KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zdzisław Rychlik

Gry statystyczne i ich zastosowanie w pracy z uczniem słabym

Chełm 2011.10.08

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie
Centralne Biuro Projektu, Uniwersytet Rzeszowski ul. Rejtana 16a, 35-959 Rzeszów tel. 17 8721304, faks 17 8721281

Grę dwuosobową nazywamy grą o sumie zerowej, jeżeli wygrana jednego gracza jest jednocześnie przegraną gracza drugiego.

2. Gry dwuosobowe

Zajmiemy się teraz formalizacją dwuosobowej zamkniętej gry w normalnej postaci.

Podstawowymi pojęciami teorii gier strategicznych dwuosobowych są: strategie graczy oraz funkcja wypłat w grze. Strategia gracza, to reguła określająca wybór przez gracza poszczególnego jego ruchu. Zbiorem strategii gracza jest zbiór wszystkich możliwych poczynań (akcji), jakie może on podjąć jako swój ruch.

Funkcja wypłat gry, to funkcja przyporządkowująca każdej wybranej przez graczy parze strategii, wypłatę przypadającą graczowi pierwszemu od drugiego gracza. Warunki gry, to jest zbiory strategii obu graczy i funkcja wypłat znane są obu graczom.

Zatem mamy

Definicja 1. Grę G w normalnej postaci nazywamy trójkę (X, Y, W), gdzie X i Y są ustalonymi zbiorami strategii odpowiednio gracza I i gracza II, a W jest funkcją przyjmującą skończone wartości liczbowe skończone, jest funkcją wypłat. $W(x,y)$, $x \in X$, $y \in Y$, oznacza wygraną gracza I od gracza II, gdy $x \in X$ jest strategią gracza I a $y \in Y$ strategią gracza II.

Gra odbywa się następująco: gracz I wybiera pewną strategię $x \in X$, zaś gracz II wybiera pewną strategię $y \in Y$, przy czym oba te wybory strategii odbywają się równocześnie i niezależnie. Gracz II płaci graczowi I jego wygraną w wysokości $W(x,y)$. Wygrana gracza II wynosi zatem $-W(x,y)$.

Grę $G = (X, Y, W)$ nazywamy grą skończoną, jeśli oba zbiory X i Y strategii graczy składają się ze skończonej liczby strategii, tzn. $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$. Zauważmy, że jeśli gra jest skończona, to funkcja wypłat $W(x_i, y_j)$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$, określa macierz. Macierz tę nazywamy macierzą wypłat w grze G, czyli krótko macierzą gry.

Jako wprowadzenie rozpatrzmy następujący przykład.

Przykład 1. Niech gra G polega na tym, że dwaj gracze I i II zapisują równocześnie (ale w tajemnicy przed sobą) każdy jedną z trzech liczb: 1, 2, 3. Jeżeli suma jest parzysta, to gracz I wygrywa od gracza II taką sumę w złotych. Jeżeli natomiast suma napisanych liczb jest nieparzysta, to taką sumę w złotych wygrywa gracz II od gracza I.

Macierz tej gry jest

$X \backslash Y$	$y_1 = 1$	$y_2 = 2$	$y_3 = 3$
$x_1 = 1$	2	−3	4
$x_2 = 2$	−3	4	−5
$x_3 = 3$	4	−5	6

Zauważmy, że cechą charakterystyczną gry strategicznej G jest to, że obaj przeciwnicy są rozumnymi i wzajemnie do siebie nastawionymi antagonistycznie przeciwnikami. Każdy z nich stara się wybrać strategię najlepszą. Każdy z nich zdaje też sprawę z tego, że jego przeciwnik również tak postępuje. Zatem każdy chce wybrać najlepszą strategię dla siebie, ale przeciwnik też wybiera najlepszą dla siebie. Każdy z nich stara się wybrać najlepszą strategię, ~~na~~ najlepszą dla siebie, ale też ~~na~~ uwzględniając przeciwnika.

Powstaje zatem pytanie, jak każdy z graczy ma wybrać najlepszą dla siebie strategię. W związku z tym wprowadzamy następującą definicję:

<u>Definicja</u> <u>Dolną wartością gry</u> $G=(X, Y, W)$ <u>nazywamy liczbę</u>

$$\vartheta_1 = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} W(x, y).$$

Dla skończonej gry łatwo wyznaczyć dolną wartość gry. Należy rozpatrzyć macierz $W(x_i, y_j)$. Wtedy

$$\vartheta_1 = \max_i \min_j W(x_i, y_j) =$$

$$= \max_i (\min_j a_{ij}),$$

gdzie $a_{ij} = W(x_i, y_j)$.

Należy więc dla każdego wiersza macierzy gry wyznaczyć element najmniejszy w tym wierszu, a następnie, spośród tych najmniejszych elementów należy wybrać największy element.

Dolnej wartości gry ϑ_1 odpowiada pewna strategia gracza I, mianowicie strategia dotycząca tego wiersza macierzy gry, w którym zachodzi się liczba ϑ_1.

Definicja Strategia $x_0 \in X$ odpowiadająca dolnej wartości gry ϑ_1 nazywa się **maksyminową strategią gracza I.**

Maksyminowa strategia $x_0 \in X$ **gracza I** **jest najostrożniejszą strategią tego** gracza, gwarantującą mu wygraną co najmniej ϑ_1.

Zauważmy, że w przykładzie maksyminową strategią jest strategia $x_{01} = 1$.
Jest to jego najostrożniejsza strategia, gwarantująca wygraną -3, a więc może co najwyżej przegrać 3. Przyjmując inne strategie może wygrać więcej, na przykład 6 ale i może przegrać więcej.

Definicja Górną wartością gry $G = (X, Y, W)$ nazywamy liczbę ϑ_2 określoną wzorem

$$\vartheta_2 = \cancel{\max_{x\in}} \min_{y\in \cancel{X}} \cancel{\max_{y\in Y}} \max_{x\in X} W(x,y)$$

Dla skończonej gry

$$\vartheta_2 = \min_{y\in Y} \max_{x\in X} W(x,y) = \min_{j} \max_{i} a_{ij},$$

gdzie $a_{ij} = W(x_i, y_j)$.

Definicja Strategię $y_0 \in Y$ odpowiadającą górnej wartości gry ϑ_2 nazywamy **strategią minimaksową gracza II**.

Minimaksowa strategia gracza II jest najostrożniejszą strategią tego gracza, gwarantującą mu, że nie przegra więcej niż ϑ_2. (gracz I nie może wygrać więcej).

W naszym przykładzie

$$\vartheta_2 = \min_j \max_i a_{ij} = 4.$$

Zatem dwie strategie $y_1 = 1$ i $y_2 = 2$ są minimaksowymi strategiami dla gracza II. Gracz II nie przegra więcej niż 4, gdy wybierze $y_1 = 1$ lub $y_2 = 2$. Oczywiście strategia $y_3 = 3$ może graczowi II dać wygraną 3 ale i przegraną 5.

Zauważmy, że dla każdej gry

$$\vartheta_1 \le \vartheta_2$$

$$\begin{array}{c} \vartheta_1 \\ \parallel \\ \max_i \min_j a_{ij} \end{array} \le \min_j \max_i a_{ij} = \vartheta_2,$$

gdyż dla dowolnych i oraz j

$$\min_j a_{ij} \le a_{ij} \le \max_i a_{ij},$$

czyli $\min_j a_{ij} \le \min_j (\max_i a_{ij})$.

Definicja Jeżeli dla gry $G=(X,Y,W)$ zachodzi równość

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta,$$

to liczbę ϑ nazywamy wartością gry.

Dla gry skończonej wartość gry, jeśli istnieje, jest punkt siodłowy macierzy gry, to znaczy taki element, że

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Punkt siodłowy, jest to taki element w macierzy, który jest najmniejszy w danym wierszu i największy w danej kolumnie.

Zauważmy, że w naszym przykładzie

$$\vartheta_1 = -3 < \vartheta_2 = 4.$$

Nie istnieje punkt siodłowy.

Jeśli istnieje punkt siodłowy, to istnieją też pewne decyzje $x_0 \in X$ i $y_0 \in Y$ takie, że

$$W(x_0, y_0) = \vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta.$$

Strategie x_0 i y_0 nazywamy parą strategii optymalnych.

Wyznaczenie strategii – decyzji optymalnych dla obu graczy nazywamy rozwiązaniem gry.

Strategie optymalne charakteryzują stabilność gry w tym sensie, że każdy gracz niechętnie odstępuje od swojej strategii optymalnej, gdyż odstąpienie od niej jest dla niego niekorzystne. Para strategii optymalnych w grze jest jakby „położeniem równowagi", gdyż odstąpienie od nich nie leży w interesie graczy.

Przykład. Niech macierz gry będzie dana ~~wz~~ macierzą:

$$\begin{array}{r|c|c} & \begin{bmatrix} 4, & 5, & 9, & 3 \\ 8, & 4, & 3, & 7 \\ 7, & 6, & 8, & 9 \\ 7, & 2, & 4, & 6 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \min_j \\ 3 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{matrix} \\ \hline \max_i & 8, \ 6, \ 9, \ 9 & \end{array}$$

$$v_1 = \max_i \min_j a_{ij} = 6$$

$$v_2 = \min_j \max_i a_{ij} = 6 = v_1$$

Strategie x_3 i y_2 są optymalne i stanowią rozwiązanie gry.

Oczywiście obaj gracze będą trzymali się tych decyzji.

Jeśli I zmieni x_3, to II też powinien zmienić y_2, gdyż przy innych straci więcej. I analogicznie z graczem II.

Zadania

1. Wyznaczyć wartość dolną i wartość górną gry o macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 5, & 1, & 3 \\ 3, & 2, & 4 \\ -3, & 0, & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 4, & 2 \\ 1, & 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -1, & 1 \\ 1, & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 2, & 0, & 1, & 4 \\ 1, & 2, & 5, & 3 \\ 4, & 1, & 3, & 2 \end{bmatrix}$

Czy istnieją punkty siodłowe?

2. Rozwiązać grę macierzową:

a) $\begin{bmatrix} 1, & 0 \\ -1, & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2, & 3, & 1, & 5 \\ 4, & 1, & 6, & 0 \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} 0, & 1, & -2 \\ -1, & 0, & 3 \\ 2, & -3, & 0 \end{bmatrix}$

3. Mamy dwóch graczy I i II. Gracz I wybiera orła lub reszkę (O lub R). Gracz II też wybiera orła lub reszkę (O lub R). Jeśli obydwaj wybrali to samo, to gracz II otrzymuje 10 zł. Jeśli różne, to gracz I wygrywa od II 10 zł. Wyznaczyć macierz.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} O & \quad R \end{array} \\ \begin{array}{c} O \\ R \end{array} & \begin{bmatrix} -10, & 10 \\ 10, & -10 \end{bmatrix} \end{array}.$$

4. Załóżmy, że funkcja wypłat dana jest macierzą:

$$\begin{array}{lcc}
 & & \min_j \\
 & \left[\begin{array}{cccc} 18, & 3, & 0, & 2 \\ 0, & 3, & 8, & 20 \\ 5, & 4, & 5, & 5 \\ 16, & 4, & 2, & 25 \\ 9, & 3, & 0, & 20 \end{array}\right] & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{array} \\
\max_i & \begin{array}{cccc} 18 & 4 & 8 & 25 \end{array} &
\end{array}$$

Przeprowadzić analizę gry w zależności od gracza. Jaką strategię powinien stosować gracz II w zależności od wyboru gracza I i odwrotnie. Wyznaczyć wartość górną i wartość dolną gry. Czy istnieją strategie optymalne.

— // —

$$\max_i \min_j a_{ij} = 4 = v_1$$

$$\min_j \max_i a_{ij} = 4 = v_2$$

Zatem istnieje wartość gry $v = 4$.

Istnieją więc strategie optymalne:

dla gracza I — x_3 dla gracza II — y_2.