KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zdzisław Rychlik

Gry statystyczne w pracy z uczniem szczególnie uzdolnionym

Chełm 2011.10.08

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie
Centralne Biuro Projektu. Uniwersytet Rzeszowski ul. Rejtana 16a. 35-959 Rzeszów tel. 17 8721304. faks 17 8721281

Strategie optymalne $x_0 \in X$ i $y_0 \in Y$ odpowiadające wartości gry $\vartheta = \vartheta_1 = \vartheta_2$, jeżeli one istnieją, noszą nazwę **strategii optymalnych** odpowiednio gracza I i gracza. Wyznaczenie strategii optymalnych dla obu graczy nazywamy rozwiązaniem gry. Strategie optymalne charakteryzują się stabilnością w tym sensie, że odstępowanie od nich dla graczy jest nieopłacalne. Para strategii optymalnych jest w grze jak gdyby „**położeniem równowagi**".

Poszukiwanie optymalnych strategii dla poszczególnych graczy sprowadza się do znalezienia punktu siodłowego macierzy gry. Dla dużych macierzy gry znalezienie punktu siodłowego można nieco uprościć, jeżeli zmniejszymy wymiary macierzy gry przez usunięcie wierszy i kolumn odpowiadających tak zwanym **strategiom zdominowanym**.

Definicja Jeżeli w macierzy gry $A = (a_{ij})$ wszystkie elementy pewnego wiersza odpowiadającego strategii x_i gracza I są mniejsze lub równe od odpowiednich elementów innego wiersza, to strategia x_i jest **zdominowana**.

Graczowi I nie opłaca się korzystać ze strategii x_i, ma do wyboru lepsze.

Definicja. Jeżeli w macierzy $A=(a_{ij})$ wszystkie elementy kolumny odpowiadającej strategii y_i są większe lub równe od odpowiednich elementów strategii y_k – innej strategii, to tą kolumnę można usunąć. Strategia y_i nazywa się strategią zdominowaną.

Przykład.

$$\begin{array}{cccc} 4 & 5 & 9 & 3 \\ 8 & 4 & 3 & 7 \\ 7 & 6 & 8 & 9 \\ 7 & 2 & 4 & 6 \end{array}$$

7 2 4 6 zdominowana (przez x_3)

Nie występują strategie zdominowane dla gracza – oczywiście w sensie definicji podanej wyżej.

Przykład.

$$\begin{array}{ccccc} 0, & -3, & -3, & 5, & -3 \\ 1, & 3, & -2, & 2, & 0 \\ 1, & -2, & 1, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & -1, & -4, & 1 \\ 3, & -2, & -1, & 6, & -2 \end{array}$$

3, –2, –1, 6, –2 dominuje x_1

zdominowana przez y_3.

Zatem mamy macierz:

$$\begin{array}{c|cccc|c} & & & & & \min_j \\ & 3, & -2, & 2, & 0 & -2 \\ & -2, & 1, & 1, & 0 & -2 \\ & 0, & -1, & -4, & 1 & -4 \\ & -2, & -1, & 6, & -2 & -2 \\ \hline \max_i & 3, & 1, & 6, & 1 & \end{array}$$

$\vartheta_1 = \max_i \min_j a_{ij} = -2$

$\vartheta_2 = \min_j \max_i a_{ij} = 1$

$\vartheta_1 < \vartheta_2.$

Strategie mieszane

Wiemy już jak rozgrywać gry dwuosobowe o macierzy gry mającej punkty siodłowe. Załóżmy teraz, że mamy grę o macierzy wypłat:

$$\begin{array}{rcc} & \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \min \\ 2 \\ 1 \end{array} \\ \max & \begin{array}{cc} 4, & 3 \end{array} & \end{array}$$

Oczywiście

$$\vartheta_1 = \max_i \min_j a_{ij} = 2, \quad \min_j \max_i a_{ij} = 3 = \vartheta_2.$$

Zatem $\vartheta_1 < \vartheta_2$.

Oczywiście, gdybyśmy byli graczem I, to chyba byśmy skorzystali z decyzji x_1, gdyż wygramy co najmniej $2. = \vartheta_1$. Gdybyśmy byli graczem II, to obralibyśmy chyba strategię y_2, gdyż nie stracimy więcej jak 3. Zatem widzimy, że gracz I nie może wygrać mniej jak $\vartheta_1 = 2$, a gracz II nie może stracić więcej jak 3, gdyby był rozsądny. Te fakty znane są dla obu graczy. Innymi słowy, jeśli gracz I lub II zdradzi swoją strategię przeciwnikowi, to oczywiście może on spodziewać się tylko jednego albo „dolnej wygranej" ϑ_1 lub „górnej przegranej" ϑ_2 w zależności od tego, który gracz zdradza, czy I, czy

Zatem jeśli chcemy osiągnąć lepszy wynik, to nie możemy zdradzać naszej strategii, ale przecież drugi gracz może zgadnąć nasz plan, jeśli jest dość rozumny. Zatem naszą strategię musimy wybrać w sposób losowy — w sposób od nas niezależny. Jednak ten sposób losowy musi być rozumny, rozsądny. Na tym polega więc idea strategii mieszanych.

<u>Definicja.</u> <u>Strategią mieszaną</u> gracza nazywamy rozkład prawdopodobieństwa na zbiorze jego strategii czystych.

<u>Strategię mieszaną</u> nazywamy też strategią <u>zrandomizowaną</u>.

Zatem strategia mieszana, to nic innego jak zmienna losowa o wartościach w zbiorze strategii czystych, której rozkład wyznacza z jakim prawdopodobieństwem wybieramy strategie. Jeśli zbiór strategii jest skończony, to rozkład jest dyskretny. Jeśli więc oznaczymy prawdopodobieństwa te przez $p(x_i)$, $x_i \in X$, to $p(x_i) \geq 0$, $\sum_i p(x_i) = 1$. Oczywiście, jeśli $p(x_i) = 1$, to mamy strategię czyst. Jeśli przez ξ oznaczymy zmienną losową o wartościach w X a przez η zmienną losową o wartościach w Y, to wypłata będzie funkcją

$$A(\xi,\eta) = \sum_i \sum_j a_{ij}\, P(\xi = x_i)\, P(Y = y_j),$$

gdyż naturalnym jest przyjęcie niezależności zmiennych losowych ξ i η. Oczywiście

$$A(\xi,\eta) = E\,W(\xi,\eta) =$$

$$= \sum_i \sum_j a_{ij}\, p(x_i)\, p(y_j),$$

gdzie $p(x_i) \geq 0$, $\sum_i p(x_i) = 1$, $p(y_j) \geq 0$, $\sum_j p(y_j) = 1$.

Niech X^* oznacza zbiór wszystkich zrandomizowanych reguł decyzyjnych gracza I, a Y^* gracza II. Niech K oznacza funkcję wypłaty dla reguł ξ i η.

<u>Definicja.</u> Trójkę $\Gamma = (X^*, Y^*, K)$ nazywamy zrandomizowaną grą lub mieszanym rozszerzeniem gry (X, Y, W).

Liczbę

$$k_1 = \overset{\sup}{\cancel{\max}}_{\xi \in X^*}\ \overset{\inf}{\cancel{\min}}_{\eta \in Y^*} K(\xi,\eta)$$

nazywamy dolną wartością gry Γ, a liczbę

$$k_2 = \overset{\inf}{\cancel{\min}}_{\eta \in Y^*}\ \sup_{\xi \in X^*} K(\xi,\eta)$$

nazywamy górną wartością gry Γ.

Łatwo zauważyć, że

$$(*) \qquad \vartheta_1 \leq k_1 \leq k_2 \leq \vartheta_2.$$

Nierówności $(*)$ udowodnili <u>D. Blackwell</u> i <u>M. A. Girshick (1954)</u>.

Jeżeli $\vartheta_1 = \vartheta_2$, to oczywiście $k_1 = k_2 = \vartheta_1 =$
Zatem zrandomizowanie reguły nic nie daje nowego. Jednak, jeśli $\vartheta_1 < \vartheta_2$, to oznacza, że gracz I może poprawić swoją wygraną a gracz II zmniejszyć swoją przegraną. Strategię gracza I dającą wygraną k_1 nazywamy maksyminową strategią zrandomizowaną. Natomiast strategia gracza II dająca co najwyżej przegraną k_2 nazywana jest zrandomizowaną strategią minimaksową.

Twierdzenie (J. von Neumann, 1928)

$$k_1 = k_2 = k$$

Twierdzenie to jest podstawowym twierdzeniem z teorii gier i nazywane jest twierdzeniem o minimaksie.

Z tego twierdzenia wynika, że istnieją strategie zrandomizowane, które dają wartość gry. Tak więc gracze I i II mają zawsze optymalne strategie zrandomizowane. Oczywiście wyznaczanie takich strategii jest dość skomplikowane i rachunkowo uciążliwe. Korzysta się tutaj z metod programowania liniowego.

Przykład. Wyznaczyć optymalne strategie obu graczy w grze o macierzy:

X \ Y	y_1	y_2	y_3	$\min_j$
x_1	2	-3	4	-3
x_2	-3	4	-5	-5
x_3	4	-5	6	-5
$\max_i$	4	4	6	

$$\vartheta_1 = \max_i \min_j a_{ij} = -3$$

$$\vartheta_2 = \min_j \max_i a_{ij} = 4; \quad \vartheta_1 = -3 < \vartheta_2 = 4.$$

Niech p_1, p_2, p_3 i q_1, q_2, q_3 będą rozkładami strategii zrandomizowanych gracza I i gracza II. Wtedy

$$W^*(\xi,\eta) = 2p_1q_1 + 3p_1q_2 + 4p_1q_3 +$$

$$+ (-3)p_2q_1 + 4p_2q_2 - 5p_2q_3 +$$

$$+ 4p_3q_1 - 5p_3q_2 + 6p_3q_3 .$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1, \quad q_1 + q_2 + q_3 = 1.$$

Można udowodnić, że

$$p_1 = q_1 = \frac{1}{4}, \quad p_2 = q_2 = \frac{1}{2}, \quad p_3 = q_3 = 1/4,$$

gdyż macierz jest symetryczna. Zauważmy, że

$$W^* = 2\cdot\frac{1}{16} - 3\cdot\frac{1}{8} + 4\cdot\frac{1}{16} - 3\cdot\frac{1}{8} + 4\cdot\frac{1}{4} -$$

$$- 5\cdot\frac{1}{8} + 4\cdot\frac{1}{16} - 5\cdot\frac{1}{8} + 6\cdot\frac{1}{16} =$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{3}{8} + \frac{2}{8} - \frac{3}{8} + 1 - \frac{5}{8} + \frac{2}{8} - \frac{5}{8} + \frac{3}{8} =$$

$$= 0$$

Zatem gra ta jest sprawiedliwa.

<u>Przykład</u> Rozwiązać grę

$$\begin{bmatrix} 1, & 0 \\ -1, & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \vartheta_1 = 0 \\ \vartheta_2 = 1 \end{matrix}$$

$$w^*(\xi,\eta) = pq - (1-p)q + 2(1-p)(1-q).$$

$$\max_q \{pq - (1-p)q + 2(1-p)(1-q)\}$$

$$F(q) = pq - (1-p)q + 2(1-p)(1-q)$$

$$F'(q) = p - 1 + p - 2 + 2p = 0$$

$$4p - 3 = \quad p = 3/4.$$

$$F(q) = q(2p-1) + 2(1-p) - 2(1-p)q =$$

$$= 2(1-p) + \{2p - 1 - 2 + 2p\}q =$$

$$= 2(1-p) + q\{2p - 1 - 2 + 2p\} =$$

$$= 2(1-p) + q\{4p-3\}$$

$$\min_{0<q<1} \max_{0<p<1} (2(1-p) + q\{4p-3\})$$

$$\max_{0<p<1} \min_{0<q<1} \{2(1-p) + q(4p-3)\}$$

Zauważmy, że $\min_{0<q<1} \max_{0<p<1} F(q) = \frac{1}{2}$

dla $q = \frac{1}{2}$., gdyż $\frac{d}{dp}F(p,q) = 0 \equiv -2 + 4q = 0$

$\frac{d}{dq}F(p,q) = 4p - 3 = 0 \qquad p = 3/4.$

Zatem $\vartheta = k = \frac{1}{2}$, oraz $[\frac{3}{4}, \frac{1}{4}], [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Zadania.

1. Rozwiązać grę o macierzy

$$\begin{bmatrix} 2, & 0, & 1, & 4 \\ 1, & 2, & 5, & 3 \\ 4, & 1, & 3, & 2 \end{bmatrix}$$

Strategia y_4 dla Y jest zdominowana przez y_2.
Zatem tej strategii nie będzie wykorzystywać.
Strategia y_3 jest zdominowana przez y_2.
Strategia x_1 jest zdominowana przez x_3.
Zatem należy rozpatrzyć grę o macierzy:

$$\begin{bmatrix} 2, & 0 \\ 1, & 2 \end{bmatrix} \qquad v_1 = 1 < v_2 = 2.$$

Mamy rozkłady $p, 1-p$ i $q, 1-q$.

$$W^*(p,q) = 2pq + 2(1-p)(1-q) + (1-p)q$$

$$\frac{dW^*}{dp} = 2q - 2 + 2q - q = 0 \quad 3q = 2, \; q = \frac{2}{3}.$$

Zatem strategia dla gracza II $\left[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right]$.

$$\frac{dW^*}{dq} = 2p - 2 + 2p + 1 - p = 3p - 2 = 0, \; p = \frac{2}{3}.$$

$$W^*\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$