KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zdzisław Rychlik

Łańcuch Markowa

Chełm 03.03.2012

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie
Centralne Biuro Projektu, Uniwersytet Rzeszowski ul. Rejtana 16a, 35-959 Rzeszów tel. 17 8721304, faks 17 8721281

1. Łańcuchy Markowa

Niech S będzie zbiorem skończonym lub co najwyżej przeliczalnym. Załóżmy, że każdej parze i, j elementów zbioru S przypisana jest taka nieujemna liczba p_{ij}, że te liczby spełniają warunek:

$$(1) \qquad \sum_{j \in S} p_{ij} = 1, \quad i \in S, \quad p_{ij} \geq 0.$$

Niech $X_0, X_1, \ldots$ będzie ciągiem zmiennych losowych określonych na pewnej przestrzeni prawdopodobieństwa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, których zbiory wartości zawarte są w zbiorze S.

Ciąg $\{X_n, n \geq 0\}$ nazywać będziemy jednorodnym łańcuchem Markowa, jeśli

$$(2) \qquad P(X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) =$$

$$= P(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n) = p_{i_n j}$$

dla każdego $n \geq 1$ i każdego takiego układu elementów $i_0, i_1, \ldots, i_n$ zbioru S, że $P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) > 0$.

Zauważmy, że zgodnie z definicją

$$(3) \qquad P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = p_{ij}.$$

Zatem prawdopodobieństwa $P(X_{n+1}=j / X_n=i) = p_{ij}$, $i,j \in S$, są niezależne od n. Właśnie ta własność niezależności od n wyrażona jest w nazwie: jednorodny łańcuch Markowa. Oczywiście rozważane są ciągi zmiennych losowych takich, że

$$P(X_{n+1}=j / X_n=i) = p_{ij}(n), \quad i,j \in S.$$

Wtedy mówimy, że ciąg $\{X_n, n \geq 0\}$ tworzy łańcuch Markowa.

Zbiór S nazywamy przestrzenią stanów lub przestrzenią fazową łańcucha Markowa.

Liczby p_{ij}, $i,j \in S$, nazywamy prawdopodobieństwami przejścia.

Elementy zbioru S traktowane są jako możliwe stany układu. Wartość zmiennej losowej X_n przedstawia stan w chwili n. Zatem ciąg zmiennych losowych $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ opisuje historię układu, który „rozwija się", „zmienia się" zgodnie z rozkładem określonym wzorem (2).

Rozkład warunkowy kolejnego stanu X_{n+1}, pod warunkiem stanu X_n, jest niezależny od stanów przeszłych $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$. Znaczy to stwierdzenie, że przyszłość jest niezależna od przeszłości – zależy jedynie od X_n – od teraźniejszości.

Prawdopodobieństwa

(4) $$\pi_i = P(X_0 = i), \quad i \in S,$$

nazywamy prawdopodobieństwami początkowymi. Oczywiście definicja jednorodnego łańcucha Markowa nie wprowadza żadnych ograniczeń na π_i, $i \in S$, poza tym jedynie, że naturalne jest przyjąć $\pi_i \geq 0$, $i \in S$, oraz

$$\sum_{i \in S} \pi_i = 1.$$

Przypominamy jeszcze, że liczby p_{ij}, $i, j \in S$, tworzą macierz. Oczywiście $p_{ij} \geq 0$, $i, j \in S$, oraz

$$\sum_{j \in S} p_{ij} = 1, \quad i \in S.$$

Każdą macierz spełniającą warunek (5) nazywamy macierzą stochastyczną.

Przykład 1. (Model dyfuzji Bernoulli'ego-Laplace'a)

Wyobraźmy sobie, że n czarnych kul i n białych kul rozmieszczono w dwóch pudełkach (urnach), czy też szufladach tak, że każde pudełko zawiera dokładnie n kul. Stan układu określony jest liczbą białych kul w pierwszym pudełku, a więc przestrzeń stanów $S = \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Przejście ze stanu jednego do drugiego opisujemy następująco: każdorazowo wybieramy losowo jedną kulę z każdego pudełka i wymieniamy je między sobą. Jeśli obecny stan równy jest i, to prawdopodobieństwo przejścia do stanu $i-1$ jest równe

$$p_{i,i-1} = \frac{i}{n}\cdot\frac{i}{n} = \left(\frac{i}{n}\right)^2, \quad 1 \le i \le n$$

$$p_{i,i} = 2\,\frac{i(n-i)}{n^2}, \quad 1 \le i \le n-1$$

$$p_{i,i+1} = \left(\frac{n-i}{n}\right)^2, \quad 0 \le i \le n-1,$$

b - i cz. n-i   b - n-i, cz. i

Sto

Przykład powyższy jest probabilistycznym modelem przepływu dwóch płynów między dwoma zbiornikami.

Przykład 2. (Błądzenie losowe z ekranem pochłaniającym)

Niech $S = \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Niech

$$P = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, & \dots & ,0, & 0, & 0 \\ q, & 0, & p, & 0, & \dots & ,0, & 0, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \dots & ,q, & 0, & p \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \dots & ,0, & 0, & 1 \end{bmatrix},$$

czyli $p_{00} = 1$, $p_{nn} = 1$,

$p_{i,i-1} = q$, $0 < i < n$,

$p_{i,i+1} = p$, $0 < i < n$,

$p + q = 1$, $0 < p < 1$.

Łańcuch, o tej macierzy, przedstawia błądzenie losowe cząstki. Cząsteczka przesuwa się o jednostkę w prawo lub w lewo z prawdopodobieństwami, odpowiednio, p i q. Oczywiście stany „0” oraz „n” są stanami pochłaniającymi. Zatem cząsteczka po wejściu do jednego z nich pozostaje.

stan w opisanym tu błądzeniu losowym można potraktować również jako kapitał gracza. Przejście do stanu „0" – pochłonięcie w pozycji „0" oznacza ruinę gracza. Pochłonięcie w stanie n jest automatycznie równoznaczne z ruiną przeciwnika. Kapitał początkowy gracza uważany jest tutaj za deterministyczny (nielosowy), a więc

$$\pi_i = 1 \quad \text{dla pewnego} \quad 0 \le i \le n.$$

Przykład 3. (Błądzenie losowe na prostej)

Niech $S = \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. Niech ponadto

$$p_{i,i+1} = p, \quad p_{i,i-1} = q, \quad p+q=1.$$

Tak określony łańcuch jednorodny Markowa przedstawia błądzenie losowe bez ekranu pochłaniającego. Mówimy, że błądzenie jest symetryczne, gdy

$$p = q = 1/2.$$

2. Prawdopodobieństwo przejścia w n krokach

Zauważmy, że prawdopodobieństwa przejścia $p_{ij} = P(X_{n+1}=j / X_n=i)$, $i,j \in S$, w jednym kroku i prawdopodobieństwa początkowe całkowicie określają rozkład łańcucha Markowa. Mianowicie

$$(2.1)\quad P(X_0=i_0, X_1=i_1, \dots, X_n=i_n) =$$

$$= P(X_n=i_n / X_{n-1}=i_{n-1}, \dots, X_0=i_0)\, P(X_0=i_0, \dots, X_{n-1}=i_{n-1}) =$$

$$= p_{i_{n-1}, i_n}\, p_{i_{n-2}, i_{n-1}} \cdots p_{i_0 i_1}\, \pi_{i_0}.$$

W szczególności, dla każdego $0 \le l < n$

$$(2.2)\quad P(X_{m+n}=j / X_m=i) = p_{ij}^{(n)}$$

$$= P(X_{m+n}=j;\, X_m=i) / P(X_m=i) =$$

$$= \sum_{k\in S} P(X_{m+n}=j;\, X_{m+l}=k;\, X_m=i) / P(X_m=i)$$

$$= \sum_{k\in S} P(X_{m+n}=j / X_{m+l}=k)\, P(X_{m+l}=k / X_m=i)$$

$$= \sum_{k\in S} p_{i,k}^{(l)}\, p_{k,j}^{(n-l)}$$

Zatem, dla $n = 2$, $l = 1$,

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_{k\in S} p_{ik}^{(1)} p_{kj}^{(1)} =$$

$$= \sum_{k\in S} p_{ik}\, p_{kj}$$

Tak więc $p_{ij}^{(2)}$ jest macierzą będącą iloczynem $P\cdot P$. Indukcyjnie $p_{ij}^{(n)}$, $i, j\in S$, jest macierzą P^n.

Często przyjmuje się

$$p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j; \\ 0, & i\neq j. \end{cases}$$

Zatem P^0 jest macierzą identycznościową. Ponadto

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_k p_{ik}^{(n)} p_{kj} = \sum_k p_{ik}\, p_{kj}^{(n)}$$

i oczywiście

$$\sum_j p_{ij}^{(n)} = 1.$$

3. Klasyfikacja stanów

Niech $E_1, E_2, E_3, \ldots$ oznaczają stany łańcucha.

(3.1) Stan E_i nazywać będziemy **stanem nieistotnym**, jeżeli istnieje taki stan E_j i liczba naturalna k_0 taka, że

$$p_{ij}(k_0) > 0 \text{ oraz } p_{ji}(\ell) = 0 \text{ dla}$$

każdego $\ell = 1, 2, \ldots$

W przeciwnym przypadku stan E_i nazywamy **istotnym**.

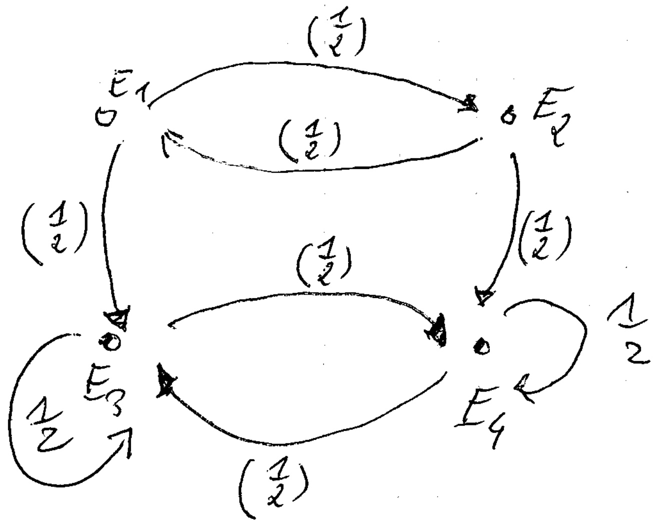
(3.2) Stany E_i oraz E_j nazywamy stanami komunikującymi się, jeżeli istnieją takie liczby naturalne k i r, że

$$p_{ij}(k) > 0 \text{ oraz } p_{ji}(r) > 0.$$

Przykład 3.1. Przypuśćmy, że układ może znajdować się w jednym z czterech stanów $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ z macierzą przejścia w jednym kroku

$$P = \begin{bmatrix} 0, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & 0 \\ \frac{1}{2}, & 0, & 0, & \frac{1}{2} \\ 0, & 0, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \\ 0, & 0, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Fakt ten można wyrazić graficznie



W tym łańcuchu stany <u>E_1 i E_2</u> są nieistotne. Stany <u>E_3 i E_4</u> są stanami istotnymi oraz komunikującymi się.

Niech

$$(3.3) \quad f_{ij}^{(n)} = P\{X_1 \neq j, X_2 \neq j, \ldots, X_n = j \mid X_0 = i\}.$$

Oczywiście $f_{ij}^{(n)}$ oznacza prawdopodobieństwo, że łańcuch wychodząc ze stanu i w n-krokach ~~po~~ wróci do „j" — nie trafi do j wcześniej jak w n-tym kroku. Niech

$$(3.4) \quad f_{ij} = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [X_n = j] \mid X_0 = i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$$

Oczywiście f_{ij} oznacza prawdopodobieństwo ewentualnego powrotu do stanu j, jeśli startujemy ze stanu i.

(3.5) Stan E_i nazywać będziemy <u>stanem powracającym</u>, jeśli

$$f_{ii} = 1$$

Jeżeli $f_{ii} < 1$, to stan E_i nazywamy stanem <u>niepowracającym</u> lub <u>stanem chwilowym</u>.

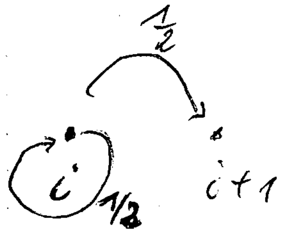
(3.6) Stan E_i nazywamy <u>stanem zerowym</u>, jeśli $p_{ii}(n) \to 0$, gdy $n \to \infty$.

(3.7) Stan E_i nazywamy <u>stanem okresowym</u> o okresie t, jeżeli z nierówności $p_{ii}(n) > 0$ wynika, że t dzieli n oraz t jest największą liczbą mającą tę własność. Inaczej mówiąc $t = t_i$ jest największym dzielnikiem liczb $\{n : p_{ii}(n) > 0\}$.

(3.8) Stan powracający, nieżerowy i nieokresowy nazywamy stanem ergodycznym.

Przykład 3.2. Rozpatrzmy błądzenie cząstki po punktach całkowitych osi rzeczywistej w następujący sposób: cząstka albo z prawdop. $p = 1/2$ przesuwa się o jedność w prawo, albo z prawdop. $p = 1/2$ pozostaje na miejscu.

$$
\begin{array}{c} \\ \vdots \\ i-1 \\ i \\ i+1 \\ \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c}
\quad \ldots \quad i-1, \; i, \; i+1 \\
\left[\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & \\
0, & \ldots & 0 & \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & 0 & \ldots \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & &
\end{array} \right]
\end{array}
$$



Oczywiście, w tym przypadku

$$0 = f_{ii}^{(n)}, \; f_{ii}^{(1)} = 1/2, \; \text{dla } n \geq 2.$$

Zatem $f_{ii} = 1/2 < 1$.

Zatem każdy stan jest stanem chwilowym – niepowracającym.

Ponadto, zauważmy również, że

$p_{ii}(n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n =$

= prawdopodobieństwo, że w n - krokach nie ruszała się cząsteczka. Tak więc każdy stan jest zerowy.

Jeżeli jednak cząstka przesuwa się na prawo z prawdop. $\frac{1}{2}$ i na lewo z prawdop. $\frac{1}{2}$, to otrzymujemy łańcuch o okresie 2, gdyż wrócić do dowolnego stanu można tylko w parzystej liczbie kroków.

<u>Twierdzenie 3.1.</u> (a) Stan E_i jest stanem powracającym wtedy i tylko wtedy, gdy

(3.9) $P\{\limsup_{n\to\infty}[X_n = i] \mid X_0 = i\} = 1$

~~oraz~~ a następnie

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty.$$

(b) Stan E_i jest stanem chwilowym wtedy i tylko wtedy, gdy

(3.10) $P\{\limsup_{n\to\infty}[X_n = i] \mid X_0 = i\} = 0$

a ~~oraz~~ $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) < \infty.$

Przypominamy, że

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k .$$

Zauważmy, że z powyższego twierdzenia wynika tak zwane prawo zero-jedynkowe, gdyż

$$P\{\limsup_{n\to\infty} [X_n = i] / X_0 = i\} = \begin{cases} 1, & \text{stan powracający} \\ 0, & \text{stan chwilowy} \end{cases}$$

Oczywiście zdarzenia losowe $[X_n = i]$, $n \geq 1$, nie są niezależne – nie mogą być niezależne.

<u>Dowód.</u> Zauważmy najpierw, że

$$P\{\limsup_{n\to\infty} [X_n = j] / X_0 = i\} =$$

$$= P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} [X_k = j] / X_0 = i) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\{\bigcup_{k=n}^{\infty} [X_k = j] / X_0 = i\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\{\bigcup_{k=n}^{\infty} [X_n \neq j, X_{n+1} \neq j, \ldots X_k = j / X_0 = i]\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \{ P(X_n = j / X_0 = i) + P(X_n \neq j, X_{n+1} = j / X_0 = i)$$

$$+ \cdots + \quad \}.$$