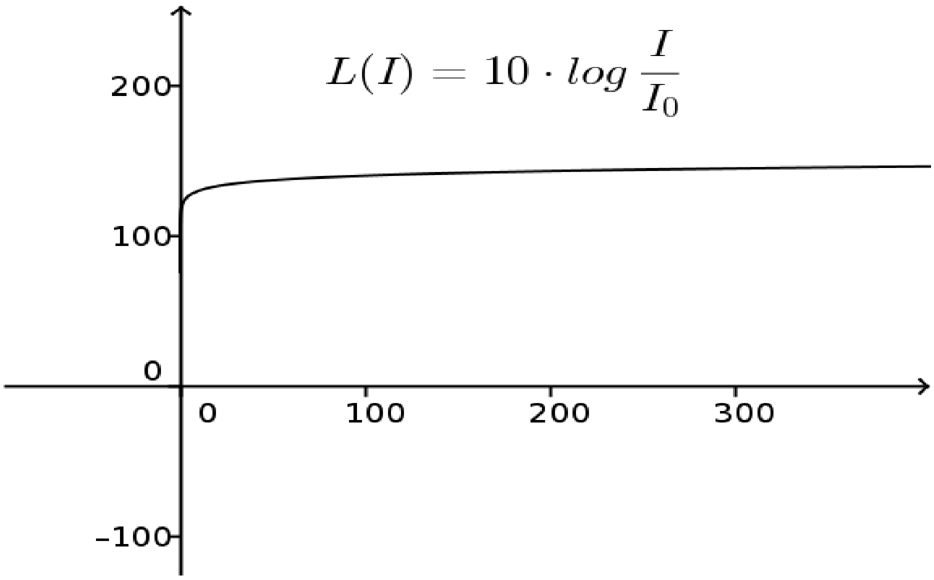
log 20 = log10 + log 2 = 1 + log 2 „ 20”

log 200 = log100 + log 2 = 2 + log 2 „200”

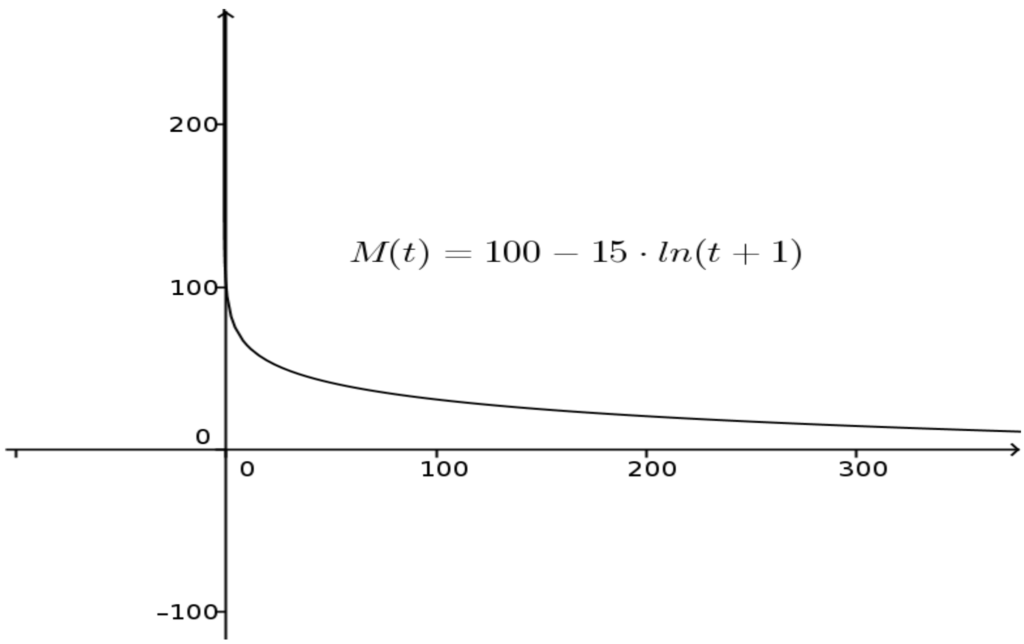
W odległości 0,3 długości odcinka piszemy „2”, w odległości 0,47 – piszemy „3” itd.
Analogicznie postępujemy z następnym przedziałem wielkości 10 – 100, przykładając do poprzedniego odcinka ten sam odcinek i w odległości 0,3 piszemy już „20” ... itd.

Przykłady zastosowania funkcji logarytmicznej

Zależność poziomu głośności dźwięku od natężenia przedstawia poniższy wykres (więcej informacji patrz lekcja2-Logarytmy)



Zjawisko zapominania zdobytej wiedzy można opisać za pomocą funkcji logarytmicznej, której wykres przedstawiono poniżej



Zjawisko zapominania opisuje wzór

$$M=100-15\cdot\ln(t+1)$$

M – procent pamiętanych wiadomości

t – liczba dni, które upłynęły od nauczenia się tych wiadomości

<u>Zadanie 1</u>

Oblicz jaka część wiadomości zostanie zapomniana po pierwszych 3 dniach od nauczenia.

Odpowiedź

Po pierwszych 3 dniach od nauczenia zostanie zapomniane około 21% wiadomości.

Procent pamiętanych wiadomości liczymy ze wzoru

$M=100-15\cdot\ln(3+1)$

$M=100-15\cdot ln4$

$M\approx 79$ %

Wiadomości zapomniane

$M\approx 21$ %

Bibliografia

1. Małgorzata Dobrowolska, Marcin Karpiński, Jacek Lech: *Matematyka z plusem II*. Gdańsk: Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, 2004.
2. http://pl.sci.fizyka.free-usenet.eu
3. http://www.megamatma.pl

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

TEST

1. Po przekształceniu wykresu funkcji wykładniczej otrzymano funkcję określoną wzorem $y=2+\log_2(x+1)$. Przekształcenie, któremu uległ wyjściowy wykres funkcji to przesunięcie:

- o 1 jednostkę w prawo i o 2 jednostki do góry
- o 1 jednostkę w prawo i o 2 jednostki w dół
- o 1 jednostkę w lewo i o 2 jednostki do góry **(+)**
- o 1 jednostkę w lewo i o 2 jednostki w dół

2. Amplituda wahań wahadła matematycznego w ciągu czasu t zmalała o połowę. Ile razy zmaleje ono w czasie 3t:

- 2 razy
- 4 razy
- 6 razy
- 8 razy **(+)**

3. Wzór określający poziom głośności dźwięku $L=10\cdot\log\frac{I}{I_0}$ jest funkcją:

- rosnącą **(+)**
- malejącą

4. Jaki jest % pamiętanych wiadomości po 5 dniach od nauczenia:

- około 73 **(+)**
- około 27
- około50

- około 15

5. W hali, w której pracuje 10 jednakowych maszyn, poziom głośności wynosi 100 dB. Jaki będzie poziom głośności, gdy inspektor BHP wyłączy 9 maszyn:

- 10 dB
- 20 dB
- 90 dB **(+)**
- 80 dB

6. Zbudowano dwa identyczne wahadła matematyczne i sprawdzono ich działanie na biegunie północnym oraz na równiku. Które wahadło miało dłuższy okres drgań:

- na biegunie
- na równiku **(+)**

7. Korzystając z algorytmu tworzenia skali logarytmicznej, określ jaką długość będzie miał odcinek log 300:

- 2,47 **(+)**
- 3
- 8
- 9

TEST PODSUMOWUJĄCY (czas 45 minut - odpowiedzi poprawne oznaczone są (+))

1. Odległość między Ziemią a Słońcem wynosi $1,496 \cdot 10^{11}\, m$ co odpowiada

- 149 600 000 000 m **(+)**
- 14 960 000 000 m
- 14 960 000 000 000 m
- 1 496 000 000 000 m

2. 208 cm^2 jaka to jest część m^2

- 0, 208

- 0, 0208 **(+)**
- 2, 08
- 0, 00208

3. 5,04 dm^2 jaka to jest część m^2

- 0, 504
- 5,04
- 0, 0504 **(+)**
- 0, 00504

4. Średnica jądra atomu wodoru wynosi $1{,}2 \cdot 10^{-15} m$ co odpowiada

- 120 000 000 000 000 m
- 1 200 000 000 000 000 m
- 0, 0000000000000012 m **(+)**
- 0, 000000000000012 m

5. Wyrażenie $10^3 m + 3 \cdot 10^2 m$ jest równe

- 13 m
- 130 m
- 1, 3 m
- 1300 m **(+)**

6. Wyrażenie $10^5 \cdot 10 \div \left(10^4 \cdot 10^{-7}\right)$ jest równe

- 1 000 000 000 **(+)**
- 1 000
- 0, 001
- 0, 000000001

7. Po przekształceniu wykresu funkcji wykładniczej otrzymano funkcję określoną wzorem $y = 2 + \log_2(x+1)$. Przekształcenie, któremu uległ wyjściowy wykres funkcji to przesunięcie:

- o 1 jednostkę w prawo i o 2 jednostki do góry

- o 1 jednostkę w prawo i o 2 jednostki w dół
- o 1 jednostkę w lewo i o 2 jednostki do góry **(+)**
- o 1 jednostkę w lewo i o 2 jednostki w dół

8. Amplituda wahań wahadła matematycznego w ciągu czasu t zmalała o połowę. Ile razy zmaleje ono w czasie 3t:

- 2 razy
- 4 razy
- 6 razy
- 8 razy **(+)**

9. Wzór określający poziom głośności dźwięku $L = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$ jest funkcją:

- rosnącą **(+)**
- malejącą

10. Jaki jest % pamiętanych wiadomości po 5 dniach od nauczenia:

- około 73 **(+)**
- około 27
- około50
- około 15

11. W hali, w której pracuje 10 jednakowych maszyn, poziom głośności wynosi 100 dB. Jaki będzie poziom głośności, gdy inspektor BHP wyłączy 9 maszyn:

- 10 dB
- 20 dB
- 90 dB **(+)**
- 80 dB

12. Zbudowano dwa identyczne wahadła matematyczne i sprawdzono ich działanie na biegunie północnym oraz na równiku. Które wahadło miało dłuższy okres drgań:

- na biegunie
- na równiku **(+)**

13. Korzystając z algorytmu tworzenia skali logarytmicznej, określ jaką długość będzie miał odcinek log 300:

- 2,47 **(+)**
- 3
- 8
- 9

14. $\log_{\sqrt{3}} 27$ jest równy

- 1/2
- 3
- 6 **(+)**
- 3/2

15. $\log_5 \left(5^3\right)^7$ jest równy

- 10
- 21 **(+)**
- -4
- 4

16. Po wyznaczeniu ze wzoru $P=Ma^t$ wielkości t otrzymamy wzór $t=\log_a \frac{M}{P}$

- prawda
- fałsz **(+)**

17. Natężenie dźwięku grzmotu wynosi

- 0,1
- 10
- 100
- 0,01 **(+)**

18. Amplituda drań trzęsienia ziemi o sile 8 w skali Richtera wynosi

- 10 000 cm **(+)**
- 1000 cm
- 0,00001 cm
- 0,0001 cm

19. Jakie natężenie dźwięku odpowiada progowi bólu

- 10
- 0,1
- 1 (+)
- 0

20. Po przekształceniu wykresu funkcji wykładniczej otrzymano funkcję określoną wzorem $y=2+3^{x+1}$. Przekształcenie, któremu uległ wyjściowy wykres funkcji to przesunięcie:

- o 1 jednostkę w prawo i o 2 jednostki do góry
- o 1 jednostkę w prawo i o 2 jednostki w dół
- o 1 jednostkę w lewo i o 2 jednostki do góry **(+)**
- o 1 jednostkę w lewo i o 2 jednostki w dół

21. Po przekształceniu wykresu funkcji wykładniczej otrzymano funkcję określoną wzorem $y=-2+3^{x-1}$. Przekształcenie, któremu uległ wyjściowy wykres funkcji to przesunięcie:

- o 1 jednostkę w prawo i o 2 jednostki do góry
- o 1 jednostkę w prawo i o 2 jednostki w dół **(+)**
- o 1 jednostkę w lewo i o 2 jednostki do góry
- o 1 jednostkę w lewo i o 2 jednostki w dół

22. Wzór określający masę próbki $M=35\cdot 0{,}2^{t}$ jest funkcją:

- rosnącą
- malejącą **(+)**

23. Temperatura ciasta po wyjęciu z piekarnika zmienia się według wzoru $T=23+200\cdot e^{-0{,}1t}$. Ciasto stygnie w pomieszczeniu o temperaturze otoczenia równej 23^{o}C:

- prawda **(+)**

- fałsz

24. Temperatura ciasta po wyjęciu z piekarnika zmienia się według wzoru $T = 25 + 200 \cdot e^{-0{,}1\,t}$.
Temperatura ciasta zaraz po wyjęciu wynosi:

- 175ºC
- 225ºC **(+)**
- 125ºC
- 100ºC

25. Zależność ciśnienia od wysokości opisuje wzór $p = p_0 \cdot e^{-\alpha h}$. Jeżeli współczynnik α dla powietrza wynosi 1/8 [1/km] oznacza to, że na wysokości 8 km ciśnienie powinno być:

- e razy większe
- e razy mniejsze **(+)**
- 1/e razy mniejsze
- 1/e razy większe