



Projekt „e-podręcznik – przyszłość szkoły zaczyna się dziś...”  
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

## **Konspekt 12. Dział II. Planimetria**

**Temat:** 2.2. Okrąg i koło

**Temat zajęć:** 1. Wzajemne położenie dwóch okręgów

2. Wzajemne położenie okręgu i prostej

### **Cele lekcji:**

- kształcenie umiejętności dostrzegania prawidłowości między długością promieni okręgów a odległością między ich środkami;
- rozwiązywanie zadań z zastosowaniem wiedzy o stycznej do okręgu;
- kształcenie umiejętności posługiwania się wiedzą o stycznej do obliczania kątów.

### **Osiągnięcia - po zakończeniu lekcji uczeń:**

- zna podstawowe pojęcia dotyczące wzajemnego położenia okręgów i prostych;
- stosuje wiedzę o położeniu okręgów względem prostych w praktyce;
- potrafi odpowiedzieć, ile punktów wspólnych mają dwa okręgi oraz okrąg i prosta;
- stosuje definicje przy rozwiązywaniu zadań.

### **Metody nauczania:**

pokaz, notatka, ćwiczenia.

### **Formy pracy:**

praca z całą klasą, praca samodzielna uczniów.

### **Środki dydaktyczne:**

e- podręcznik (rozdział 2.2), tablica interaktywna.

**Czas trwania:** 2 godziny lekcyjne.





Projekt „e-podręcznik – przyszłość szkoły zaczyna się dziś...”  
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

**Przebieg lekcji:**

Etapy lekcji (omawiane zagadnienia)	Przebieg lekcji	Element e-podręcznika
<b>Część wstępna</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Sprawdzenie obecności, sprawdzenie zadania domowego.</li> <li>2. Podanie tematu i celów lekcji.</li> <li>3. Przypomnienie najważniejszych pojęć. Przed rozpoczęciem pierwszej lekcji: okrąg, średnica, promień. Przed rozpoczęciem drugiej godziny: styczna, sieczna okręgu.</li> </ol>	

<b>Część właściwa I Wzajemne położenie dwóch okręgów</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Postawienie problemu przez nauczyciela: Jak dwa okręgi o różnych promieniach mogą być położone względem siebie? Ile mają punktów wspólnych? Uczniowie rysują w zeszytach swoje pomysły. Jeden z uczniów może narysować na tablicy możliwe położenia okręgów względem siebie.</li> <li>2. Wzajemne położenie dwóch okręgów – prezentacja animacji. Uczniowie uzupełniają swoje rysunki w zeszytach o poprawne pojęcia dotyczące nazewnictwa i zależności między odległością między środkami okręgów a długościami promieni.</li> <li>3. Rozwiązywanie ćwiczeń 1-3 z e- podręcznika. Uczniowie zapisują w zeszytach odpowiednie obliczenia i wnioski z nich wynikające. Ochotnicy rozwiązują przykłady na tablicy.</li> <li>4. Rozwiązywanie zadania 3.</li> <li>5. Rozdanie uczniom kartek z zadaniami dodatkowymi, nawiązującymi do zdobytej wiedzy w celu jej ugruntowania.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>2. Przykład 1 (ekran 1)</li> <li>3. Ćwiczenie 1 (ekran 3) ćwiczenie 2 (ekran 4), ćwiczenie 3 (ekran 5)</li> <li>4. Zadanie 3 (ekran 24)</li> <li>5. Zadania z załącznika</li> </ol>
	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Zapoznanie z wzajemnym położeniem prostej i okręgu. Wprowadzenie pojęć: cięciwa i sieczna okręgu. Nauczyciel zwraca szczególną uwagę na kąt między styczną a promieniem okręgu. Uczniowie w zeszytach szkicują schematy położenia prostej i okręgu.</li> <li>2. Rozwiązywanie ćwiczenia 4 i 5 z e- podręcznika.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Przykład 2 (ekran 6)</li> <li>2. Ćwiczenie 4 (ekran 8), ćwiczenie 5 (ekran 9)</li> </ol>
<b>III. Długość odcinków stycznych do okręgu</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Twierdzenie o odcinkach stycznych.</li> <li>2. Przeprowadzenie dowodu tego twierdzenia.</li> <li>3. Wykorzystanie zdobytej wiedzy do rozwiązywania ćwiczenia 6.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Przykład 3 (ekran 10)</li> <li>2. Dowód (ekran 11)</li> <li>3. Ćwiczenie 6 (ekran 12)</li> </ol>





Projekt „e-podręcznik – przyszłość szkoły zaczyna się dziś...”  
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

<b>Część końcowa</b> <b>Podsumowanie</b>	1. Ocenienie aktywności uczniów rozwiązujących zadania/ćwiczenia przy tablicy (z podaniem uzasadnienia).	
<b>Zadania domowe</b>	2. Po każdej lekcji na podsumowanie powtórzenie najważniejszych informacji: a) dotyczących wzajemnego położenia dwóch okręgów; b) dotyczących wzajemnego położenia dwóch okręgów; Powtórzenie (podpunkty a i b) c) utrwalenie poznanych pojęć.	2a.Ekran 2 2c.Ekran 7
	3. Po pierwszej lekcji – zadanie do domu z zadań z załącznika.	3. Zadanie z załącznika do konspektu.
	4. Po drugiej godzinie lekcyjnej – zadania do domu: zadanie 4 i 7.	4. Zadanie 4 (ekran 25), zadanie 7 (ekran 28).
	5. Pożegnanie i zakończenie lekcji.	

## ZAŁĄCZNIK DO KONSPEKTU – MATERIAŁY DODATKOWE

### Zadanie 1.

Określ wzajemne położenie dwóch okręgów, znając długości ich promieni  $a$  i  $b$  oraz odległość środków tych okręgów  $d$ :

- $a=3, b=8, d=11$
- $a=10, b=3, d=7$
- $a=4, b=5, d=8$
- $a=2, b=6, d=11$
- $a=5, b=8, d=2$
- $a=4\frac{1}{7}, b=3, d=1\frac{1}{7}$
- $a=\sqrt{5}, b=\sqrt{7}, d=10$
- $a=4, b=\frac{\sqrt{2}}{2}, d=0$

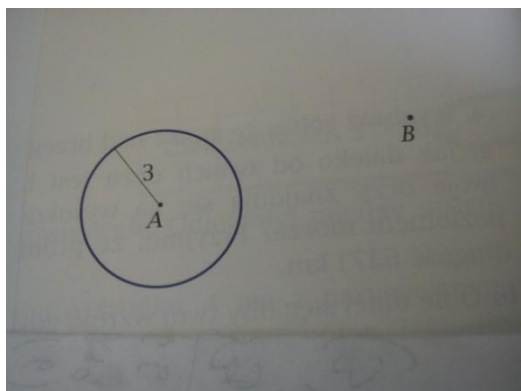
### Zadanie 2.

Przyjrzyj się rysunkowi. Odległość między punktami A i B wynosi 9. Jaki promień powinien mieć okrąg o środku B:

- by był styczny do okręgu o środku A,
- aby przecinał okrąg o środku A,
- by był rozłączny z okręgiem o środku A

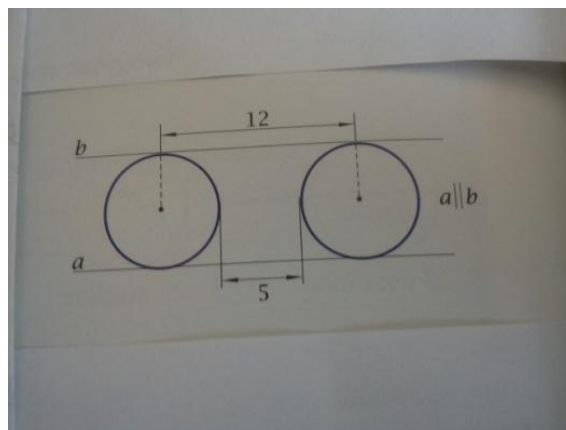
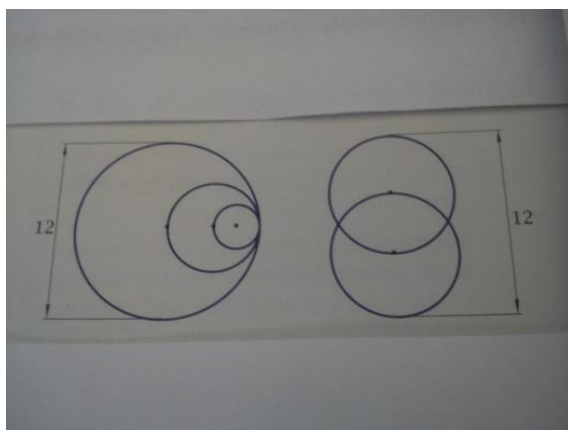


Projekt „e-podręcznik – przyszłość szkoły zaczyna się dziś...”  
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



**Zadanie 3.**

Jakie długości mają promienie narysowanych okręgów?



**Zadanie 4.**

Trzy okręgi o środkach A, B, C są parami styczne zewnętrznie. Wiedząc, że  $|AB| = 8$ ,  $|BC| = 10$ ,  $|AC| = 12$ , oblicz długości promieni tych okręgów.

**Zadanie 5.**

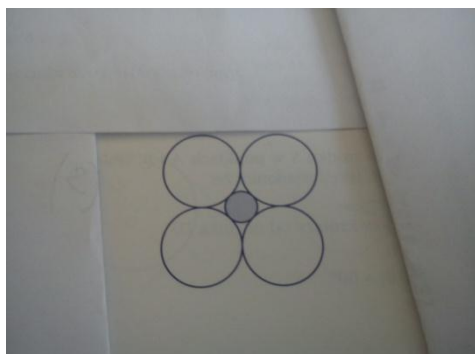
Okręgi o promieniach 10 i 15 są współśrodkowe. Jaką długość ma promień okręgu stycznego do obu tych okręgów?

**Zadanie 6.**

Na poniższym rysunku cztery jednakowe okręgi o promieniu  $r$  są parami styczne i jednocześnie są styczne do zacieniowanego koła. Jaką średnicę ma to koło?

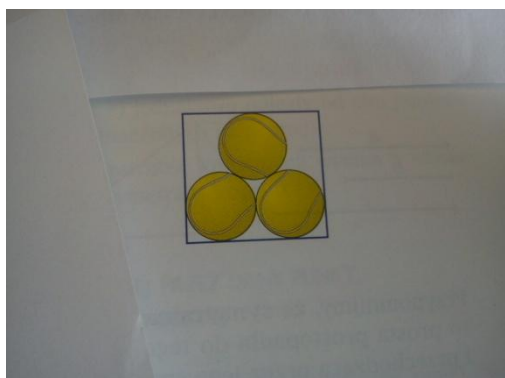


Projekt „e-podręcznik – przyszłość szkoły zaczyna się dziś...”  
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



### **Zadanie 7.**

Trzy piłki tenisowe o średnicy 6,38cm, umieszczono w pudełku w sposób pokazany na rysunku. Jakie wymiary ma to pudełko, jeśli wiadomo, że piłki nie wystają ponad nie ani ono nie wystaje ponad piłki?





Projekt „e-podręcznik – przyszłość szkoły zaczyna się dziś...”  
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

### Konspekt 13. Dział II. Planimetria

**Temat:** 2.2. (2) Okrąg i koło

**Temat zajęć:** 1. Kąty wpisane i kąty środkowe

2. Zastosowanie twierdzeń o kątach wpisanych i środkowych w okręgu

#### Cele lekcji:

- kształcenie umiejętności dostrzegania kątów opartych na tych samych łukach;
- rozwiązywanie zadań z zastosowaniem twierdzeń o kątach w okręgu;
- posługiwanie się zależnościami w obliczeniach kątów.

#### Osiągnięcia - po zakończeniu lekcji uczeń:

- umieszcza kąty wpisane i środkowe w okręgu;
- stosuje zdobytą wiedzę w rozwiązywaniu zadań;
- potrafi obliczyć miarę zaznaczonego kąta w okręgu;
- wskazuje łuki, na których są oparte narysowane kąty i stosuje odpowiednie twierdzenia.

#### Metody nauczania:

pokaz, notatka, ćwiczenia.

#### Formy pracy:

praca z całą klasą, praca samodzielna uczniów.

#### Środki dydaktyczne:

e- podręcznik (rozdział 2.2), tablica interaktywna, przybory do konstrukcji.

**Czas trwania:** 2 godziny lekcyjne.

#### Przebieg lekcji:

Etapy lekcji (omawiane zagadnienia)	Przebieg lekcji	Element e-podręcznika
Część wstępna	4. Sprawdzenie obecności, sprawdzenie zadania domowego. 5. Podanie tematu i celów lekcji. 6. Przypomnienie definicji. Przed 1 lekcją: cięciwy	





Projekt „e-podręcznik – przyszłość szkoły zaczyna się dziś...”  
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

	okręgu i łuku okręgu. Przed drugą lekcją: twierdzenia o kątach wpisanych i środkowych.	
<b>Część właściwa I Wprowadzenie definicji kąta wpisanego i środkowego</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Wprowadzenie definicji kąta środkowego i kąta wpisanego w okrąg. Uczniowie sporządzają notatkę w zeszytach.</li> <li>2. Wykorzystanie wiedzy o kątach wpisanych w praktyce – rozwiązywanie ćwiczenia 7 na tablicy interaktywnej.</li> <li>3. Kąty wyznaczone przez łuk okręgu – teoria. Uczniowie rysują po dwa przykłady kątów i zapisują wnioski.</li> <li>4. Rozwiązywanie zadania na tablicy interaktywnej - zaznaczanie łuków, na których oparte są kąty – ćwiczenie 8.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Teoria (ekran 13)</li> <li>2. Ćwiczenie 7 (ekran 15)</li> <li>3. Przykład 5 (ekran 16)</li> <li>4. Ćwiczenie 8 (ekran 17)</li> </ol>
<b>II Twierdzenie o kącie wpisanym i środkowym</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Zapoznanie z twierdzeniem o kącie wpisanym i środkowym opartym na tym samym łuku. Dowód twierdzenia. Ważne wnioski z twierdzenia.</li> <li>2. Rozwiązywanie ćwiczeń z wykorzystaniem poznanej twierdzenia - ćwiczenie 9.</li> <li>3. Wspólne rozwiązywanie zadania 5 - nauczyciel zwraca uwagę na poprawny zapis poszczególnych etapów rozwiązywania zadania.</li> <li>4. Rozwiązanie zadania 1 z załącznika do konspektu – nauczyciel rozdaje kartki .</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Twierdzenia, wnioski (ekran 18)</li> <li>2. Ćwiczenie 9 (ekran 20)</li> <li>3. Zadanie 5 (ekran 26)</li> <li>4. Zadanie 1 (załącznik do konspektu)</li> </ol>
<b>III Konstrukcja stycznej do okręgu przechodzącej przez dany punkt</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Zapoznanie uczniów z konstrukcją stycznej do okręgu przechodzącej przez punkt leżący poza nim.</li> <li>2. Uczniowie samodzielnie wykonują rysunek w zeszytach – można pokazać sposób konstrukcji w animacji.</li> <li>3. Wspólne rozwiązywanie zadania 4 – uczniowie próbują znaleźć jego rozwiązanie. Kolejne etapy rozwiązywania są przedstawione na tablicy interaktywnej.</li> <li>4. Rozwiązywanie zadań z załącznika.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Przykład 6 (ekran 19)</li> <li>2. Przykład 6 (ekran 19)</li> <li>3. Zadanie 4 (ekran 25)</li> <li>4. Zadanie 2, 3</li> </ol>



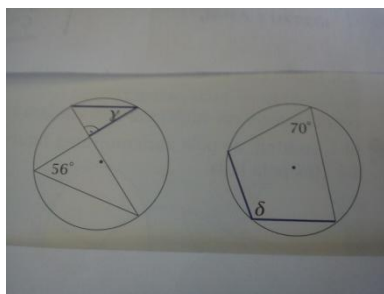
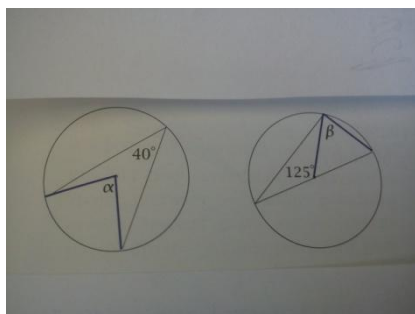
Projekt „e-podręcznik – przyszłość szkoły zaczyna się dziś...”  
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

<b>Część końcowa</b> <b>Podsumowanie</b>	1. Ocenienie aktywności uczniów rozwiązujących zadania/ćwiczenia przy tablicy (z podaniem uzasadnienia).	
<b>Zadania domowe</b>	2. Na koniec lekcji - przypomnienie najważniejszych informacji: d) definicji kąta wpisanego i środkowego, e) podstawowych związków między kątami opartymi na tych samych łukach. 3. Zadanie domowe: a) Po pierwszej lekcji - dokończyć zadania z aneksu rozdane na lekcji (zadanie 1). b) Po drugiej lekcji - ćwiczenie 10, zadanie 1, 2, 6, 8. 4. Pożegnanie i zakończenie lekcji.	3.a) Zadanie 1 (załącznik)  b) Ćwiczenie 10 (ekran 21), zadanie 1 (ekran 22), zadanie 2 (ekran 23), zadanie 6 (ekran 27), zadanie 8 (ekran 28)

#### ZAŁĄCZNIK DO KONSPEKTU – MATERIAŁY DODATKOWE

##### Zadanie 1.

Znajdź miary kątów  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  i  $\delta$ .

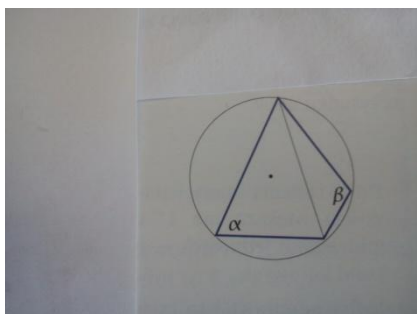


##### Zadanie 2.

Na podstawie rysunku uzasadnij, że suma miar kątów wpisanych  $\alpha$  i  $\beta$  opartych na tej samej cięciwie jest równa  $180^\circ$ .



Projekt „e-podręcznik – przyszłość szkoły zaczyna się dziś...”  
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



### Zadanie 3.

Jaka jest miara kąta wpisanego w okrąg, opartego na cięciwie równej promieniowi tego okręgu? (Uwaga: zadanie ma dwa rozwiązania).

### Zadanie 4.

Oblicz miarę zaznaczonych kątów:

