



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Metody znajdowania sum

Krzysztof Bolibok

Instytut Matematyki UMCS,
I LO im. St. Staszica w Lublinie



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Znane zadanie

Znaleźć sumę wszystkich liczb od 1 do 1000.



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie

Niech $S=1+2+3+\dots+1000$. Ponieważ dodawanie jest przemienne, więc $S=1000+999+\dots+2+1$. Dodając te dwie nierówności dostajemy:
 $2S=(1+1000)+(2+999)+(3+998)+\dots+(1000+1)$,
czyli $2S=1001 \cdot 1000$ i praktycznie koniec.



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zastosowanie opisanej metody.

Metoda pozwala obliczyć sumę n kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego. Przy jej pomocy nie można znaleźć wzoru na sumę k -tych potęg początkowych liczb naturalnych, gdy k jest liczbą naturalną większą od 1.



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Niech $S_n^{(1)} = 1 + 2 + 3 + \dots + n$. Zauważmy, że:

$$\left\{ \begin{array}{l} (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1 \\ n^2 - (n-1)^2 = 2(n-1) + 1 \\ (n-1)^2 - (n-2)^2 = 2(n-2) + 1 \\ \dots\dots\dots \\ 2^2 - 1^2 = 2 \times 1 + 1 \end{array} \right.$$





Po dodaniu stronami dostajemy

$$(n+1)^2 - 1^2 = 2S_n^{(1)} + n,$$

co po przekształceniach daje nam

$$S_n^{(1)} = \frac{n(n+1)}{2}.$$





Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Niech $S_n^{(2)} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$. Zauważmy, że:

$$\left\{ \begin{array}{l} (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1 \\ n^3 - (n-1)^3 = 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1 \\ (n-1)^3 - (n-2)^3 = 3(n-2)^2 + 3(n-2) + 1 \\ \dots\dots\dots \\ 2^3 - 1^3 = 3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1. \end{array} \right.$$





Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Po dodaniu stronami dostajemy

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3S_n^{(2)} + 3S_n^{(1)} + n.$$

Korzystając ze wzoru na $S_n^{(1)}$ dostajemy

$$S_n^{(2)} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$





KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie:

Suma k -tych potęg początkowych liczb naturalnych jest wielomianem stopnia $k+1$. Ponadto, współczynnik tego wielomianu przy najwyższej potędze wynosi $(k+1)^{-1}$.



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zastosowanie poznanej metody

Powyższą metodę można stosować do znajdowania sumy k -tych potęg liczb tworzących ciąg arytmetyczny.



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chelmie



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie z olimpiady matematycznej

Znaleźć wzór na sumę

$$1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \dots + n(n+1)(n+2).$$



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Z szachami jest związane zadanie:

Obliczyć

$$S = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{63}.$$

Można je rozwiązać np. tak:



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

$$\begin{aligned}
 S + 1 &= 2 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{63} \\
 &= 2^2 + 2^2 + 2^3 \dots + 2^{63} \\
 &= 2^3 + 2^3 + 2^4 \dots + 2^{63} \\
 &\quad \dots\dots\dots \\
 &= 2^{63} + 2^{63} = 2^{64}.
 \end{aligned}$$

Stąd $S = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{63} = 2^{64} - 1.$





Jak ogólna jest to metoda?

Widzimy, że nie daje się już przy jej pomocy obliczyć sumy

$$S = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{63}.$$

W takim razie znajdziemy wzór na

$$S = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}, \quad \text{gdy } q \neq 1.$$





Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie:

$$\begin{cases} S = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} \\ qS = q + q^2 + q^3 + \dots + q^n \end{cases}$$

Po odjęciu stronami dostajemy

$$(1 - q)S = 1 - q^n, \quad \text{czyli} \quad S = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$





KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie z olimpiady matematycznej

Obliczyć sumę:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n}.$$



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chelmie



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie:

$$\begin{cases} S = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n-1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n} \\ \frac{S}{2} = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \dots + \frac{n-1}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}} \end{cases}$$

Po odjęciu stronami dostajemy

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}}.$$





Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Korzystając z poprzednio wyprowadzonego wzoru mamy

$$\frac{S}{2} = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}},$$

czyli

$$S = \frac{2^{n+1} - n - 2}{2^n}.$$





KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ !!!



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie