I KONKURS PROFILU MATEMATYCZNEGO

ANALOGIA - TO PROSTE

I. DANE UCZNIA:

Imię i nazwisko ………………………………………………………

Numer telefonu ………………………………

Adres mailowy ……………………………………….

II. DANE SZKOŁY (LCA):

Nazwa szkoły ………………………………………………………………………………

Adres szkoły ……..

Imię i nazwisko nauczyciela - opiekuna grupy …………………………………………………………….

III. OCENA PRACY KONKURSOWEJ

zadania	1a)	1b)	2a)	2b)	3	4a)	4b)	5
liczba przyznanych punktów								

………………………………….. Danuta Nowicka

………………………………….. Elżbieta Stróżecka

………………………………….. Agnieszka Banaszak-Piechowska

………………………………….. Mariusz Adamczak

Bydgoszcz, dnia maja 2010.

ZADANIE 1.

A. WPROWADZENIE

Aby obliczyć przybliżoną wartość pierwiastka kwadratowego, można postępować zgodnie z poniższym schematem rozumowania.

Przypuśćmy, że mamy obliczyć $\sqrt{2}$.

KROK 1. Wiemy, że $1 < \sqrt{2} < 2$, zatem możemy zapisać

$\sqrt{2} = 1 + x$, gdzie $x \in (0, 1)$, skąd otrzymujemy

$2 = (1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2$.

KROK 2. W powyższym równaniu pomijamy x^2, ponieważ x^2 jest mniejsze od x

dla $x \in (0, 1)$. Otrzymujemy $2 \approx 1 + 2x$ czyli $x \approx \frac{1}{2}$

Mamy zatem **pierwsze przybliżenie** postaci $\sqrt{2} \approx 1\frac{1}{2}$.

KROK 3. W celu dokładniejszego przybliżenia przyjmujemy

$\sqrt{2} \approx 1\frac{1}{2} + y$, gdzie $y \in (-1, 1)$,

skąd otrzymujemy $2 \approx (1\frac{1}{2} + y)^2 = \frac{9}{4} + 3y + y^2$

KROK 4. Podobnie jak w kroku 2 pomijamy y^2 i otrzymujemy

$2 \approx \frac{9}{4} + 3y$, skąd $y \approx -\frac{1}{12}$.

Mamy zatem **drugie przybliżenie** postaci $\sqrt{2} \approx 1\frac{1}{2} - \frac{1}{12} = 1\frac{5}{12}$.

Przy wyznaczaniu każdego następnego przybliżenia powtarzamy analogiczne czynności jak w kroku 3 i w kroku 4.

B. POLECENIE

Stosując powyższą metodę wyznacz pierwsze i drugie przybliżenie $\sqrt{20}$, a następnie otrzymany wynik porównaj z wynikiem otrzymanym przy pomocy kalkulatora.

C. ROZWIĄZANIE: (na odwrocie strony)

ZADANIE 2.

A. WPROWADZENIE

Aby sprawdzić, czy liczba $A=\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}$ jest całkowita wykorzystuje się wzory skróconego mnożenia oraz związek $\sqrt{x^2}=|x|$, który jest prawdziwy dla każdej liczby rzeczywistej *x*.

A mianowicie

$$A=\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}=\sqrt{5+2\sqrt{5}+1}-\sqrt{5}=\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}-\sqrt{5}=\left|\sqrt{5}+1\right|-\sqrt{5}=\sqrt{5}+1-\sqrt{5}=1.$$

Zatem liczba *A* jest całkowita.

B. POLECENIE

Stosując tę metodę rozwiąż poniższe zadania.

a) Udowodnij, że $\sqrt{7-2\sqrt{6}}-\sqrt{6}=-1.$

b) Zbadaj, czy liczba $\sqrt{\sqrt{11+2\sqrt{10}}-\sqrt{10}+2\sqrt{5}+5}-\sqrt{5}$ jest całkowita?

C. ROZWIAZĄNIE:

ZADANIE 3.

A. WPROWADZENIE

Chcąc wykazać, że równanie $x^2+y^2-2x+6y+11=0$ nie ma rozwiązania staramy się przedstawić lewą jego stronę w postaci sumy kwadratów.

A mianowicie

$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 + 1 = 0$, stąd $(x-1)^2 + (y+3)^2 = -1$.

Zauważmy, że lewa strona ostatniego równania jest nieujemna, a prawa jest ujemna. Zatem otrzymaliśmy sprzeczność, która oznacza, że dane równanie nie ma rozwiązania.

B. POLECENIE

Stosując powyższą metodę udowodnij, że nierówność $4x^2 + 9y^2 - 4x - 12y + 7 \le 0$ nie jest spełniona przez żadne liczby rzeczywiste *x*, *y*.

C. ROZWIĄZANIE:

ZADANIE 4.

A. WPROWADZENIE

Z dwóch liczb rzeczywistych *a, b* możemy utworzyć dwie różne pary, a mianowicie parę (*a, b*) oraz parę (*b, a*). Pary różnią się porządkiem elementów. Równość między nimi zachodzi tylko w jednym wypadku, gdy *a* = *b.* Zbiór wszystkich możliwych par liczb rzeczywistych oznaczamy przez R^2.
W zbiorze R^2 wykonujemy dodawanie i mnożenie według następujących reguł:

$(a, b) + (c, d) = (a + c,\ b + d)$

$(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c - b \cdot d,\ a \cdot d + b \cdot c)$

Na przykład:

(2, -3) + (5, 6) = (7, 3)

(2, -3) · (5, 6) = (10 +18, 12-15) = (28, -3)

B. POLECENIA

a) Dodaj i pomnóż punkty P = (-1, 4), Q = (3, 2), a następnie wynik zinterpretuj geometrycznie w układzie współrzędnych.
b) Dane są punkty A = (5, -3), B = (2, 5), C = (-2, -3).
Oblicz $A^2 - B \cdot C$ i wynik zinterpretuj geometrycznie w układzie współrzędnych.

C. ROZWIĄZANIE

ZADANIE 5.

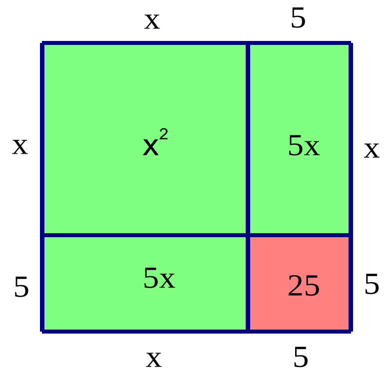
A. WPROWADZENIE

Dodatnie rozwiązanie pewnych równań kwadratowych można łatwo uzyskać stosując metodę geometryczną używaną w Średniowieczu przez matematyków arabskich.

Dodatni pierwiastek równania kwadratowego $x^2 + 10x = 39$ otrzymamy wykonując następujące czynności.

1) Rysujemy kwadrat K_1 o boku równym x.
2) Obliczamy połowę współczynnika stojącego w równaniu przy niewiadomej x, a mianowicie $\frac{10}{2} = 5$.
3) Do dwóch sąsiednich boków kwadratu K_1 dorysowujemy prostokąty o bokach równych x oraz 5.
4) Pole otrzymanej w ten sposób figury F jest równe $x^2 + 2 \cdot 5x = 39$.
5) Figurę F uzupełniamy kwadratem o boku równym 5, tworząc kwadrat K o boku x + 5.

6) Pole kwadratu K wynosi $39 + 25 = 64$.
7) Obliczamy: $(x+5)^2 = 64$, skąd $x + 5 = 8$. A więc ostatecznie $x = 3$.



B. POLECENIE

Wykorzystując powyższą metodę rozwiąż równanie $x^2 + 6x - 91 = 0$

C. ROZWIĄZANIE: (na odwrocie strony)