MATEMATYKA
INNEGO WYMIARU

Zbiór zadań dla nauczycielek i nauczycieli matematyki uczących w szkołach ponadgimnazjalnych

Dariusz Kulma

IV ETAP EDUKACYJNY

ZADANIA DLA SZKÓŁ PONADGIMNAZJALNYCH

ELITMAT 2011

IV ETAP EDUKACYJNY
ZADANIA DLA SZKÓŁ PONADGIMNAZJALNYCH

Autorzy:
Dariusz Kulma we współpracy ze Sławomirem Dziugłem

Wydanie 1

Wydawca:
Firma Edukacyjno-Wydawnicza ELITMAT
ul. Plac Kilińskiego 7/4
05-300 Mińsk Mazowiecki
www.elitmat.pl

ELITMAT
FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA

Skład i łamanie:
StudioDan.pl

Druk i oprawa:
Drukarnia Beltrani
ul. Śliwkowa 1, 31-982 Kraków

ISBN 978-83-924819-0-6

Spis treści

WSTĘP 5

DZIAŁ I
ELEMENTY LOGIKI I TEORII ZBIORÓW 7

DZIAŁ II
ZBIÓR LICZB RZECZYWISTYCH 9

DZIAŁ III
WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE 19

DZIAŁ IV
RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI 25

DZIAŁ V
FUNKCJE 31

DZIAŁ VI
CIĄGI 35

DZIAŁ VII
TRYGONOMETRIA 39

DZIAŁ VIII
PLANIMETRIA I GEOMETRIA W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH 43

DZIAŁ IX
STEREOMETRIA 55

DZIAŁ X
KOMBINATORYKA, RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA I ELEMENTY STATYSTYKI 59

DZIAŁ XI
RACHUNEK RÓŻNICZKOWY I CAŁKOWY 65

DZIAŁ XII
ŁAMIGŁÓWKI LOGICZNE 69

WSTĘP

Drogie Nauczycielki i Nauczyciele – ELITMAT LEADERZY

Z przyjemnością przekazujemy Państwu zbiór zadań do pracy z uczniami na prowadzonych przez Państwa zajęciach w grupach ELITMAT TEAM. Wszystkie zadania zostały podzielone zgodnie z proponowanym przez nas rozkładem treści programowych, dzięki czemu mają Państwo możliwość wyboru konkretnych zadań podczas omawiania poszczególnych zagadnień. Mamy nadzieję, że taka forma ułatwi Państwu pracę i uatrakcyjni zajęcia. Poza tym poprzez treść nawiązującą do wirtualnej matematycznej krainy Kwadratolandii zwiększy zainteresowanie Państwa uczniów i uczennic tym wspaniałym przedmiotem, jakim jest matematyka.
Chcielibyśmy zwrócić Państwa uwagę na fakt, że zbiór zawiera zadania zamknięte wielokrotnego wyboru, co oznacza, że wszystkie lub część odpowiedzi może być prawidłowych, ale również żadna z odpowiedzi może nie być poprawna. Taka forma wymaga od uczniów jeszcze większego zastanowienia się nad danym problemem i rozwija umiejętność wykorzystywania w jednym zadaniu wiedzy z różnych zagadnień. Co więcej, przygotowuje ucznia do formy zadań stosowanej w „Matematycznych Mistrzostwach Polski Dzieci i Młodzieży”.

Życzymy owocnej pracy!

DZIAŁ I

ELEMENTY LOGIKI I TEORII ZBIORÓW

MATCYFRZAK

1. Dane są dwa zdania: p – każdy okrąg wpisany w trójkąt prostokątny ma obwód większy od sumy przyprostokątnych, q – pole koła wpisanego w trójkąt prostokątny stanowi nie więcej niż 50% pola trójkąta. Prawdziwe będą wtedy wyrażenia:

A. $p \Rightarrow q$ **B.** $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$

C. $p \vee (p \Leftarrow q)$ **D.** $(p \Rightarrow (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$

2. Dane są dwa zdania: p – suma dwóch liczb niewymiernych jest liczbą niewymierną, q – kwadrat liczby niewymiernej jest liczbą wymierną. Prawdziwe będą wtedy wyrażenia:

A. $p \Rightarrow q$ **B.** $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$

C. $p \vee (p \Leftarrow q)$ **D.** $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

3. Dany jest wielomian $W(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$ oraz zdania: p – rozwiązaniem wielomianu W(x) jest wymierna liczba ujemna, q – reszta z dzielenia wielomianu W(x) przez $G(x)=3x+6$ jest palindromem, czyli liczbą, która pisana od początku czy od końca jest taka sama. Prawdziwe jest wyrażenie:

A. $p \Rightarrow q$ **B.** $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$

C. $p \wedge (p \Leftarrow q)$ **D.** $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

Rozwiązanie: Z twierdzenia Bézout wynika, że jedynymi rozwiązaniami może być 1 lub –1. Jednak $W(-1) \neq 0$ oraz $W(1) \neq 0$, więc wielomian nie ma rozwiązań wymiernych, czyli $p = 0$. Reszta z dzielenia W(x) przez G(x) równa jest 11, czyli jest palindromem, a więc $q = 1$.

4. Dane są zdania: p – każda figura foremna ma tyle osi symetrii, ile boków, lub połowę tej liczby, q – kolejne kwadraty liczb: 11,111,1111, … do liczby złożonej z 9 jedynek są palindromami, czyli liczbami, które pisane od początku czy od końca są takie same. Prawdziwe jest wyrażenie:

A. $p \Rightarrow q$ **B.** $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$

C. $p \wedge (p \Leftarrow q)$ **D.** $(p \Rightarrow q) \Leftarrow q$

DZIAŁ II

ZBIÓR LICZB RZECZYWISTYCH

RÓŻNICZKA

5. W Kwadratolandii można spotkać małe skrzaty Mroczusie. Żywią się one tylko liczbami pierwszymi, inne liczby po ich dotknięciu przyjmują kolor pomarańczowy. Jeśli widzą liczbę, to nie mogą powstrzymać się, by nie spowodować jakiejś jej zmiany. Wyjątkiem są jednak liczby pseudopierwsze, czyli postaci $n|2^n - 2$. Liczby pseudopierwsze mogą być również pierwszymi. Wtedy skrzat nie uważa już tej liczby za pierwszą. Skosztowanie liczby pseudopierwszej przez Mroczusia spowodowałoby nagły atak trygonometrycznych konwulsji. Liczby te również nie zmieniają koloru na pomarańczowy, nawet po dotknięciu przez tysiące stworków. Niesforny skrzat Mroczuś wkradł się na wieżę z zegarem. Po tej wizycie liczby godzinowe uległy pewnym zmianom i można teraz stwierdzić, że:

A. żadna liczba nie zniknęła, ale połowa jest pomarańczowa

B. liczba 7 jest pomarańczowa, a zniknęły liczby 2 i 3

C. liczby wskazujące godziny nieparzyste pozostały nienaruszone

D. liczba 11 ma taki sam kolor jak liczba 5

Rozwiązanie: Liczby pseudopierwsze na zegarze to 1, 2, 3, 5, 7, 11, czyli te liczby nie zmieniają koloru. Pozostałe liczby 4, 6, 8, 9, 10, 12 nie są ani pierwsze, ani pseudopierwsze, więc zmienią kolor na pomarańczowy.

6. Czarny Septylion zadał zadanie jednej ze swoich ofiar – porwanemu skrzatowi Skwietakowi. Oto ono: dla pewnej liczby naturalnej n ułamek $\frac{6n+7}{5n+4}$ jest skracalny. Liczba, przez którą ten ułamek można skrócić, to:

A. 9 **B.** 13

C. 7 **D.** 11

Rozwiązanie: Załóżmy, że istnieje liczba $k>1$ taka, że $k \mid 6n+7$ oraz $k \mid 5n+4$. Wynika z tego, że $k \mid 5(6n+7)-6(5n+4)$. Po redukcji $k|11$, a więc jedynym dzielnikiem jest liczba 11.

7. Wyrażenie $9^6+9^5+9^4+9^3+9^2+9$ jest podzielne przez:

A. 10 **B.** 90

C. tylko przez 9 **D.** 3

8. Ostatnią cyfrą wyrażenia $3^{500} + 5^{300}$ jest:

A. 8 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 6

9. Ostatnią cyfrą wyrażenia $3^{700} + 5^{300} + 7^{500}$ jest:

A. 7 B. 5 C. 1

D. trzecia część sumy trzech pierwiastków trzeciego stopnia z 343

10. Liczby $\frac{626262}{939393}$ i $\frac{252525}{353535}$

A. są równe

B. obie są ułamkami okresowymi

C. mają własność $\frac{626262}{939393} < \frac{252525}{353535}$

D. różnią się o $\frac{1}{21}$

11. Dziesięciokrotność iloczynu sześcianu 1000 trylionów przez odwrotność kwadratu miliona bilionów wynosi:

A. 10^{100} B. 10^{27}

C. 10^{28} D. 10^{99}

12. Liczby $\frac{1212}{4242}$ i $\frac{1515}{5555}$

A. są równe

B. obie są ułamkami okresowymi

C. mają własność $\frac{1212}{4242} < \frac{1515}{5555}$

D. różnią się o $\frac{1}{77}$

13. Suma czterocyfrowych liczb naturalnych mniejszych od 2005:

A. jest równa 3 011 510 B. jest równa 3 010 008

C. jest większa od kwadratu liczby 1750 D. jest nieparzysta

Rozwiązanie: Brak poprawnej odpowiedzi.

14. Liczb czterocyfrowych, których dziewiąta część jest także liczbą czterocyfrową składających się z tych samych cyfr, ale pisanych w odwrotnym porządku jest:

A. pięć B. nieskończenie wiele

C. nie ma takich liczb D. dokładnie dwie

15. Po dwóch 10 % podwyżkach i dwóch 10 % obniżkach cena towaru:

A. nie zmieni się
B. zmieni się dokładnie o 2%
C. zmieni się o 1,99%
D. będzie większa niż początkowa

16. Dane są wyrażenia: $27^{\frac{1}{3}}$, $3^{\frac{4}{3}}$, $0{,}25^{\frac{-2}{3}}$.

A. Największą liczbą jest $27^{\frac{1}{3}}$
B. Najmniejszą liczbą jest $0{,}25^{\frac{-2}{3}}$
C. Najmniejszą liczbą jest $27^{\frac{1}{3}}$
D. Średnia arytmetyczna jest mniejsza od 8

17. Ostatnią cyfrą wyrażenia $2007^{2006^{2005^{2^{1}}}}$ jest:

A. 7
B. 5
C. 1
D. 3

Rozwiązanie: Sprawdzimy ostatnie cyfry kolejnych potęg liczby 2007.
2007^1 to ostatnia cyfra 7
2007^2 to ostatnia cyfra 9
2007^3 to ostatnia cyfra 3
2007^4 to ostatnia cyfra 1
2007^5 to ostatnia cyfra 7 i dalej 9, 3, 1, 7 itd.
Wykładnik jest zawsze podzielny przez 4, więc ostatnią cyfrą wyrażenia będzie 1.

18. Liczba $10^{2008}+21$ podzielna jest przez:

A. 3
B. żadną z liczb poza samą sobą i jedynką
C. 13
D. 11

Rozwiązanie:
Liczba jest podzielna przez 11 i 13, jeśli dzieli się przez 143. Własność taką posiadają liczby, w których różnica między sumą jej odcinków trzycyfrowych stojących na miejscach nieparzystych (patrząc od prawej strony) a sumą jej odcinków trzycyfrowych stojących na miejscach parzystych (patrząc od prawej strony) jest wielokrotnością 143 lub wynosi 0. W liczbie $10^{2008}+21$ mamy cyfrę jeden, 2006 zer oraz cyfry 2 i 1. Łącznie 2009 cyfr, czyli grupując liczbę w postaci trójek, otrzymamy $10\,\underbrace{000\ldots000000}_{668\text{ trzycyfrowych liczb}}\,021$, *a więc* $(000+000+\ldots+000+021)-(10+000+\ldots+000+000)=11$

Liczba nie dzieli się przez 13. Liczba będzie podzielna przez 11, jeśli odejmiemy od sumy cyfr znajdujących się na miejscach parzystych sumę znajdującą się na miejscach nieparzystych – otrzymamy wielokrotność liczby 11 lub 0. W naszym przypadku: (1+0+...+1) – (0+0+...+2) = 0, a więc liczba jest podzielna przez 11.

19. Cyfrą jedności liczby $2003^{2004}+2005^{2006}+2007^{2008}$ jest:

A. 1 B. 9 C. 3 D. 7

Rozwiązanie: Rozpatrzmy ostatnie cyfry każdego ze składników sumy.
W pierwszym składniku:
2003^1 to ostatnia cyfra 3, 2003^2 to ostatnia cyfra 9, 2003^3 to ostatnia cyfra 7, 2003^4 to ostatnia cyfra 1
2003^5 to ostatnia cyfra 3 i następnie 9,7,1,3 itd., czyli cyfry powtarzają się co czwarty wykładnik.
A więc ostatnia cyfra wyrażenia 2003^{2004} to 1, gdyż liczba 2004 dzieli się na 4, a więc ostatnia cyfra jest taka sama jak w wyrażeniu 2003^4.
W drugim składniku: W wyrażeniu 2005^{2006} zawsze ostatnią cyfrą będzie 5.
W trzecim składniku:
2007^1 to ostatnia cyfra 7, 2007^2 to ostatnia cyfra 9, 2007^3 to ostatnia cyfra 3, 2007^4 to ostatnia cyfra 1
2007^5 to ostatnia cyfra 7 i następnie 9,3,1,7 itd.
Podobna sytuacja jak przy pierwszym składniku. A więc analogicznie wyrażenie 2007^{2008} ma ostatnią cyfrę równą 1. Suma cyfr ostatnich 1+5+1=7, a więc ostatnią cyfrą całego wyrażenia jest 7

20. Liczba podzielna przez 11 to:

A. –1256789 B. $0{,}011^{-2}$
C. 111111 D. 123123123

21. Czarny Septylion – najgroźniejszy matematyk Kwadratolandii uwielbia wielkie liczby. Najczęściej z wielkich liczb znamy milion, miliard czy bilion. Inne ciekawe nazwy to np. oktylion to 10^{48}, nonylion 10^{54}, decylion 10^{60}, googol 10^{100}, a centylion 10^{600}. Wynikiem działania wymyślonego przez Czarnego Septyliona $\dfrac{decylion^{10}\cdot googol^{6}\cdot bilion^{10}}{nonylion^{10}\cdot decylion^{3}}$ jest:

A. sześcian dziesiątej potęgi biliona nonylionów
B. centylion
C. kwadrat dziesiątej potęgi miliona oktylionów
D. googol do kwadratu

22. Podane liczby podzielne przez 7, niezależnie od tego, jakimi cyframi są A i B, to:

A. ABABAB B. AABBAB C. BBBAAA D. ABBAAB

23. Dana jest liczba sześciocyfrowa CBACBA. Samogłoska oznacza cyfrę parzystą, a spółgłoska nieparzystą. Liczba ta jest podzielna przez:

A. 22 **B.** 13 **C.** 11 **D.** 26

Rozwiązanie: Dana jest liczba CBACBA
A – liczba parzysta
B, C – liczby nieparzyste
Wynika z tego, że liczba CBACBA jest parzysta.
Z własności podzielności przez 11 różnica sumy liczb na miejscach parzystych i sumy liczb na miejscach nieparzystych równa jest (C + A + B) – (B + C + A) = 0, czyli liczba podzielna jest przez 11, a więc również przez 22. Z własności podzielności przez 13 sprawdzamy podzielność różnicy CBA-CBA=0, czyli liczba podzielna jest przez 13, więc również przez 26.

24. Liczba $\log_{16}(2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \ldots \cdot 2^{2009})$ jest:

A. całkowita **B.** wymierna
C. niedodatnia **D.** parzysta

Rozwiązanie: $\log_{16}(2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \ldots \cdot 2^{2009}) = \log_{16} 2^{\frac{1+2009}{2}\cdot 2009} = \log_{16} 2^{1005\cdot 2009} = 1005 \cdot 2009 \cdot \log_{16} 2 = 1005 \cdot 2009 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1005\cdot 2009}{4} \notin C$

25. Liczb naturalnych n takich, że obie liczby postaci: $\frac{1}{n}$ i $\frac{1}{n+1}$ mają skończone rozwinięcia, jest:

A. 2 **B.** 3
C. 0 **D.** nieskończenie wiele

26. Reszta z dzielenia liczby 2009^3 przez 13:

A. wynosi $3375^{0,(3)}$ **B.** jest podzielna przez 5
C. wynosi 5 **D.** jest liczbą pierwszą

Rozwiązanie: Najbliższą mniejszą liczbą od 2009, ale podzielną przez 13 jest liczba 2002. Zapiszmy wyrażenie 2009^3 *w sposób:* $(2002+7)^3=2002^3+3 \cdot 2002^2 \cdot 7+3 \cdot 2002 \cdot 7^2+7^3$. *Każde z wyrażeń* 2002^3; $3 \cdot 2002^2 \cdot 7$; $3 \cdot 2002 \cdot 7^2$ *jest podzielne przez 2002, a więc i przez 13. Resztę z dzielenia ustalimy więc wykonując dzielenie* $7^3:13=343:13=26$ *i reszta 5.*

27. Rycerz Analfabetus, by zdobyć rękę królewny Martolinki Cyferki, zaczął masowo rozwiązywać zadania. Na razie skupił się na liczbach niewymiernych. Pomóż mu i wskaż, które zdania są nieprawdziwe:

A. suma dwóch liczb niewymiernych jest zawsze niewymierna

B. iloczyn dwóch liczb niewymiernych jest zawsze liczbą niewymierną

C. iloraz dwóch liczb niewymiernych może być wymierny

D. różnica dwóch liczb niewymiernych jest wymierna

Rozwiązanie: Zdania nieprawdziwe:
A. Suma dwóch liczb niewymiernych jest zawsze niewymierna.
Przykład: Dane są dwie liczby niewymierne $a=\sqrt{2}-1$ *i* $b=3-\sqrt{2}$
$a+b=\sqrt{2}-1+3-\sqrt{2}=2$*, a więc wynikiem działania jest liczba wymierna.*
B. Iloczyn dwóch liczb niewymiernych jest zawsze liczbą niewymierną.
Przykład: Dane są dwie liczby $a=3\sqrt{2}$ *i* $b=-\sqrt{2}$
$a\cdot b=3\sqrt{2}\cdot(-\sqrt{2})=-6$*, a więc wynikiem jest liczba wymierna.*
D. Różnica dwóch liczb niewymiernych jest wymierna.
Przykład: Dane są dwie liczby $a=\sqrt{2}$ *i* $b=\sqrt{3}$
$a-b=\sqrt{2}-\sqrt{3}$*, a więc liczba niewymierna.*

28. Największy mat-przestępca Kwadratolandii, Czarny Septylion, uwielbia zadawać swoim porwanym ofiarom zadania wymagające żmudnych obliczeń. Nawet jego imię Septylion to przecież duża liczba równa 10^{42}. Nazwy wielkich liczb ułożone są wg schematu: milion to 10^6, miliard 10^9, bilion 10^{12}, biliard 10^{15}, potem są trylion, tryliard, kwadrylion, kwadryliard, kwintylion, kwintyliard, sekstylion, sekstyliard itd. w tej samej zależności. Wartość miliarda kwintyliardów podzielona przez odwrotność tryliona kwadrylionów jest równa:

A. sześcianowi kwadryliona

B. ósmej potędze miliarda

C. iloczynowi trzech kwadrylionów

D. kwadratowi sekstyliona

Rozwiązanie: Miliard kwintyliardów podzielony przez odwrotność tryliona kwadrylionów można przedstawić w sposób :
$10^9\cdot 10^{33}:\frac{1}{10^{18}\cdot 10^{24}}=10^{42}\cdot 10^{42}=10^{84}$
Wszystkie liczby w odpowiedziach to 10^{77}*. Brak poprawnej odpowiedzi.*

29. Liczby zespolone mają postać $z=a+bi$, gdzie $i^2=-1$. Wartość a nazywamy rzeczywistą, a wartość b urojoną. Dzięki stosowaniu liczb zespolonych można rozwiązywać wiele równań, które nie mają rozwiązania w zbiorze liczb rzeczywistych. Równanie $x^2=-4$ w zbiorze R nie ma rozwiązań, ale gdy zastosujemy liczby zespolone (podstawiając za

–1 liczbę i^2), to otrzymamy $x^2=4i^2$, a takie równanie ma rozwiązania urojone: $x_1=2i$ oraz $x_2=-2i$. Równanie $4x^3-12x^2+9x-27=0$ ma:

A. 3 rozwiązania rzeczywiste

B. 2 rozwiązania rzeczywiste i jedno urojone

C. tylko rozwiązanie $x_1=1{,}5i$

D. rozwiązania: $x_1=1{,}5i$; $x_2=-1{,}5i$; $x_3=3$

Rozwiązanie: Rozwiążmy równanie:

$4x^3-12x^2+9x-27=0$

$4x^2(x-3)+9(x-3)=0$

$(4x^2+9)(x-3)=0$

$4x^2+9=0$ $\qquad$ $x_3=3$

$4x^2=-9$ $\qquad$ *rozwiązanie*

$x^2=\frac{9}{4}i^2$ $\qquad$ *rzeczywiste*

$x_1=\frac{3}{2}i \quad \vee \quad x_2=-\frac{3}{2}i$

Są to rozwiązania zespolone.

30. Najgroźniejszy matprzestępca Kwadratolandii Czarny Septylion dał zadanie swojej kolejnej ofierze. Nieszczęśnik miał policzyć, ile różnych dzielników ma liczba jego majątku, który obecnie wynosi 30030 talarów. Dzielników tych jest:

A. 63 **B.** co najmniej kwadrat liczby 8

C. x dla $x \in (100, 200)$ **D.** 64

30030	2
15015	3
5005	5
1001	11
91	7
13	13
1	

Rozwiązanie: Czyli $30030 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 13$.
Dzielnikami są więc liczby 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13 oraz wszystkie liczby, które są iloczynami tych dzielników. Istnieją więc 64 możliwości.

31. W Kwadratolandii każde słowo mieszkańcy przeliczają na konkretną wartość. Jeśli samogłoski oznaczają cyfry parzyste, a spółgłoski cyfry nieparzyste, to liczba KKUUDDEEFFAA jest podzielna przez:

A. 4 **B.** 11 **C.** 22 **D.** 9

Rozwiązanie: Liczba KKUUDDEEFFAA jest na pewno liczbą parzystą, czyli podzielną przez 2 oraz 11, gdyż różnica sumy cyfr na miejscach parzystych i sumy cyfr na miejscach nieparzystych jest równa zero. Wynika z tego, że liczba podzielna jest przez 11, a więc i przez 22. Nie da się jednoznacznie odpowiedzieć, czy liczba będzie podzielna przez 4 i 9.

32. Zakrzewek zastanawiał się ostatnio, ile jest par liczb (x, y), że NWD (x, y) $=2$ oraz $x \cdot y = 120$ i $x > y$. Wyszło mu, że par tych jest:

A. 2 B. więcej niż 3 C. 8 D. 4

Rozwiązanie: Najpierw wypiszmy wszystkie iloczyny, gdzie $x \cdot y = 120$ i $x > y$.
Otrzymamy następujące pary (x, y):
$(x, y) = \{(120,1);(60,2);(40,3);(30,4);(24,5);(20,6);(15,8);(12,10)\}$
Pary liczb, gdzie NWD(x,y)=2, to (60,2);(30,4);(20,6);(12,10).

33. Całkowity majątek Kwadratolandii wynosi 10^{40} dukatów, zaś Trójkolandii 70^{20} dukatów. Wynika z tego, że:

A. Kwadratolandia jest bogatszą krainą
B. Trójkolandia jest bogatszą krainą
C. majątek Trójkolandii jest mniejszy niż septylion dukatów
D. majątek Kwadratolandii jest większy niż 1000 sekstylionów dukatów

Rozwiązanie: Porównajmy liczby 10^{40} i 70^{20}:
$70^{20} = 7^{20} \cdot 10^{20}$
$10^{40} = 10^{20} \cdot 10^{20}$
Wynika z tego, że $70^{20} < 10^{40}$.

34. Które zdania są prawdziwe?

A. Każdy romb jest kwadratem
B. Liczba π jest nieskończona
C. Każda liczba pierwsza jest nieparzysta
D. 89 to liczba pierwsza

35. W roku 1916, w czasie wojny, ostatniego dnia miesiąca, rozgrywano bitwę pod wspaniałym zamkiem. Jeden z pocisków rozbił statuę konnego rycerza Dwumianusa z piką w ręku. Iloczyn daty dnia, numeru miesiąca, połowy wieku artylerzysty obsługującego działo, wyrażonej w stopach długości ponad 3,5-metrowej piki rycerza oraz połowy liczba lat, jakie stała statua, wynosi 773256. Wiek artylerzysty oraz wiek statuy są parzystymi palindromami, a jedna stopa to ok. 30 cm. Wskaż prawdziwe zdania.

A. Statua stoi od 1714 roku

B. Bitwa odbyła się 31 grudnia

C. Statua ma więcej niż sto lat

D. W 1922 roku artylerzysta skończył 50 lat

Rozwiązanie: Kopia rycerza ma długość ok. 12 stóp, więc dzieląc 773256 na 12, otrzymamy 64438. Ostatni dzień miesiąca wchodzi w skład iloczynu, a jedyna pasująca liczba to 29, gdyż liczba 64438 nie dzieli się przez 28, 30 ani przez 31. Zatem pasującą datą będzie 29 lutego, więc dzieląc liczbę na 29 i 2, otrzymamy 1111. Liczba ta dzieli się przez 11 i 101. Wynika z tego, że artylerzysta miał 22 lata, a statua stoi 202 lata.

36. Majątek króla Kwadratolandii Pierwiastkusa Wielkiego w roku 2009 można przedstawić w sposób:

$10^{2009}+10^{2008}+10^{2007}+ \dots +10^{2}+10$

Suma cyfr tej liczby wynosi:

A. $1+2+3+ \dots +2009$

B. $1-2+3-4+5-6+ \dots -2008+2009$

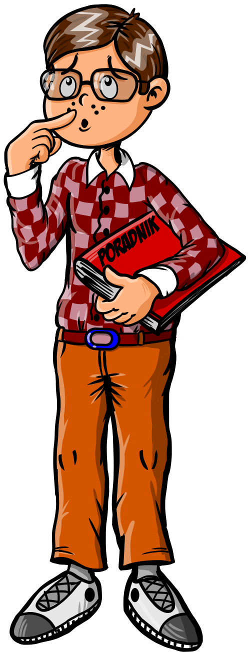
C. $2009-2008+2007-2006+2005-2004+ \dots -2+1$

D. $2009-2007+2008-2006+2007-2005+2006-2004+ \dots +3-1$

Rozwiązanie: Łatwo zauważyć, że liczba 10^{2009} składa się z cyfry 1 i 2009 cyfr 0. Liczba 10^{2008} składa się z cyfry 1 i 2008 cyfr 0 itd. Czyli suma liczb podanych w zadaniu składa się z 2009 cyfr 1 oraz jednej cyfry, którą jest 0. Suma cyfr tej liczby równa jest więc 2009. Brak poprawnej odpowiedzi.

DZIAŁ III

WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE



WYMIERNIAK

37. Z gór Kwadratolandii wypływa rzeka, którą można statkiem z turbo-pierwiastkowym napędem dopłynąć do innej krainy, Trójkolandii, w trzy dni. Powrotna podróż zajęłaby dzień dłużej. Ile dni trzeba płynąć tratwą z Kwadratolandii do Trójkolandii?

A. 7 dni B. 12 dni C. 24 dni D. cały listopad

Rozwiązanie: Aby dowiedzieć się, ile dni należy płynąć tratwą, trzeba obliczyć prędkość rzeki. Oznaczmy:
V_R – prędkość rzeki
V_S – prędkość statku
S – droga w jedną stronę
Można ułożyć równania:
$S = (V_R + V_S) \cdot 3$ oraz $S = (V_S - V_R) \cdot 4$
Czyli $3V_R + 3V_S = 4V_S - 4V_R$ to $V_S = 7V_R$
Wynika z tego, że prędkość statku jest 7 razy większa od prędkości rzeki.
Po podstawieniu za $V_S = 7V_R$ otrzymamy: $S = (V_R + 7V_R) \cdot 3 = V_R \cdot 24$, czyli potrzeba 24 dni na przepłynięcie rzeki tratwą.

38. Dane są liczby $d=\sqrt[3]{94\sqrt{5}-207}$ oraz $k=3\sqrt{5}-2$. Wynika z tego, że:

A. $d>k$ B. $d\leq k$ C. $d=k$ D. $-k<-d$

Rozwiązanie: Podnieśmy wyrażenie k i wyrażenie d do sześcianu:
$k^3=(3\sqrt{5}-2)^3=27 \cdot 5\sqrt{5}-3 \cdot (3\sqrt{5})^2 \cdot 2+3 \cdot 3\sqrt{5} \cdot 2^2-8=135\sqrt{5}-270+36\sqrt{5}-8=171\sqrt{5}-278$
$d^3=94\sqrt{5}-207$
Wynika z tego, że $k>d$

39. Działanie 1 + 1 = 2 jest jednym z najprostszych działań. Dwa można uzyskać również za pomocą wyrażeń:

A. $\sin^2 45^\circ + \cos 60^\circ$ B. $x^2 - y^3$, gdzie $x = -3$, $y = 2$

C. $(n^2+n) \cdot (1+2+3+...+n)^{-1}$ D. $2d^{a-b} \cdot d^{b-a}$

40. Wyrażenie $8^4 + 8^3 + 8^2 + 8$ jest podzielne przez:

A. 5 B. tylko przez 9 C. 10 D. 13

41. Dany jest wielomian $W(x) = ax^3 + x^2 - bx + 3$, którego dwukrotnym rozwiązaniem jest liczba 1. Wynika z tego, że:

A. $a=b=1$ B. $a=1, b=5$

C. $a=1, b=-5$ D. $a^2+b^2=26$

42. Wartość wyrażenia 2008 – 2007 + 2006 – 2005 + … + 2 – 1 jest liczbą:

A. mniejszą niż 5 potęga liczby π **B.** doskonałą

C. podzielną przez 251 **D.** podzielną przez 11

Rozwiązanie: Każda różnica dwóch kolejnych liczb występujących w działaniu wynosi 1. Skoro liczb jest 2008, to różnic jest 1004. A więc suma równa jest 1 · 1004=1004.

43. Dane są liczby d i m, gdzie d=0,777, a m=0,223. Wartość wyrażenia $P=\sqrt{d^3-d^2m-dm^2+m^3}$ jest:

A. równa 1 **B.** równa 0,554

C. równa 0,(5) –0,000(5) –0,1 **D.** liczbą niewymierną

Rozwiązanie: Przekształćmy wyrażenie:
$d^3-d^2m-dm^2+m^3=d^2(d-m)-m^2(d-m)=(d-m)(d^2-m^2)=(d-m)^2(d+m)$
czyli $P=\sqrt{(d-m)^2(d+m)}=\sqrt{(0{,}777-0{,}223)^2(0{,}777+0{,}223)}=(0{,}777-0{,}223)\cdot 1=0{,}554$

44. Dane są trzy liczby spełniające warunek a + b = c. W kilku krokach przekształcenia okazało się, że 2 = 1. W którym przekształceniu jest błąd?

I.	$a+b=c$	$/+a+b$
II.	$2a+2b=a+b+c$	$/-2c$
III.	$2a+2b-2c=a+b-c$	
IV.	$2(a+b-c)=a+b-c$	$/:(a+b-c)$
	$2=1$	

A. w przekształceniu I **B.** w przekształceniu III i IV

C. w przekształceniu II **D.** w przekształceniu IV

45. Dane są wyrażenia algebraiczne:

$I=\sqrt{x^2-x}$ $II=\dfrac{x^2-1}{x}$ $III=\dfrac{x+2x^2}{x-1}$

Można stwierdzić, że:

A. wyrażenie I istnieje dla x=1/2

B. wyrażenie I i II istnieje dla x=1

C. wyrażenia I, II, III istnieją dla każdego $x\in R$

D. wspólna dziedzina dla wyrażeń I, II, III to zbiór $x\in(-\infty,0)\cup(1,\infty)$

Rozwiązanie: I wyrażenie nie ma sensu liczbowego dla liczb $x \in (0,1)$, gdyż wyrażenie pod pierwiastkiem byłoby ujemne. Wyrażenie II nie ma sensu liczbowego dla $x=0$, a wyrażenie III nie ma sensu liczbowego dla $x=1$.

46. Dane są wielomiany W(x) stopnia n, G(x) stopnia n+1 oraz H(x) stopnia n+2. Wielomian: W(x)+G(x)+H(x) może być:

A. stopnia zerowego
B. stopnia n
C. stopnia 3n+3
D. co najwyżej stopnia n+2

Rozwiązanie: Wielomian, który jest sumą wielomianów W(x), G(x) i H(x), będzie zawsze stopnia n+2.

47. Rodzice królewny Martolinki Cyferki, chcąc pozbyć się jednego z kandydatów do ręki córki, zadali mu następujące zadanie do obliczenia:
$2009\frac{11}{13} \cdot 2010\frac{11}{13} - 2008\frac{11}{13} \cdot 2011\frac{11}{13} = ?$
Myśleli, że mają z tym kandydatem już spokój. On jednak błyskawicznie obliczył poprawny wynik, który:

A. jest liczbą naturalną
B. wynosi w przybliżeniu 5
C. wynosi 2
D. jest liczbą pierwszą

Rozwiązanie: Oznaczmy jako $x=2008\frac{11}{13}$. Podstawiając do działania, otrzymamy wyrażenie algebraiczne: $(x+1)(x+2) - x(x+3) = x^2+3x+2 - x^2 - 3x = 2$.

48. Z Trójkolandii o godz. 12:00 wyjechała w kierunku Kwadratolandii parowa mat-ciuchcia, która jechała ze średnią wartością prędkości 80 km/h. Z Kwadratolandii do Trójkolandii o tej samej godzinie wyleciał cyferolot, który leciał ze średnią prędkością 180 km/h. Gdy cyferolot dolatywał do nadjeżdżającej z przeciwka mat-ciuchci, zawracał i leciał z powrotem do Kwadratolandii. Gdy doleciał do Kwadratolandii, zawracał, by znowu ruszyć na spotkanie z mat-ciuchcią – i tak do godz. 17:45, gdyż o tej godzinie mat-ciuchcia dojechała do Kwadratolandii. Droga pokonana przez cyferolota (zakładamy, że przy nawrotach cyferolot nie tracił nic ze swojej szybkości) wynosi:

A. 4-cyfrową liczbę km
B. liczbę mniejszą od 1000 km
C. liczbę kilometrów podzielną przez 9
D. liczbę kilometrów, w której jedna cyfra jest zerem

Rozwiązanie: W zadaniu wystarczy obliczyć drogę całkowitą, jaką cyferolot pokonał w czasie 5 godz. 45 min., czyli całego przelotu.
$S = 180$ km / h · 5,75 h = 1035 km

49. Struś Szybkobiegacz wbiegł do tunelu długości 200 m. U wylotu tunelu spostrzegł nadjeżdżający pociąg „Power-N". Szybkobiegacz momentalnie zawrócił i z dwa razy większą prędkością niż poprzednio udało mu się przebiec cały tunel z powrotem i uniknąć katastrofy. Przebiegnięcie tunelu w obie strony zajęło 30 sekund. Wynika z tego, że:

A. szybkość strusia w pierwszą stronę wyniosła 10 m/s
B. szybkość strusia w drugą stronę wyniosła 20 m/s
C. szybkość strusia w pierwszą stronę wyniosła 20 m/s
D. szybkość strusia w drugą stronę wyniosła 15 m/s

Rozwiązanie: Wystarczy przeanalizować podane odpowiedzi z warunkami zadania.

50. „– Dziadku Zenonie, ile Ty masz tak naprawdę lat? – pyta wnuczek Matcyfrzak.
– Trzy razy tyle, co kuzynka Helena.
– A ile lat ma kuzynka Helena?
– Dwa razy mniej od cioci Zofii.
– A ciocia Zofia ile ma lat?
– O 22 lata więcej niż wujek Jan.
– To może chociaż powiesz, ile lat ma wujek Jan? – nie poddaje się Matcyfrzak.
– Za dwa lata będzie starszy od Ciebie pięć razy.
– Oj, dziadku! To było do razu tak powiedzieć. Teraz już wszystko wiem".
A czy Ty wiesz, które informacje są prawdziwe, skoro wnuczek Matcyfrzak skończył wczoraj 4 lata?

A. Dziadek Zenon ma 78 lat
B. Lata wnuczka stanowią niewiele ponad 5% lat dziadka
C. Liczba lat wujka Jana jest liczbą doskonałą
D. Helena za 3 lata będzie miała tyle lat, co Jan obecnie

51. W roku 1845 pewien pradziadek Matcyfrzaka obchodził swoje urodziny. Powiedział on wtedy: Gdy mój wiek sprzed 15 lat pomnożę przez mój wiek za 15 lat, to otrzymam rok swojego urodzenia. Wynika z tego, że jubilat:

A. miał 30 lat

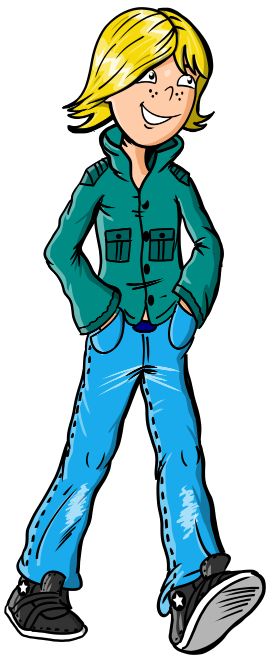
B. urodził się w 1800 roku

C. miał 45 lat

D. miał więcej niż 50 lat

DZIAŁ IV

RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI



DZIUGLAK

52. Siedem sześcian wieków temu w Kwadratolandii panował szalony matematyk Sześciokąciak Liczbus. Miał on ogromną wadę. Uwielbiał wydawać pieniądze. W krótkim czasie roztrwonił majątek królestwa i to w okresie jego największej świetności. W pierwszym roku panowania liczba szkatułek złota podwoiła się, ale z tej liczby 8 szkatułek roztrwonił Liczbus, następnego roku sytuacja się powtórzyła. Liczba szkatułek ponownie uległa podwojeniu w stosunku do tego, co zostało, ale władca ponownie stracił 8 szkatułek. W trzecim roku sytuacja była identyczna i okazało się, że skarbiec jest zupełnie pusty już po trzecim roku panowania Liczbusa. Liczba szkatułek złota w dniu objęcia władzy przez tego władcę to:

A. 7

B. siódma część 91 pomniejszona o 6

C. więcej niż 5, ale mniej niż 10

D. więcej niż 12

Rozwiązanie: Oznaczmy jako x – liczba szkatułek w dniu objęcia władzy przez Liczbusa.
Można ułożyć równanie: $2\,[2(2x-8)-8]-8=0$
Po rozwiązaniu otrzymamy $x=7$.

53. Aby przejechać przez najdłuższy tunel Kwadratolandii, superszybki pociąg „Power-N” o długości 500 metrów, musi zwolnić do 220 km/h. Od momentu wjazdu lokomotywy do tunelu do chwili wyjazdu ostatniego wagonu upływają 3 min. Jaką długość ma ten tunel?

A. więcej niż 10 km

B. $10{,}5 \cdot 10^6$ cm

C. 3 km

D. za mało danych

Rozwiązanie: Oznaczmy przez S – długość tunelu. Aby przejechać przez tunel, pociąg musi pokonać drogę $(S + 0{,}5)$ km w czasie 3 min = 0,05 h. Podstawiając do wzoru na prędkość, otrzymamy równanie: $S + 0{,}5 = 220 \cdot 0{,}05$, stąd $S = 10{,}5$ km.

54. 20 mat-owieczek zjadłoby trawę z powierzchni cyfer-łąki w 10 dni. 10 takich mat-owieczek zjadłoby tę trawę w ciągu 25 dni. To nie pomyłka! Trawa codziennie przecież odrasta. Ile mat-owieczek zjadłoby trawę w ciągu 100 dni?

A. 5

B. 10

C. można oszacować ok. 9

D. mniej niż 9

Rozwiązanie: *Oznaczmy:*
x – początkowa ilość trawy na łące
y – ilość trawy odrastająca każdego dnia
20 owieczek zjadło całą trawę w 10 dni, to $20 \cdot 10 = 200$
10 owieczek zjadło całą trawę w 25 dni, to $10 \cdot 25 = 250$
Ułóżmy układ równań.
$$\begin{cases} x+10y = 200 \\ x+25y = 250 \end{cases}$$
Wprowadźmy oznaczenia z – ilość owieczek potrzebnych do zjedzenia trawy w 100 dni.
$x + 100y = 100z$
Czyli $x = \frac{500}{3}$, *a* $y = \frac{10}{3}$
Po podstawieniu wartości x, y otrzymamy $100z = 500$, *stąd* $z = 5$
Potrzeba więc 5 owieczek.

55. Rozwiązaniem nierówności: $x^{2005} - 2x^{1997} + x^{1989} > 0$ jest:

A. $x \in (0,1) \cup (1,\infty)$ **B.** $x \in R \setminus \{-1,0,1\}$

C. $x \in (-1,0) \cup (1,\infty)$ **D.** $\frac{\sqrt{12}}{4}$ należy do zbioru rozwiązań

56. Kwadraty magiczne to takie, które mają identyczną sumę liczb w każdej kolumnie, wierszu i na obu przekątnych. Najbardziej znanym kwadratem magicznym jest kwadrat Dürera z rokiem powstania drzeworytu umieszczonym w najniższym rzędzie (1514). W kwadracie (patrz rys.) umieszczono niektóre z liczb Dürera.

Wiedząc, że suma ♡ i ☆ jest dwucyfrową liczbą pierwszą, która powstała z liczb różniących się o jeden, można powiedzieć, że:

A_1	3	2	A_4
5	B_2	B_3	8
9	♡	☆	12
D_1	15	14	D_4

A. $A_1=16$, $D_4=1$

B. $B_2 - B_3 < 0$

C. ♡ $+B_2=A_1$

D. A_1+B_2+ ☆ $+D_4=34$

Rozwiązanie: *Kwadrat Dürera, w którym suma w każdym rzędzie, kolumnie i na obu przekątnych wynosi 34, przedstawia się następująco:*

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

57. Rozwiązaniem równania $x^{x\sqrt{x}}=(x\sqrt{x})^x$ jest:

A. 0 B. 2,25 C. $\frac{3}{2}$ D. 1

58. Rozwiązaniem nierówności: $|x-1|+|x+3|>10$ jest przedział, gdzie:

A. $x\in(-\infty,-3)\cup(1,\infty)$ B. $x\in(-\infty,-6)\cup(4,\infty)$

C. $x\in\varnothing$ D. $-\sqrt[3]{26}$ należy do zbioru rozwiązań

59. Równanie $(x^{2009}-x^{2008}+x^{2007}-x^{2006}+\ldots-1)(x+1)=0$ ma:

A. 2010 różnych rozwiązań B. 1005 różnych rozwiązań

C. 2 rozwiązania D. 1 rozwiązanie

Rozwiązanie: Zapiszmy równanie w sposób:
$[x^{2008}(x-1)+x^{2006}(x-1)+\ldots+1(x-1)]\cdot(x+1)=0$
czyli $(x+1)(x-1)(x^{2008}+x^{2006}+x^{2004}+\ldots+1)=0$
Liczby $x^{2008},x^{2006},x^{2004}$ *itd. są liczbami dodatnimi,*
więc $x^{2008}+x^{2006}+x^{2004}+\ldots+1$ *nie ma miejsc zerowych.*
Rozwiązaniami są więc $x=1$ *i* $x=-1$.

60. Średnia pensja w jednej z firm Kwadratolandii wynosi 2500 dukatów. Pracuje w niej 11 osób. Po zatrudnieniu 12 pracownika średnia pensja spadła o 1%. Nowy pracownik zarabia:

A. 2400 dukatów B. 2300 dukatów

C. mniej niż 2300 dukatów D. dokładnie 2200 dukatów

Rozwiązanie: 11 osób w firmie zarabia łącznie 11 · 2500 dukatów, czyli 27500 dukatów. Oznaczmy przez x pensję nowego pracownika. Można ułożyć równanie:

$$\frac{27500+x}{12}=99\%\cdot 2500$$

$$\frac{27500+x}{12}=\frac{99\cdot 2500}{100}$$

$$\frac{27500+x}{12}=2475\ |\cdot 12$$

$$27500+x=29700$$
$$x=2200$$

Nowy pracownik zarabia więc 2200 dukatów.

61. Cztery królewny na noworocznym balu opowiadały sobie, jak dużo miały kandydatów do swojej ręki. Żeby jednak na balu nikt nie podsłuchał, ile konkretnie każda królewna miała kandydatów do ręki, mówiły ilości parami. Pierwsza i druga miały razem 55, druga i trzecia – 75, trzecia i czwarta – łącznie 95. Pozostałe trzy możliwe pary miały odpowiednio 70, 75 i 80 kandydatów do ręki. Wszystkie cztery królewny miały więc łącznie:

A.	450	**B.**	225
C.	150	**D.**	więcej niż 100, ale mniej niż 300

Rozwiązanie: Oznaczmy liczby kandydatów do ręki w sposób:
K1 – liczba kandydatów do ręki królewny pierwszej
K2 – liczba kandydatów do ręki królewny drugiej
K3 – liczba kandydatów do ręki królewny trzeciej
K4 – liczba kandydatów do ręki królewny czwartej
Z zadania wynikają następujące równania:
$K1+K2=55$
$K2+K3=75$
$K3+K4=95$
$K1+K3=70$
$K2+K4=75$
$K1+K4=80$
Oczywiście istnieje inny dobór ilościowy pozostałych trzech par, ale nie ma on znaczenia, jeśli chodzi o sumę wszystkich kandydatów. Sumując stronami wszystkie równania, otrzymamy:
$3K1+3K2+3K3+3K4=450$, *czyli* $K1+K2+K3+K4=150$.

62. Siedmiu uczniów rozwiązuje 7 zadań w 7 minut. Ilu uczniów potrzeba by rozwiązać 77 zadań w 77 minut?

A.	siedmiu	**B.**	jedenastu
C.	jeden	**D.**	siedemdziesięciu siedmiu

63. Helena Funkcja – nauczycielka matematyki – dedukuje: Mam przed sobą szklankę czarnej kawy. Wypiłam szóstą część i uzupełniłam szklankę mlekiem, by była pełna. Potem wypiłam trzecią część i ponownie napełniłam szklankę, aż wreszcie wypiłam połowę zawartości i ostatni raz uzupełniłam do pełna mlekiem. Teraz patrzę na pustą szklankę i dochodzę do wniosku, że wypiłam:

A. więcej mleka B. więcej kawy

C. tyle samo mleka co kawy D. więcej niż dwie szklanki

64. Cena biletu na mecz szkolnego zespołu Matball wynosiła 9 zł. Gdy cenę tę podwyższono, okazało się, że na mecz przychodzi o 10% widzów mniej, ale za to dochód ze sprzedaży biletów wzrósł o połowę, co potwierdziło sprawozdanie finansowe klubu. Komisja sprawdzająca w sprawozdaniu dopatrzyła się jednak kilku błędów, a mianowicie:

A. Cena biletu po podwyżce wynosi 10 zł

B. Cenę biletu podwyższono o ponad 60%

C. Dochód ze sprzedaży biletów przed podwyżką biletu wynosił 900 zł

D. Dochód ze sprzedaży biletów po podwyżce wzrósł 1,5 razy

DZIAŁ V

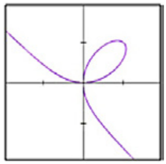
FUNKCJE

WYMIERNIAK MATCYFRZAK

65. W 1676 roku Izaak Newton opisał 72 rodzaje krzywych stopnia trzeciego. Jednym z przykładów krzywej trzeciego stopnia jest Liść Kartezjusza (patrz rysunek).

Liść o wzorze $x^3 + y^3 = axy$:

- A. oraz prosta mogą mieć więcej niż dwa punkty wspólne
- B. oraz parabola mogą mieć cztery punkty wspólne
- C. oraz okrąg mogą mieć trzy punkty wspólne
- D. jest funkcją nieparzystą



66. Dziedzina funkcji $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}$

A. $x \in R$ B. $x \in (-\infty, -2)$ C. $x \neq 2$ D. $x \neq -2$

67. Funkcja $y = |x|^3 - 6$:

- A. ma trzy miejsca zerowe
- B. jest nieparzysta
- C. jest monotoniczna w R
- D. $y \in \langle -6, +\infty)$

68. Funkcja $y = |2|x| + 3| - 1$:

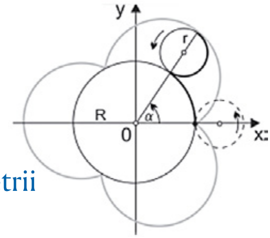
- A. ma cztery miejsca zerowe
- B. jest różnowartościowa
- C. jest rosnąca
- D. $y \in \langle -1, +\infty)$

Rozwiązanie: Brak poprawnej odpowiedzi.

69. Funkcja $y = |x|^5 - 11$:

- A. ma dwa miejsca zerowe
- B. jest nieparzysta
- C. jest monotoniczna w R
- D. $y \in (-11; +\infty)$

70. Epicykloida to krzywa będąca torem ruchu ustalonego punktu należącego do okręgu r, który toczy się bez poślizgu po zewnętrznej stronie innego okręgu o promieniu R. Kształt epicykloidy zmienia się w zależności od stosunku tych promieni $m = \frac{R}{r}$. Gdy promienie są równe, epicykloida jest kardioidą. O epicykloidzie nie można powiedzieć, że:



A. jest funkcją

B. jest różnowartościowa

C. posiada zawsze 3 osie symetrii

D. nie może posiadać więcej niż 34 osie symetrii

71. Niech N oznacza zbiór liczb naturalnych. Funkcję $\phi : N \to N$ zdefiniowaną w następujący sposób: $\phi(1)=1$, zaś jeśli $n>1$, to $\phi(n)$ oznacza ilość liczb naturalnych, mniejszych od n i względnie pierwszych z n nazywamy funkcją Eulera. Liczby względnie pierwsze to takie, których największym wspólnym dzielnikiem jest 1. I tak np. $\phi(5)=4$, ponieważ liczby 1, 2, 3, 4 są mniejsze od 5 i nie mają wspólnych dzielników z liczbą 5 poza jedynką. Poprawne wartości funkcji ϕ to:

A. $\phi(13)=12$ **B.** $\phi(504)=144$

C. $\phi(104)=48$ **D.** $\phi(32)=16$

Rozwiązanie: Liczba 13 ma tylko jeden wspólny dzielnik z liczbami od 1 do 12, więc $\phi(13)=12$ i jest to jedyna wartość poprawna.

72. Funkcja liniowa prostopadła do $y=\sqrt{2}x-2\sqrt{2}$ to:

A. $2y+\sqrt{2}x=\sqrt{2}$ **B.** $-x+y-2\sqrt{2}=0$

C. $y=-\sqrt{2}x+2\sqrt{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}x+y-\sqrt{2}=0$

Rozwiązanie: Funkcja prostopadła do drugiej musi spełniać warunek, by współczynnik kierunkowy $a=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

73. Zbiór wartości funkcji $f(x)=\frac{x}{x-1}+1$ spełnia warunek:

A. $y\in R$ **B.** $y\in(-\infty,2)\cup(2,\infty)$

C. $y\in(1,\infty)$ **D.** $y\in(-\infty,1)\cup(1,\infty)$

74. Wszystkie funkcje postaci $y=\frac{1}{k}\sin(kx)$ dla $k\in C_+$ i $k\le 4$ w przedziale $x\in\langle 0,4\pi\rangle$ mają dokładnie:

A. 2 punkty wspólne **B.** 3 punkty wspólne

C. 5 punktów wspólnych

D. *p* punktów wspólnych, gdzie $p\in(0,10)$ i $p\in C_+$

Rozwiązanie: Wszystkie funkcje są równe dla $x \in \{0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi\}$ i przyjmują dla tych argumentów wartość 0.

75. Dane są dwie proste k: $ax + 3y = b$ oraz t: $2ax - x - b = 2y$. Proste t i k są równoległe, gdy:

A. $a \in R$ **B.** $a=0{,}375$ **C.** $a=0$ **D.** $a=R \setminus \{0\}$

Rozwiązanie:
Przekształćmy funkcje liniowe do postaci kierunkowej. Przekształcając funkcję k: $ax + 3y = b$, otrzymamy $y=-\frac{a}{3}x+\frac{b}{3}$, a przekształcając funkcję t: $2ax - x - b = 2y$, otrzymamy $y=\frac{2a-1}{2}x-\frac{b}{2}$.
Z warunku równoległości:
$-\frac{a}{3}=\frac{2a-1}{2}$
$6a-3=-2a$
$8a=3$
$a=\frac{3}{8}=0{,}375$

76. Funkcja g jest określona na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych. Dla dowolnych x,y spełnia ona równanie $g(x \cdot y)=g(x)+g(y)$. Wartość $g(2008)$ wynosi:

A. 2008 **B.** 0 **C.** 506 **D.** –1006

Rozwiązanie: Przyjmując, że $x=0$, otrzymamy dla dowolnej liczby rzeczywistej y równanie: $g(0)=g(0)+g(y)$, czyli $g(y)=0$. Funkcja g jest więc funkcją stałą.

77. Funkcja $f(x)=x^{x^2-3x-4}$ przyjmuje wartość 1 dla:

A. 3 argumentów

B. argumentów, których iloczyn jest liczbą nieujemną

C. argumentów, których suma wynosi 4

D. 1 argumentu

Rozwiązanie: Rozwiążmy równanie: $x^{x^2-3x-4}=1$
Jednym z rozwiązań jest na pewno $x_1=1$, ponieważ gdy liczbę 1 podniesiemy do jakiejkolwiek potęgi, to otrzymamy wartość 1.
Przekształćmy równanie:
$x^{x^2-3x-4}=x^0$ czyli $x^2-3x-4=0$
$\sqrt{\Delta}=\sqrt{25}=5$
$x_1=1,\ x_2=-1$ i $x_3=4$

DZIAŁ VI

CIĄGI

DZIUGLAK RÓŻNICZKA MATCYFRZAK WYMIERNIAK

78. Pewien n-ty wyraz ciągu geometrycznego a_n wynosi 486, a suma pierwszych trzech wyrazów wynosi 26. Jeśli stała ciągu q = 3 to:

A. $a_n = a_6$ B. $S_5 = 80$

C. $a_7 = 1148$ D. ciąg jest malejący

79. Granica ciągu $\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{2n}$ dla $n \to \infty$, gdzie $n \in N$ jest:

A. liczbą niewymierną B. liczbą większą od $\frac{1}{9}$

C. liczbą mniejszą od 1 D. liczbą ujemną

80. Dla pewnego ciągu arytmetycznego a_n zachodzi równość $2S_{2n} = S_{4n}$ dla $n \in N_+$. Wynika z tego, że:

A. ciąg jest stały B. taki ciąg nie istnieje

C. ciąg jest rosnący D. ciąg jest malejący

Rozwiązanie: Dana jest równość $2 \cdot S_{2n} = S_{4n}$. Skorzystajmy ze wzorów na sumy ciągu arytmetycznego:

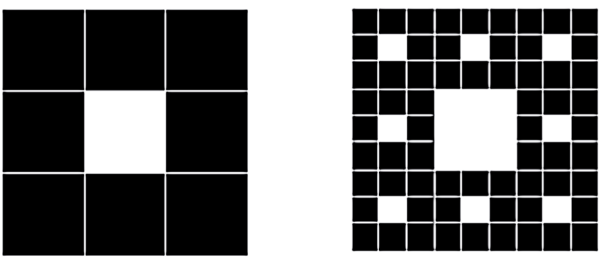
$$2 \cdot \frac{a_1 + a_{2n}}{2} \cdot 2n = \frac{a_1 + a_{4n}}{2} \cdot 4n$$

$$a_1 + a_{2n} = a_1 + a_{4n}$$

$$a_{2n} = a_{4n}$$

czyli ciąg jest stały.

81. Fraktale to takie figury, w których nawet małe fragmenty są podobne do całości. Jednym z przykładów ciekawego fraktala jest fraktal polskiego matematyka Wacława Sierpińskiego. Otrzymujemy go poprzez dzielenie kwadratu na dziewięć jednakowych kwadratów i usuwając środkowy. W następnym kroku każdy z ośmiu pozostałych kwadratów ponownie dzielimy na dziewięć jednakowych kwadratów i ponownie usuwamy kwadrat środkowy. Postępując tak w nieskończoność otrzymujemy tzw. Dywan Sierpińskiego, którego dwa pierwsze kroki przedstawia powyższy rysunek.



Zaznacz prawdziwe stwierdzenia.

A. w trzecim kroku otrzymamy 73 usunięte kwadraty

B. w szóstym kroku występują kwadraty w siedmiu wielkościach

C. jeśli a_n oznacza ilość usuniętych kwadratów w n-tym kroku, to a_n jest ciągiem geometrycznym

D. sumę wszystkich usuniętych kwadracików w n krokach można zapisać w postaci: $1+8+8^2+8^3+\ldots+8^n$

82. N wieków temu najpiękniejsza królewna Kwadratolandii Martolinka Cyferka została uprowadzona przez straszliwego smoka Parabolusa. Zamknął ją na wieży wysokiej na kilkadziesiąt metrów. Biedulka siedziała całe dnie przy deltoicznym okienku i wypatrywała uporczywie księcia, który mógłby ją wyzwolić od straszliwej niedoli. Dostać się na szczyt wieży można tylko po otwarciu siedmiu tajemnych drzwi. Każde rozdziela coraz większa liczba schodków. Aby otworzyć drzwi, trzeba tyle razy zapukać, ile za drzwiami jest schodków. No właśnie, nie przed, a za drzwiami! I tu cała trudność. Wielu próbowało rozwiązać zagadkę. Jednak książę z krainy Trójkolandii wiedział, że liczba schodków za kolejnymi drzwiami wzrasta za każdym razem taką samą, nieparzystą ilość razy. Suma wszystkich schodków była mniejsza niż liczba narodzin Parabolusa – MCLXI – wyryta na pierwszych drzwiach. Jeśli książę ma uratować królewnę, to:

A. w piąte drzwi musi zapukać nieparzystą liczbę razy

B. wszystkich schodków jest więcej niż 1100

C. liczba schodków za kolejnymi drzwiami wzrasta ciągle o pięć razy

D. suma liczby schodków za dwoma kolejnymi drzwiami jest aż trzykrotnie kwadratem liczby parzystej

Rozwiązanie: Najmniejszą liczbą nieparzystą, przez którą można mnożyć kolejne ilości schodów, jest 3. Przykładowo, jeśli za pierwszymi drzwiami będzie jeden schodek, to za drugimi 3, za trzecimi 9, potem 27, 81, 243, a za ostatnimi 729. Jest to jedyna możliwość, gdyż suma wszystkich schodków jest mniejsza niż liczba MCLXI, czyli 1161. Inne możliwości będą dawały sumę większą niż 1161.

83. Do ponumerowania stron Wielkiej Księgi Kwadratolandii, w której zawarte są największe matematyczne odkrycia matematyczne zużyto 3389 cyfr. Książka ta liczy:

A. 1124 strony B. 2889 stron

C. 562 kartki D. 1445 kartek

84. Suma cyfr liczby czterocyfrowej wynosi 15. Kolejne cyfry tej liczby tworzą ciąg geometryczny. Jeśli zamienimy cyfrę jedności z cyfrą setek, to otrzymamy liczbę mniejszą od poprzedniej. Wynika z tego, że:

A. liczba ta jest mniejsza od 5000

B. suma cyfr na miejscach parzystych jest mniejsza od sumy cyfr na miejscach nieparzystych

C. iloczyn dwóch cyfr środkowych jest równy cyfrze jedności

D. wszystkie cyfry są parzyste

Rozwiązanie: Jeśli cztery cyfry liczby tworzą ciąg geometryczny, to mamy tylko dwie możliwości: 8421 lub 1248. Jeśli jednak po zamianie cyfry jedności z cyfrą setek otrzymamy liczbę mniejszą od poprzedniej, to możliwość 1248 musimy odrzucić. A więc jedyna możliwość to liczba 8421. Brak poprawnej odpowiedzi.

85. Dany jest wielomian $G(x) = kx^3 + lx^2 + mx + n$, gdzie współczynniki k,l,m,n są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego o ilorazie różnym od zera. Wielomian G(x) ma:

A. 3 różne rozwiązania

B. tylko jedno rozwiązanie

C. 2 lub 3 rozwiązania w zależności od współczynników

D. 0 miejsc zerowych

Rozwiązanie: Jeśli k, l, m, n to kolejne wyrazy ciągu geometrycznego, to

$k=a_1$; $l=a_1 q$; $m=a_1 q^2$ i $n=a_1 q^3$,

czyli $G(x)=a_1 x^3+a_1 qx^2+a_1 q^2 x+a_1 q^3=0 \quad |:a_1 \quad a_1\neq 0$

$x^3+qx^2+q^2 x+q^3=0$

$x^2 (x+q)+q^2 (x+q)=0$

$(x+q)(x^2+q^2)=0$, czyli $x=-q$

DZIAŁ VII

TRYGONOMETRIA

WYMIERNIAK

86. Rozwiązania równania $-2\sin^2 x+3\cos x+3=0$, gdzie $x\in\langle 0,2\pi\rangle$, to:

A. $x=\frac{2}{3}\pi$, $x=1,(3)\pi$
B. $x\in\{\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi\}$
C. $x=\sqrt{\frac{32}{72}}\pi$
D. $x\in\{\pi, \frac{1}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi\}$

87. Rozwiązaniem równania $\sin x=\sin 5x$, gdy $x\in\langle 0,2\pi\rangle$, jest:

A. 0
B. $\frac{3}{2}\pi$
C. $\frac{4}{3}\pi$
D. $1\frac{5}{6}\pi$

88. Najbardziej podstawowe funkcje trygonometryczne to sinus, cosinus, tangens i cotangens. Do tej grupy zaliczyć należy także mniej znane jak secans (skrót „sec") i cosecans (skrót „cosec"). Funkcję secans (skrót „sec") wprowadził Mikołaj Kopernik w dziele „De revolutionibus orbium coelestium". Funkcja ta jest odwrotnością cosinusa.

O równaniu $2^{\frac{1}{\mathrm{cosec}x}}\cdot 0{,}125^{1-\frac{1}{\sec^2 x}}=\frac{1}{16}$, w zbiorze $x\in\langle 0,2\pi\rangle$ można powiedzieć, że:

A. $x\in(45°, 90°)$

B. ma dokładnie dwa rozwiązania

C. wartość może wynosić 270°

D. rozwiązaniem jest kąt wklęsły

Rozwiązanie: Funkcja secans jest odwrotnością cosinusa, a cosecans odwrotnością sinusa, więc równanie można zapisać w sposób:

$2^{\sin x}\cdot 0{,}125^{1-\cos^2 x}=\frac{1}{16}$

$2^{\sin x}\cdot 2^{-3\sin^2 x}=2^{-4}$

$2^{\sin x-3\sin^2 x}=2^{-4}$

Stąd $-3\sin^2 x+\sin x+4=0$

$\sin x=-1 \quad \vee \quad \sin x=\frac{4}{3}$

$x=\frac{3}{2}\pi \quad \vee \quad x\in\varnothing$

w zbiorze $<0,2\pi>$

89. Dane jest równanie $\mathrm{tg}x\cdot(2\cos^2 x-1)\cos^2 x=2^{-2}$ w przedziale $x\in(-n\pi, n\pi)$, gdzie n oznacza najbardziej prawdopodobną liczbę, która jest sumą oczek otrzymanych przy rzucie dwoma symetrycznymi kostkami do gry. Liczba rozwiązań równania wynosi:

A. 28
B. 14
C. 27
D. 15

Rozwiązanie: *Najbardziej prawdopodobna liczba sumy oczek, jaką można wyrzucić w rzucie dwiema kostkami do gry, to 7. Zatem* $x \in (-7\pi; 7\pi)$*. Przekształcając równanie*
$tgx \cdot (2\cos^2 x - 1)\cos^2 x = 2^{-2}$*, otrzymamy*

$\frac{\sin x}{\cos x} \cdot (2\cos^2 x - 1)\cos^2 x = \frac{1}{4} \quad |\cdot 2$

$2\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x = \frac{1}{2}$

$\sin 2x \cdot \cos 2x = \frac{1}{2} \quad |\cdot 2$

$2\sin 2x \cdot \cos 2x = 1$

$\sin 4x = 1$

$4x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad |:4$

dla $k \in C$

$x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$

Jeśli rozwiązania mają należeć do dziedziny $(-7\pi; 7\pi)$*, to:*

$-7\pi < \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} < 7\pi \quad |\cdot 8$

$-56\pi < \pi + 4k\pi < 56\pi$

$-57\pi < 4k\pi < 55\pi$

$\frac{-57}{4} < k < \frac{55}{4}$

$-14\frac{1}{4} < k < 13\frac{3}{4}$

$k = \{-14, -13, -12, -11 \ldots -1, 0, 1, 2, 3 \ldots 13\}$

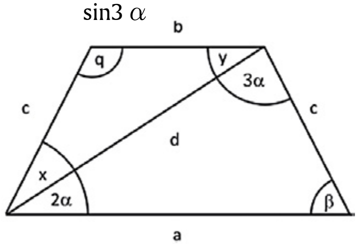
Czyli jest 28 rozwiązań.

90. W trapezie równoramiennym przekątna tworzy z dłuższą podstawą kąt 2α, a z ramieniem kąt 3α. Wynika z tego, że stosunek długości dłuższej podstawy do długości krótszej podstawy wynosi:

A. $\frac{\sin 5\alpha}{\sin 3\alpha}$ **B.** $\frac{\sin 3\alpha}{\sin 2\alpha}$

C. $\sin\alpha$ **D.** $\frac{\sin 7\alpha}{\sin 3\alpha}$

Rozwiązanie:



Kąt $\beta = 180° - 5\alpha$*, więc kąt* $y = 2\alpha$*.*
Kąt $x + 2\alpha = 180° - 5\alpha$*, więc* $x = 180° - 7\alpha$*, a kąt* $q = 5\alpha$*.*

Z twierdzenia sinusów:

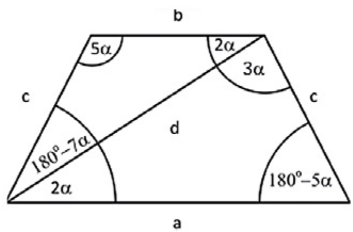
$$\frac{b}{\sin(180° - 7\alpha)} = \frac{d}{\sin 5\alpha} \quad oraz \quad \frac{a}{\sin 3\alpha} = \frac{d}{\sin(180° - 5\alpha)}$$

Wykorzystując wzory redukcyjne otrzymamy:

$$\frac{d}{\sin 5\alpha} = \frac{b}{\sin 7\alpha} \quad oraz \quad \frac{d}{\sin 5\alpha} = \frac{a}{\sin 3\alpha}$$

czyli:

$$\frac{b}{\sin 7\alpha} = \frac{a}{\sin 3\alpha} \quad więc \quad \frac{a}{b} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin 7\alpha}$$



Brak poprawnej odpowiedzi.

91. Suma $\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \ldots + \sin^2 89^\circ + \sin^2 90^\circ$ wynosi:

A. 45

B. więcej niż 45

C. 45,5

D. mniej niż 45

DZIAŁ VIII

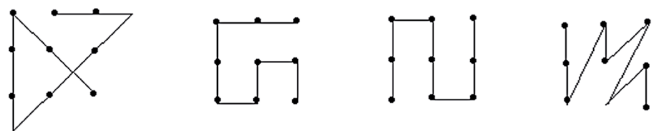
PLANIMETRIA I GEOMETRIA W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH

DZIUGLAK

92. Przez wszystkie dziewięć punktów można przejść, rysując łamaną bez odrywania ołówka od kartki, tak żeby żadnego punktu nie przecinać dwukrotnie. Taka łamana może się składać z:

A. 4 odcinków
B. 5 odcinków
C. 6 odcinków
D. 7 odcinków

Rozwiązanie: Rozważmy różne przypadki:



4 odcinki   6 odcinków   5 odcinków   7 odcinków

93. Pewien wielokąt wypukły posiada 90 przekątnych. Wielokąt ten:

A. posiada 15 kątów
B. nie istnieje
C. posiada 14 boków
D. posiada więcej niż 16 kątów

94. Powierzchnia Kwadratolandii na magicznej mapie wynosi 7 cm^2, a w rzeczywistości 34300 hektarów. Skala magicznej mapy to:

A. $1:4{,}9 \cdot 10^{11}$
B. 1:700000
C. $1:7 \cdot 10^5$
D. 1:49000000

Rozwiązanie: Skalę k można obliczyć ze wzoru $k^2 = \frac{P'}{P} = \frac{343000000000}{7\text{cm}^2}$, $k^2 = 490000000000$, *czyli* $k = 700\,000$.

95. Jeden z mieszkańców Kwadratolandii zastanawiał się, czy jednokładność o skali k = – 1 i środku w punkcie S to jest to samo co:

A. obrót o 180 stopni względem punktu S
B. symetria środkowa względem punktu S
C. symetria osiowa względem prostej zawierającej punkt S
D. translacja o wektor, którego współrzędne są równe współrzędnym punktu S

Wskaż poprawne odpowiedzi.

96. W trójkącie ABC o wierzchołkach A=(0,0),B=(-4,-3),C=(-2,6):

A. pole równe jest 15 j^2 **B.** kąt ABC jest prosty

C. trójkąt jest ostrokątny **D.** pole jest równe 50 j^2

97. Skrzat Tykuś wyznaczał boki swojej działki wg układu współrzędnych. Bardzo chciał, by kształt działki był równoległobokiem. Przyjął, że jedna jednostka w układzie współrzędnych to 10 m. Trzy wierzchołki działki miały współrzędne (2,2), (9,3), (11,8). Wynika z tego, że:

A. czwarty wierzchołek ma współrzędne (5,8)

B. czwarty wierzchołek ma współrzędne (4,7)

C. pole tego równoległoboku wynosi 33 ary

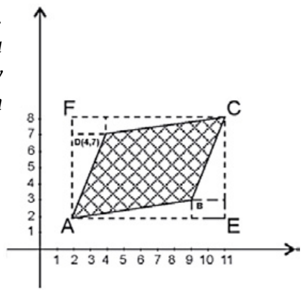
D. pole tego równoległoboku jest liczbą niewymierną

Rozwiązanie: Współrzędne czwartego wierzchołka to (4,7). Aby obliczyć powierzchnię równoległoboku, wystarczy od pola prostokąta AECF odjąć powierzchnię trójkątów i prostokątów nienależących do równoległoboku, a zawierających się w tym prostokącie.

$P_R = 9 \cdot 6 - 2 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} 7 - 2 \cdot \frac{1}{2} 2 \cdot 5 =$
$54 - 4 - 7 - 10 = 33\ j^2$

$1j^2 = (10\ cm)^2 = 100\ cm^2 = 1\ ar$

Powierzchnia działki Tykusia wynosi więc 33 ary.



98. Królewna Martolinka Cyferka znów jest wręcz oblężona przez kandydatów do swej ręki. Wiadomo, że pojmie ją za żonę ten, który wykona wymyślone przez królewnę zadania. Dla kandydata Pomyłkusa Świrusa wymyśliła takie oto zadanie:

Pomyłkusie mój wspaniały, kandydacie doskonały, powiedz szczerze, szybko powiedz, a jak nie wiesz, to się dowiedz, jaki to wielokąt, że odpowiesz, musisz przysiąc, co dokładnie wszystkich przekątnych ma TYSIĄC! Jeśli liczbę boków napiszesz poprawną, będę Twoją żoną, inni wnet odpadną.

Liczba, którą musi zapisać Pomyłkus:

A. nie istnieje **B.** to 43

C. jest większa niż 45 **D.** jest mniejsza niż 46

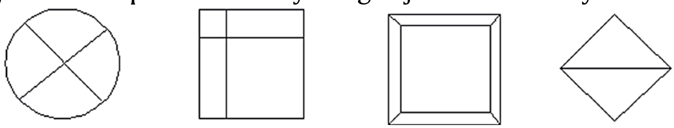
Rozwiązanie: Wzór na liczbę przekątnych d ma postać $d=\frac{n(n-3)}{2}$, gdzie n – liczba boków wielokąta. W zadaniu należy sprawdzić, czy $\frac{n(n-3)}{2}=1000$. Równanie po przekształceniu będzie miało postać: $n(n-3) = 2000$. Nie ma dwóch liczb naturalnych, różniących się o 3, aby ich iloczyn był równy 2000, gdyż $43 \cdot 46=1978$, a następna możliwość to $44 \cdot 47=2068$.

99. Każdy kąt wewnętrzny stukąta foremnego wynosi:

A. 176,4 stopnia B. 144 stopnie

C. więcej niż 150 stopni D. 175 stopni

100. Figury unikursalne (jednobieżne) to takie, które można wykreślić jednym pociągnięciem ołówka, bez powtórnego prowadzenia po tej samej linii. Ile z przedstawionych figur jest unikursalnych?



A. dwie B. wszystkie C. więcej niż dwie D. żadna

Rozwiązanie: Brak poprawnej odpowiedzi.

101. W okrąg wpisano trapez w taki sposób, że dolna podstawa jest średnicą okręgu. Kat α między ramieniem a dolną podstawą trapezu ma taką własność, że:

A. $\alpha \in (45°,90°)$ B. $\alpha \in (0,45°)$

C. wartość α może wynosić 75° D. wartość α może wynosić 30°

102. Dany jest okrąg $x^2 - 4x + y^2 - 4y + 4 = 0$. Malejąca prosta styczna do okręgu i przecinająca oś X pod kątem 45 stopni ma postać:

A. $y = x - 2\sqrt{2}$ B. $-x + y - 2\sqrt{2} = 0$

C. $y = x + 2\sqrt{2}$ D. $-x - y - \sqrt{2} = 0$

Rozwiązanie:

Tylko w odpowiedzi D mamy prostą malejącą $y= -x - \sqrt{2}$. Sprawdzimy, czy prosta jest styczna do okręgu. Podstawiając wzór prostej do równania okręgu otrzymamy równanie:

$x^2 - 4x + (-\sqrt{2} - x)^2 - 4(-x - \sqrt{2}) + 4 = 0$

$x^2 - 4x + 2 + 2\sqrt{2}x + x^2 + 4x + 4\sqrt{2} + 4 = 0$

$2x^2 + 2\sqrt{2}x + 6 + 4\sqrt{2} = 0 \quad |:2$

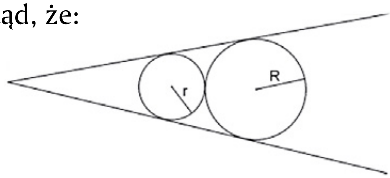
$x^2 + \sqrt{2}x + 3 + 2\sqrt{2} = 0$

Jeśli równanie będzie miało jedno rozwiązanie, to oznacza to, że prosta jest styczna. Obliczmy Δ.
$\Delta = 2 - 4\,(3 + 2\sqrt{2}) = -8\sqrt{2} - 10 < 0$
Czyli prosta nie przecina okręgu, więc nie jest styczna.
Brak poprawnej odpowiedzi.

103. Prosta $2x - y + 3 = 0$ i okrąg $x^2 + 4x + y^2 + 4y = 1$:

A. mają 2 punkty wspólne
B. nie mają punktów wspólnych
C. mają 1 punkt wspólny
D. leżą w IV ćwiartce układu współrzędnych

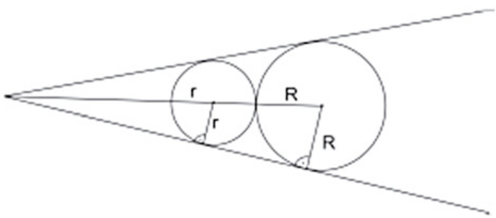
104. Środki okręgów (patrz rys.) są w odległości odpowiednio 10 cm i 15 cm od wierzchołka kąta. Okręgi są styczne do siebie oraz do ramion kąta. Wynika stąd, że:



A. promień dużego okręgu jest 2 razy większy od małego okręgu
B. obwód dużego okręgu jest o 6π cm większy od mniejszego okręgu
C. promienie mają długość odpowiednio: 4 cm i 6 cm
D. średnice mają długość odpowiednio: 4 cm i 6 cm

Rozwiązanie: Z odległości środków okręgów wynika, że r + R = 5 oraz z podobieństwa trójkątów $\frac{10}{15} = \frac{r}{R}$, *czyli*

$$\begin{cases} r + R = 5 & | \cdot (-2) \\ \frac{2}{3} = \frac{r}{R} \end{cases}$$



$$\begin{cases} -2r - 2R = -10 \\ -2R = 3r \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -2r - 2R = -10 \\ -3r + 2R = 0 \end{cases}$$

$-5r = -10$
$r = 2$ cm
$R = 3$ cm

105. Pewien wielokąt wypukły posiada 35 przekątnych. Wielokąt ten:

A. posiada 10 kątów
B. nie istnieje
C. 11 boków
D. więcej niż 12 kątów

106. Promień okręgu wpisanego w trójkąt o bokach 11, 15, 14 wynosi:

A. $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ B. $\frac{9}{\sqrt{6}}$ C. $\frac{3\sqrt{384}}{16}$ D. $5\sqrt{3}$

107. Suma kątów wewnętrznych dwudziestokąta foremnego wynosi:

A. 3240 stopni B. 1800 stopni

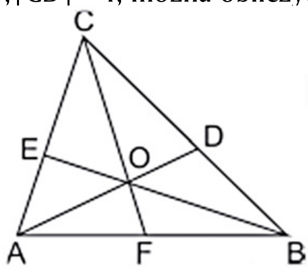
C. więcej niż 1500 stopni D. 3600 stopni

108. Matcyfrzak wyszedł ze schroniska w kierunku północnym i przeszedł 10 km, później w kierunku wschodnim pokonał 6 km. Następnie skręcił w prawo i przeszedł 2 km, by potem skręcić na zachód i przejść 12 km. Ostatnim odcinkiem jego wędrówki był 20 kilometrowy odcinek, gdzie Matcyfrzak szedł w kierunku południowym. Matcyfrzak od schroniska jest w odległości co najmniej:

A. 50 km B. $8\sqrt{3}$ km

C. $6\sqrt{5}$ km D. 14 km

109. Stosunek długości odcinków trójkąta ABC (patrz rysunek) wynosi $\left|\frac{CE}{EA}\right| = \frac{5}{8}$. Wiedząc, że $|AC| = 13, |AF| = 3, |CD| = 4$, można obliczyć obwód trójkąta, którego wartość:



A. jest liczbą niewymierną

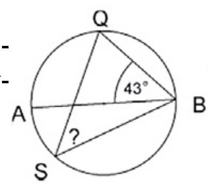
B. wynosi 27,3

C. jest liczbą podzielną przez 9

D. wynosi 31,2

Rozwiązanie: Odcinek $|FB| = 4{,}8$, a odcinek $|DB| = 6{,}4$

110. W koło wpisano kąt QSB oraz kąt ABQ. Wiedząc, że odcinek AB jest średnicą oraz posługując się danymi z rysunku, można powiedzieć, że kąt QSB wynosi:



A. 43° B. 57°

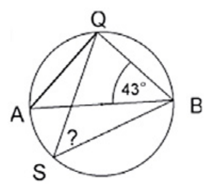
C. 47° D. mniej niż 50°

Rozwiązanie: Dorysujmy odcinek AQ

Kąt AQB = 90°, gdyż oparty jest na średnicy AB.

Wynika z tego, że kąt QAB = 180° – 90° – 43° = 47°.

Kąty QAB i QSB oparte są na tym samym łuku, więc kąt QSB = 47°.



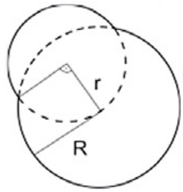
111. Obwód figury, która jest sumą dwóch kół (patrz rysunek), jest:

A. liczbą niewymierną

B. równy $\pi\left(\frac{3+\sqrt{2}}{2}\right)R$

C. równy $\pi\left(\frac{3}{2}R+r\right)$

D. równy $2\pi\left(\frac{3}{4}R+\frac{1}{2}r\right)$



Rozwiązanie: *Obwód figury składa się z połowy obwodu małego koła oraz $\frac{3}{4}$ obwodu dużego koła.*
$O_F=\frac{1}{2}\cdot 2\pi r+\frac{3}{4}\cdot 2\pi R=\pi r+\frac{3}{2}\pi R=\pi\left(r+\frac{3}{2}R\right)$
Z twierdzenia Pitagorasa można obliczyć, że $r=\frac{\sqrt{2}}{2}R$, *więc obwód wynosi:*
$\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}R+\frac{3}{2}R\right)=\pi\left(\frac{\sqrt{2}+3}{2}\right)R$

112. Na zewnątrz kwadratu EFGH budujemy trójkąt równoboczny EFK. Kąt EKG ma:

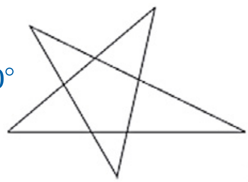
A. 45° B. 36° C. 35° D. mniej niż 50°

Rozwiązanie: Należy zauważyć, że trójkąt KFG jest równoramienny. Kąt EKG = 45°.

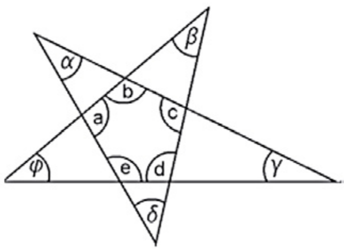
113. Suma pięciu kątów wewnętrznych ramion gwiazdy przedstawionej na rysunku lub tego typu wynosi:

A. 360° B. 225°

C. 540° D. mniej niż 390°



Rozwiązanie:
Oznaczmy kąty a,b,c,d,e jak na rysunku.
Suma kątów tego pięciokąta wynosi 540°.
Aby obliczyć kąt α, należy od 180° odjąć kąt przyległy do kąta a i do kąta b.
A więc α = 180°–(180°–a+180°–b)=a+b–180°
Analogicznie kąt β = 180°–(180°–b+180°–c)=b+c–180°
Kolejne kąty:
Kąt γ =c+d–180°, kąt δ = d+e–180°, kąt ϕ =a+e–180°
Łącznie suma kątów ramion gwiazdy wynosi:
a+b–180°+b+c–180°+c+d–180°+d+e–180°+e+a–180°
=2a+2b+2c+2d+2e–900°=2(a+b+c+d+e)–900°
Suma a+b+c+d+e = 540°, więc 2 · 540°–900°=180°

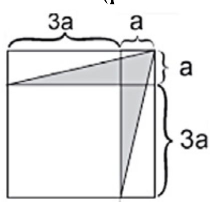


114. Pole zacieniowanej figury znajdującej się wewnątrz kwadratu (patrz rys.) wynosi:

A. $4a^2$ B. $3a^2$

C. więcej niż $\frac{1}{5}$ powierzchni całego kwadratu

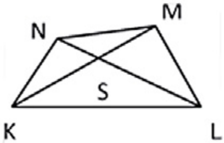
D. mniej niż $\frac{1}{4}$ powierzchni całego kwadratu



Rozwiązanie:
Pole figury zacieniowanej oznaczmy jako P_f
$P_f=(4a)^2-2 \cdot 1/2\ a \cdot 4a-(3a)^2=16a^2-4a^2-9a^2=3a^2$

115. Wielokąt KLMN o polu 30 cm² podzielono dwoma przekątnymi, które przecięły się w punkcie S. Pola trójkątów KSN, KLS, LMS można wyrazić stosunkiem 1 : 3 : 2. Pole trójkąta NSM ma powierzchnię:

A. mniej niż 4 cm²
B. 4,5 cm²
C. 6,(6) cm²
D. 3 cm²

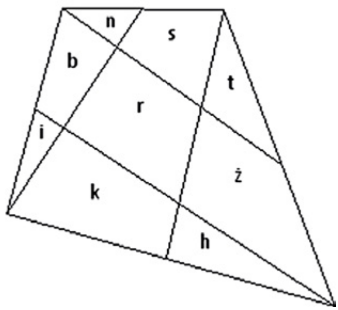


Rozwiązanie:
Trójkąty NSM oraz LSM mają wzajemnie tę samą wysokość. Trójkąty KSN oraz KLS również mają wzajemnie tę samą wysokość. Trójkąt KSN ma wspólną podstawę z trójkątem NSM, natomiast trójkąt KLS ma wspólną podstawę z trójkątem SLM.
Przyjmijmy, że $P_{\Delta KSN}=x$, $P_{\Delta KLS}=3x$, $P_{\Delta LMS}=2x$ oraz $P_{\Delta NSM}=y$
Można ułożyć proporcję:
$$\frac{y}{2x}=\frac{x}{3x}$$
$$y=\frac{2}{3}x$$
Pole całego wielokąta wynosi 30 cm², a więc:
$$x+3x+2x+\frac{2}{3}x=30$$
$$6\frac{2}{3}x=30\frac{2}{3}$$
$$x=4{,}5\ cm^2$$
$$P_{\Delta NSM}=\frac{2}{3}x=\frac{2}{3}\cdot 4{,}5\ cm^2=3\ cm^2$$

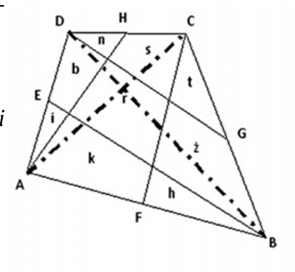
116. Kwadratolus Łodyga podzielił swój ogród na 9 części w ten sposób, że prowadził z każdego wierzchołka linię, która przecinała jeden z naprzeciwległych boków w połowie. W każdej części ma zamiar hodować inny rodzaj kwiatów. W części środkowej r – królewskie kwiaty Kwadratolandii, w pozostałych: b – bratki, n – niezapominajki, k – konwalie, s – stokrotki, i – irysy, t – tulipany, ż – żonkile, h – hiacynty, P – powierzchnia całego ogrodu.

Wynika z tego, że powierzchnia, którą zajmują określone kwiaty, ma następujące własności:

A. P=5r
B. i+b+n=n+s+t
C. i+n+t+h=r
D. $r=\frac{1}{3}(b+r+ż)$



Rozwiązanie: Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku oraz dorysujmy przekątną AC oraz DB.



Można zauważyć, że $P_{(\text{trójkąta } DAH)} = P_{(\text{trójkąta } HAC)}$ oraz $P_{(\text{trójkąta } AFC)} = P_{(\text{trójkąta } FBC)}$
Równości te wynikają z równych długości podstaw i wysokości trójkątów.
Oznacza to, że $P_{ABCD} = 2 \cdot P_{(\text{trójkąta } DAH)} + 2 \cdot P_{(\text{trójkąta } FBC)}$
Podstawiając określone obszary, można otrzymać równanie:
$n+b+i+s+r+k+t+ż+h=2 \cdot (i+b+n)+2 \cdot (t+ż+h)$
czyli $s+r+k=i+b+n+t+ż+h$ *(I).*
Analogicznie $P_{(\text{trójkąta } ABE)} = P_{(\text{trójkąta } DEB)}$ oraz $P_{(\text{trójkąta } DGC)} = P_{(\text{trójkąta } DBG)}$
czyli $P_{ABCD} = 2 \cdot P_{(\text{trójkąta } ABE)} + 2 \cdot P_{(\text{trójkąta } DGC)}$
więc $n+b+i+s+r+k+t+ż+h = 2 \cdot (i+k+n) + 2 \cdot (n+s+t)$ czyli $b+r+ż=i+k+h+n+s+t$ (II).
Dodając stronami równania (I) i (II) otrzymamy $s+r+k+b+r+ż=2i+2n+2t+2h+s+k+b+ż$
czyli $2r=2i+2n+2t+2h$ więc $r=i+n+t+h$

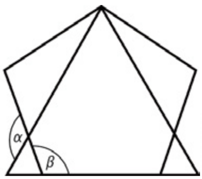
117. Herb jednego z matematycznych rodów Kwadratolandii złożony jest z nałożonych na siebie dwóch figur – trójkąta równobocznego i pięciokąta foremnego. Prawdziwe są wyrażenia dotyczące zaznaczonych kątów:

A. $\alpha = 120°$

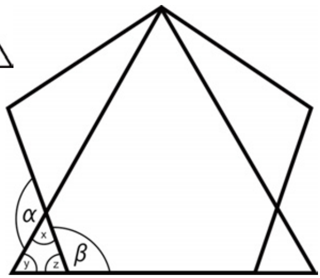
B. $\alpha = 132°$

C. $\alpha + \beta = 240°$

D. $\beta = 120°$



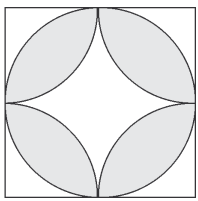
Rozwiązanie: Wprowadźmy kolejne oznaczenia kątów.
Kąt $\beta = 540°: 5 = 108°$.
Kąt z jest przyległy do β, więc $z = 180° - 108° = 72°$.
Kąt y jest kątem trójkąta równobocznego, więc wynosi $60°$.
Kąt x ma w takim razie miarę $180° - 72° - 60° = 48°$.
Kąt α jest przyległy do kąta x, więc jego wartość równa jest $132°$.



118. Jeśli bok kwadratu na rysunku ma długość 12, a zakreślone łuki promień o połowę mniejszy od boku kwadratu, to pole zacieniowanej figury jest równe:

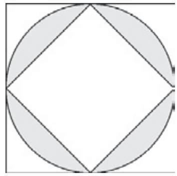
A. $9\pi - 18$ **B.** $72\pi - 144$

C. $18\pi - 36$ **D.** ponad 100



Rozwiązanie: Figura zacieniowana składa się z dwóch elementów o powierzchni jak na rysunku.

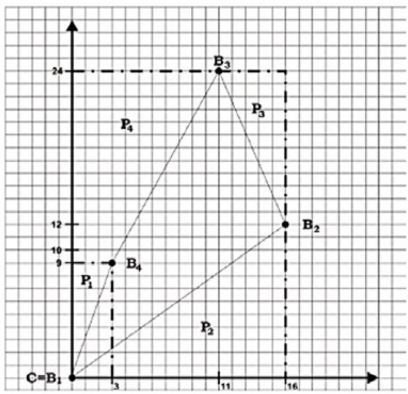
Czyli od pola koła o promieniu 6 należy odjąć pole kwadratu wewnętrznego o boku $6\sqrt{2}$
$P=\pi \cdot 6^2-(6\sqrt{2})^2=(36\pi-72)$ Pole całkowite figury jest dwukrotnie większe, więc wynosi $(72\pi-144)$



119. Ogród królewski jest jednym z 77 cudów Kwadratolandii. Ma 44 bramy, z których główna leży w centrum Deltoigrodu – stolicy królestwa. By dojść do drugiej bramy, należy przejść 1600 m na wschód i 1200 m na północ od bramy głównej. Trzecia brama leży 1200 m na północ i 0,5 km na zachód od bramy drugiej. Czwarta brama leży 1,5 km na południe i 800 m na zachód od bramy trzeciej. Można stwierdzić, że:

- **A.** od bramy głównej do trzeciej w prostej linii jest więcej niż 2,5 km
- **B.** długość ogrodzenia ogrodu musi wynosić ponad 7 km
- **C.** powierzchnia ogrodu ma więcej niż 300 ha
- **D.** ogród jest trapezem

100 m ▭ *B1, B2, B3, B4 – kolejne bramy*



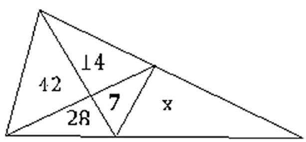
Rozwiązanie: Oznaczmy centrum jako punkt (0,0) w układzie współrzędnych, a kratkę jako 100 m.
C – Centrum

Posługując się twierdzeniem Pitagorasa otrzymamy następujące długości:
|B1B2| = 20j = 2000 m
|B2 B3| = 13j = 1300 m
|B3 B4| = 17j = 1700 m
|B1 B4| = 310j ≈ 949 m
Aby obliczyć powierzchnię ogrodu, należy od pola prostokąta o wymiarach 1600 m x 2400 m odjąć pola obszarów P1, P2, P3, P4.

$$P_{ogrodu} = 1600 \cdot 2400 - P1 - P2 - P3 - P4 =$$
$$= 3840000 - \frac{300 \cdot 900}{2} - \frac{1200 \cdot 1600}{2} - \frac{500 \cdot 1200}{2} - \frac{(300+1100) \cdot 1500}{2} =$$
$$= 3840000-135000-960000-300000-1050000 = 384ha - 13{,}5ha - 96ha - 30ha - 105ha = 139{,}5ha$$

120. Skrzat Mroczuś podzielił swoją trójkątną działkę trzema liniami na 5 trójkątów (patrz rys.). Wewnątrz wstawił liczbę (pomijając jednostki kwadratowe), która jest powierzchnią trójkąta. W ostatnim piątym trójkącie wstawił x. Wartość x wynosi:

- **A.** 14
- **B.** 7
- **C.** 3,5
- **D.** 21

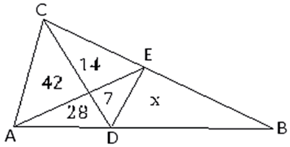


Rozwiązanie: Oznaczmy trójkąt jak na rysunku:
Trójkąt ADC i trójkąt DBC mają taką samą wysokość. Trójkąty ADE i DBE mają również takie same wysokości o podstawach odpowiednio, a więc z równości wysokości podstaw można ułożyć proporcję:

$$\frac{42+28}{21+X} = \frac{7+28}{X}$$

$$\frac{70}{21+X} = \frac{35}{X}$$

70x=735+35x
x=21



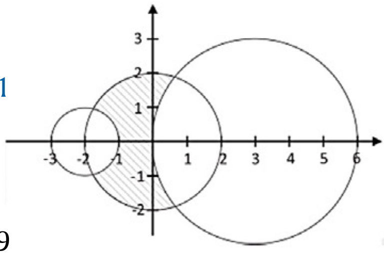
121. Zacieniowany obszar na rysunku można oznaczyć układem nierówności:

A. $\begin{cases} x^2+y^2 \le 2 \\ (x-2)^2 + y^2 \ge 1 \\ (x+3)^2 + y^2 \ge 3 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x^2+y^2 \le 4 \\ (x+2)^2 + y^2 \ge 1 \\ (x-3)^2 + y^2 \ge 9 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4 \\ x^2 - 4x + y^2 \ge -3 \\ y^2 \ge 6x - x^2 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x^2+y^2 \le 4 \\ (x-2)^2 + y^2 \ge 1 \\ (x+3)^2 + y^2 \ge 9 \end{cases}$



Rozwiązanie: Zacieniowany obszar można zapisać w postaci: $\begin{cases} (x+2)^2 + y^2 \ge 1 \\ x^2+y^2 \le 4 \\ (x-3)^2 + y^2 \ge 9 \end{cases}$

122. W Kwadratolandii amulet szczęścia to TRZYNASTOKĄT FOREMNY, który ma szereg fajowych własności. Oto one:

A. taki trzynastokąt ma środek i oś symetrii

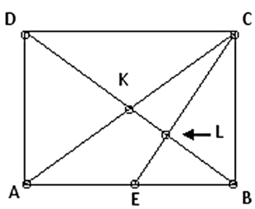
B. suma kątów wewnętrznych wynosi 2340°

C. kąt wewnętrzny ma miarę większą niż 152°

D. liczba przekątnych jest podzielna przez 13

Rozwiązanie: Trzynastokąt foremny nie ma środka symetrii, ale ma 13 osi symetrii. Sumę kątów wewnętrznych obliczymy ze wzoru: (n-2) · 180°=11 · 180°=1980°
Wynika z tego, że każdy kąt wewnętrzny ma miarę ok. 152,3°. Liczbę przekątnych policzymy w następujący sposób: $d=\frac{n(n-3)}{2}=\frac{13 \cdot 10}{2}=65$

123. Czarny Septylion wymyślił następujące zadanie: W prostokącie ABCD poprowadzono przekątną AC i DB, które przecięły się w punkcie K, a także odcinek CE, który przecina bok AB w połowie oraz przekątną DB w punkcie L. Na podstawie tych danych można stwierdzić, że:

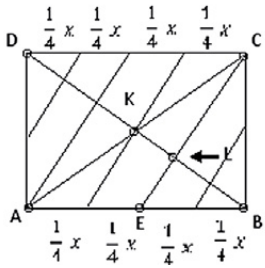


A. odcinek |KL| stanowi 20% przekątnej |DB|

B. odcinek |KL| jest szóstą częścią przekątnej |DB|

C. odcinek |KL| jest dwa razy krótszy od |LB|

D. |DL|-|KL|=|LB|



Rozwiązanie: W prostokącie można poprowadzić proste równoległe. Z twierdzenia Talesa wynika, że wszystkie odcinki powstałe po podzieleniu przekątnej są równe, gdyż bok DC i AB również został podzielony na równe części. Wynika z tego, że odcinek $|KL| = \frac{1}{6}|DB|$.

124. Niedaleko Zamku Drakuli w Transylwańskich lasach ukryty jest skarb. By go odnaleźć, trzeba podjąć się niebezpiecznej misji. Skarbu można szukać tylko raz na cztery lata - z 28 na 29 lutego dokładnie o północy. Wyobraź sobie, że jest dzisiaj najbliższa możliwa noc, w którą można podjąć się tej misji. Na środku magicznej polany stoi wiekowy, samotny dąb. Stajesz pod drzewem, odwrócony plecami tak, by być zwróconym w kierunku północnym. Wg wskazówki zapisanej na pergaminowej karcie masz 400 jardowych kroków (1 jard = 3 stopy = ok. 0,9 m) iść przed siebie, a potem skręcić dokładnie na prawo i przejść kolejne 100 jardowych kroków. Musisz to wykonywać dokładnie w 10 minut. Wtedy patrząc na zegarek skręcasz w prawo o taki kąt, który jest sumą kąta wypukłego wyznaczonego przez wskazówki zegarka (godzinową i minutową) oraz liczby dzisiejszego dnia, miesiąca i liczby, która jest dzielnikiem wszystkich lat przestępnych większym od dwóch. Idąc przed siebie jeszcze 200 jardów i 600 stóp skarb będzie Twój. Odległość skarbu od drzewa w metrach wynosi:

A. ok. 810
B. więcej niż 500
C. mniej niż 100
D. ok. 90

125. Jeśli kąt między godzinową a minutową wskazówką zegara wynosi 120°, to jedna z siedmiu głów smoka Parabolusa budzi się i kontroluje, czy wszystko w jego smoczej jamie jest w porządku. Można więc obliczyć, że smok budzi się w ciągu doby:

A. więcej niż 40 razy
B. 42 razy
C. 24 razy
D. mniej niż 20 razy

Rozwiązanie: Wskazówki (minutowa i godzinowa) tworzą w ciągu doby kąt 120° czterdzieści cztery razy.

DZIAŁ IX

STEREOMETRIA

MATCYFRZAK

126. Dodekaedr to dwunastościan, w którym wszystkie ściany są pięciokątami foremnymi. O bryle tej można powiedzieć, że:

A. ma 30 krawędzi i 20 wierzchołków

B. krawędzi jest 50% więcej niż wierzchołków

C. ma 28 krawędzi i 18 wierzchołków

D. suma wierzchołków i ścian równa jest sumie krawędzi powiększonej o dwa

Rozwiązanie: Dodekaedr ma 12 ścian, 20 wierzchołków i 30 krawędzi.

127. Wypukły dziesięciościan może posiadać:

A. 24 krawędzi i 16 wierzchołków

B. 20 krawędzi i 12 wierzchołków

C. 28 krawędzi i 16 wierzchołków

D. tyle samo krawędzi co wierzchołków

128. Rozcinamy sześcian o krawędzi długości 1 metra na małe sześcianiki o krawędzi 1 milimetra. Układamy sześcianiki jeden przy drugim w jednej linii. Jak długo człowiek idący z prędkością 5 km/h pokona drogę wytyczoną przez ten odcinek?

A. 2 godziny

B. 200 godzin

C. 20 godzin

D. nie więcej niż kwadrans

129. Przekrój stożka obrotowego płaszczyzną może być:

A. okręgiem

B. dwoma różnymi punktami

C. parabolą

D. punktem

130. Na podstawie ostrosłupa można opisać okrąg, gdy:

A. wszystkie krawędzie boczne są równej długości

B. ostrosłup jest prosty

C. ostrosłup jest prawidłowy

D. ostrosłup ma w podstawie wielokąt foremny

131. Na ile maksymalnie części podzieli kulę 7 kół należących do tej kuli?

A. 8 B. 16 C. 44 D. więcej niż 50

Rozwiązanie: Oznaczmy przez a_k maksymalną liczbę części, na jaką kulę dzieli k kół. Wynika z tego, że $a_1=2$. Jeśli kula została podzielona przez k kół na ak części, to k+1 koło przetnie k wcześniej narysowanych kół w maksymalnie 2k punktach. 2k punkty podzielą k+1 koło na 2k części. Wynika z tego, że $a_{k+1} = a_k+2k$, czyli:

$a_2=a_1+2 = 4$ $a_5=a_4+8 = 22$
$a_3=a_2+4 = 8$ $a_6=a_5+10 = 32$
$a_4=a_3+6 = 14$ $a_7=a_6+12 = 32+12 = 44$

132. W sześcianie o krawędzi 3 cm wydrążono trzy tunele o przekroju kwadratu o boku 1 cm (patrz rysunek). Powierzchnia całkowita bryły jest:

A. równa 60 cm^2

B. równa 72 cm^2

C. wielokrotnością liczby 6

D. mniejsza od objętości

Rozwiązanie: Pole powierzchni można obliczyć w następujący sposób:
$P_c=6 \cdot 8\ cm^2 + 6 \cdot 4\ cm^2 = 72\ cm^2$

133. W Kwadratolandii w roku 2012 odbędą się Stereometralne Mistrzostwa Wszechświata w Piłce Sześciennej. Zasady są bardzo podobne jak w grze w piłkę nożną, z tą różnicą, że piłka jest kulą wpisaną w sześcian. Piłek jest siedem, a trzy drużyny na boisku grają do sześciu bramek. Przyjmując, że π to $\frac{22}{7}$, można powiedzieć, że objętość wpisanej kuli stanowi:

A. mniej niż $\frac{3}{4}$ objętości całej sześciennej piłki

B. więcej niż 50% objętości całej sześciennej piłki

C. mniej niż 51% objętości całej sześciennej piłki

D. $\frac{11}{21}$ objętości całej sześciennej piłki

Rozwiązanie: Objętość kuli wynosi $V_k=\frac{4}{3}\cdot\frac{22}{7}r^3=\frac{88}{21}r^3$
Objętość sześcianu, gdzie a = 2r, wynosi $V_{sz}=a^3=(2r)^3=8r^3$

$$\frac{V_k}{V_{sz}} = \frac{\frac{88}{21}r^3}{8r^3} = \frac{11}{21} \approx 52,4\%$$

134. Wielościany Catalana mają wszystkie ściany przystające, które nie są jednak wielokątami foremnymi. Jednym z takich wielościanów jest sześćdziestościan deltoidowy. Bryła ta ma:

A. 60 wierzchołków
B. 62 wierzchołki
C. 58 wierzchołków
D. 2 razy więcej krawędzi niż ścian

Rozwiązanie: W wielościanach zawsze zachodzi własność K=W+S – 2, gdzie K – liczba krawędzi, W – liczba wierzchołków, S – liczba ścian. Sześćdziestościan deltoidowy ma 60 ścian, 120 krawędzi i 62 wierzchołki.

135. Do pomalowania swojego pokoju skrzat Zakrzewek potrzebuje 4 litry seledynowej farby. Pokój skrzata Mroczusia ma podobny kształt, ale ma każdy wymiar 4 razy większy. Do pomalowania pokoju Mroczusia potrzeba:

A. 16 litrów farby
B. 64 litry farby
C. dużo farby, ale jest zbyt mało danych, by wyliczyć dokładnie
D. ponad pół hektolitra farby

Rozwiązanie: Jeśli każdy wymiar pokoju zwiększymy 4 razy, to powierzchnia zwiększy się 4^2 razy czyli 16 razy. Potrzebna ilość farby to $4l \cdot 16 = 64$ litry.

136. Największe naczynie w Kwadratolandii ma pojemność 1920 hektolitrów. Naczynie o wymiarach 40 razy mniejszych ma pojemność V, gdzie:

A. $V<300\ cm^3$
B. $V\geq 0{,}003\ m^3$
C. $V=3\ dm^3$
D. $V=30000\ mm^3$

Rozwiązanie: Jeśli zmniejszymy każdy wymiar 40 razy, to objętość zmniejszy się $40^3=64000$ razy. 1 hektolitr to 100 litrów, czyli 100 dm^3.
$V' = k^3 \cdot V$ *czyli* $V' = (\frac{1}{40})^3 \cdot 192000\ dm^3 = \frac{1}{64000} \cdot \frac{192000}{1} = 3\ dm^3 = 3000\ cm^3 = 0{,}003\ m^3$

137. Trójkąt prostokątny o stosunku boków 3:4:5 i obwodzie 24 zaczęto obracać wokół najdłuższego boku. Objętość powstałej bryły wynosi:

A. $\frac{384\pi}{5}$
B. $76{,}8\pi$
C. $156{,}6\pi$
D. więcej niż 200π

DZIAŁ X

KOMBINATORYKA, RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA I ELEMENTY STATYSTYKI

DZIUGLAK RÓŻNICZKA MATCYFRZAK WYMIERNIAK

138. W Trójkolandii mieszkają Trójkąciaki. Są to ludziki w kolorach: niebieskim lub żółtym, lub czerwonym, lub zielonym. Każdy może mieć od 3 do 5 rąk, a z ich głowy wyrastają sinusoidalne antenki, których zawsze jest więcej niż 10, ale nie więcej niż 20. Każdego rodzaju ludzików jest proporcjonalna liczba. Ile przynajmniej mieszkańców musi zamieszkiwać Trójkolandię, żeby być pewnym wybrania 7 identycznych Trójkąciaków na mecz piłki trapezoidalnej przeciwko drużynie Kwadratolandii?

A. 720 **B.** 721 **C.** 840 **D.** 1681

Rozwiązanie: Różnych rodzajów Trójkąciaków jest $4 \cdot 3 \cdot 10 = 120$. Wystarczy 721 Trójkąciaków, by w jednej drużynie było 7 jednakowych zawodników.

139. W finale XV Międzynarodowego Konkursu Pianistycznego im. Fryderyka Chopina wystąpiło 12 muzyków – 4 Japończyków, 3 Koreańczyków, 2 Polaków oraz po jednym przedstawicielu z USA, Chin i Rosji. Laureatami zostało sześcioro z nich. Prawdopodobieństwo, że każde z państw - finalistów będzie szczyciło się tym, że ma laureata, przy czym Polak – Rafał Blechacz zostanie zwycięzcą wynosi:

A. $\frac{2}{77}$ **B.** $\frac{1}{462}$ **C.** $\frac{1}{72}$ **D.** mniej niż 2%

140. Permutacji słowa KWADRATURA jest:

A. 302 400 **B.** mniej niż milion

C. parzysta ilość **D.** więcej niż $1{,}99 \cdot 10^5$

141. W książce zalecanej uczniom szkół wojewódzkich „Algiebra podług Lacroix" z 1818 roku znajdujemy zadanie: „Pewna liczba kobiet i mężczyzn złożyła się na piknik. Mężczyźni zapłacili po 25 zł, a kobiety po złotych 16. Składka (wspólna) kobiet jest większa jednym złotym od składki (wspólnej) mężczyzn. Ileż do składki należało kobiet, ile mężczyzn (czyt. ile było kobiet, a ile mężczyzn)?" (styl tekstu i tytuł książki oryginalny)

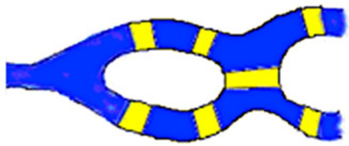
A. Tyle samo kobiet co mężczyzn

B. Kobiet mogło być o 4 więcej

C. Jest nieskończenie wiele możliwości

D. Mężczyzn było więcej

142. Centrum Królewca (dzisiaj Kaliningrad) leży na wyspie. Po ominięciu wyspy rzeka rozdziela się na dwa koryta (patrz rys.) Powstałe cztery obszary lądu łączy siedem mostów. Pytanie, które nurtowało mieszkańców Królewca w pierwszej połowie XVIII wieku brzmiało: *czy można odbyć taką wycieczkę, aby przejść przez każdy most dokładnie jeden raz?* Problemem tym zajął się około roku 1735 Leonard Euler, mieszkający właśnie w Królewcu. Rozwiązanie tego problemu przyczyniło się do powstania kilku nowych działów matematyki m.in. topologii. Po zastanowieniu można odpowiedzieć, że możliwości pokonania wszystkich mostów dokładnie jeden raz:



A. są dwie
B. wyraża iloczyn $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$
C. po prostu nie ma
D. jest tylko jedna

143. Z liter słowa *Matrix* można utworzyć:

A. 720 różnych słów (z sensem lub bez)
B. 6 słów (z sensem lub bez)
C. parzystą ilość słów (z sensem lub bez)
D. $1{,}9 \cdot 10^2$ słów (z sensem lub bez)

144. Pomyłkus Świrus narysował prostokątną siatkę kwadratów jednostkowych o wymiarach 8 x 7. Liczba kwadratów o wierzchołkach w węzłach tej siatki i bokach równoległych do boków prostokąta, które można utworzyć, równa jest:

A. 56
B. 168
C. 224
D. 162

Rozwiązanie: Kwadratów o polu równym 1 j^2 jest $8 \cdot 7 = 56$. Kwadratów o polu równym 4 j^2 jest $7 \cdot 6 = 42$. Można zauważyć, że sumę kwadratów można przedstawić w sposób: $8 \cdot 7 + 7 \cdot 6 + 6 \cdot 5 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 168$.

145. W szkatułce królewny Martolinki Cyferki znajduje się „n" naszyjników i „p" pierścionków. Jeśli królewna wieczorem wylosuje naszyjnik, to następnego dnia rzuca trzy razy monetą. Gdy wylosuje pierścionek, to rzuca dwa razy monetą. Jeżeli wypadnie reszka, to królewna idzie

na jedną lekcję do szkoły, jeśli dwie reszki – idzie na dwie lekcje itd. Gdy orzeł – nie idzie w ogóle. Jeśli wiadomo, że prawdopodobieństwo pójścia Martolinki na co najmniej jedną lekcję wynosi $\frac{41}{48}$, to najmniejsza możliwa liczba:

A. pierścionków wynosi 5 **B.** naszyjników wynosi 1

C. naszyjników wynosi 5 **D.** pierścionków wynosi 10

Rozwiązanie: Oznaczmy przez A' zdarzenie, gdy Martolinka Cyferka nie idzie do szkoły po wyrzuceniu samych orłów. Jest to zdarzenie przeciwne do zdarzenia, że Martolinka pójdzie na co najmniej jedną lekcję.

$P(A) = 1 - P(A')$

Jeśli $P(A) = \frac{41}{48}$, *to* $P(A') = \frac{7}{48}$

Prawdopodobieństwo A' możemy policzyć w następujący sposób:

$$P(A') = \frac{n}{n+p} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{p}{n+p} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

Układając równanie, otrzymamy:

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{n}{n+p} + \frac{1}{4} \cdot \frac{p}{n+p} = \frac{7}{48} \qquad | \cdot 8$$

$$\frac{n}{n+p} + \frac{2p}{n+p} = \frac{7}{6}$$

$$\frac{n+2p}{n+p} = \frac{7}{6}$$

czyli $n = 5p$

Liczby $n, p \in N$, *więc najmniejsza liczba* $p = 1$, *a* $n = 5$

146. Król Kwadratolandii zapomniał szyfru do swojego sejfu. Pamięta wprawdzie, że pierwsze osiem cyfr to kolejne liczby od 1 do 8, ale dwie ostatnie cyfry zupełnie umknęły mu z pamięci. Królowa przypomniała królowi, że liczba ta jest podzielna przez 45. Wynika z tego, że:

A. dwie ostatnie cyfry szyfru to 9 i 0

B. jest 6 możliwości ustawienia szyfru

C. są 3 możliwości ustawienia szyfru

D. jest tylko tyle możliwości, ile cyfr może być na ostatnim miejscu

Rozwiązanie: Szyfr składa się z dziesięciu cyfr. Osiem z nich to cyfry od 1 do 8.

1	2	3	4	5	6	7	8		

Jeśli liczba jest podzielna przez 45, to oznacza, że dzieli się jednocześnie przez 5 i 9, więc na końcu musi być liczba 0 lub 5, a suma cyfr musi być podzielna przez 9. Suma 1+2+3+4+5+6+7+8=36
Istnieją więc trzy możliwości ustawienia szyfru:

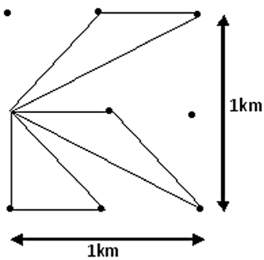
1234567800; *1234567845;* *1234567890*

147. W Kwadratolandii powierzchnia pewnego parku ma kształt kwadratu o boku długości 1 km. W każdym rogu parku oraz w połowie długości każdego boku, a także w punkcie centralnym parku rośnie 9 najstarszych drzew Kwadratolandii. Wybieramy losowo 3 drzewa, które są wierzchołkami trójkąta. Prawdopodobieństwo, że trójkąt ten będzie miał powierzchnię 12,5 hektara, wynosi:

A. $\frac{3}{7}$ **B.** $\frac{5}{21}$ **C.** mniej niż 0,30 **D.** więcej niż 50%

Rozwiązanie: Wszystkich możliwych trójek drzew jest
$C_9^3 = \frac{9!}{3!6!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{6} = 84$
$1km^2 = 100ha$
Na rysunku przedstawiono przykładowe trójkąty o polu 12,5 ha.

Różnych trójkątów o polu 12,5 ha jest 32, więc $P = \frac{32}{84} = \frac{8}{21}$
Brak poprawnej odpowiedzi.



148. W mitologii Słowian heksagon, czyli sześciokąt foremny z trzema przekątnymi, był symbolem Peruna gromowładcy – jednego z głównych bóstw panteonu słowiańskiego. Znak ten chronił przed piorunami. Z każdych trzech jego wierzchołków można zbudować trójkąt. Jakie jest prawdopodobieństwo, że z losowo wybranych trzech wierzchołków powstanie trójkąt, który będzie zawierał najdłuższe przekątne sześciokąta jak w heksagonie?

A. więcej niż 0,5 **B.** dokładnie 0,6

C. $\sqrt{32:72} - 0,0(6)$ **D.** jest to zdarzenie pewne

Rozwiązanie: Wszystkich trójkątów jest $C_6^3 = 20$. *Każda z trzech przekątnych jest bokiem czterech trójkątów, więc zawierających najdłuższe przekątne jest 12.*
Zatem prawdopodobieństwo wynosi $\frac{12}{20} = \frac{6}{10}$

DZIAŁ XI

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY I CAŁKOWY

RÓŻNICZKA

149. Należy zbudować walec o polu całkowitym 54 dm^2 tak, aby objętość była największa. O takim walcu można powiedzieć, że:

A. jego objętość wynosi $\frac{54}{\sqrt{\pi}}$ dm^3

B. przekątna przekroju osiowego wynosi $12\sqrt{2}$

C. największa objętość jest większa niż 1,6 hektolitra

D. obwód podstawy nie jest liczbą niewymierną

150. Pochodna wyrażenia $f(x) = x^x$ wynosi:

A. $e^{x\ln x}(\ln x+1)$ B. $x \cdot x^{x-1}$ C. $\frac{\ln x+1}{e^{x\ln\frac{1}{x}}}$ D. $e^{x\ln x}$

151. Styczna do funkcji $y = \cos x$ w punkcie $x_0 = \frac{\pi}{3}$:

A. jest rosnąca B. ma postać $y-\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

C. jest malejąca D. ma postać $y-\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

152. Pochodną wyrażenia $f(x)=nx^{n^2}$ jest wyrażenie:

A. $n^3 x^n$ B. $n^3 x^{n^2-1}$

C. $(n^2-1)\,nx^{n^2}$ D. $n^3 x^{n^2} - 1$

153. Druga pochodna wyrażenia $f(x)= e^{nx}$ to:

A. $e^{nx} \cdot n$ B. $e^{nx} \cdot n^2$

C. $e^{2nx} \cdot 2n$ D. $n \cdot e^{nx} \cdot n$

154. Prostokątna działka o obwodzie 2 metrów ma największe pole, gdy boki działki (długość i szerokość) będą równe odpowiednio:

A. $\frac{3}{4}$ m ; $\frac{1}{4}$ m B. $\frac{m}{2}$; $\frac{m}{2}$

C. $\frac{2m}{\sqrt{2}}$; $\frac{m}{2}$ D. $\sqrt{2}$ m ; $(1-\sqrt{2})$ m

155. Styczna do funkcji $f(x)= 2x^4 - 7x + 2$ w punkcie $x_0=1$ tworzy z osią Ox kąt wypukły:

A. 60° B. 135° C. 30° D. 45°

156. Czwartą pochodną funkcji $f(x)=a \sin x$ jest:

A. $a \sin x$ B. $4a \sin x$ C. $-a \cos x$ D. $a^4 \sin x$

157. Kąt przecięcia osi Ox i stycznej do funkcji $y = 2\sqrt{3} \cos x$ w punkcie $x_o = \frac{5}{6}\pi$ wynosi:

A. $30°$ B. $120°$ C. $150°$ D. $60°$

158. Pochodną wyrażenia $f(x)=\sin^2 x$ jest:

A. $\cos^2 x$ B. $2 \sin x$ C. $2 \sin x \cos x$ D. $\sin 2x$

159. Pochodną objętości kuli po promieniu jest:

A. pole koła wielkiego

B. pole całkowite kuli

C. iloczyn długości obwodu i średnicy

D. iloczyn średnicy i pola największego przekroju

160. Dwudziesta pochodna wyrażenia $f(x)=e^x+e^{-x}$ jest równa:

A. 0 B. $e^x + \frac{1}{e^x}$

C. e^{x^2} D. e^{2x}

161. Funkcja $f(x)=\frac{1}{3}x^3 - x^2$ określona w zbiorze liczb rzeczywistych:

A. posiada dwa ekstrema lokalne

B. posiada jeden punkt przegięcia

C. jest malejąca dla $x \in (0,2)$

D. ma trzy ekstrema, w tym jedno minimum

162. Funkcja $g(x)=x^3+x^2$ gdzie $x \in R$:

A. ma minimum dla $x=0$

B. posiada jedno minimum i jedno maksimum

C. jest wypukła dla $x < -\frac{1}{3}$

D. ma punkt przegięcia w punkcie $(-\frac{1}{3}; \frac{2}{27})$

163. Całka $n\int x^n\,dx$ ma postać:

A. $n(n-1)\,x+C$ B. $n\,(n+1)\,x^{n+1}+C$

C. $\frac{n \cdot x^{n+1}}{n+1}+C$ D. $\frac{nx^n \cdot x}{n+1}+C$

164. Pole obszaru między parabolą $y=x^2+x$ a osią Ox wynosi:

A. 1 B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{3}$ D. 0,1(6)

165. Pole między prostą $y=-x+2$ i parabolą $y=-x^2+4$ wynosi:

A. $\sqrt{20{,}25}$ B. $4\frac{1}{2}$

C. mniej niż $\sqrt{21}$ D. $\frac{(3!)^2}{2^3}$

166. Wartość całki $\int \frac{a}{bx+d}\,dx$ przyjmuje postać:

A. $\ln|bx+d|+C$ B. $\frac{a}{bx+d}\ln|x|+C$

C. $\frac{a}{b}\ln|x+d|+C$ D. $\frac{a}{b}\ln|bx+d|+C$

167. Wartość całki $\int e^{ex}\,dx$ wynosi:

A. $e^{ex}+C$ B. $e^{ex-1}+C$

C. $\frac{e^{ex}}{e}+C$ D. $\frac{1}{e^{1-ex}}+C$

168. Pole między osią Ox a funkcją sin x w przedziale od π do 2π wynosi:

A. $-2\cos\pi$ B. 2π C. 2 D. 1

169. Pochodna całki ze stałej:

A. jest zawsze równa zero

B. jest zawsze równa tej stałej

C. może być równa zero

D. może być równa tej stałej

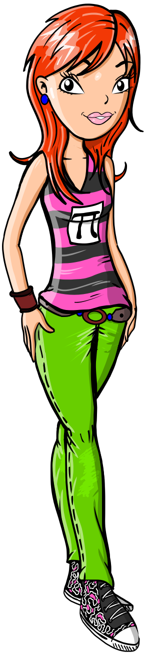
170. Wartość całki $\int_{2p}^{2t}\cos x\,dx$ wynosi:

A. $-\sin(2t)+\sin(2p)$ B. $\cos(2(t+p))$

C. $\sin(2t)-\sin(2p)$ D. $2\sin(t+p)\cos(t-p)$

DZIAŁ XII

ŁAMIGŁÓWKI LOGICZNE



RÓŻNICZKA

171. Jak wiadomo w Kwadratolandii żyją DZIUGLAKI, które zawsze kłamią, ZAKRZEWKI, które zawsze mówią prawdę oraz SKWIETAKI, które raz kłamią, raz mówią prawdę. Typowy SKWIETAK od poniedziałku do środy zawsze kłamie, w pozostałe dni tygodnia zawsze mówi prawdę. Pewnego dnia SKWIETAK spotkał ZAKRZEWKA i powiedział: „Wczoraj skłamałem. Od pojutrza przez dwa kolejne dni będę kłamał". W jakim dniu SKWIETAK spotkał ZAKRZEWKA?

A. w poniedziałek

B. wtedy, gdy kłamie

C. w środę

D. we wtorek

172. Cztery skrzaty: Zakrzewek, Mroczuś, Skwietak i Tykuś posiadają telefony różnych firm. Każdy skrzat ma telefon innej firmy i w innym kolorze. Zakrzewek preferuje „Nokię", ale nienawidzi bordowego koloru. Tykuś ma „Motorolę", która na pewno nie jest srebrna. Firma „Sony" od dłuższego czasu produkuje tylko czerwone telefony, a Mroczuś – wiadomo, pomarańczowy „Samsung" to dla niego jedyna możliwość. Wskaż prawdziwe zdania.

A. Skwietak ma czerwonego „Sony"

B. „Motorola" jest czerwona

C. Tykuś ma telefon koloru bordowego

D. „Nokia" jest srebrna

Rozwiązanie: X – zła odpowiedź, O – dobra odpowiedź

	Nokia	Samsung	Motorola	Sony	bordowy	srebrny	czerwony	Pomarańczowy
Zakrzewek	O	X	X	X	X	O	X	X
Mroczuś	X	O	X	X	X	X	X	O
Skwietak	X	X	X	O	X	X	O	X
Tykuś	X	X	O	X	O	X	X	X
bordowy	X	X	O	X				
srebrny	O	X	X	X				
czerwony	X	X	X	O				
Pomarańczowy	X	O	X	X				

Po uzupełnieniu tabeli wynika, że Zakrzewek ma srebrną „Nokię", Mroczuś pomarańczowego „Samsunga", Skwietak – czerwonego „Sony", a Tykuś bordową „Motorolę".

173. Trzy skrzaty: Wiciuś, Tykuś i Skwietak przymierzają 5 trapezoidalnych czapek – 2 żółte i 3 niebieskie. Zawiązano im oczy opaską i losowo wybrano dla każdego czapkę. Skrzaty ochoczo je przymierzały. Następnie ustawiono skrzaty gęsiego tak, że po zdjęciu opaski każdy mógł widzieć czapki skrzatów przed sobą, ale nie widząc własnej na swojej głowie. Zapytano ostatniego skrzata, który widział czapki poprzedników, jakiego koloru jest jego czapka. Odpowiedział, że nie wie. Spytano skrzata stojącego przed nim o kolor jego czapki, ale także odpowiedział, że nie wie. Pierwszy skrzat odpowiedział, że w takim razie:

A. jego czapka jest żółta

B. jego czapka jest niebieska

C. nie da się powiedzieć, jakiego koloru jest czapka, jak jej nie widać

D. nie da się określić prawidłowego koloru przy tej ilości danych

174. W Kwadratolandii żyją śmieszne małe stworki – Dziuglaki i Zakrzewki. Nie można ich zewnętrznie odróżnić, gdyż wyglądają identycznie. Dziuglaki jednak zawsze kłamią, a Zakrzewki nigdy nie oszukałyby nikogo. O dziwo zupełnie im to nie przeszkadza przyjaźnić się ze sobą. Jesteś w Kwadratolandii, idziesz i spotykasz na drodze trzy stworki. Zadajesz pierwszemu pytanie, ale w tym czasie przelatujący elipsoidalny spodek zagłusza odpowiedź. Drugi mówi – „On powiedział, że jest Dziuglakiem”, trzeci szybko zaś dopowiada – „Nie wierz mu, on kłamie.” Wynika z tego, że:

A. wszystkie trzy to Dziuglaki

B. wszystkie trzy to Zakrzewki

C. pierwszy i trzeci to Zakrzewek, a drugi to Dziuglak

D. nie można ustalić, kim jest pierwszy, ale wiadomo, że drugi to Dziuglak, a trzeci Zakrzewek

Wydawca:
Firma Edukacyjno-Wydawnicza ELITMAT
www.matematykainnegowymiaru.pl
e-mail: matematykainnegowymiaru@elitmat.pl
tel. 51-81118-51

EGZEMPLARZ BEZPŁATNY

MATEMATYKA INNEGO WYMIARU

www.matematykainnegowymiaru.pl

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!

ELITMAT
FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Publikacja współfinansowana ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego