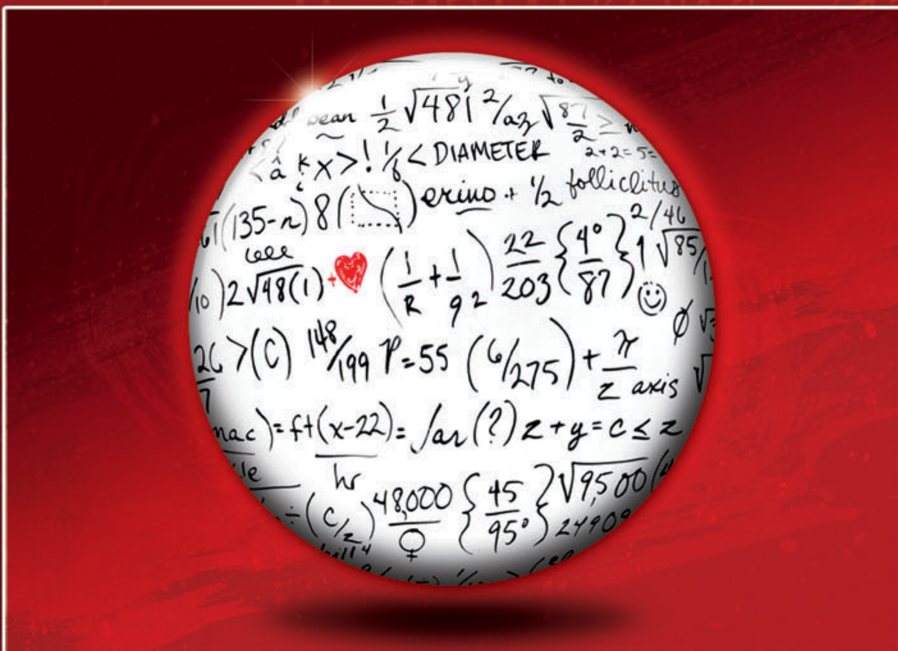
MATEMATYKA
INNEGO WYMIARU



Zbiór zadań dla nauczycielek i nauczycieli matematyki uczących w szkołach ponadgimnazjalnych

Dariusz Kulma

IV ETAP EDUKACYJNY

ZADANIA DLA SZKÓŁ PONADGIMNAZJALNYCH

ELITMAT 2012

IV ETAP EDUKACYJNY
ZADANIA DLA SZKÓŁ PONADGIMNAZJALNYCH

Autor:
Dariusz Kulma

Wydanie 1

Wydawca:
Firma Edukacyjno-Wydawnicza ELITMAT
ul. Plac Kilińskiego 7/4
05-300 Mińsk Mazowiecki
www.elitmat.pl

Druk i oprawa:
Drukarnia Beltrani
ul. Śliwkowa 1, 31-982 Kraków

ISBN 978-83-934311-9-9

Spis treści

WSTĘP

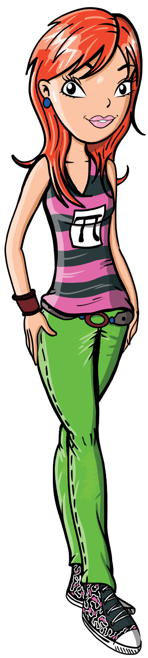
Drogie Nauczycielki i Nauczyciele – ELITMAT LEADERZY

Z przyjemnością przekazujemy Państwu zbiór zadań do pracy z uczniami na prowadzonych przez Państwa zajęciach w grupach ELITMAT TEAM. Wszystkie zadania zostały podzielone zgodnie z proponowanym przez nas rozkładem treści programowych, dzięki czemu mają Państwo możliwość wyboru konkretnych zadań podczas omawiania poszczególnych zagadnień. Mamy nadzieję, że taka forma ułatwi Państwu pracę i uatrakcyjni zajęcia. Poza tym poprzez treść nawiązującą do wirtualnej matematycznej krainy Kwadratolandii zwiększy zainteresowanie Państwa uczniów i uczennic tym wspaniałym przedmiotem, jakim jest matematyka. Serdecznie zachęcamy do wspólnego poznawania bohaterów przeżywających nowe matematyczne przygody każdego dnia.
Chcielibyśmy zwrócić Państwa uwagę na fakt, że zbiór zawiera zadania zamknięte wielokrotnego wyboru, co oznacza, że wszystkie lub część odpowiedzi może być prawidłowych, ale również żadna z odpowiedzi może nie być poprawna. Taka forma wymaga od uczniów jeszcze większego zastanowienia się nad danym problemem i rozwija umiejętność wykorzystywania w jednym zadaniu wiedzy z różnych zagadnień. Co więcej, przygotowuje ucznia do formy zadań stosowanej w „Matematycznych Mistrzostwach Polski Dzieci i Młodzieży”.

Życzymy owocnej pracy!

DZIAŁ I

ZBIÓR LICZB RZECZYWISTYCH



RÓŻNICZKA

1. Wielki grecki matematyk Diofantos, żyjący w III wieku w Aleksandrii, podał następujące zadanie: „Należy znaleźć trzy liczby, których suma, a także suma każdej pary tych liczb jest kwadratem". Przykłady takich liczb to:

A. 41, 80, 320 **B.** 97, 192, 2112
C. 23, 81, 40 **D.** 12, 15, 18

Rozwiązanie:
Zadanie Diofantosa spełniają dwie trójki liczb: 41; 80; 320, ponieważ $41 + 80 = 121 = 11^2$; $80 + 320 = 400 = 20^2$; $41 + 320 = 361 = 19^2$; $41 + 80 + 320 = 441 = 21^2$ *oraz 97; 192; 2112, ponieważ* $97 + 192 = 289 = 17^2$; $192 + 2112 = 2304 = 48^2$; $97 + 2112 = 2209 = 47^2$; $97 + 192 + 2112 = 2401 = 49^2$.

2. Matcyfrzak odkrył pewną zależność liczbową. Wg niej suma liczb dodatniej i liczby odwrotnej do niej może być równa:

A. 2 **B.** 5 **C.** 1 **D.** 1,5

Rozwiązanie:
Jeśli $a \in \mathrm{R}_+$ *to* $a + \frac{1}{a} \geq 2$

3. Matcyfrzak ułożył równanie $AB + BA = CAC$, które dał do rozwiązania Wymierniakowi, gdzie liczby AB, BA i CAC to liczby o cyfrach A, B, C. Zadaniem Wymierniaka było odgadnięcie, jakie cyfry kryją się pod literami. Wymierniak może stwierdzić, że:

A. liczba *CAC* jest kwadratem liczby pierwszej
B. liczba *BA* jest ponad 3 razy większa od liczby *AB*
C. cyfra *A* jest parzysta
D. liczba *CAC* jest podzielna przez 11

Rozwiązanie:
$AB + BA = CAC$
Z lewej strony:
$L = 10A + B + 10B + A = 11A + 11B = 11(A + B)$
czyli suma liczb z lewej strony jest wielokrotnością 11.
Wynika z tego, że $2C = A$.
Analiza kolejnych przypadków:
A nie może być liczbą nieparzystą, ponieważ C nie będzie liczbą całkowitą
jeśli $A = 2$ *to* $C = 1$, *więc* $B = 9$ *bo* $29 + 92 = 121$

jeśli $A = 4$ to $C = 2$ przypadek niemożliwy, ponieważ suma dwóch liczb dwucyfrowych nie może być większa od 200. Tak samo dla kolejnych $C \geq 2$. Istnieje tylko jedno rozwiązanie. $A = 2$; $B = 9$; $C = 1$.

4. Liczba 17!=3xx687428096000, gdzie x oznacza taką samą cyfrę. Cyfra x musi być:

   A. równa 1 **B.** równa 3
   C. mniejsza od 6 **D.** równa 5

   Rozwiązanie:
   Liczba 17! musi być podzielna przez 9. Suma cyfr wynosi $53 + 2x$, więc jedyna możliwość to $x = 5$, ponieważ $53 + 2 \cdot 5=63$, więc suma jest podzielna przez 9.

5. Najbardziej szczęśliwa liczba w Kwadratolandii to oczywiście 7. Jeśli litery oznaczają kolejne cyfry w liczbach, to przez 7 będą zawsze podzielne liczby:

   A. $AAA+A$ **B.** $ABA - BAB$
   C. $AA+BB$ **D.** $AB+BC+AC$

   Rozwiązanie:
   $AAA + A = 100A + 10A + A + A = 112A = 7 \cdot 16A \rightarrow$ liczba podzielna przez 7.
   $ABA - BAB = 100A + 10B + A - 100B - 10A - B = 91A - 91B = 7 \cdot 13(A - B) \rightarrow$ liczba podzielna przez 7. Pozostałe liczby nie są podzielne przez 7, ponieważ nie są wielokrotnościami tej liczby.

6. Matcyfrzak zapisał liczbę 2012^{2012}. Ostatnią cyfrą tej liczby jest:

   A. 0 **B.** 8 **C.** 4 **D.** 6

7. Palindromami, które są kwadratami liczb naturalnych, są:

   A. 1331 **B.** 1234321 **C.** 10201 **D.** 4008004

8. Matcyfrzak zapisał ułamek $\frac{121214}{121216}$, a Wymierniak ułamek $\frac{121215}{121218}$ Wynika z tego, że:

   A. po sprowadzeniu ułamków do wspólnego mianownika i obliczeniu różnicy bądź sumy otrzymamy ułamek, który można skrócić przez 12

B. ułamek Matcyfrzaka jest większy

C. ułamek Wymierniaka jest większy

D. ułamki są równe

Rozwiązanie:

L_M - liczba Matcyfrzaka; L_W - liczba Wymierniaka.

Jeśli $a = 121216$, to $L_M = \frac{121214}{121216} = \frac{a-2}{a}$ oraz $L_W = \frac{121215}{121218} = \frac{a-1}{a+2}$

Po sprowadzeniu do wspólnego mianownika otrzymamy:

$L_M = \frac{a^2-4}{a(a+2)}$

$L_W = \frac{a^2-a}{a(a+2)}$ czyli $L_M > L_W$

9. Matcyfrzak próbuje rozdzielić jak najmniejszą ilością linii prostych liczby pierwsze od pozostałych (patrz rysunek). Żeby tak zrobić, musi narysować:

13	11	51	22
91	17	23	37
12	57	99	39
25	19	29	44

A. co najmniej 6 linii prostych

B. dokładnie 6 linii prostych

C. co najwyżej 5 linii prostych

D. dokładnie 3 linie proste

Rozwiązanie:

Poniżej pokazane zostało jedno z rozwiązań, gdzie użyto 3-ech linii.
Możliwe jest również oddzielenie liczb większą ilością linii.

10. Liczby naturalne ustawiamy kolejno po sobie tworząc liczbę 1234567891011121314151617…..
Na 2013 - tym miejscu będzie znajdowała się cyfra:

A. 0 **B.** 7 **C.** 8 **D.** 9

Rozwiązanie:
Liczby:
jednocyfrowe → 9 cyfr (od 1 do 9)
dwucyfrowe → 180 cyfr (od 10 do 99)
trzycyfrowe → 2700 cyfr (od 100 do 999)
Wynika z tego, że cyfra na 2013 -tym miejscu będzie w liczbie trzycyfrowej.
2013 – (9 + 180) = 1824 cyfra liczb trzycyfrowych
1824 : 3 = 608 czyli szukaną cyfrą jest ostatnia cyfra 608-ej liczby trzycyfrowej, którą jest 707. Szukana cyfra to 7.

11. Matcyfrzak razem z Wymierniakiem zastanawiają się nad tym, dla jakich liczb *a* i p wyrażenie a^p - a jest podzielne przez *p*. Wskaż jednoczesne poprawne propozycje obu chłopców.

A. M: $\begin{cases} a = 2 \\ p = 5 \end{cases}$ W: $\begin{cases} a = 5 \\ p = 2 \end{cases}$

B. M: $\begin{cases} a = 3 \\ p = 7 \end{cases}$ W: $\begin{cases} a = 7 \\ p = 3 \end{cases}$

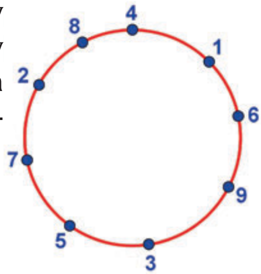
C. M: $\begin{cases} a = 2 \\ p = 6 \end{cases}$ W: $\begin{cases} a = 3 \\ p = 2 \end{cases}$

D. M: $\begin{cases} a = 11 \\ p = 11 \end{cases}$ W: $\begin{cases} a = 7 \\ p = 7 \end{cases}$

M - Matcyfrzak, W - Wymierniak

Rozwiązanie:
Z małego twierdzenia Fermata (MTF): jeżeli a jest liczbą całkowitą, a p liczbą pierwszą, to zachodzi podzielność $p \mid a^p - a$*, więc dobre odpowiedzi to te, gdzie p jest liczbą pierwszą.*

12. Na okręgu zaznaczono w dowolnym układzie cyfry od 1 do 9 jak na rysunku. Każde trzy kolejne cyfry odczytywane w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara tworzą liczbę trzycyfrową. Wynika z tego, że suma wszystkich liczb jest:



A. liczbą pierwszą

B. liczbą podzielną przez 45

C. równą sumie wszystkich liczb trzycyfrowych, które powstałyby gdyby odczytać je w odwrotnym kierunku

D. równa 4995

Rozwiązanie:
Suma liczb, jakie można otrzymać, to:
S = 169 + 693 + 935 + 357 + 572 + 728 + 284 + 841 + 416
Każda cyfra występuje jako cyfra setek, cyfra dziesiątek i cyfra jedności, więc suma ta

jest równoważna $111 + 222 + 333 + \ldots + 999 = 111 \cdot (1 + 2 + \ldots + 9) = 111 \cdot 45 = 4995$

13. Liczba $101^8 + 3 \cdot 101^4 - 4$ jest podzielna przez:

A. 1000 **B.** 100 **C.** 51 **D.** 102000

Rozwiązanie:
Jeżeli $t = 101^4$ *to:*

$$101^8 + 3 \cdot 101^4 - 4 = t^2 + 3t - 4 = (t-1)(t+4) = (101^4 - 1)(101^4 + 4) =$$
$$= (101^2 - 1)(101^2 + 1)(101^2 + 4) = 100 \cdot 102 \cdot (101^2 + 1) \cdot (101^2 + 4) =$$
$$= 51 \cdot 100 \cdot 2 \underbrace{(101^2 + 1)}_{2k} \cdot \underbrace{(101^2 + 4)}_{5t}$$

gdzie $k, t \in C$, *więc liczba* $10kt \cdot 51 \cdot 100 \cdot 2$ *jest podzielna przez 51; 100; 1000 i 102000.*

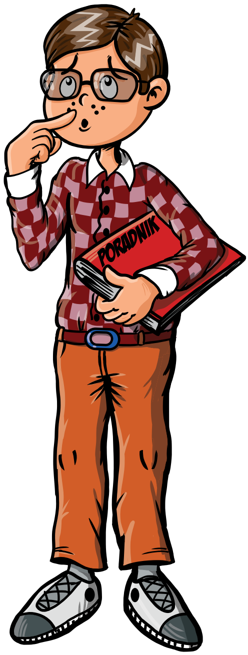
14. Dane jest wyrażenie $4n+1$, gdzie $n \in N_+$. Liczbę taką można zawsze przedstawić jako:

A. sumę dwóch liczb całkowitych
B. sumę kwadratów dwóch liczb całkowitych
C. sumę sześcianów dwóch liczb całkowitych
D. sumę kwadratów dwóch liczb niewymiernych

Rozwiązanie:
Jedno z twierdzeń Fermata mówi, że każda liczba postaci $4n+1$ *jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych.*

DZIAŁ II

WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE



WYMIERNIAK

15. Różniczka i Matcyfrzak zastanawiają się, dla jakich liczb x i y wyrażenie postaci $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ jest zawsze prawdziwe. Jeśli chcieliby podać prawidłową odpowiedź, to musieliby napisać, że:

A. $x \in C$ i $y \in C$
B. $x \in W_+$ i $y \in W_+$
C. $x \in N$ i $y \in N$
D. $x \in R$ i $y \in R$

N - liczby naturalne, R - liczby rzeczywiste, W – liczby wymierne, C - liczby całkowite

Rozwiązanie:
Wyrażenie $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ *jest prawdziwe zawsze dla* $x, y \in R_+$ *więc i dla* $x, y \in W_+$

16. Najgroźniejszy matematyk Kwadratolandii – Czarny Septylion obmyślił nowe działanie, które ma postać:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2010}\right)\left(1+\frac{1}{2011}\right)$$

Wynikiem tego działania:

A. będzie liczba wymierna
B. nie będzie liczba całkowita
C. będzie liczba parzysta
D. będzie liczba 606

Rozwiązanie:
Iloczyn można zapisać jako: $\frac{\cancel{3}}{2}\cdot\frac{4}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{5}}{4}\cdot\frac{\cancel{6}}{\cancel{5}}\cdot\ldots\cdot\frac{\cancel{2011}}{\cancel{2010}}\cdot\frac{2012}{\cancel{2011}}=1006$

17. Liczby podzielne przez 400 to:

400

A. 120400
B. $20!+19!+18!$
C. 2^8+12^2
D. $20!$

18. Dziuglak zapisał kilka działań z wykorzystaniem funkcji Entier. Działania, których wynikiem jest liczba 1, to:

A. $[\pi]^{[e]} - [e]^{[\pi]}$
B. $\sin^2[e+1]+\cos^2\pi$
C. $[\sqrt{2}]^{[\sqrt{2}]}$
D. $[\sqrt{7}]^{[\sqrt{7}]} - [\sqrt{5}]^{[\sqrt{5}]}$

19. Jeśli $k=\log_7 4$, to wyrażenie $\log_{16}7\cdot\log_2 49$ można zapisać jako:

A. $2k^2$
B. $(0{,}5k)^{-2}$
C. $4k^2$
D. $\frac{2}{k^2}$

Rozwiązanie:
$\log_{16} 7 \cdot \log_2 49 = \frac{\log_7 7}{\log_7 16} \cdot \frac{\log_7 49}{\log_7 2} = \frac{1}{2\log_7 4} \cdot \frac{2}{\frac{1}{2}\log_7 4} = \frac{2}{k^2}$

20. Liczba $3^n + 3^{(n+1)} + 3^{(n+2)} + 3^{(n+3)}$ jest dla każdego $n \in N_+$ podzielna przez:

A. 12 B. 120 C. 360 D. 6

Rozwiązanie:
Po przekształceniu: $3^n (1 + 3 + 3^2 + 3^3) = 3^n \cdot 40$, *czyli liczba dzieli się przez 6, 12, 120.*

21. Wyrażenie $(n+2)! + (n+1)! + n!$ jest równe:

A. $(3n+3)!$ B. $(3n)!+3$
C. $n!(n+2)^2$ D. $(n+3)!$

Rozwiązanie:
$(n + 2)! + (n + 1)! + n! = n![(n + 1)(n + 2) + (n + 1) + 1] = n![n^2 + 4n + 4] = n!(n + 2)^2$

22. Dana jest liczba $a = \sqrt[3]{15\sqrt{3} - 26} - \sqrt[3]{6\sqrt{3} + 10}$ i liczba $b = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{2}$. Prawdziwe są stwierdzenia, że:

A. $a > b$ B. $a = b$
C. $a < b$ D. obie liczby są naturalne

Rozwiązanie:
Przekształcając $a = \sqrt[3]{(2-\sqrt{3})^3} - \sqrt{(1+\sqrt{3})^3} = 2 - \sqrt{3} - (1 + \sqrt{3}) = 1 - 2\sqrt{3}$
$b = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2} - \sqrt{2} = |1 + \sqrt{2}| - \sqrt{2} = 1$
$a < b$

23. Jeśli wyrażeniem $\bar{a}$ oznaczymy ostatnią cyfrę liczby 7^{77}, $\bar{b}$ ostatnią cyfrę 8^{88}, a $\bar{c}$ ostatnią cyfrę 9^{99}, to prawdziwe są zależności:

A. $\bar{a} + 2 = \bar{c}$ B. $\bar{b}^{\bar{c}} > \bar{c}^{\bar{b}}$
C. $\sqrt{\bar{c}} = 2 \cdot \bar{b}$ D. $\bar{a}^{\bar{b}} = \bar{b}^{\bar{c}}$

Rozwiązanie:
Z cykliczności występowania ostatnich cyfr w liczbach:
$\bar{a} = 7$; $\bar{b} = 6$; $\bar{c} = 9$ *czyli:*
$\rightarrow \bar{a} + 2 = 9 = \bar{c}$
$\rightarrow \bar{b}^{\bar{c}} = 6^9 = 3^9 \cdot 2^9$, *a* $\bar{c}^{\bar{b}} = 9^6 = 3^{12} = 3^9 \cdot 3^3$, *więc* $2^9 > 3^3$ *czyli* $\bar{b}^{\bar{c}} > \bar{c}^{\bar{b}}$
$\rightarrow \bar{c} = 3 \neq 2 \cdot 6$
$\rightarrow \bar{a}^{\bar{b}} = 7^6$, *a* $\bar{b}^{\bar{c}} = 6^9 = (6 \ )^6 = (\ 216)^6 \approx (14{,}7)^6$ *czyli* $\bar{a}^{\bar{b}} \neq \bar{b}^{\bar{c}}$

24. Wymierniak oznaczył liczby $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ jako ostatnie cyfry wyrażeń $\bar{a}=2012^{2012}$, $\bar{b}=107^{108}$, $\bar{c}=7^{77}$. Wynika z tego, że:

A. $\bar{b} = \bar{c}$ **B.** $\bar{a} > \bar{b} > \bar{c}$

C. $\bar{a} > \bar{b}$ **D.** $\bar{a} \leq \bar{c}$

Rozwiązanie:
Z cykliczności występowania ostatnich cyfr w liczbach: $\bar{a}=6$; $\bar{b}=1$; $\bar{c}=7$.

25. Dany jest wielomian $K(x) = x^{2012}+1$. Reszta z dzielenia tego wielomianu przez trójmian x^2-1 ma postać:

A. $3x+2$ **B.** 2 **C.** $-x-1$ **D.** $x+1$

26. Suma liczb $\underbrace{33\ldots3}_{n}^2 + \underbrace{22\ldots2}_{n}$ jest równa:

A. $\underbrace{11\ldots1}_{2n}$ **B.** $\underbrace{33\ldots3}_{2n}$ **C.** $\underbrace{2323\ldots23}_{n}$ **D.** $\underbrace{11\ldots1}_{n}$

Rozwiązanie:

$$\underbrace{33\ldots3}_{n}^2 + \underbrace{22\ldots2}_{n} = \underbrace{33\ldots3}_{n} \cdot \underbrace{33\ldots3}_{n} + \underbrace{22\ldots2}_{n} = 3\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n} \cdot 3\underbrace{11\ldots1}_{n} + 2\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n} =$$

$$= \underbrace{11\ldots1}_{n} \cdot \left(3^2\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n} + 2\right) = \underbrace{11\ldots1}_{n} \cdot \left(\underbrace{99\ldots9}_{n} + 2\right) = \underbrace{11\ldots1}_{n} \cdot (10^n+1) =$$

$$= 10^n \cdot \underbrace{11\ldots1}_{n} + \underbrace{11\ldots1}_{n} = \underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{00\ldots0}_{n} + \underbrace{11\ldots1}_{n} = \underbrace{11\ldots1}_{2n}$$

27. Liczba $3^1 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{50}$ jest podzielna przez:

A. 3 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 24

Rozwiązanie:
Wyłączając 3 z poszczególnych par liczb otrzymamy:
$3^1 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{50} = 3(1+3) + 3^3(1+3) + \ldots + 3^{49}(1+3) =$
$= 4\cdot(3 + 3^3 + 3^5 + \ldots + 3^{49}) = 4\cdot 3(1 + 3^2 + 3^4 + \ldots + 3^{48})$
więc liczba dzieli się przez 3; 4; 6.

28. Wyrażenie $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$, gdzie $a, b, c \in R_+$ jest:

A. większe od 8 **B.** większe bądź równe 9

C. większe od 7 **D.** większe od 10

Rozwiązanie:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1=$$

$$=3+\underbrace{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}_{\geq 2}+\underbrace{\frac{b}{c}+\frac{c}{b}}_{\geq 2}+\underbrace{\frac{a}{c}+\frac{c}{a}}_{\geq 2}\geq 9$$

Korzystamy z twierdzenia, że suma odwrotności dwóch liczb dodatnich jest większa bądź równa 2.

29. Liczba $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 \cdot \log_8 9 \cdot \log_9 10 \cdot \log_{10} 11 \cdot \log_{11} 12 \cdot \log_{12} 13 \cdot \log_{13} 14 \cdot \log_{14} 15 \cdot \log_{15} 16$ jest:

A. niewymierna **B.** pierwsza

C. całkowita **D.** kwadratem liczby naturalnej

Rozwiązanie:
Wyrażenie można zapisać jako: $\frac{\cancel{\log_2 3}}{\log_2 2}\cdot\frac{\cancel{\log_2 4}}{\cancel{\log_2 3}}\cdot\frac{\cancel{\log_2 5}}{\cancel{\log_2 4}}\cdot\ldots\cdot\frac{\cancel{\log_2 15}}{\cancel{\log_2 14}}\cdot\frac{\log_2 16}{\cancel{\log_2 15}}=\frac{\log_2 16}{\log_2 2}=\frac{4}{1}=4$

30. Liczba $\sqrt{16+6\sqrt{7}}+\sqrt{16-6\sqrt{7}}$ jest liczbą:

A. wymierną **B.** niewymierną

C. całkowitą **D.** doskonałą

Rozwiązanie:

$$\sqrt{16+6\sqrt{7}}+\sqrt{16-6\sqrt{7}}=\sqrt{(3+\sqrt{7})^2}+\sqrt{(3-\sqrt{7})^2}=|3+\sqrt{7}|+|3-\sqrt{7}|=6\in C$$

31. Wiedząc, że $ab=1$ oraz $a \in R_+$ i $b \in R_+$ można stwierdzić, że wyrażenie $(7+a)(7+b)$ jest:

A. większe od 60 **B.** większe bądź równe 64

C. mniejsze od 60 **D.** mniejsze od 64

Rozwiązanie:
Z $a \cdot b = 1$ *wyznaczamy* $b=\frac{1}{a}$, *więc*

$$(7+a)(7+b)=(7+a)\left(7+\frac{1}{a}\right)=49+\frac{7}{a}+7a+1=50+7\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{a}\right)}_{\geq 2}\geq 64,$$

ponieważ $a \in R_+$

32. Jeżeli samogłoski oznaczają cyfry nieparzyste, a spółgłoski cyfry parzyste, to wyrażenie $AAA + BBB + AA + BB + A + B$ będzie podzielne przez:

A. 41 **B.** 3 **C.** 123 **D.** 11

Rozwiązanie:
$AAA + BBB + AA + BB + A + B = 100A + 10A + A + 100B + 10B + B + 10A +$
$+ A + 10B + B + A + B = 123A + 123B = 123(A + B).$
Liczba podzielna przez 3; 41 i 123.

33. Dla każdej naturalnej liczby nieparzystej wielomian $W(x) = (x-9)(x-7)(x-5)$ jest podzielny przez:

A. 24 **B.** 48 **C.** 3 **D.** 6

Rozwiązanie:

$2n + 1$ *- dowolna liczba nieparzysta*

$W(2n+1) = (2n+1-9)(2n+1-7)(2n+1-5) = (2n-8)(2n-6)(2n-4) =$
$= 8 \cdot \underbrace{(n-4)(n-3)(n-2)}_{6k,\ \text{gdzie } k \in C} = 48k$, *więc wielomian jest podzielny przez 48*

$(n-4)(n-3)(n-2)$ – *iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych, który jest zawsze podzielny przez 6.*

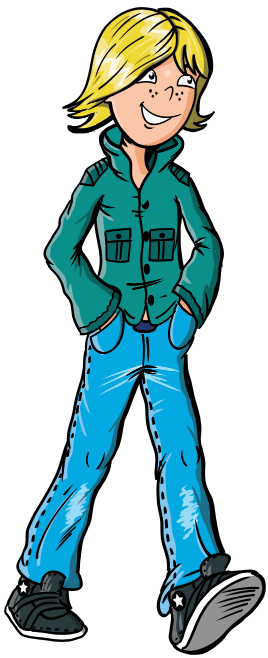
34. Matcyfrzak zapisał na tablicy liczbę M taką, która jest iloczynem liczb 1234 oraz 12351235. Wymierniak zapisał liczbę B, która również jest iloczynem, ale o czynnikach 1235 oraz 12341234. Zależność, jaką można zaobserwować między tymi liczbami, to:

A. $M \leq W$ **B.** $M > W$ **C.** $M = W$ **D.** $2M = 3W$

Rozwiązanie:
Iloczyn Matcyfrzaka $\rightarrow 1234 \cdot 12351235 = 1234 \cdot 1235 \cdot 10001$
Iloczyn Wymierniaka $\rightarrow 1235 \cdot 12341234 = 1235 \cdot 1234 \cdot 10001$, *więc iloczyny są równe.*

DZIAŁ III

RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI



DZIUGLAK

35. Wymierniak zapisał równanie: $a^2x + 2a = 4x + a^2$. O rozwiązaniach x tego równania można powiedzieć, że:

A. rozwiązanie x jest zawsze jedno

B. rozwiązanie x nie istnieje dla $a = -2$

C. rozwiązaniem x może być nieskończenie wiele liczb pod warunkiem, że $a = 2$

D. rozwiązaniem x będzie zero, jeśli $a = 0$

Rozwiązanie:

$a^2 x + 2a = 4x + a^2$

$a^2 x - 4x = a^2 - 2a$

$(a^2 - 4)x = a^2 - 2a$

$x = \dfrac{a^2 - 2a}{a^2 - 4} = \dfrac{a(a-2)}{(a-2)(a+2)}$

czyli dla $a \neq \{-2 ; 2\}$ istnieje 1 rozwiązanie
dla $a = 2$ istnieje nieskończenie wiele rozwiązań
dla $a = -2$ nie ma rozwiązania

36. Czarny Septylion zadał rycerzowi Dwumianusowi do rozwiązania następujące równanie:

$2012 - (2011 - (2010 - \ldots - (1 - x))\ldots) = 1012$

Wynika z tego, że:

A. rozwiązanie jest najmniejszą liczbą doskonałą

B. brakuje części równania, więc nie można go rozwiązać

C. $x = -1013$

D. $x = 6$

Rozwiązanie:

Opuszczając nawiasy uzyskamy $\underbrace{2012 - 2011}_{1} + \underbrace{2010 - 2009}_{1} + \ldots + \underbrace{2 - 1}_{1} + x = 1012$

Po lewej stronie równania występuje 1006 różnic o wartości 1 czyli: $1006 + x = 1012$, więc $x = 6$

37. Czarny Septylion wymyślił kolejne trudne zadanie, by dręczyć nim swoich przeciwników. Zadanie polegało na znalezieniu wszystkich rozwiązań całkowitych równania $2|x| - (-1)^x = 11$. Wynika z tego, że:

A. rozwiązań równania jest parzysta ilość, ale jest ich nieskończenie wiele

B. rozwiązania są dokładnie cztery

C. jednym z tych rozwiązań jest 5

D. rozwiązań jest nieskończenie wiele

Rozwiązanie:

$2|x| - (-1)^x = 11$

Rozpatrzmy przypadki w liczbach całkowitych:

$1°$ $x \rightarrow$ *liczba parzysta*

$2|x| - 1 = 11$

$2|x| = 12$

$|x| = 6$

$x_1 = 6 \quad \vee \quad x_2 = -6$

$2°$ $x \rightarrow$ *liczba nieparzysta*

$2|x| + 1 = 11$

$2|x| = 10$

$|x| = 5$

$x_3 = 5 \quad \vee \quad x_4 = -5$

Równanie ma 4 rozwiązania w liczbach całkowitych – 6; – 5; 5; 6.

38. Dane jest równanie $n + \frac{1}{n} = 4$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Wynika z tego, że prawdziwe są zależności:

A. $n^2 + \frac{1}{n^2} = 14$

B. $n^2 = 16 - \frac{1}{n}$

C. $n^3 + \frac{1}{n^3} = 52$

D. $n^4 + \frac{1}{n^4} = 194$

Rozwiązanie:

Sprawdźmy przypadki z odpowiedzi.

A. $n + \frac{1}{n} = 4 \quad |^2$

$n^2 + 2 + \frac{1}{n^2} = 16$

$n^2 + \frac{1}{n^2} = 14$

C. $n + \frac{1}{n} = 4 \quad |^3$

$n^3 + 3n^2 \cdot \frac{1}{n} + 3n \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} = 64$

$n^3 + \frac{1}{n^3} + 3(n + \frac{1}{n}) = 64$

$n^3 + \frac{1}{n^3} + 3 \cdot 4 = 64$

$n^3 + \frac{1}{n^3} = 52$

D. $n^2 + \frac{1}{n^2} = 14 \quad |^2$

$n^4 + 2 + \frac{1}{n^4} = 196$

$n^4 + \frac{1}{n^4} = 194$

39. Równania, które mają tylko jedno rozwiązanie całkowite, to:

A. $\frac{2x}{x-2}+\frac{4x}{x-2}+\frac{8x}{x-2}+\ldots+\frac{64x}{x-2}=252$

B. $x^3+x^2=0$

C. $2^{x-3}=0{,}5$

D. $x\cdot\ln x=0$

Rozwiązanie:

Równanie 1:

$$\frac{2x}{x-2}+\frac{4x}{x-2}+\frac{8x}{x-2}+\ldots+\frac{64x}{x-2}=252$$

$$\underbrace{(2x+4x+8x+\ldots+64x)}_{\text{suma ciągu geometrycznego}}=252\,(x-2)$$

$$\frac{1-2^6}{1-2}\cdot 2x=\frac{-63}{-1}\cdot 2x=126x$$

czyli

$126x=252x-504$

$-126x=-504$

$x=4$ *czyli 1 rozwiązanie*

Równanie 2:

$x^2\,(x+1)=0$

$x=0$ *lub* $x=-1$

Równanie 3:

$2^{x-3}=2^{-1}$

$x-3=-1$

$x=2$ *czyli 1 rozwiązanie*

Równanie 4:

$x\cdot\ln x=0$

$x=0\notin D$

Dziedzina

$D\colon x>0$

$\ln x=0$

$x=1$

40. Układ równań z parametrem m postaci $\begin{cases} x+y+z=6\\ mx-y+z=3\\ 2mx+y+(m+1)z=15\end{cases}$ ma:

A. zawsze jedno rozwiązanie

B. jedno rozwiązanie, gdy $m\neq 2$

C. jedno rozwiązanie, gdy $m\neq 1$

D. nieskończenie wiele rozwiązań

Rozwiązanie:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ mx - y + z = 3 \\ 2mx + y + (m+1)z = 15 \end{cases}$$

Obliczamy wyznacznik

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & -1 & 1 \\ 2m & 1 & m+1 \end{vmatrix} = -m^2 + 3m - 2$$

Układ ma 1 rozwiązanie $\Leftrightarrow W \neq 0$, *więc* $-m^2 + 3m - 2 \neq 0$ *dla* $m \neq 1$ *i* $m \neq 2$

41. Różniczka, Matcyfrzak i Dziuglak ważą razem 185 kg. Matcyfrzak, Dziuglak i Wymierniak ważą razem 195 kg, natomiast Wymierniak i Różniczka łącznie 110 kg. Wynika z tego, że:

- **A.** Wymierniak jest cięższy od Różniczki o 10 kg
- **B.** cała czwórka waży łącznie 245 kg
- **C.** Różniczka waży 50 kg
- **D.** najlżejsza jest Różniczka

Rozwiązanie:

Wprowadźmy oznaczenia: R - Różniczka, W - Wymierniak, D - Dziuglak, M - Matcyfrzak

$R+M+D=185$ kg

$M+D+W=195$ kg

$W+R=110$ kg

Jeśli zsumujemy, to $2R+2M+2D+2W=490$ kg

$R+\underbrace{M+D+W}_{195\text{ kg}}=245$ kg

$R=50$ kg

$W=60$ kg

DZIAŁ IV

FUNKCJE

WYMIERNIAK MATCYFRZAK

42. Funkcja kwadratowa przecina oś $0x$ w punkcie (5,0). Największa wartość funkcji w przedziale $x \in \langle 7;11 \rangle$ wynosi 60, a oś symetrii tej funkcji ma równanie $x=3$. Prawidłowe równanie tej funkcji to:

A. $y=2(x-1)(x-5)$ **B.** $y=(x-3)^2+4$

C. $y=x^2-6x+5$ **D.** $y=(x-3)^2-4$

Rozwiązanie:

Jeśli $x_1=5$, a oś symetrii ma równanie $x=3$, to $x_2=1$. Wszystkie odpowiedzi mają dodatni współczynnik „a", więc $f(11)=60$ czyli

$f(x)=a(x-1)(x-5)$

$60=a\cdot(11-1)(11-5)$

$60=60a$

$a=1$

czyli

$f(x)=(x-1)(x-5)=x^2-6x+5=(x-3)^2-4$

43. O funkcji $f(x)=x^3-6x^2+1$ można powiedzieć, że:

A. ma minimum i maksimum lokalne

B. jest rosnąca w przedziale $x \in (0;4)$

C. ma jedno minimum dla $x=4$

D. w przedziale $x \in (100;105)$ jest rosnąca

Rozwiązanie:

$f'(x)=3x^2-12x$

$f'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2-12x=0$

$x^2-4x=0$

$x(x-4)=0$

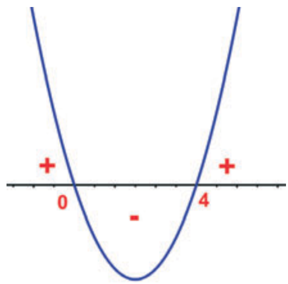
$x=0 \qquad x=4$

$f_{max}(0)$

$f_{min}(4)$

$f \nearrow \Leftrightarrow x \in (-\infty;0) \cup (4;\infty)$

$f \searrow \Leftrightarrow x \in (0;4)$



44. Przyjaciele Matcyfrzak i Wymierniak prześcigają się w zapisywaniu funkcji liniowych, które są najlepsze w poszczególnych kategoriach (patrz tabelka). Za każdą zwycięską funkcję uzyskuje się 2 punkty, jeśli jest remis -1 punkt, a przy przegranej - 0 punktów.

KATEGORIA	*MATCYFRZAK*	*WYMIERNIAK*
Największe miejsce zerowe	$y = 6x + 80$	$y = -3x - 40$
Najszybciej rosnąca funkcja	$y = 77x + 2$	$y = 73x + 105$
Najmniejsza wartość dla argumentu 100	$y = -4x + 8$	$y = -5x + 104$
Największy argument dla wartości funkcji równej 7	$y = 15x + 67$	$y = 12x + 55$

Wynika z tego, że w tej rywalizacji:

A. wygrał Matcyfrzak **B.** wygrał Wymierniak
C. padł remis **D.** wynik to 4 : 4

45. Matcyfrzak zapisał funkcję $m(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+5$, a Wymierniak funkcję $w(x)=(x-5)(x-6)(x-7)(x-8)+5$. Można stwierdzić, że:

A. obie funkcje są cały czas dodatnie
B. jedna z funkcji ma przedziały ujemne
C. najmniejsza wartość obu funkcji jest taka sama
D. obie funkcje mają oś symetrii

Rozwiązanie:

$m(x) = [(x-1)(x-4)] \cdot [(x-2)(x-3)] + 5 = [(x^2-5x)+4][(x^2-5x)+6]+5 =$
$= [(x^2-5x)^2 + 6(x^2-5x) + 4(x^2-5x) + 24] + 5 = [(x^2-5x)^2 + 10(x^2-5x) + 24] + 5 =$
$= [(x^2-5x)+5]^2 - 1 + 5 = \underbrace{(x^2-5x+5)^2}_{\geq 0} + 4$

$m_{min}(x) = 4$

Wykres kwadratu paraboli jest symetryczny tak samo jak parabola.
Wykres funkcji w(x) to przesunięta o wektor [4;0] funkcja m(x), więc $w_{min}(x) = 4$

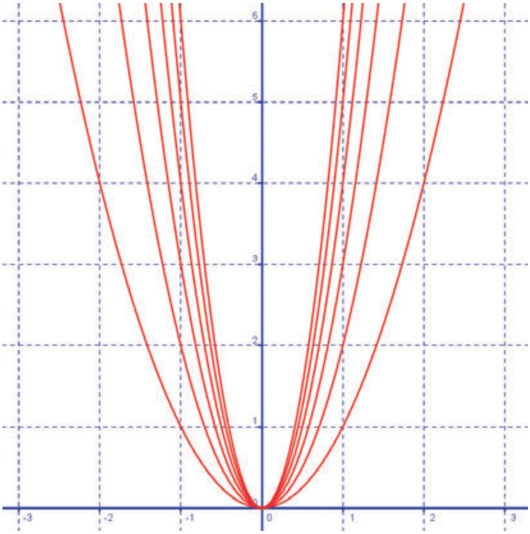
46. Na rysunku przedstawiono rodzinę sześciu parabol postaci $y=ix^2$, które mają ten sam wierzchołek oraz w tę samą stronę skierowane ramiona. Posługując się rysunkiem można stwierdzić, że:

A. suma tych parabol tworzy parabolę posiadającą te same cechy

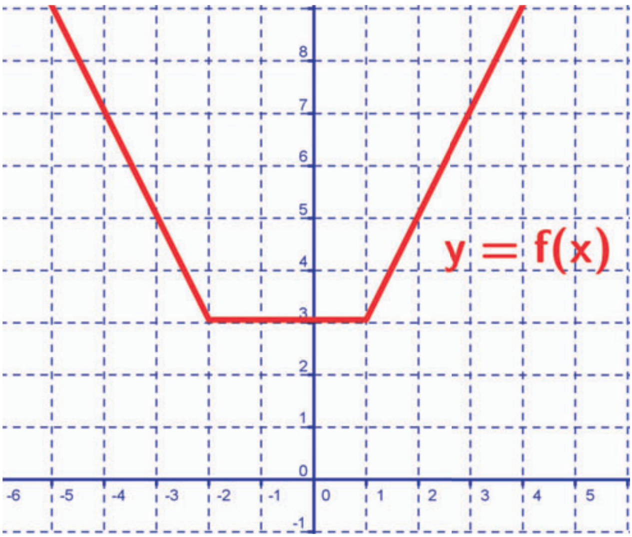
B. iloczyn tych parabol tworzy parabolę

C. dla każdego „*i*" parzystego funkcja jest parzysta

D. dla każdego „*i*" nieparzystego funkcja jest nieparzysta



47. Funkcja *f(x)* przedstawiona na rysunku ma wzór postaci:



A. $f(x)=|x+1|+|x+2|$

B. $f(x)=|x-1|+|x-2|$

C. $f(x)=|x-1|+|x+2|$

D. $f(x)=|x-2|+|x+1|$

48. Dana jest funkcja $f(x)=|-|x+2|+3|-1$.
Liczba rozwiązań $f(x)=p$ dla:

A. $p=-1$ jest taka sama jak dla $p=3$

B. $p=1$ jest taka sama jak dla $p=-1$

C. $p=2$ jest większa niż dla $p=-1$

D. $p\in(-1;2)$ jest równa 4

49. Dana jest funkcja $y=\frac{4x+3}{x-4}$. Można o tej funkcji powiedzieć, że:

A. jest rosnąca dla $x\in R$

B. jest rosnąca dla $x\in R\setminus\{4\}$

C. jest malejąca dla $x\in R\setminus\{4\}$

D. zbiór wartości funkcji jest równy dziedzinie

50. Dana jest funkcja liniowa $f(x)=(a+b)x+(c+d)$
oraz $g(x)=(c+d)x-(a+b)$, gdzie $a+b>0$ i $c+d<0$.
Obie funkcje jednocześnie:

A. przechodzą przez ćwiartkę IV

B. nie przechodzą przez ćwiartkę III

C. przechodzą przez ćwiartkę III

D. przecinają oś OY dla wartości ujemnych

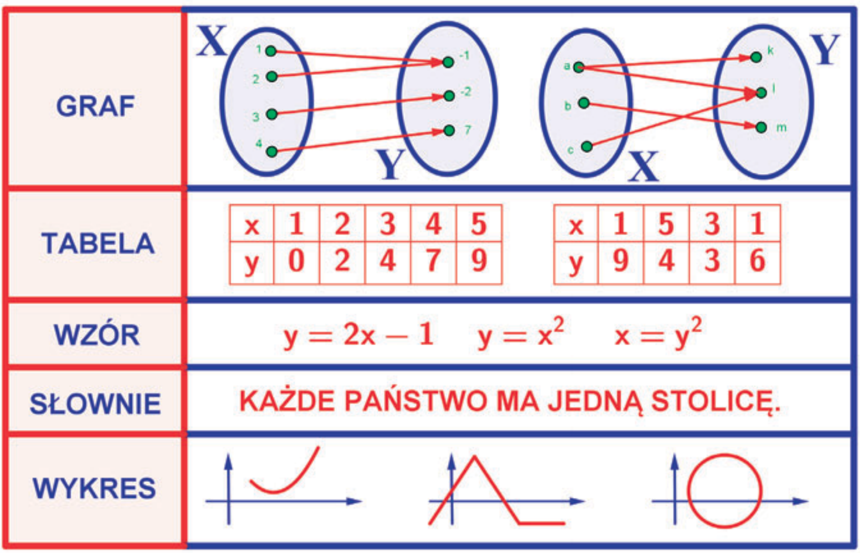
51. W tabeli przedstawiono za pomocą grafów, tabelek, wzorów, wykresów i słownie 11 różnych przyporządkowań. Wśród tych przyporządkowań jest:

A. 11 funkcji

B. 5 funkcji

C. 7 funkcji

D. co najmniej 6 funkcji



DZIAŁ V

CIĄGI

DZIUGLAK RÓŻNICZKA MATCYFRZAK WYMIERNIAK

52. Szkoła w Deltoigrodzie liczy 555 uczniów, wśród których jest *d* dziewcząt. Pierwsza dziewczyna podoba się 10 chłopcom, druga 11 chłopcom, trzecia 12 chłopcom itd. Ostatnia z dziewcząt podoba się wszystkim chłopcom. Wynika z tego, że:

A. chłopców jest parzysta liczba

B. dziewcząt jest nieparzysta liczba

C. chłopców jest o 9 więcej

D. liczba chłopców wynosi 273

Rozwiązanie:

Z treści zadania wynika, że chłopców jest o 9 więcej niż dziewcząt, więc jeśli c - liczba chłopców; d- liczba dziewcząt, to $c = d + 9$

więc

$d + c = 555$

$d + d + 9 = 555$

$d = 273$

$c = 282$

53. Długości boków trójkąta są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o różnicy 4. Kąt rozwarty trójkąta wynosi 120°. Wynika z tego, że:

A. obwód trójkąta jest równy 30

B. pole koła wpisanego w trójkąt wynosi $3\pi j^2$

C. pole trójkąta jest liczbą wymierną

D. najmniejszy kąt trójkąta jest mniejszy niż $\frac{\pi}{6}$

54. Trzynasty wyraz ciągu arytmetycznego równy jest 0. Wynika z tego, że:

A. ciąg jest rosnący

B. ciąg jest malejący

C. suma $S_{25} = 0$

D. suma S_{13} jest dodatnia

Rozwiązanie:

Jeśli $a_{13} = 0$, *to* $a_{14} = r$, $a_{15} = 2r$, $\ldots$, $a_{12} = -r$, $a_{11} = -2r$, $\ldots$ *więc* $a_1 + a_2 + \ldots + a_{13} + \ldots + a_{24} + a_{25} = 0$

55. Wymierniak, Dziuglak i Różniczka zapisali po trzy liczby a_1, a_2, a_3 takie, które tworzą ciąg arytmetyczny i geometryczny jednocześnie. Wśród

tych trójek liczb mogły być takie, które spełniają warunki:

A. $a_1 \neq a_2 \neq a_3$ **B.** $a_1 = a_2 = a_3$

C. $a_1 + 3 = a_2 + a_1 = 2a_4$ **D.** $a_1 + a_2 = \frac{1}{2} a_3$

Rozwiązanie:

Jeśli ciąg jest jednocześnie arytmetyczny i geometryczny, to na pewno jest to ciąg stały, gdzie: $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n$

56. Suma jedenastu pierwszych wyrazów ciągu arytmetycznego wynosi zero. Wynika z tego, że:

A. $a_1 > a_{11}$ **B.** $a_{11} > a_1$

C. $a_6 = 0$ **D.** $a_1 = a_{11}$

57. Dane są ciągi arytmetyczne a_n, b_n, c_n. Prawdziwe mogą być zależności:

A. $a_n + b_n = c_n$ **B.** $a_n \cdot b_n = c_n$

C. $a_n - b_n = c_n$ **D.** $\frac{b_n}{a_n} = c_n$

Rozwiązanie:

Analogicznie jak w zadaniu 54 oznaczamy ciągi:

$a_n = a_1 + (n-1)\, r_1$

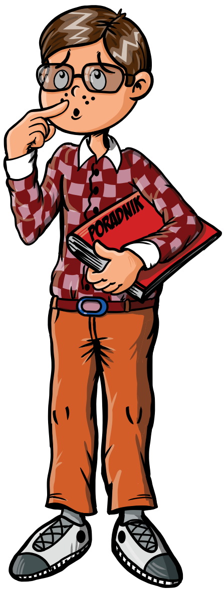
$b_n = b_1 + (n-1)\, r_2$

Rozpatrzmy kolejne przypadki:

- $a_n + b_n = a_1 + b_1 + (n-1)(r_1 + r_2)$
  Suma a_n *i* b_n *jest zawsze ciągiem arytmetycznym*
- $a_n - b_n = a_1 - b_1 + (n-1)(r_1 - r_2)$
  Różnica a_n *i* b_n *jest zawsze ciągiem arytmetycznym*
- $a_n \cdot b_n \rightarrow$ *iloczyn może być ciągiem arytmetycznym, jeśli co najmniej jeden ciąg jest stały*
- $\frac{b_n}{a_n} \rightarrow$ *iloraz może być ciągiem arytmetycznym, jeśli ciąg* a_n *jest stały*

DZIAŁ VI

TRYGONOMETRIA



WYMIERNIAK

58. Dziedzina wyrażenia $\log_{\cos x}(x^2-9)$ jest zbiorem:

A. $x \in (-3;3)$ B. $x \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$

C. $x \in \langle -3;3 \rangle$ D. $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

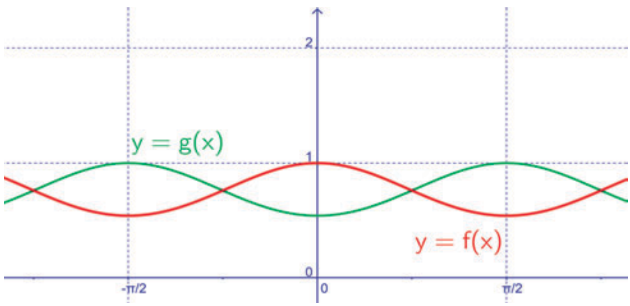
Rozwiązanie:
Brak poprawnej odpowiedzi.

59. Jednym z rozwiązań równania $\sin(\pi \cos x)=0$ jest:

A. $x = \frac{\pi}{2}$ B. $x = 2\pi$ C. $x = -\pi$ D. $x = -2\pi$

Rozwiązanie:
Jeśli $\sin(\pi \cos x) = 0$ *to:*
$\pi \cos x = k\pi,\ k \in C$
$\cos x = k$, *gdzie* $k \in C$, *więc* $\cos x \in \{-1; 0; 1\}$
czyli $x = \frac{\pi}{2} t$, *gdzie* $t \in C$
Wszystkie odpowiedzi są wielokrotnościami $\frac{\pi}{2}$, *więc są poprawne.*

60. Na rysunku przedstawiono dwie funkcje: $y=\cos(\cos x)$ i $y=\cos(\sin x)$.



Prawdziwe stwierdzenie to:

A. $f(x)=\cos(\cos x)$; $g(x)=\cos(\sin x)$

B. $f(x)=\cos(\sin x)$; $g(x)=\cos(\cos x)$

C. $f(x)= -g(x)$

D. $f(x)= -g(x)+1,5$

Rozwiązanie:
Wystarczy obliczyć wartość funkcji dla $x = 0$
Np.: $y = \cos(\sin x)$ *dla* $x = 0$
$y = \cos(\sin 0)=\cos 0=1° = f(x)$
więc $y = \cos(\cos x)= g(x)$

61. Największą wartością funkcji $y=(\sin x)^{\sin x}$ w przedziale $\langle 0;\pi\rangle$ jest:

A. 0 **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** 1

Rozwiązanie:
Największa wartość sin x w przedziale $\langle 0\,;\,\pi\rangle$ wynosi 1, więc największą wartością funkcji $y=(\sin x)^{\sin x}$ jest również $1^1=1$.

62. Wykres funkcji $f(x) = \cos x$ można otrzymać przekształcając wykres funkcji $g(x) = \sin x$. Prawdziwe jest więc przekształcenie:

A. $f(x) = g(x + \frac{\pi}{2})$ **B.** $f(x) = -g(-x)$
C. $f(x) = g(|x|)$ **D.** $f(x) = -g(x - \frac{\pi}{2})$

DZIAŁ VII

PLANIMETRIA I GEOMETRIA W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH

DZIUGLAK

63. W dowolnym n - kącie foremnym, gdzie suma kątów wynosi s, a liczba przekątnych d, można stwierdzić, że:

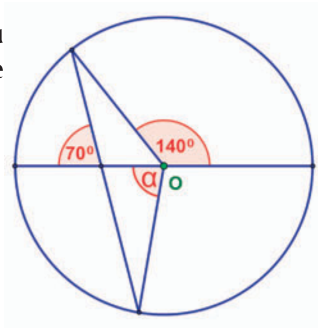
A. $d = \frac{n(n-3)}{2}$

B. $s = (n-1) \cdot 180°$

C. wyrażenie $n^2 - 3n - 10$ pozwoli na wyliczenie ilości boków wielokąta o 5 przekątnych

D. $s \cdot \left(\frac{s}{\pi} - 3 \right) = 2d$

64. Środek okręgu przedstawionego na rysunku oznaczono w punkcie O. Wynika z tego, że kąt α jest:



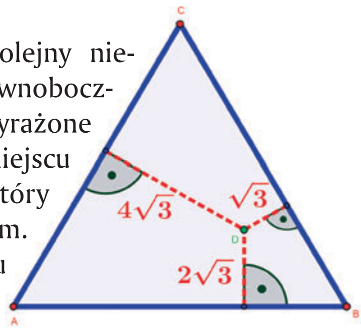
A. wierzchołkowy z kątem o wartości 140°

B. przyległy do jednego z kątów

C. równy 70°

D. równy 80°

65. Kwadratolus Łodyga zaprojektował kolejny nietypowy ogród w kształcie trójkąta równobocznego (patrz rysunek – jednostki wyrażone w metrach). W specjalnie wyliczonym miejscu umieścił kamień (punkt D na rysunku), który pomaga wspaniale rozwijać się roślinom. Posługując się informacjami z rysunku można powiedzieć, że:



A. pole powierzchni ogrodu wynosi blisko 85 m^2

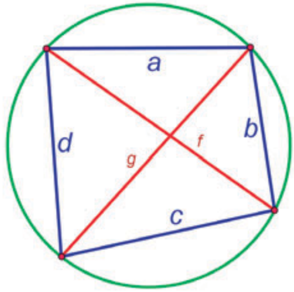
B. ogrodzenie ogrodu musi mieć ponad 40 metrów

C. jest zbyt mało danych, by określić wartość powierzchni trójkąta

D. długość obwodu ogrodu jest liczbą podzielną przez 7

Rozwiązanie:
Z twierdzenia Vivianiego $h = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 7\sqrt{3}\ m$
Bok trójkąta wyliczymy z wysokości $\frac{a\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3} \Longrightarrow a = 14\ m$
$P_\Delta = \frac{14^2\sqrt{3}}{4} = 49\sqrt{3} \approx 85\ m^2$

66. Dziuglak wpisał w okrąg czworokąt o bokach *a, b, c, d* i przekątnych *f* i *g* (patrz rysunek). Prawdziwe równanie to:



A. $a^2 + b^2 = f^2$
B. $ab = \frac{1}{2} g \cdot f$, jeśli $a = b = c = d$
C. $a + c = b + d$
D. $ac + bd = fg$

Rozwiązanie:
Z twierdzenia Ptolemeusza: $g \cdot f = ac + bd$
Jeśli $a = b = c = d$, *to podstawiając za* $c \rightarrow b$ *i za* $d \longrightarrow a$ *otrzymamy:* $g \cdot f = ab + ba$
czyli $gf = 2ab$, *więc* $ab = \frac{1}{2} gf$

67. W dowolnym trójkącie punkt przecięcia się:

A. środkowych nazywamy barycentrum
B. wysokości nazywamy ortocentrum
C. wysokości nazywamy środkiem ciężkości
D. środkowych nazywamy środkiem ciężkości

68. Przekątne sześciokąta foremnego mogą przecinać się pod kątem:

A. 60° B. 120° C. 90° D. 45°

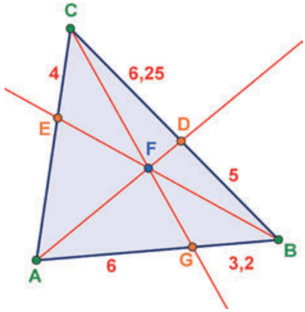
69. W trapezie *KLMN* o polu 25 cm² przekątne przecięły się w punkcie S, gdzie $KL \parallel MN$. Wiedząc, że $|KL| = 4\ |MN|$ można stwierdzić, że:

A. pole trójkąta *SMN* równe jest 4 cm²
B. pole trójkąta *KLS* równe jest 16 cm²

C. pola trójkątów *KSN* i *SLM* są równe

D. pola trójkąta *KSN* nie można obliczyć

70. Z wierzchołków trójkąta *ABC* poprowadzono półproste, które przecięły się w punkcie F oraz przecięły boki w punktach *D; E; G*. Posługując się danymi z rysunku można stwierdzić, że:



A. półprosta *AD* jest dwusieczną kąta przy wierzchołku *A*

B. odcinek $|AE|=6$

C. $\frac{[CE]}{[EA]}=\frac{2}{3}$

D. nie można obliczyć długości odcinka $|AE|$

Rozwiązanie:

Z twierdzenia Cevy:

$\frac{[AG]}{[GB]}\cdot\frac{[BD]}{[DC]}\cdot\frac{[CE]}{[EA]}=1$, *więc* $\frac{6}{3,2}\cdot\frac{5}{6,25}\cdot\frac{4}{x}=1$

$\frac{120}{20x}=1$

$x=6$

$|EA|=6$

71. Azymut to kąt wyznaczony między północą a danym kierunkiem poziomym. Wartość azymutu odmierza się kompasem lub busolą zgodnie z ruchem wskazówek zegara i najczęściej podaje się ją w stopniach. Mieszkańcy dwóch miast – Deltoigrodu i Kołogrodu (leżących na jednej szerokości geograficznej w odległości 40 km od siebie) – często udają się do magicznego źródełka mocy położonego w górach. Azymut kierunku, w jakim trzeba iść, by dojść do źródełka mierzony w Deltoigrodzie wynosi 60°, a azymut z tym samym celem mierzony w Kołogrodzie wynosi 330°. Do źródełka można dojść z obu tych miast i są to jedyne dwie możliwe drogi, a pomiędzy tymi miastami też jest tylko jedna droga. Wynika z tego, że:

A. magiczne źródełko mocy leży bliżej Deltoigrodu

B. magiczne źródełko mocy leży bliżej Kołogrodu

C. magiczne źródełko mocy leży w tej samej odległości od obu miast

D. mieszkańcy Kołogrodu mają do źródełka ponad 14 km bliżej niż mieszkańcy Deltoigrodu

Rozwiązanie:
Po narysowaniu trójkąta z wierzchołkami oznaczającymi oba miasta i źródełko można zaobserwować, że jest to trójkąt o kątach 30°; 60°; 90°, czyli boki trójkąta wynoszą 20 km; 20 3 km i 40 km. Najkrótszy bok jest między źródełkiem a Kołogrodem.

72. Zielony samochód ogrodnika Kwadratolusa Łodygi jeździ na ekopaliwie. Spala go bardzo mało, bo średnio 3 litry na 100 kilometrów. Między Deltoigrodem – stolicą Kwadratolandii a górami w Trójkolandii na mapie w skali 1:500000 można zmierzyć odległość 24 cm. Kwadratolus Łodyga potrzebuje więc na przejazd z Deltoigrodu w góry i z powrotem:

A. ok. 5 litrów ekopaliwa

B. $3\frac{3}{5}$ litra ekopaliwa

C. 36 litrów ekopaliwa

D. mniej niż 4 litry ekopaliwa

Rozwiązanie:
Ze skali wynika, że 1 cm na mapie odpowiada 5 km w rzeczywistości. Odległość między górami a Deltoigrodem jest równa 24 · 5 km =120 km. Droga w obie strony wyniesie 240 km, więc samochód spali 2,4 · 3 l = 7,2 litra ekopaliwa. Żadna odpowiedź nie jest poprawna.

73. Piłka do gry w piłkę nożną składa się z 32 łatek: czarnych pięciokątnych i białych sześciokątnych rozmieszczonych jak na rysunku.
Można obliczyć, że:

A. piłka składa się z 18 białych i 14 czarnych łatek

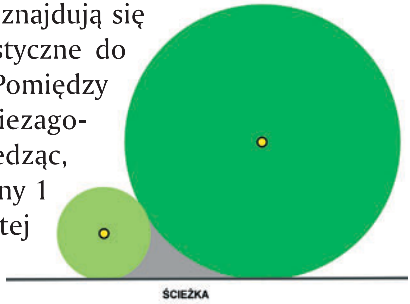
B. piłka składa się z 20 białych i 12 czarnych łatek

C. ilość czarnych łatek jest o 40% mniejsza od ilości łatek białych

D. ilość łatek poszczególnych kolorów różni się o 2

Rozwiązanie:
x - ilość łatek białych
$32 - x$ - ilość łatek czarnych
Każda biała łatka ma trzy połączenia z łatkami czarnymi, więc jest ich $3x$. Każda czarna łatka graniczy z pięcioma białymi, więc $3x = 5 \cdot (32 - x)$, to $x = 20$. Jest 20 białych i 12 czarnych łatek.

74. W posiadłości Kwadratolusa Łodygi znajdują się dwa okrągłe klomby z kwiatami styczne do siebie nawzajem oraz do ścieżki. Pomiędzy klombami a ścieżką znajduje się niezagospodarowany fragment ogrodu. Wiedząc, że mniejszy klomb ma promień równy 1 metr, a drugi 3 metry, powierzchnia tej części ma wartość:



A. mniejszą niż 2 m^2

B. równą $(4\sqrt{3} - \frac{11}{6}\pi)$ m^2

C. mniejszą niż 1 m^2, ale dokładnie nie można obliczyć

D. równą $(2\sqrt{3} + \frac{8}{3}\pi)$ m^2

75. W trapezie prostokątnym przekątne są prostopadłe. Wiedząc, że stosunek długości podstaw $\frac{a}{b} > 1$ można stwierdzić, że stosunek długości przekątnych jest równy:

A. $\frac{a}{b}$ **B.** $\frac{b}{a}$

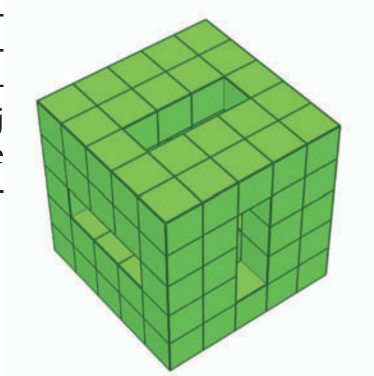
C. $\sqrt{\frac{a}{b}}$ **D.** $\frac{b^2}{a^2 - b^2}$

DZIAŁ VIII

STEREOMETRIA

MATCYFRZAK

76. Na Święto Sześciana na rynku w Deltoigrodzie postawiono pomnik w kształcie dużej sześciennej kostki zbudowanej z mniejszych sześcianów, w której wydrążono na wylot tunele prostopadłe do ścian (jak na rys.) Do zbudowania pomnika zużyto:



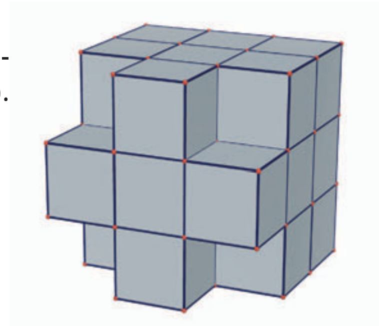
A. 65 sześcianów

B. 88 sześcianów

C. 37 sześcianów

D. 113 sześcianów

77. Z sześcianu o objętości 729 cm^3 wycięto 4 mniejsze sześciany (patrz rysunek). O nowej bryle można powiedzieć, że:



A. *Pc* wynosi 378 cm^2

B. *V* wynosi 621 cm^3

C. *V* wynosi 484 cm^3

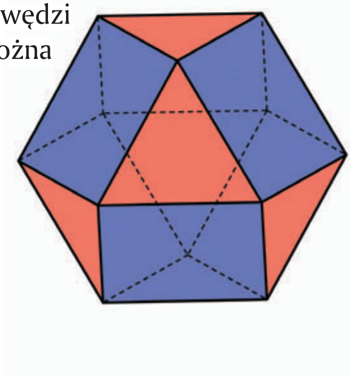
D. *Pc* wynosi 486 cm^2

Pc - pole powierzchni całkowitej bryły, V - objętość bryły

Rozwiązanie:

Po wycięciu sześcianików pole powierzchni się nie zmieni. Pojedynczy sześcian ma krawędź o długości 3 cm, więc $P_c = 6 \cdot 9^2 = 486\ cm^2$; $V = 729\ cm^3 - 4 \cdot 27\ cm^3 = 621\ cm^3$

78. Matcyfrzak skleił sześcio-ośmiościan o krawędzi długości *a* (patrz rysunek). O tej bryle można powiedzieć, że:



A. objętość $V = \frac{5}{3}\sqrt{2}\ a^3$

B. pole całkowite $P_c = (8 + 2\sqrt{3})\ a^2$

C. ma 24 krawędzie

D. największy przekrój jest sześciokątem o polu $2\sqrt{3}\,a^2$

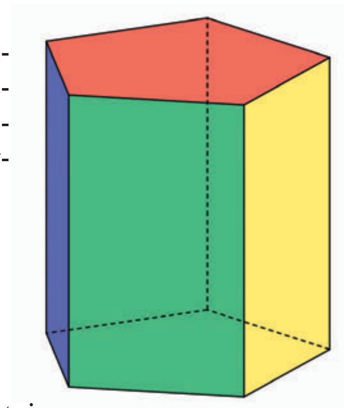
Rozwiązanie:
Wzór na objętość sześcio-ośmiościanu ma postać $V=\frac{5}{3}\sqrt{2}a^3$, *a na pole całkowite* $P_c=(6+2\sqrt{3})\,a^2$

79. Każdy dowolny sześcian ma:

A. co najmniej 4 różne siatki
B. co najmniej 11 różnych siatek
C. liczbę różnych siatek będącą liczbą pierwszą
D. nie więcej niż 5 różnych siatek

Rozwiązanie:
Sześcian ma 11 różnych siatek.

80. W pięciokącie foremnym o krawędzi 1 każda przekątna ma długość równą złotej liczbie o wartości $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Przekątna graniastosłupa prawidłowego pięciokątnego o wysokości 2 i krawędzi 1 ma:



A. zawsze taką samą długość
B. długość mniejszą od 3
C. długość niewymierną
D. długość dłuższą o 1 od liczby złotej

Rozwiązanie:
Wszystkie przekątne graniastosłupa prawidłowego pięciokątnego są równe. W tym konkretnym przypadku, obliczając z twierdzenia Pitagorasa $d=\sqrt{\frac{11+\sqrt{5}}{2}}$

81. Akwarium w kształcie prostopadłościanu o kwadratowej podstawie i sumie wszystkich krawędzi równej 120 dm ma największą objętość gdy:

A. $a=5$ dm, $H=20$ dm
B. $a=10$ dm, $H=10$ dm

C. $a > H$

D. $a < H$

a - krawędź podstawy, H - wysokość

Rozwiązanie:

$8a + 4H = 120$ więc $H = 30 - 2a$
$V = a^2 \cdot H = a^2 (30 - 2a) = -2a^3 + 30a^2$

Obliczamy pochodną: $V'(a) = -6a^2 + 60a$

$V'(a) = 0 \Leftrightarrow -6a^2 + 60a = 0$
$a = 0 \notin \mathrm{R}_+$ $a = 10$ dm
$H = 30 - 2a = 10$ dm
V_{max} dla $a = 10$ dm i $H = 10$ dm

82. Przekątną d prostopadłościanu o krawędziach a, b, c można wyrazić wzorem:

A. $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

B. $d = \sqrt{abc}$

C. $d = \sqrt{ab + bc + ac}$

D. $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

DZIAŁ IX

KOMBINATORYKA, RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA I ELEMENTY STATYSTYKI

DZIUGLAK RÓŻNICZKA MATCYFRZAK WYMIERNIAK

83. Matcyfrzak, Dziuglak, Wymierniak, Różniczka i Całka wsiedli na parterze do windy ośmiopiętrowego budynku. Dwoje z nich wysiadło na jednym piętrze, a pozostała trójka – każdy na innym piętrze. Ilość wszystkich możliwości wysiadania według opisanego schematu to:

A. $80 \cdot 7^3$
B. $1{,}68 \cdot 10^4$
C. $1{,}6 \cdot 10^2 \cdot 7^3$
D. ponad 100 tysięcy

Rozwiązanie:
$C_5^2 \cdot C_8^1 \cdot V_7^3 = \frac{5!}{2!3!} \cdot 8 \cdot \frac{7!}{4!} = 10 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 16800$

84. Różnych słów z sensem lub bez, które można ułożyć ze wszystkich liter słowa KWADRATOLANDIA, jest:

A. więcej niż 10^9
B. więcej niż 10^{12}
C. mniej niż miliard
D. mniej niż sto milionów

Rozwiązanie:
Ilość permutacji z powtórzeniami to $P = \frac{14!}{4!2!} = 1816214400$

85. W Kwadratolandii zorganizowano zawody w liczeniu na czas. Zawodnicy spotykali się w „bitwach na liczby" każdy z każdym, a ten kto rozegra najwięcej zwycięskich bitew wygrywa zawody. Po rozegraniu pięciu bitew dwóch zawodników wycofało się. Pozostali rozgrywali do końca bitwy między sobą. Jeżeli wiadomo, że wszystkich meczy rozegrano 86, to wszystkich zgłoszonych do zawodów zawodników było:

A. 10
B. 15
C. 12
D. więcej niż 10

Rozwiązanie:
n- liczba zgłoszonych zawodników. Można ułożyć równanie dotyczące liczby spotkań

$C_{n-2}^2 + 5 \cdot 2 = 86$

$\frac{(n-2)!}{2!\,(n-4)!} = 76 \quad | \cdot 2$

$(n-3)(n-2) = 156$

$n^2 - 5n - 150 = 0$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{625} = 25$

$n_{1,2} = \frac{5 \pm 25}{2}$ ↗ 15, ↘ $-10 \notin N$

W turnieju brało udział 15 zawodników.

86. Z cyfr 1,2,3 ułożono wszystkie możliwe liczby czterocyfrowe. Prawdopodobieństwo, że suma cyfr tej liczby będzie równa:

A. 7 wynosi $\frac{16}{81}$

B. 4 wynosi $\frac{4}{81}$

C. 11 jest takie samo jak przy sumie cyfr 5

D. 7 jest mniejsze niż $\frac{1}{5}$

Rozwiązanie:

Z cyfr 1, 2, 3 można ułożyć $3^4 = 81$ liczb   P - prawdopodobieństwo

Rozpatrzmy kolejne przypadki:

- *suma cyfr 4 – 1 możliwość: $P = \frac{1}{81}$*
- *suma cyfr 7 – 12 możliwości z cyframi 1,1, 2, 3 oraz 4 możliwości z cyframi 1, 2, 2, 2.*
  Razem 16 możliwości: $P = \frac{16}{81}$
- *suma cyfr 11 – 4 możliwości z cyframi 2, 3, 3, 3*
- *suma cyfr 5 – 4 możliwości z cyframi 1, 1, 1, 2*

87. Na ile sposobów w układzie współrzędnych można dojść z punktu (0;0) do punktu (5;5) poruszając się krokami długości równej jednej jednostce w kierunkach wskazanych przez osie układu współrzędnych? Ilość wszystkich takich sposobów to liczba:

A. podzielna przez 9

B. 252

C. większa niż 300

D. 324

Rozwiązanie:

Liczbę możliwych połączeń jednostkowymi odcinkami z punktu (0;0) do punktu (m,n) można obliczyć z wzoru $\binom{m+n}{n}$ czyli $\binom{5+5}{5} = \binom{10}{5} = 252$ możliwości

88. Prawdopodobieństwo, że w 10 rzutach monetą wypadnie 7 orłów

jest takie samo jak prawdopodobieństwo, że :

A. wypadną 3 orły

B. wypadnie 5 orłów

C. wypadnie 7 reszek

D. wypadną same orły

89. Pięć osób może wysiąść z autokaru na trzech przystankach na:

A. 5^3 sposobów

B. 3^5 sposobów

C. $\frac{5!}{2!}$ sposobów

D. $5!$ sposobów

DZIAŁ X

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY I CAŁKOWY

RÓŻNICZKA

90. Pole zawarte między wykresem funkcji $y = \sin x$ a osią Ox w przedziale $\langle 0 ; \pi \rangle$:

A. wynosi $\frac{\pi^3}{8}$ j^2

B. wynosi 2 j^2

C. wynosi mniej niż 2 j^2

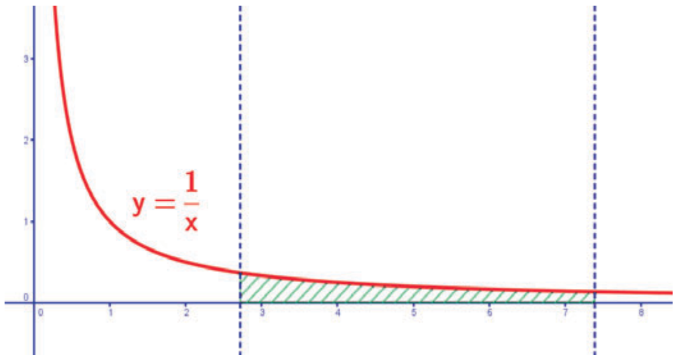
D. jest liczbą niewymierną

Rozwiązanie:

Pole można obliczyć za pomocą całki oznaczonej w granicach $\langle 0 ; \pi \rangle$

$$P=\int_0^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = 1+1 = 2\ j^2$$

91. Funkcję homograficzną $y=\frac{1}{x}$ przecięto dwiema prostymi $x = e$ oraz $x = e^2$. Pole ograniczone prostymi, osią układu i funkcją jest równe:



A. 1 [j^2]

B. $2\sqrt{e}$ [j^2]

C. e [j^2]

D. $\frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}$ [j^2]

Rozwiązanie:

Pole można obliczyć za pomocą całki oznaczonej

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x} dx = [\ln|x|]_e^{e^2} = \ln|e^2| - \ln|e| = 2 - 1 = 1\ j^2$$

92. Funkcja $f(x)=x^3 - 6x^2+9x - 2$ posiada:

A. dwa ekstrema lokalne, w tym jedno $f_{max}(1) = 2$

B. punkt przegięcia dla $x = 2$

C. jedno ekstremum lokalne i dwa punkty przegięcia

D. minimum dla $x = 3$

Rozwiązanie:

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

Obliczamy pochodną:

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$x_1 = 1 \qquad x_2 = 3$

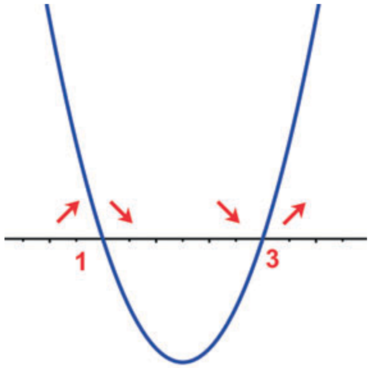
$f_{max}(1) = 2$

$f_{min}(3) = -2$

Obliczamy drugą pochodną:

$f''(x) = 6x - 12 \qquad f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Funkcja ma punkt przegięcia dla $x = 2$



93. Suma wszystkich krawędzi graniastosłupa prawidłowego czworokątnego wynosi 24. Dla krawędzi podstawy $a = 2$ graniastosłup ten będzie miał:

A. najmniejsze pole powierzchni całkowitej

B. największe pole powierzchni całkowitej

C. najmniejszą objętość

D. największą objętość

Rozwiązanie:

a - krawędź podstawy graniastosłupa, b - krawędź boczna

P_c - pole całkowite, V - objętość

$8a + 4b = 24 \Rightarrow b = 6 - 2a$

$P_c = 2a^2 + 4ab = 2a^2 + 4a(6 - 2a) = -6a^2 + 24a$

Pole całkowite jest funkcją kwadratową, więc dla $a_{wierzchołka}$ będzie miało największą wartość

czyli: $a_w = \frac{-24}{-12} = 2$

$V = a^2 \cdot b = a^2 \cdot (6 - 2a) = -2a^3 + 6a^2$

$V'(a) = -6a^2 + 12a = a(-6a + 12)$

$V'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ lub $a = 2$

dla $a = 2$ objętość przyjmuje wartość maksymalną

94. Wartość $\int(3x^4+2x)\,dx$ jest równe:

A. $\frac{3x^5}{4} + \frac{2x^5}{1} + C$

B. $\frac{3x^5}{5} + x^2 + C$

C. $12x^3 + 2 + C$

D. $x^2\left(\frac{3}{5}x^3 + 1\right) + C$

Rozwiązanie:

$$\int(3x^4 + 2x)\,dx = \frac{3x^5}{5} + \frac{2x^2}{2} + C = \frac{3x^5}{5} + x^2 + C$$

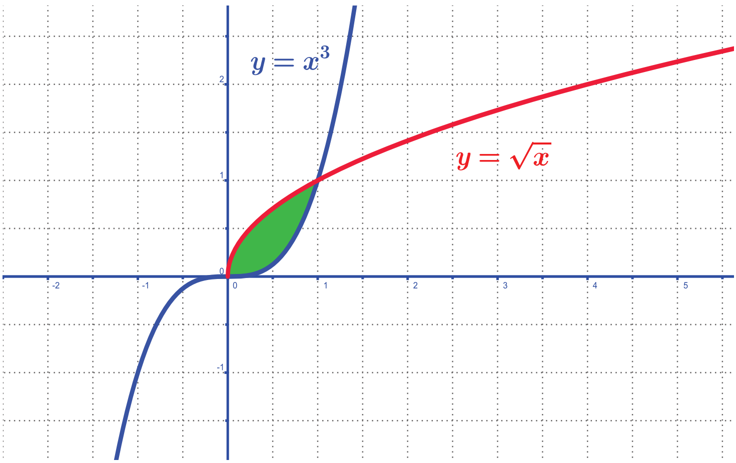
95. Pole obszaru ograniczonego funkcjami $y=x^3$ i $y=$ x (patrz rysunek) jest:

A. mniejsze od 0,5

B. równe $\frac{5}{12}$

C. równe $\frac{2}{5}$

D. większe niż $\frac{2}{5}$



Rozwiązanie:

Pole obszaru można obliczyć za pomocą całki oznaczonej

Funkcje przecinają się w punktach (0, 0) i (1, 1), więc:

$$P=\int_0^1(\sqrt{x}-x^3)dx=\left[\frac{2x\sqrt{x}}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)-0=\frac{5}{12}\ j^2$$

DZIAŁ XI

ŁAMIGŁÓWKI LOGICZNE

CAŁKA

96. Kwadratolus Łodyga zastanawia się jak może posadzić 10 drzew. Na pewno uda mu się posadzić je w:

A. 5 rzędach po 2 drzewa w każdym

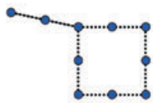
B. 3 rzędach po 3 drzewa w każdym

C. 5 rzędach po 3 drzewa w każdym

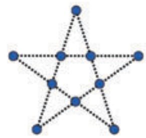
D. 5 rzędach po 4 drzewa w każdym

Rozwiązanie:
Możliwe sposoby zasadzenia 10 drzew:

5 rzędów po 2 drzewa



5 rzędów po 3 drzewa



5 rzędów po 4 drzewa

97. Na ratuszowej wieży w Deltoigrodzie zegar wybija pełne godziny zgodnie ze wskazaniem godziny oraz pojedynczym biciem informuje mieszkańców o pełnych kwadransach. Prawdziwe są więc zdania:

A. między 14^{50} a 20^{05} zegar bije więcej razy niż między 1^{48} a 7^{43}

B. uderzeń o pełnych godzinach jest dwa razy więcej niż pozostałych

C. w ciągu doby zegar bije 252 razy

D. w ciągu doby zegar bije 228 razy

Rozwiązanie:
Rozpatrzmy ilość uderzeń w ciągu dwunastu godzin, gdyż w kolejnych dwunastu sytuacja jest analogiczna.
Oprócz wybijania pełnych godzin od 1 do 12, pomiędzy każdą z godzin zegar wybija sygnał 3 razy, więc:
Suma uderzeń $= 1 + 2 + \ldots + 12 + 3 \cdot 12 = 78 + 36 = 114$ *razy.*
W ciągu doby zegar bije 228 razy.

98. Matcyfrzak, Dziuglak, Wymierniak i Różniczka trenują zawodowo jazdę na deskorolce. Każdy z nich ma indywidualny trening w inny dzień tygodnia (od poniedziałku do czwartku) z mistrzem Kwadratolandii – Skejciakiem Pionierem. Pierwsza z osób trenuje 1 rok, druga 2 lata, trzecia 3 lata, a czwarta aż 4 lata. Matcyfrzak ma trening we wtorek i nie trenuje ani najkrócej ani najdłużej z wszystkich osób. Dziuglak trenuje nieparzystą liczbę lat. Różniczka trenuje dzień przed Wymierniakiem i dłużej niż Matcyfrzak. W czwartki trenuje osoba z najkrótszym stażem. Prawdziwe informacje to:

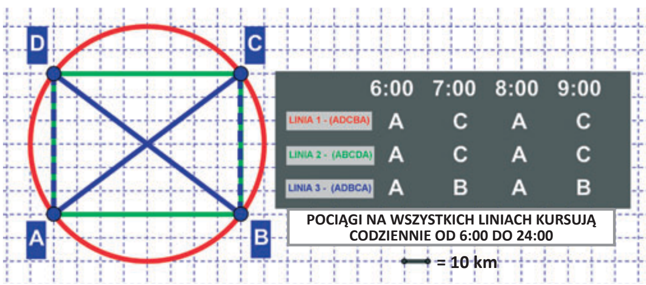
A. najdłużej trenuje Różniczka
B. Wymierniak trenuje ostatni w tygodniu
C. Matcyfrzak trenuje dłużej niż Dziuglak
D. trzy dni po kolei trenują chłopcy

Rozwiązanie:
Do rozwiązania posłużymy się tabelą:

	1 ROK	*2 LATA*	*3 LATA*	*4 LATA*	*PONIEDZIAŁEK*	*WTOREK*	*ŚRODA*	*CZWARTEK*
MATCYFRZAK	X	O	X	X	X	O	X	X
DZIUGLAK	X	X	O	X	O	X	X	X
WYMIERNIAK	O	X	X	X	X	X	X	O
RÓŻNICZKA	X	X	X	O	X	X	O	X
PONIEDZIAŁEK	X	X	O	X				
WTOREK	X	O	X	X				
ŚRODA	X	X	X	O				
CZWARTEK	O	X	X	X				

O - *dobra odpowiedź*
X - *zła odpowiedź*

99. W Kwadratolandii kursują na trzech liniach super szybkie pociągi *Power - N*. Linie te przecinają się w głównych stacjach przesiadkowych *A*, *B*, *C*, *D*. Na podstawie planu przebiegu poszczególnych tras oraz danych fragmentu rozkładu jazdy (patrz rysunek i informacje) można stwierdzić, że:



A. średnia prędkość pociągu na linii 1 jest największa
B. pociągi na wszystkich liniach mają inne prędkości
C. najwolniejszy pociąg przejedzie w ciągu całego dnia ponad 2500 km
D. średnia prędkość pociągu na linii 3 jest największa i wynosi 160 km/h

100. Matcyfrzak i Wymierniak założyli się kto pierwszy pokona trasę z Deltoigrodu do Kołogrodu. Matcyfrzak całą trasę pokonał rowerem z tą samą szybkością. Wymierniak połowę trasy pokonał pociągiem, który miał średnią prędkość pięć razy większą niż prędkość, z jaką Matcyfrzak pokonywał trasę rowerem. Drugą połowę trasy Wymierniak pokonywał pieszo z prędkością dwa razy mniejszą niż prędkość Matcyfrzaka. Prawdą jest, że:

A. jeden z chłopców pokonał trasę w czasie o 10% dłuższym
B. Wymierniak dotarł do celu szybciej
C. Matcyfrzak dotarł do celu szybciej
D. obaj chłopcy pokonali trasę w tym samym tempie

Rozwiązanie:
Oznaczmy, że $t = \frac{s}{v}$*, więc jeśli Wymierniak pół drogi pokonał pociągiem, a pół pieszo, to jego czas pokonania drogi można zapisać jako:* $t_W = \frac{\frac{1}{2}s}{5v} + \frac{\frac{1}{2}s}{\frac{1}{2}v} = \frac{1}{10}\frac{s}{v} + \frac{s}{v} = 1{,}1\frac{s}{v} = 110\%\, t_M$

101. Super szybki pociąg *Power - N* przejeżdża najdłuższy most Kwadratolandii o długości 1000 metrów w 20 sekund, natomiast największy semafor mija w ciągu 10 sekund. Można stwierdzić, że:

A. średnia prędkość pociągu wynosi 50 m/s
B. średnia prędkość pociągu wynosi 180 km/h
C. pociąg jedzie z prędkością większą niż 200 km/h
D. długość pociągu wynosi 500 m

Rozwiązanie:
Jeżeli pociąg mija semafor w ciągu 10 sekund czyli w czasie o połowę krótszym niż pociąg przejeżdża most o długości 1000 m, to znaczy, że długość pociągu wynosi 500 m. Wynika z tego, że szybkość $V = 500\ m : 10s = 50\ \frac{m}{s} = 180$ *km/h.*

Wydawca:
Firma Edukacyjno-Wydawnicza ELITMAT
www.matematykainnegowymiaru.pl
e-mail: matematykainnegowymiaru@elitmat.pl
tel. 51-81118-51

EGZEMPLARZ BEZPŁATNY

MATEMATYKA
INNEGO WYMIARU

WWW.MATEMATYKAINNEGOWYMIARU.PL

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!

ELITMAT
FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Publikacja współfinansowana ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego