



Jak rozwiązywać zadania z treścią pracując z uczniem słabym?

Agnieszka Kozak

Zakład Dydaktyki Matematyki
Instytut Matematyki
Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie
e-mail: akozak@hektor.umcs.lublin.pl



Zadania związane z proporcjonalnością odwrotną

Zadanie 1

Basen można napełnić dwoma kranami w ciągu 6 godzin. Pierwszy kran napełnia basen w czasie o 5 godzin krótszym niż drugi. W ciągu ilu godzin, każdy kran oddzielnie napełni basen?



Zadania związane z proporcjonalnością odwrotną

Zadanie 1

Basen można napełnić dwoma kranami w ciągu 6 godzin. Pierwszy kran napełnia basen w czasie o 5 godzin krótszym niż drugi. W ciągu ilu godzin, każdy kran oddzielnie napełni basen?

Zadanie 2

Basen można napełnić dwoma kranami. Pierwszy kran napełnia basen 8 godzin, a drugi w czasie trzy razy dłuższym niż gdy basen jest napełniany dwoma kranami. W ciągu ilu godzin napełnia basen drugi kran?





Rozwiązanie Zadania 1

Wprowadźmy oznaczenia:

x - czas napełniania basenu przez I kran

y - czas napełniania basenu przez II kran

V - objętość basenu. Przy powyższych oznaczeniach

$\frac{V}{x}$ - jest częścią basenu, którą napełnimy w ciągu godziny
używając wyłącznie I kranu (ilością wody którą wlejemy do basenu
w ciągu godziny przy użyciu I kranu)

$\frac{V}{y}$ - jest częścią basenu, którą napełnimy w ciągu godziny
używając wyłącznie II kranu (ilością wody którą wlejemy do basenu
w ciągu godziny przy użyciu II kranu)



Rozwiązanie Zadania 1

$\frac{V}{6}$ - jest częścią basenu, którą napełnimy w ciągu godziny używając I i II kranu.

*Z treści zadania otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} x + 5 = y \\ \frac{V}{x} + \frac{V}{y} = \frac{V}{6}, \end{cases}$$

który sprowadza się do równania

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{6}.$$



Rozwiązanie Zadania 1

Rozwiązując to równanie dostajemy równanie kwadratowe,

$$x^2 - 7x - 30 = 0,$$

którego pierwiastkami są $x_1 = 10$ oraz $x_2 = -3$.

Drugą odpowiedź odrzucamy i ostatecznie otrzymujemy:

$$x = 10 \text{ h}$$

$$y = 15 \text{ h}$$



Rozwiązanie Zadania 2

Wprowadźmy oznaczenia:

x - czas napełniania basenu przez II kran

V - objętość basenu. Przy powyższych oznaczeniach

$\frac{V}{x}$ - jest częścią basenu, którą napełnimy w ciągu godziny
używając wyłącznie II kranu

$\frac{V}{8}$ - jest częścią basenu, którą napełnimy w ciągu godziny
używając wyłącznie I kranu (ilością wody, którą wlejemy do basenu
w ciągu godziny przy użyciu II kranu)



Rozwiązanie Zadania 2

*Z treści zadania otrzymujemy równanie:

$$3\frac{V}{x} = \frac{V}{8} + \frac{V}{x}.$$

Stąd

$$3\frac{1}{x} = \frac{x+8}{8x} \iff x^2 - 16x = 0,$$

a zatem $x = 16$.



Zadania związane z proporcjonalnością odwrotną

Zadanie 3

Kran A napełnia pół basenu w czasie o 5 godzin dłuższym, a kran B w czasie o 3 godziny krótszym, niż trwa to wtedy, gdy oba kranu napełniają cały basen jednocześnie. W jakim czasie każdy z tych kranów osobno napełni basen?



Zadania związane z proporcjonalnością odwrotną

Zadanie 3

Kran A napełnia pół basenu w czasie o 5 godzin dłuższym, a kran B w czasie o 3 godziny krótszym, niż trwa to wtedy, gdy oba kranu napełniają cały basen jednocześnie. W jakim czasie każdy z tych kranów osobno napełni basen?

Zadanie 4

Dwóch korektorów, pracując razem, jest w stanie dokonać poprawek w tekście w czasie 8 godzin. Jeżeli każdy z nich wykonywałby tę pracę sam, to pierwszy, bardziej doświadczony korektor zakończyłby ją o 12 godzin wcześniej niż drugi. W ciągu ilu godzin każdy z korektorów wykonałby te prace samodzielnie?



Rozwiązanie Zadania 3

Wprowadźmy oznaczenia:

t - czas napełniania basenu przy użyciu kranów A i B

V - objętość basenu. Przy powyższych oznaczeniach

$\frac{V}{t}$ - jest częścią basenu, którą napełnimy w ciągu godziny

używając obydwu kranów

$\frac{\frac{1}{2}V}{t+5}$ - jest częścią basenu, którą napełnimy w ciągu godziny

używając wyłącznie kranu A

$\frac{\frac{1}{2}V}{t-3}$ - jest częścią basenu, którą napełnimy w ciągu godziny

używając wyłącznie kranu B



Rozwiązanie Zadania 3

*Otrzymujemy równanie:

$$\frac{\frac{1}{2}V}{t+5} + \frac{\frac{1}{2}V}{t-3} = \frac{V}{t}.$$

Stąd dostajemy

$$\frac{2t+2}{(t+5)(t-3)} = \frac{2}{t},$$

którego rozwiązaniem jest $t = 15$.

Otrzymaną wartość wstawiamy do $\frac{\frac{1}{2}V}{t+5}$ i $\frac{\frac{1}{2}V}{t-3}$ i dostajemy rozwiązanie $V = 40$ (A) i $V = 24$ (B).



Rozwiązanie Zadania 4

Niech

t_1 - oznacza czas pracy, który potrzebuje pierwszy korektor na wykonanie całości pracy

t_2 - oznacza czas pracy, który potrzebuje drugi korektor na wykonanie całości pracy

$\frac{P}{t_1}$ - oznacza pracę, którą wykonuje pierwszy korektor w ciągu godziny

$\frac{P}{t_2}$ - oznacza pracę, którą wykonuje drugi korektor w ciągu godziny

$\frac{P}{8}$ - oznacza pracę, którą wykonują obaj korektorzy w ciągu godziny.



Rozwiązanie Zadania 4

* Z treści zadania otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} t_1 + 12 = t_2 \\ \frac{P}{t_1} + \frac{P}{t_2} = \frac{1}{8}, \end{cases}$$

który sprowadza się do równania

$$\frac{P}{t_1} + \frac{P}{t_1 + 12} = \frac{1}{8},$$

którego rozwiązaniem są $t_1 = 12$ i $t_2 = 24$.



Zadania związane z proporcjonalnością odwrotną

Zadanie 5

Koparka A może wykonać pewną pracę w czasie o 5 dni krótszym niż koparka B. Obie koparki, pracując jednocześnie, mogą wykonać tę pracę w 6 dni. Po dwóch dniach wspólnej pracy koparka A się zepsuła. Ile dni musi jeszcze pracować koparka B, by dokończyć pracę?



Rozwiązanie Zadania 5

Niech

x - oznacza czas, który potrzebuje koparka B na wykonanie całości pracy

$x - 5$ - oznacza czas, który potrzebuje koparka A na wykonanie całości pracy

$\frac{P}{x}$ - oznacza pracę, którą wykonuje koparka B w ciągu jednego dnia

$\frac{P}{x - 5}$ - oznacza pracę, którą wykonuje koparka A w ciągu jednego dnia

$\frac{P}{6}$ - oznacza pracę którą wykonują obie koparki w ciągu jednego dnia.



Rozwiązanie Zadania 5

Otrzymujemy zatem równanie:

$$\frac{P}{x-5} + \frac{P}{x} = \frac{P}{6},$$

którego rozwiązaniem jest $x = 15$.

Zatem koparka B wykonuje całą pracę w 15 godzin, a koparka A w 10 godzin. Dwa dni wspólnej pracy dają nam wykonaną pracę w postaci sumy

$$2 \left(\frac{P}{15} + \frac{P}{10} \right),$$

do której dodajemy pracę koparki B, wykonaną w ciągu y dni.



Rozwiązanie Zadania 5

Mamy zatem równanie:

$$2 \left(\frac{P}{15} + \frac{P}{10} \right) + \frac{yP}{15} = P,$$

którego rozwiązaniem jest $y = 10$.



Zadania z wiekiem

Zadanie 6

Za 5 lat matka będzie 4 razy starsza od syna. Razem będą mieli wtedy 55 lat. W jakim wieku są obecnie?



Zadania z wiekiem

Zadanie 6

Za 5 lat matka będzie 4 razy starsza od syna. Razem będą mieli wtedy 55 lat. W jakim wieku są obecnie?

Zadanie 7

Przed pięcioma laty ojciec był trzy razy starszy od syna. Za 11 lat obaj będą mieli 100 lat. Ile lat ma każdy z nich obecnie?



Rozwiązanie Zadania 6

* Oznaczenia:

o - wiek ojca

s - wiek syna

Zróbmy tabelkę wieku:

o	s	równanie
$o - 5$	$s - 5$	$3(s - 5) = o - 5$
$o + 11$	$s + 11$	$o + 11 + s + 11 = 100$

Dostajemy zatem układ równań

$$\begin{cases} 3s - o = 10 \\ o + s = 78, \end{cases}$$

którego rozwiązaniem jest para $o = 56$ i $s = 22$.



Rozwiązanie Zadania 7

** Oznaczenia:

m - wiek matki

s - wiek syna

Zróbmy tabelkę wieku:

m	s	równanie
$m + 5$	$s + 5$	$4(s + 5) = m + 5$
$m + 5$	$s + 5$	$s + 5 + m + 5 = 55$

Dostajemy zatem układ równań

$$\begin{cases} 4s - m = -15 \\ m + s = 45, \end{cases}$$

którego rozwiązaniem jest para $m = 39$ i $s = 6$.



Zadania z wiekiem

Zadanie 8

Gdy syn będzie w wieku, w jakim jest obecnie matka, to wówczas w sumie będą mieli 76 lat. Natomiast, gdy syn będzie miał dwa razy więcej lat niż ma obecnie matka, to razem będą mieli 130 lat. W jakim wieku jest obecnie matka, a w jakim syn?



Zadania z wiekiem

Zadanie 8

Gdy syn będzie w wieku, w jakim jest obecnie matka, to wówczas w sumie będą mieli 76 lat. Natomiast, gdy syn będzie miał dwa razy więcej lat niż ma obecnie matka, to razem będą mieli 130 lat. W jakim wieku jest obecnie matka, a w jakim syn?

Zadanie 9

Ktoś zapytał znajomego "Ile masz lat?". Znajomy odpowiedział: "Teraz mam dwa razy więcej niż Ty miałeś gdy ja byłem w Twoim wieku. Gdy Ty będziesz w moim wieku razem będziemy mieć 63 lata". Ile lat ma każdy z nich obecnie?



Rozwiązanie Zadania 8

Oznaczenia:

y - wiek matki

x - wiek syna

Syn będzie w wieku matki po upływie $y - x$ lat. Wówczas razem będą mieli 76 lat. Dostajemy pierwsze równanie

$$x + y - x + y + y - x = 76 \iff 3y - x = 76$$

Syn będzie miał dwa razy więcej lat niż ma obecnie matka po upływie $2y - x$ lat. Stąd dostajemy drugie równanie

$$x + 2y - x + y + 2y - x = 130 \iff 5y - x = 130$$



Rozwiązanie Zadania 8

i następujący układ równań

$$\begin{cases} 3y - x = 76 \\ 5y - x = 130, \end{cases}$$

którego rozwiązaniem jest para $x = 5$ i $y = 27$.



Rozwiązanie Zadania 9

Oznaczenia:

y - wiek osoby pytanej

x - wiek osoby pytającej

Do zdania "Teraz mam dwa razy więcej niż Ty miałeś gdy **ja byłem w Twoim wieku**" zrobmy tabelkę

x	y	równanie
$x - (x - y)$	$y - (x - y)$	$2(y - x + y) = x.$

Analogicznie postąpimy w przypadku zdania

"**Gdy Ty będziesz w moim wieku** razem będziemy mieć 63 lata"

x	y	równanie
$x + x - y$	$y + x - y$	$x + x - y + x = 63.$





Rozwiązanie Zadania 9

Dostajemy zatem układ równań

$$\begin{cases} 4y = 3x \\ 3x - y = 63, \end{cases}$$

którego rozwiązaniem jest para $x = 28$ i $y = 21$.



Literatura

- 1 Henryk Pawłowski "Matematyka 2, Zbiór zadań, linia ponadpodstawowa" Wydawnictwo Operon, Gdynia 2003