KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykłady zastosowania średnich w pracy z uczniem słabym

Agnieszka Kozak

Zakład Dydaktyki Matematyki
Instytut Matematyki
Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie
e-mail: akozak@hektor.umcs.lublin.pl

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Problem prędkości I

Rozważamy podróż z miasta A do miasta B. Przez pierwszą godziną pojazd jedzie ze stałą prędkością 20 km/h. Następnie jego prędkość wzrasta i przez następną godzinę jedzie z prędkością 30 km/h. Znajdź średnią prędkość tego pojazdu.

Problem prędkości I

Rozważamy podróż z miasta A do miasta B. Przez pierwszą godziną pojazd jedzie ze stałą prędkością 20 km/h. Następnie jego prędkość wzrasta i przez następną godzinę jedzie z prędkością 30 km/h. Znajdź średnią prędkość tego pojazdu.

Problem prędkości II

Rozważamy podróż z miasta A do miasta B. Połowę odległości pomiędzy miastami pojazd pokonuje ze stałą prędkością 20 km/h. Następnie jego prędkość wzrasta i pozostałą trasę pokonuje z prędkością 30 km/h. Znajdź średnią prędkość tego pojazdu.

Rozwiązanie Problemu I

Wprowadźmy oznaczenia:
S_1 pierwszy odcinek drogi jaką pokonuje pojazd,
S_2 drugi odcinek drogi jaką pokonuje pojazd,
T_1 czas potrzebny na pokonanie pierwszego odcinka drogi,
T_2 czas potrzebny na pokonanie drugiego odcinka drogi.
Z wzoru na średnią prędkość otrzymujemy:

$$V = \frac{S}{T},$$

gdzie S oznacza całkowitą drogę (w km) z miasta A do miasta B, a T oznacza całkowity czas na pokonanie tej drogi.

W problemie I dystans jaki pokonuje pojazd to

$$S = S_1 + S_2 = 20 + 30 \text{ km}$$

W problemie I dystans jaki pokonuje pojazd to

$$S = S_1 + S_2 = 20 + 30 \text{ km}$$

w czasie

$$T = T_1 + T_2 = 1 + 1 \text{ h}.$$

W problemie I dystans jaki pokonuje pojazd to

$$S = S_1 + S_2 = 20 + 30 \text{ km}$$

w czasie

$$T = T_1 + T_2 = 1 + 1 \text{ h}.$$

Zatem średnia prędkość to:

$$V = \frac{50}{2} = 25 \text{ km/h}$$

Rozwiązanie Problemu II

Wprowadźmy oznaczenia:
$S_1 = \frac{1}{2}S$ pierwszy odcinek drogi jaką pokonuje pojazd,
$S_2 = \frac{1}{2}S$ drugi odcinek drogi jaką pokonuje pojazd,
T_1 czas potrzebny na pokonanie pierwszego odcinka drogi,
T_2 czas potrzebny na pokonanie drugiego odcinka drogi.
Z wzoru na średnią prędkość otrzymujemy:

$$V = \frac{S}{T},$$

gdzie S oznacza całkowitą drogę (w km) z miasta A do miasta B, a T oznacza całkowity czas na pokonanie tej drogi.

Obliczenie średniej prędkości wymaga od nas znajomości czasu potrzebnego na pokonanie całej trasy. W problemie II czas ten jest sumą czasów z obu odcinków. Stąd

$$T = T_1 + T_2 = \frac{S_1}{V_1} + \frac{S_2}{V_2} = \frac{\frac{1}{2}S}{V_1} + \frac{\frac{1}{2}S}{V_2}$$

Obliczenie średniej prędkości wymaga od nas znajomości czasu potrzebnego na pokonanie całej trasy. W problemie II czas ten jest sumą czasów z obu odcinków. Stąd

$$T = T_1 + T_2 = \frac{S_1}{V_1} + \frac{S_2}{V_2} = \frac{\frac{1}{2}S}{V_1} + \frac{\frac{1}{2}S}{V_2}$$

Zatem średnia prędkość to:

$$V = \frac{S}{\frac{\frac{1}{2}S}{V_1} + \frac{\frac{1}{2}S}{V_2}} = \frac{2}{\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}} = \frac{2}{\frac{1}{20} + \frac{1}{30}} = 24 \text{ km/h}.$$

Wykonajmy teraz sprawdzenie, czy tak obliczona średnia prędkość jest poprawna. Załóżmy, że odległość pomiędzy miejscami A i B wynosi 50 km.

Wykonajmy teraz sprawdzenie, czy tak obliczona średnia prędkość jest poprawna. Załóżmy, że odległość pomiędzy miejscami A i B wynosi 50 km. Zatem czas potrzebny na pokonanie tej odległości to

$$T = \frac{S}{V} = \frac{50}{24} = 2\frac{1}{12}$$

Wykonajmy teraz sprawdzenie, czy tak obliczona średnia prędkość jest poprawna. Załóżmy, że odległość pomiędzy miejscami A i B wynosi 50 km. Zatem czas potrzebny na pokonanie tej odległości to

$$T = \frac{S}{V} = \frac{50}{24} = 2\frac{1}{12}$$

co daje nam 2h i 5 minut.

Wykonajmy teraz sprawdzenie, czy tak obliczona średnia prędkość jest poprawna. Załóżmy, że odległość pomiędzy miejscami A i B wynosi 50 km. Zatem czas potrzebny na pokonanie tej odległości to

$$T = \frac{S}{V} = \frac{50}{24} = 2\frac{1}{12}$$

co daje nam 2h i 5 minut. Obliczmy teraz czas potrzebny na pokonanie pierwszego i drugiego odcinka drogi:

Wykonajmy teraz sprawdzenie, czy tak obliczona średnia prędkość jest poprawna. Załóżmy, że odległość pomiędzy miejscami A i B wynosi 50 km. Zatem czas potrzebny na pokonanie tej odległości to

$$T = \frac{S}{V} = \frac{50}{24} = 2\frac{1}{12}$$

co daje nam 2h i 5 minut. Obliczmy teraz czas potrzebny na pokonanie pierwszego i drugiego odcinka drogi:

$$T_1 = \frac{\frac{1}{2}S}{V_1} = \frac{25}{20} = 1\frac{1}{4}$$

Wykonajmy teraz sprawdzenie, czy tak obliczona średnia prędkość jest poprawna. Załóżmy, że odległość pomiędzy miejscami A i B wynosi 50 km. Zatem czas potrzebny na pokonanie tej odległości to

$$T = \frac{S}{V} = \frac{50}{24} = 2\frac{1}{12}$$

co daje nam 2h i 5 minut. Obliczmy teraz czas potrzebny na pokonanie pierwszego i drugiego odcinka drogi:

$$T_1 = \frac{\frac{1}{2}S}{V_1} = \frac{25}{20} = 1\frac{1}{4}$$

$$T_2 = \frac{\frac{1}{2}S}{V_2} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}.$$

Wykonajmy teraz sprawdzenie, czy tak obliczona średnia prędkość jest poprawna. Załóżmy, że odległość pomiędzy miejscami A i B wynosi 50 km. Zatem czas potrzebny na pokonanie tej odległości to

$$T = \frac{S}{V} = \frac{50}{24} = 2\frac{1}{12}$$

co daje nam 2h i 5 minut. Obliczmy teraz czas potrzebny na pokonanie pierwszego i drugiego odcinka drogi:

$$T_1 = \frac{\frac{1}{2}S}{V_1} = \frac{25}{20} = 1\frac{1}{4}$$

$$T_2 = \frac{\frac{1}{2}S}{V_2} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}.$$

Zatem pierwszy odcinek drogi pokonujemy w czasie 1 h i 15 minut, natomiast drugi w czasie 50 minut, co łącznie daje nam 2h i 5 minut i potwierdza poprawność obliczeń średniej prędkości w tym zadaniu.

Zadanie o prędkości

Chart gonił mechanicznego królika przez 10 minut z prędkością 30 km/h, a potem przez 15 minut biegł za nim z prędkością równą $\frac{2}{3}$ prędkości poprzedniej. Wynika stąd, że średnia prędkość charta wynosiła:

1. 25 km/h
2. 27 km/h
3. poniżej 25 km/h.

Czy odpowiedź na to pytanie wymaga obliczeń?

Czy odpowiedź na to pytanie wymaga obliczeń?

Rozwiązanie:

Czas	10 minut $= \frac{1}{6}$ h	15 minut$= \frac{1}{4}$h
Prędkość	30 km/h	20 km/h
Droga	S_1	S_2

Czy odpowiedź na to pytanie wymaga obliczeń?

Rozwiązanie:

Czas	10 minut $=\frac{1}{6}$ h	15 minut$=\frac{1}{4}$h
Prędkość	30 km/h	20 km/h
Droga	S_1	S_2

Z przekształconego wzoru na prędkość

$$S = V \cdot T$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Czy odpowiedź na to pytanie wymaga obliczeń?

Rozwiązanie:

Czas	10 minut $=\frac{1}{6}$ h	15 minut$=\frac{1}{4}$h
Prędkość	30 km/h	20 km/h
Droga	S_1	S_2

Z przekształconego wzoru na prędkość

$$S = V \cdot T$$

obliczamy długości dróg:

$$S_1 = \frac{1}{6} \cdot 30 = 5 \text{ km},$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Czy odpowiedź na to pytanie wymaga obliczeń?

Rozwiązanie:

Czas	10 minut $=\frac{1}{6}$ h	15 minut$=\frac{1}{4}$h
Prędkość	30 km/h	20 km/h
Droga	S_1	S_2

Z przekształconego wzoru na prędkość

$$S = V \cdot T$$

obliczamy długości dróg:

$$S_1 = \frac{1}{6} \cdot 30 = 5 \text{ km},$$

$$S_2 = \frac{1}{4} \cdot 20 = 5 \text{ km}.$$

Stąd średnia prędkość wynosi:

$$V = \frac{S_1 + S_2}{T_1 + T_2} = \frac{5+5}{\frac{1}{6} + \frac{1}{4}} = \frac{10}{\frac{5}{12}} = 24\text{km}/\text{h}.$$

Zadanie ze średnimi arytmetycznymi

W pewnym szpitalu przebywali jedynie lekarze i pacjenci. Średnia wieku wszystkich lekarzy była różna od średniej wieku wszystkich pacjentów. Średnia obu tych liczb była równa średniej wieku wszystkich przebywających w tym szpitalu. Kogo w tym szpitalu było więcej: lekarzy, czy pacjentów?

Na początku wprowadźmy oznaczenia.

Na początku wprowadźmy oznaczenia. Niech
n oznacza liczbę pacjentów tego szpitala,
m oznacza liczbę lekarzy tego szpitala,
$x = \dfrac{x_1 + x_2 + \dots x_n}{n}$ oznacza średnią wieku pacjentów,
$y = \dfrac{y_1 + y_2 + \dots y_m}{m}$ oznacza średnią wieku lekarzy.

Na początku wprowadźmy oznaczenia. Niech
n oznacza liczbę pacjentów tego szpitala,
m oznacza liczbę lekarzy tego szpitala,
$x = \dfrac{x_1 + x_2 + \dots x_n}{n}$ oznacza średnią wieku pacjentów,
$y = \dfrac{y_1 + y_2 + \dots y_m}{m}$ oznacza średnią wieku lekarzy.
Z treści zadania mamy założenie $x \neq y$ oraz równanie:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots x_n + y_1 + y_2 + \dots y_m}{n+m} = \frac{\frac{x_1+x_2+\dots x_n}{n} + \frac{y_1+y_2+\dots y_m}{m}}{2},$$

Na początku wprowadźmy oznaczenia. Niech
n oznacza liczbę pacjentów tego szpitala,
m oznacza liczbę lekarzy tego szpitala,
$x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots x_n}{n}$ oznacza średnią wieku pacjentów,
$y = \frac{y_1 + y_2 + \ldots y_m}{m}$ oznacza średnią wieku lekarzy.
Z treści zadania mamy założenie $x \neq y$ oraz równanie:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots x_n + y_1 + y_2 + \ldots y_m}{n + m} = \frac{\frac{x_1 + x_2 + \ldots x_n}{n} + \frac{y_1 + y_2 + \ldots y_m}{m}}{2},$$

które po podstawieniu przyjmuje postać:

Na początku wprowadźmy oznaczenia. Niech
n oznacza liczbę pacjentów tego szpitala,
m oznacza liczbę lekarzy tego szpitala,
$x = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots x_n}{n}$ oznacza średnią wieku pacjentów,
$y = \dfrac{y_1 + y_2 + \ldots y_m}{m}$ oznacza średnią wieku lekarzy.
Z treści zadania mamy założenie $x \neq y$ oraz równanie:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots x_n + y_1 + y_2 + \ldots y_m}{n + m} = \frac{\frac{x_1 + x_2 + \ldots x_n}{n} + \frac{y_1 + y_2 + \ldots y_m}{m}}{2},$$

które po podstawieniu przyjmuje postać:

$$\frac{x \cdot n + y \cdot m}{n + m} = \frac{x + y}{2}.$$

Przekształcając powyższe równanie dostajemy:

$$2(x \cdot n + y \cdot m) = (n + m)(x + y)$$

Przekształcając powyższe równanie dostajemy:

$$2(x \cdot n + y \cdot m) = (n + m)(x + y)$$

$$2xn + 2ym = xn + xm + yn + ym$$

Przekształcając powyższe równanie dostajemy:

$$2(x \cdot n + y \cdot m) = (n + m)(x + y)$$

$$2xn + 2ym = xn + xm + yn + ym$$

$$(n - m)x = (n - m)y.$$

Przekształcając powyższe równanie dostajemy:

$$2(x \cdot n + y \cdot m) = (n + m)(x + y)$$

$$2xn + 2ym = xn + xm + yn + ym$$

$$(n - m)x = (n - m)y.$$

Powyższa równość przy założeniu $x \neq y$ jest prawdziwa dla $m = n$.

Przekształcając powyższe równanie dostajemy:

$$2(x \cdot n + y \cdot m) = (n + m)(x + y)$$

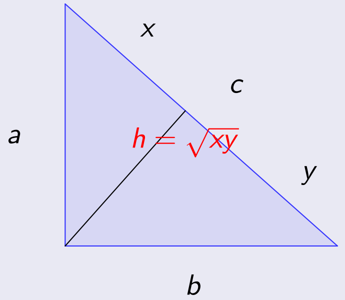
$$2xn + 2ym = xn + xm + yn + ym$$

$$(n - m)x = (n - m)y.$$

Powyższa równość przy założeniu $x \neq y$ jest prawdziwa dla $m = n$. Zatem w danym szpitalu przebywało tyle samo lekarzy i pacjentów.

Przykłady średnich w geometrii

Średnia geometryczna



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dowód:

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Dowód:

Z twierdzenia Pitagorasa dla małych trójkątów dostajemy równości:

Dowód:

Z twierdzenia Pitagorasa dla małych trójkątów dostajemy równości:

$$h^2 + y^2 = b^2$$

Dowód:

Z twierdzenia Pitagorasa dla małych trójkątów dostajemy równości:

$$h^2 + y^2 = b^2$$

$$h^2 + x^2 = a^2,$$

Dowód:

Z twierdzenia Pitagorasa dla małych trójkątów dostajemy równości:

$$h^2 + y^2 = b^2$$

$$h^2 + x^2 = a^2,$$

które po dodaniu stronami dają nam

$$2h^2 + x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$$

Dowód:

Z twierdzenia Pitagorasa dla małych trójkątów dostajemy równości:

$$h^2 + y^2 = b^2$$

$$h^2 + x^2 = a^2,$$

które po dodaniu stronami dają nam

$$2h^2 + x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$$

Następnie stosując twierdzenie Pitagorasa dla dużego trójkąta oraz korzystając z równości $c = x + y$ mamy

Dowód:

Z twierdzenia Pitagorasa dla małych trójkątów dostajemy równości:

$$h^2 + y^2 = b^2$$

$$h^2 + x^2 = a^2,$$

które po dodaniu stronami dają nam

$$2h^2 + x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$$

Następnie stosując twierdzenie Pitagorasa dla dużego trójkąta oraz korzystając z równości $c = x + y$ mamy

$$a^2 + b^2 = (x + y)^2$$

Dowód:

Z twierdzenia Pitagorasa dla małych trójkątów dostajemy równości:

$$h^2 + y^2 = b^2$$

$$h^2 + x^2 = a^2,$$

które po dodaniu stronami dają nam

$$2h^2 + x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$$

Następnie stosując twierdzenie Pitagorasa dla dużego trójkąta oraz korzystając z równości $c = x + y$ mamy

$$a^2 + b^2 = (x + y)^2$$

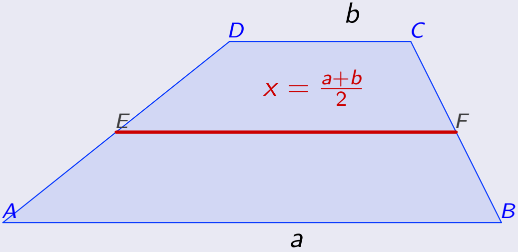
co po podstawieniu do poprzedniego równania daje nam:

$$2h^2 + x^2 + y^2 = (x + y)^2.$$

Ostatecznie po skróceniu

$$2h^2 = 2xy \Longrightarrow h = \sqrt{xy}.$$

Średnia arytmetyczna



Wprowadźmy oznaczenia: $|AE| = |ED| = c$ oraz $|BF| = |FC| = d$

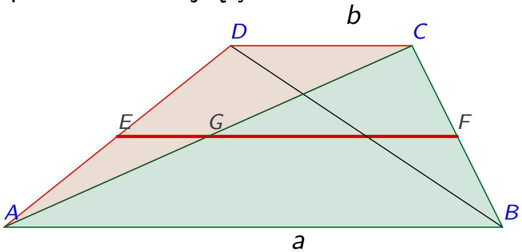
Dowód:

Dowód:

Dorysujmy przekątne trapezu i zauważmy,że możemy podzielić trapez na dwa trójkąty ABC i ACD:

Dowód:

Dorysujmy przekątne trapezu i zauważmy,że możemy podzielić trapez na dwa trójkąty ABC i ACD:



Zastosujmy teraz twierdzenie Talesa do każdego z nich:

W trójkącie ABC mamy:

W trójkącie ABC mamy:

$$\frac{|GF|}{|AB|} = \frac{|CF|}{|CB|} \Longrightarrow \frac{|GF|}{a} = \frac{d}{2d} \Longrightarrow |GF| = \frac{a}{2}.$$

W trójkącie ABC mamy:

$$\frac{|GF|}{|AB|} = \frac{|CF|}{|CB|} \Longrightarrow \frac{|GF|}{a} = \frac{d}{2d} \Longrightarrow |GF| = \frac{a}{2}.$$

Analogicznie z trójkąta ACD otrzymujemy zależność:

W trójkącie ABC mamy:

$$\frac{|GF|}{|AB|} = \frac{|CF|}{|CB|} \Longrightarrow \frac{|GF|}{a} = \frac{d}{2d} \Longrightarrow |GF| = \frac{a}{2}.$$

Analogicznie z trójkąta ACD otrzymujemy zależność:

$$\frac{|EG|}{|CD|} = \frac{|AE|}{|AD|} \Longrightarrow \frac{|EG|}{b} = \frac{c}{2c} \Longrightarrow |EG| = \frac{b}{2}.$$

W trójkącie ABC mamy:

$$\frac{|GF|}{|AB|} = \frac{|CF|}{|CB|} \Longrightarrow \frac{|GF|}{a} = \frac{d}{2d} \Longrightarrow |GF| = \frac{a}{2}.$$

Analogicznie z trójkąta ACD otrzymujemy zależność:

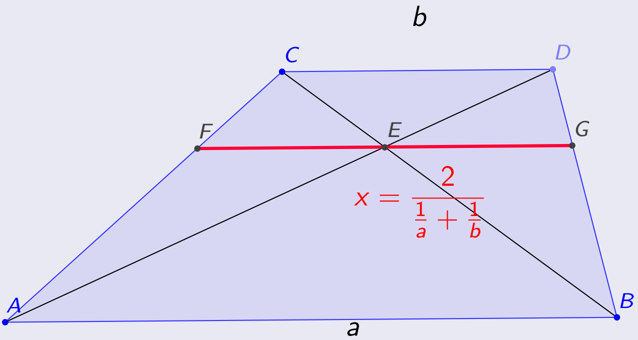
$$\frac{|EG|}{|CD|} = \frac{|AE|}{|AD|} \Longrightarrow \frac{|EG|}{b} = \frac{c}{2c} \Longrightarrow |EG| = \frac{b}{2}.$$

Ostatecznie

$$x = |EG| + |GF| = \frac{b}{2} + \frac{a}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Średnia harmoniczna



$$x = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Dowód:

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

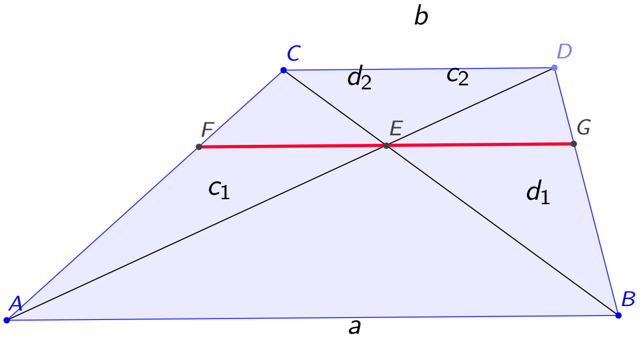
Dowód:

Wprowadźmy dodatkowe oznaczenia dla odcinków przekątnych trapezu

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Dowód:

Wprowadźmy dodatkowe oznaczenia dla odcinków przekątnych trapezu



Korzystając z twierdzenia Talesa otrzymujemy:

Korzystając z twierdzenia Talesa otrzymujemy:
z trójkątów ABC i ADC:

Korzystając z twierdzenia Talesa otrzymujemy:
z trójkątów ABC i ADC:

$$\frac{|FE|}{b} = \frac{c_1}{c_1 + c_2}, \qquad \frac{|FE|}{a} = \frac{d_2}{d_1 + d_2}$$

Korzystając z twierdzenia Talesa otrzymujemy:
z trójkątów ABC i ADC:

$$\frac{|FE|}{b} = \frac{c_1}{c_1 + c_2}, \qquad \frac{|FE|}{a} = \frac{d_2}{d_1 + d_2}$$

i analogicznie z trójkątów ADB i CBD:

Korzystając z twierdzenia Talesa otrzymujemy:
z trójkątów ABC i ADC:

$$\frac{|FE|}{b} = \frac{c_1}{c_1 + c_2}, \qquad \frac{|FE|}{a} = \frac{d_2}{d_1 + d_2}$$

i analogicznie z trójkątów ADB i CBD:

$$\frac{|EG|}{a} = \frac{c_2}{c_1 + c_2}, \qquad \frac{|EG|}{b} = \frac{d_1}{d_1 + d_2}$$

Korzystając z twierdzenia Talesa otrzymujemy:
z trójkątów ABC i ADC:

$$\frac{|FE|}{b} = \frac{c_1}{c_1 + c_2}, \qquad \frac{|FE|}{a} = \frac{d_2}{d_1 + d_2}$$

i analogicznie z trójkątów ADB i CBD:

$$\frac{|EG|}{a} = \frac{c_2}{c_1 + c_2}, \qquad \frac{|EG|}{b} = \frac{d_1}{d_1 + d_2}$$

Stąd po dodaniu pierwszej i trzeciej równości oraz drugiej i czwartej dostajemy:

Korzystając z twierdzenia Talesa otrzymujemy:
z trójkątów ABC i ADC:

$$\frac{|FE|}{b} = \frac{c_1}{c_1 + c_2}, \qquad \frac{|FE|}{a} = \frac{d_2}{d_1 + d_2}$$

i analogicznie z trójkątów ADB i CBD:

$$\frac{|EG|}{a} = \frac{c_2}{c_1 + c_2}, \qquad \frac{|EG|}{b} = \frac{d_1}{d_1 + d_2}$$

Stąd po dodaniu pierwszej i trzeciej równości oraz drugiej i czwartej dostajemy:

$$\frac{|FE|}{b} + \frac{|EG|}{a} = 1, \qquad \frac{|FE|}{a} + \frac{|EG|}{b} = 1 \tag{1}$$

$$\frac{|FE|}{b} + \frac{|EG|}{a} = \frac{|FE|}{a} + \frac{|EG|}{b}$$

skąd wynika równość odcinków

$$|FE| = |EG| = \frac{x}{2}.$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

skąd wynika równość odcinków

$$|FE| = |EG| = \frac{x}{2}.$$

Wykorzystując powyższą równość i wstawiając ją do równania (1) dostajemy:

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

skąd wynika równość odcinków

$$|FE| = |EG| = \frac{x}{2}.$$

Wykorzystując powyższą równość i wstawiając ją do równania (1) dostajemy:

$$\frac{\frac{x}{2}}{b} + \frac{\frac{x}{2}}{a} = 1 \Longrightarrow \frac{x}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 1 \Longrightarrow x = \frac{2}{\frac{1}{b} + \frac{1}{a}}$$

skąd wynika równość odcinków

$$|FE| = |EG| = \frac{x}{2}.$$

Wykorzystując powyższą równość i wstawiając ją do równania (1) dostajemy:

$$\frac{\frac{x}{2}}{b} + \frac{\frac{x}{2}}{a} = 1 \Longrightarrow \frac{x}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 1 \Longrightarrow x = \frac{2}{\frac{1}{b} + \frac{1}{a}}$$

co było do udowodnienia.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Nierówności między średnimi w praktyce

Zagadnienie pola

Załóżmy, że mamy p metrów siatki ogrodzeniowej. Jakie wymiary powinna mieć kupiona przez nas działka, aby jej pole było jak największe, a posiadana siatka wystarczyła na ogrodzenie całości.
Uwaga: Rozważamy działki w kształcie prostokąta i trójkąta.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Nierówności między średnimi w praktyce

Zagadnienie pola

Załóżmy, że mamy p metrów siatki ogrodzeniowej. Jakie wymiary powinna mieć kupiona przez nas działka, aby jej pole było jak największe, a posiadana siatka wystarczyła na ogrodzenie całości.
Uwaga: Rozważamy działki w kształcie prostokąta i trójkąta.

Co widzi matematyk: Ogrodzenie działki jest obwodem figury, której pole ma być największe.

Rozwiązanie problemu prostokąta:

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie problemu prostokąta:

Niech S oznacza pole prostokąta, a p będzie jego obwodem

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Rozwiązanie problemu prostokąta:

Niech S oznacza pole prostokąta, a p będzie jego obwodem

$$S = a \cdot b, \quad p = 2a + 2b.$$

Rozwiązanie problemu prostokąta:

Niech S oznacza pole prostokąta, a p będzie jego obwodem

$$S = a \cdot b, \quad p = 2a + 2b.$$

Z nierówności pomiędzy średnią geometryczną i arytmetyczną dostajemy:

Rozwiązanie problemu prostokąta:
Niech S oznacza pole prostokąta, a p będzie jego obwodem

$$S = a \cdot b, \quad p = 2a + 2b.$$

Z nierówności pomiędzy średnią geometryczną i arytmetyczną dostajemy:

$$\sqrt{S} = \sqrt{a \cdot b} \leqslant \frac{a+b}{2} = \frac{p}{4} \Longrightarrow S \leqslant \left(\frac{p}{4}\right)^2$$

gdzie $\frac{p^2}{4}$ jest polem kwadratu $\left(P_K = a^2, \;\; p = 4a \Longrightarrow a = \frac{p}{4}\right)$.

Rozwiązanie problemu trójkąta:

Rozwiązanie problemu trójkąta:

Niech $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ będzie połową obwodu trójkąta.

Rozwiązanie problemu trójkąta:

Niech $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ będzie połową obwodu trójkąta. Podobnie jak wyżej z nierówności pomiędzy średnią geometryczną i arytmetyczną dostajemy:

Rozwiązanie problemu trójkąta:

Niech $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ będzie połową obwodu trójkąta. Podobnie jak wyżej z nierówności pomiędzy średnią geometryczną i arytmetyczną dostajemy:

$$\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \leqslant \frac{p-a+p-b+p-c}{3} = \frac{p}{3}.$$

Rozwiązanie problemu trójkąta:

Niech $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ będzie połową obwodu trójkąta. Podobnie jak wyżej z nierówności pomiędzy średnią geometryczną i arytmetyczną dostajemy:

$$\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \leqslant \frac{p-a+p-b+p-c}{3} = \frac{p}{3}.$$

Korzystając ze wzoru Herona na pole trójkąta mamy:

Rozwiązanie problemu trójkąta:

Niech $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ będzie połową obwodu trójkąta. Podobnie jak wyżej z nierówności pomiędzy średnią geometryczną i arytmetyczną dostajemy:

$$\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \leqslant \frac{p-a+p-b+p-c}{3} = \frac{p}{3}.$$

Korzystając ze wzoru Herona na pole trójkąta mamy:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \leqslant \sqrt{p \cdot \frac{p^3}{27}} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}},$$

Rozwiązanie problemu trójkąta:

Niech $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ będzie połową obwodu trójkąta. Podobnie jak wyżej z nierówności pomiędzy średnią geometryczną i arytmetyczną dostajemy:

$$\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \leqslant \frac{p-a+p-b+p-c}{3} = \frac{p}{3}.$$

Korzystając ze wzoru Herona na pole trójkąta mamy:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \leqslant \sqrt{p \cdot \frac{p^3}{27}} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}},$$

gdzie $\dfrac{p^2}{3\sqrt{3}}$ jest polem trójkąta równobocznego,

Rozwiązanie problemu trójkąta:

Niech $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ będzie połową obwodu trójkąta. Podobnie jak wyżej z nierówności pomiędzy średnią geometryczną i arytmetyczną dostajemy:

$$\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \leqslant \frac{p-a+p-b+p-c}{3} = \frac{p}{3}.$$

Korzystając ze wzoru Herona na pole trójkąta mamy:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \leqslant \sqrt{p \cdot \frac{p^3}{27}} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}},$$

gdzie $\dfrac{p^2}{3\sqrt{3}}$ jest polem trójkąta równobocznego, mamy bowiem

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \text{ oraz } a = \frac{2p}{3} \Longrightarrow S = \frac{4p^2\sqrt{3}}{4 \cdot 9} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}.$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \text{ oraz } a = \frac{2p}{3} \Longrightarrow S = \frac{4p^2\sqrt{3}}{4\cdot 9} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}.$$

Ostatecznie widzimy, że w obu problemach należy wybrać działkę, która będzie wielokątem foremnym.

Literatura

1. strona internetowa http://www.cut-the-knot.org/arithmetic/HarmonicMean.shtml
2. Henryk Pawłowski "Matematyka 1, Podręcznik, linia ponadpodstawowa" Wydawnictwo Operon, Gdynia 2003
3. Tomasz Gronek,Janusz Magdziarz "Testy z matematyki dla uczniów szkół średnich i kandydatów na studia" Wydawnictwo Szkolne PWN, Warszawa 2000