MATEMATYKA INNEGO WYMIARU

Zbiór zadań z matematyki dla szkół ponadgimnazjalnych

Dariusz Kulma

IV ETAP EDUKACYJNY

ZADANIA DLA SZKÓŁ PONADGIMNAZJALNYCH

ELITMAT 2012

IV ETAP EDUKACYJNY
ZADANIA DLA SZKÓŁ PONADGIMNAZJALNYCH

Autor:
Dariusz Kulma

Wydanie 1

Wydawca:
Firma Edukacyjno-Wydawnicza ELITMAT
ul. Plac Kilińskiego 7/4
05-300 Mińsk Mazowiecki
www.elitmat.pl

Druk i oprawa:
Drukarnia Beltrani
ul. Śliwkowa 1, 31-982 Kraków

ISBN 978-83-934311-8-2

Spis treści

WSTĘP

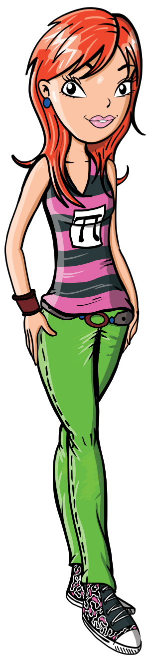
Drogie Uczennice i Uczniowie

Z przyjemnością przekazujemy Wam zbiór z zadaniami matematycznymi podzielonymi wg różnych zagadnień. Na pewno będziecie korzystać z niego wspólnie ze swoimi nauczycielami na lekcjach, ale dodatkowo zachęcamy Was także do samodzielnej pracy w domu. Akcja zadań toczy się w wirtualnej krainie Kwadratolandii, przez którą oprowadzi Was Matcyfrzak ze swoją matematyczną ekipą. Chcielibyśmy zwrócić Waszą uwagę na fakt, że zbiór zawiera zadania zamknięte wielokrotnego wyboru, co oznacza, że należy zastanowić się nad każdą z proponowanych w zadaniu odpowiedzi i określić czy jest ona poprawna czy nie. Dzięki takiej formie zadań bardzo dobrze przygotujecie się do udziału w „Matematycznych Mistrzostwach Polski Dzieci i Młodzieży", co mamy nadzieję zaowocuje zdobyciem jak najlepszych wyników wśród uczniów z całej Polski.

Życzymy powodzenia!

DZIAŁ I

ZBIÓR LICZB RZECZYWISTYCH



RÓŻNICZKA

1. Wielki grecki matematyk Diofantos, żyjący w III wieku w Aleksandrii, podał następujące zadanie: „Należy znaleźć trzy liczby, których suma, a także suma każdej pary tych liczb jest kwadratem". Przykłady takich liczb to:

A. 41, 80, 320 **B.** 97, 192, 2112
C. 23, 81, 40 **D.** 12, 15, 18

2. Matcyfrzak odkrył pewną zależność liczbową. Wg niej suma liczb dodatniej i liczby odwrotnej do niej może być równa:

A. 2 **B.** 5 **C.** 1 **D.** 1,5

3. Matcyfrzak ułożył równanie $AB+BA=CAC$, które dał do rozwiązania Wymierniakowi, gdzie liczby AB, BA i CAC to liczby o cyfrach A,B,C. Zadaniem Wymierniaka było odgadnięcie, jakie cyfry kryją się pod literami. Wymierniak może stwierdzić, że:

A. liczba CAC jest kwadratem liczby pierwszej
B. liczba BA jest ponad 3 razy większa od liczby AB
C. cyfra A jest parzysta
D. liczba CAC jest podzielna przez 11

4. Liczba $17!=3xx687428096000$, gdzie x oznacza taką samą cyfrę. Cyfra x musi być:

A. równa 1 **B.** równa 3
C. mniejsza od 6 **D.** równa 5

5. Najbardziej szczęśliwa liczba w Kwadratolandii to oczywiście 7. Jeśli litery oznaczają kolejne cyfry w liczbach, to przez 7 będą zawsze podzielne liczby:

A. $AAA+A$ **B.** $ABA-BAB$
C. $AA+BB$ **D.** $AB+BC+AC$

6. Matcyfrzak zapisał liczbę 2012^{2012}. Ostatnią cyfrą tej liczby jest:

A. 0 B. 8 C. 4 D. 6

7. Palindromami, które są kwadratami liczb naturalnych, są:

A. 1331 B. 1234321 C. 10201 D. 4008004

8. Matcyfrzak zapisał ułamek $\frac{121214}{121216}$, a Wymierniak ułamek $\frac{121215}{121218}$
Wynika z tego, że:

A. po sprowadzeniu ułamków do wspólnego mianownika i obliczeniu różnicy bądź sumy otrzymamy ułamek, który można skrócić przez 12

B. ułamek Matcyfrzaka jest większy

C. ułamek Wymierniaka jest większy

D. ułamki są równe

9. Matcyfrzak próbuje rozdzielić jak najmniejszą ilością linii prostych liczby pierwsze od pozostałych (patrz rysunek). Żeby tak zrobić, musi narysować:

A. co najmniej 6 linii prostych

B. dokładnie 6 linii prostych

C. co najwyżej 5 linii prostych

D. dokładnie 3 linie proste

13	11	51	22
91	17	23	37
12	57	99	39
25	19	29	44

10. Liczby naturalne ustawiamy kolejno po sobie tworząc liczbę 1234567891011121314151617…..
Na 2013 - tym miejscu będzie znajdowała się cyfra:

A. 0 B. 7 C. 8 D. 9

11. Matcyfrzak razem z Wymierniakiem zastanawiają się nad tym, dla jakich liczb a i p wyrażenie $a^p - a$ jest podzielne przez p. Wskaż jednoczesne poprawne propozycje obu chłopców.

A. M: $\begin{cases} a = 2 \\ p = 5 \end{cases}$ W: $\begin{cases} a = 5 \\ p = 2 \end{cases}$

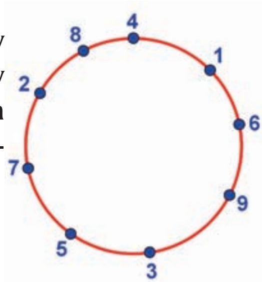
B. M: $\begin{cases} a = 3 \\ p = 7 \end{cases}$ W: $\begin{cases} a = 7 \\ p = 3 \end{cases}$

C. M: $\begin{cases} a = 2 \\ p = 6 \end{cases}$ W: $\begin{cases} a = 3 \\ p = 2 \end{cases}$

D. M: $\begin{cases} a = 11 \\ p = 11 \end{cases}$ W: $\begin{cases} a = 7 \\ p = 7 \end{cases}$

M - Matcyfrzak, W - Wymierniak

12. Na okręgu zaznaczono w dowolnym układzie cyfry od 1 do 9 jak na rysunku. Każde trzy kolejne cyfry odczytywane w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara tworzą liczbę trzycyfrową. Wynika z tego, że suma wszystkich liczb jest:



A. liczbą pierwszą

B. liczbą podzielną przez 45

C. równa sumie wszystkich liczb trzycyfrowych, które powstałyby gdyby odczytać je w odwrotnym kierunku

D. równa 4995

13. Liczba $101^8+3 \cdot 101^4 - 4$ jest podzielna przez:

A. 1000 B. 100 C. 51 D. 102000

14. Dane jest wyrażenie $4n+1$, gdzie $n \in N_+$. Liczbę taką można zawsze przedstawić jako:

A. sumę dwóch liczb całkowitych

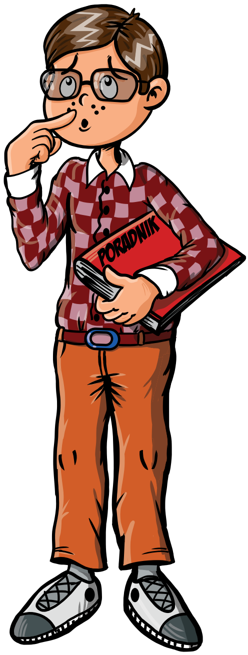
B. sumę kwadratów dwóch liczb całkowitych

C. sumę sześcianów dwóch liczb całkowitych

D. sumę kwadratów dwóch liczb niewymiernych

DZIAŁ II

WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE



WYMIERNIAK

15. Różniczka i Matcyfrzak zastanawiają się, dla jakich liczb *x* i *y* wyrażenie postaci $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ jest zawsze prawdziwe. Jeśli chcieliby podać prawidłową odpowiedź, to musieliby napisać, że:

A. $x \in C$ i $y \in C$ B. $x \in W_+$ i $y \in W_+$
C. $x \in N$ i $y \in N$ D. $x \in R$ i $y \in R$

N - liczby naturalne, R - liczby rzeczywiste, W – liczby wymierne, C - liczby całkowite

16. Najgroźniejszy matematyk Kwadratolandii – Czarny Septylion obmyślił nowe działanie, które ma postać:

$$(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{4})(1+\frac{1}{5})\cdot\ldots\cdot(1+\frac{1}{2010})(1+\frac{1}{2011})$$

Wynikiem tego działania:

A. będzie liczba wymierna B. nie będzie liczba całkowita
C. będzie liczba parzysta D. będzie liczba 606

17. Liczby podzielne przez 400 to:

A. 120400 B. $20!+19!+18!$
C. 2^8+12^2 D. $20!$

18. Dziuglak zapisał kilka działań z wykorzystaniem funkcji Entier. Działania, których wynikiem jest liczba 1, to:

A. $[\pi]^{[e]} - [e]^{[\pi]}$ B. $\sin^2[e+1]+\cos^2\pi$
C. $[\sqrt{2}]^{[\sqrt{2}]}$ D. $[\sqrt{7}]^{[\sqrt{7}]} - [\sqrt{5}]^{[\sqrt{5}]}$

19. Jeśli $k=\log_7 4$, to wyrażenie $\log_{16}7\cdot\log_2 49$ można zapisać jako:

A. $2k^2$ B. $(0,5k)^{-2}$ C. $4k^2$ D. $\frac{2}{k^2}$

20. Liczba $3^n+3^{(n+1)}+3^{(n+2)}+3^{(n+3)}$ jest dla każdego $n \in N_+$ podzielna przez:

A. 12 B. 120 C. 360 D. 6

21. Wyrażenie $(n+2)!+(n+1)!+n!$ jest równe:

A. $(3n+3)!$ B. $(3n)!+3$

C. $n!(n+2)^2$ D. $(n+3)!$

22. Dana jest liczba $a=\sqrt[3]{15\sqrt{3}-26}-\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}$ i liczba $b=\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{2}$. Prawdziwe są stwierdzenia, że:

A. $a>b$ B. $a=b$

C. $a<b$ D. obie liczby są naturalne

23. Jeśli wyrażeniem $\bar{a}$ oznaczymy ostatnią cyfrę liczby 7^{77}, $\bar{b}$ ostatnią cyfrę 8^{88}, a $\bar{c}$ ostatnią cyfrę 9^{99}, to prawdziwe są zależności:

A. $\bar{a}+2=\bar{c}$ B. $\bar{b}^{\bar{c}}>\bar{c}^{\bar{b}}$

C. $\sqrt{\bar{c}}=2\cdot\bar{b}$ D. $\bar{a}^{\bar{b}}=\bar{b}^{\bar{c}}$

24. Wymierniak oznaczył liczby $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ jako ostatnie cyfry wyrażeń $\bar{a}=2012^{2012}$, $\bar{b}=107^{108}$, $\bar{c}=7^{77}$. Wynika z tego, że:

A. $\bar{b}=\bar{c}$ B. $\bar{a}>\bar{b}>\bar{c}$

C. $\bar{a}>\bar{b}$ D. $\bar{a}\leq\bar{c}$

25. Dany jest wielomian $K(x)=x^{2012}+1$. Reszta z dzielenia tego wielomianu przez trójmian x^2-1 ma postać:

A. $3x+2$ B. 2 C. $-x-1$ D. $x+1$

26. Suma liczb $\underbrace{33\ldots3}_{n}{}^2+\underbrace{22\ldots2}_{n}$ jest równa:

A. $\underbrace{11\ldots1}_{2n}$ B. $\underbrace{33\ldots3}_{2n}$ C. $\underbrace{2323\ldots23}_{n}$ D. $\underbrace{11\ldots1}_{n}$

27. Liczba $3^1+3^2+3^3+\ldots+3^{50}$ jest podzielna przez:

A. 3 B. 4 C. 6 D. 24

28. Wyrażenie $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$, gdzie $a, b, c \in R_+$ jest:

A. większe od 8 B. większe bądź równe 9

C. większe od 7 D. większe od 10

29. Liczba $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 \cdot \log_8 9 \cdot \log_9 10 \cdot \log_{10} 11 \cdot \log_{11} 12 \cdot \log_{12} 13 \cdot \log_{13} 14 \cdot \log_{14} 15 \cdot \log_{15} 16$ jest:

A. niewymierna B. pierwsza

C. całkowita D. kwadratem liczby naturalnej

30. Liczba $\sqrt{16 + 6\sqrt{7}} + \sqrt{16 - 6\sqrt{7}}$ jest liczbą:

A. wymierną B. niewymierną

C. całkowitą D. doskonałą

31. Wiedząc, że $ab = 1$ oraz $a \in R_+$ i $b \in R_+$ można stwierdzić, że wyrażenie $(7+a)(7+b)$ jest:

A. większe od 60 B. większe bądź równe 64

C. mniejsze od 60 D. mniejsze od 64

32. Jeżeli samogłoski oznaczają cyfry nieparzyste, a spółgłoski cyfry parzyste, to wyrażenie $AAA + BBB + AA + BB + A + B$ będzie podzielne przez:

A. 41 B. 3 C. 123 D. 11

33. Dla każdej naturalnej liczby nieparzystej wielomian $W(x) = (x - 9)(x - 7)(x - 5)$ jest podzielny przez:

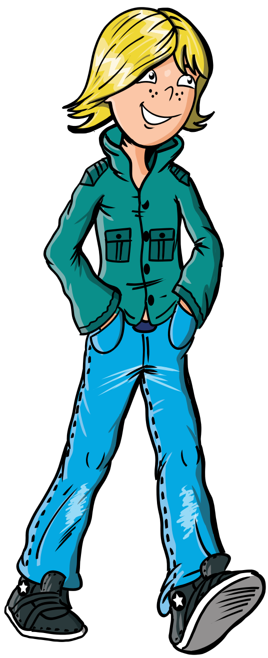
A. 24 B. 48 C. 3 D. 6

34. Matcyfrzak zapisał na tablicy liczbę M taką, która jest iloczynem liczb 1234 oraz 12351235. Wymierniak zapisał liczbę B, która również jest iloczynem, ale o czynnikach 1235 oraz 12341234. Zależność, jaką można zaobserwować między tymi liczbami, to:

A. $M \leq W$ B. $M > W$ C. $M = W$ D. $2M = 3W$

DZIAŁ III

RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI



DZIUGLAK

35. Wymierniak zapisał równanie: $a^2x + 2a = 4x + a^2$. O rozwiązaniach x tego równania można powiedzieć, że:

A. rozwiązanie x jest zawsze jedno

B. rozwiązanie x nie istnieje dla $a = -2$

C. rozwiązaniem x może być nieskończenie wiele liczb pod warunkiem, że $a=2$

D. rozwiązaniem x będzie zero, jeśli $a=0$

36. Czarny Septylion zadał rycerzowi Dwumianusowi do rozwiązania następujące równanie:

$2012-(2011-(2010-\ldots-(1-x))\ldots)=1012$

Wynika z tego, że:

A. rozwiązanie jest najmniejszą liczbą doskonałą

B. brakuje części równania, więc nie można go rozwiązać

C. $x = -1013$

D. $x=6$

37. Czarny Septylion wymyślił kolejne trudne zadanie, by dręczyć nim swoich przeciwników. Zadanie polegało na znalezieniu wszystkich rozwiązań całkowitych równania $2|x|-(-1)^x=11$. Wynika z tego, że:

A. rozwiązań równania jest parzysta ilość, ale jest ich nieskończenie wiele

B. rozwiązania są dokładnie cztery

C. jednym z tych rozwiązań jest 5

D. rozwiązań jest nieskończenie wiele

38. Dane jest równanie $n+\frac{1}{n}=4$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Wynika z tego, że prawdziwe są zależności:

A. $n^2+\frac{1}{n^2}=14$

B. $n^2=16-\frac{1}{n}$

C. $n^3 + \frac{1}{n^3} = 52$ **D.** $n^4 + \frac{1}{n^4} = 194$

39. Równania, które mają tylko jedno rozwiązanie całkowite, to:

A. $\frac{2x}{x-2} + \frac{4x}{x-2} + \frac{8x}{x-2} + \ldots + \frac{64x}{x-2} = 252$

B. $x^3 + x^2 = 0$

C. $2^{x-3} = 0,5$

D. $x \cdot \ln x = 0$

40. Układ równań z parametrem m postaci $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ mx - y + z = 3 \\ 2mx + y + (m+1)z = 15 \end{cases}$ ma:

A. zawsze jedno rozwiązanie

B. jedno rozwiązanie, gdy $m \neq 2$

C. jedno rozwiązanie, gdy $m \neq 1$

D. nieskończenie wiele rozwiązań

41. Różniczka, Matcyfrzak i Dziuglak ważą razem 185 kg. Matcyfrzak, Dziuglak i Wymierniak ważą razem 195 kg, natomiast Wymierniak i Różniczka łącznie 110 kg. Wynika z tego, że:

A. Wymierniak jest cięższy od Różniczki o 10 kg

B. cała czwórka waży łącznie 245 kg

C. Różniczka waży 50 kg

D. najlżejsza jest Różniczka

DZIAŁ IV

FUNKCJE

WYMIERNIAK MATCYFRZAK

42. Funkcja kwadratowa przecina oś Ox w punkcie (5,0). Największa wartość funkcji w przedziale $x \in \langle 7;11 \rangle$ wynosi 60, a oś symetrii tej funkcji ma równanie $x=3$. Prawidłowe równanie tej funkcji to:

A. $y=2(x-1)(x-5)$ **B.** $y=(x-3)^2+4$

C. $y=x^2-6x+5$ **D.** $y=(x-3)^2-4$

43. O funkcji $f(x)=x^3-6x^2+1$ można powiedzieć, że:

A. ma minimum i maksimum lokalne

B. jest rosnąca w przedziale $x \in (0; 4)$

C. ma jedno minimum dla $x=4$

D. w przedziale $x \in (100;105)$ jest rosnąca

44. Przyjaciele Matcyfrzak i Wymierniak prześcigają się w zapisywaniu funkcji liniowych, które są najlepsze w poszczególnych kategoriach (patrz tabelka). Za każdą zwycięską funkcję uzyskuje się 2 punkty, jeśli jest remis -1 punkt, a przy przegranej - 0 punktów.

KATEGORIA	*MATCYFRZAK*	*WYMIERNIAK*
Największe miejsce zerowe	$y=6x+80$	$y=-3x-40$
Najszybciej rosnąca funkcja	$y=77x+2$	$y=73x+105$
Najmniejsza wartość dla argumentu 100	$y=-4x+8$	$y=-5x+104$
Największy argument dla wartości funkcji równej 7	$y=15x+67$	$y=12x+55$

Wynika z tego, że w tej rywalizacji:

A. wygrał Matcyfrzak **B.** wygrał Wymierniak

C. padł remis **D.** wynik to 4 : 4

45. Matcyfrzak zapisał funkcję $m(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+5$, a Wymierniak funkcję $w(x)=(x-5)(x-6)(x-7)(x-8)+5$. Można stwierdzić, że:

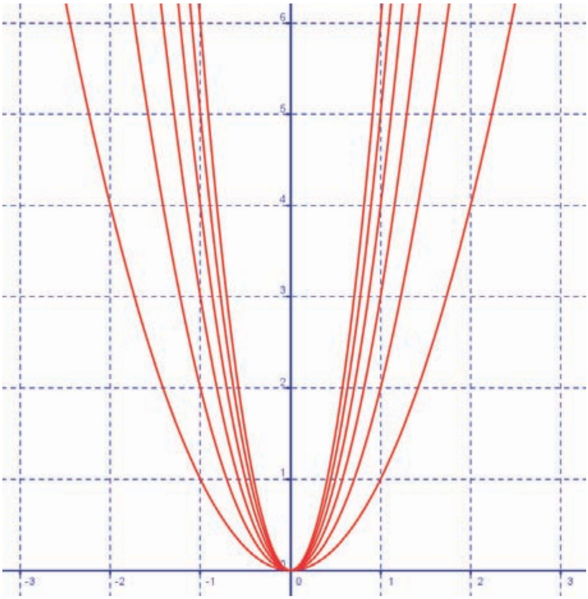
A. obie funkcje są cały czas dodatnie

B. jedna z funkcji ma przedziały ujemne

C. najmniejsza wartość obu funkcji jest taka sama

D. obie funkcje mają oś symetrii

46. Na rysunku przedstawiono rodzinę sześciu parabol postaci $y=ix^2$, które mają ten sam wierzchołek oraz w tę samą stronę skierowane ramiona. Posługując się rysunkiem można stwierdzić, że:



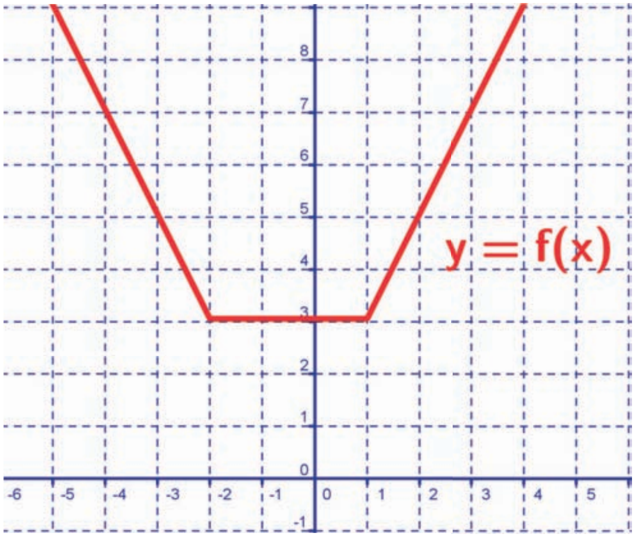
A. suma tych parabol tworzy parabolę posiadającą te same cechy

B. iloczyn tych parabol tworzy parabolę

C. dla każdego „i" parzystego funkcja jest parzysta

D. dla każdego „i" nieparzystego funkcja jest nieparzysta

47. Funkcja $f(x)$ przedstawiona na rysunku ma wzór postaci:



A. $f(x)=|x+1|+|x+2|$

B. $f(x)=|x-1|+|x-2|$

C. $f(x)=|x-1|+|x+2|$

D. $f(x)=|x-2|+|x+1|$

48. Dana jest funkcja $f(x) = |-|x+2|+3|-1$. Liczba rozwiązań $f(x) = p$ dla:

A. $p = -1$ jest taka sama jak dla $p = 3$

B. $p = 1$ jest taka sama jak dla $p = -1$

C. $p = 2$ jest większa niż dla $p = -1$

D. $p \in (-1;2)$ jest równa 4

49. Dana jest funkcja $y=\frac{4x+3}{x-4}$. Można o tej funkcji powiedzieć, że:

A. jest rosnąca dla $x \in R$

B. jest rosnąca dla $x \in R\setminus\{4\}$

C. jest malejąca dla $x \in R\setminus\{4\}$

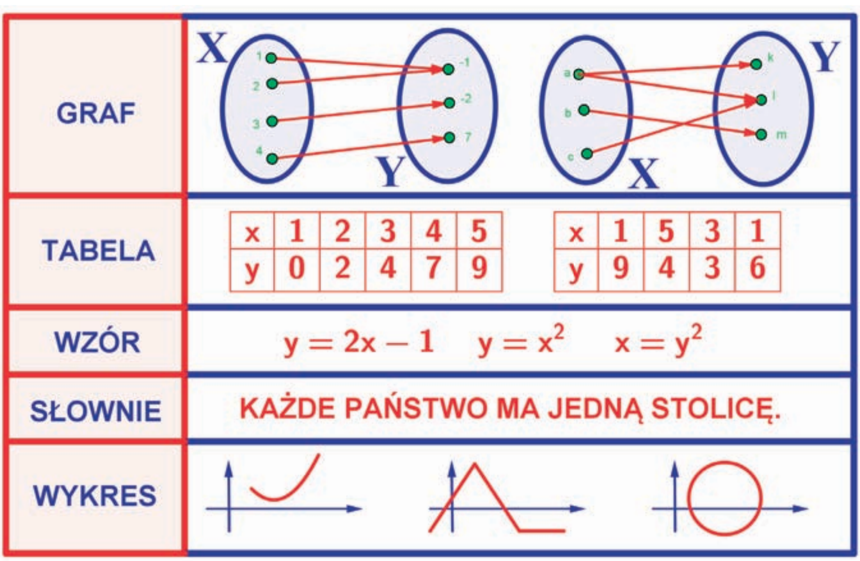
D. zbiór wartości funkcji jest równy dziedzinie

50. Dana jest funkcja liniowa $f(x) = (a + b)x + (c + d)$ oraz $g(x)=(c + d)x - (a + b)$, gdzie $a + b > 0$ i $c + d < 0$. Obie funkcje jednocześnie:

- **A.** przechodzą przez ćwiartkę IV
- **B.** nie przechodzą przez ćwiartkę III
- **C.** przechodzą przez ćwiartkę III
- **D.** przecinają oś OY dla wartości ujemnych

51. W tabeli przedstawiono za pomocą grafów, tabelek, wzorów, wykresów i słownie 11 różnych przyporządkowań. Wśród tych przyporządkowań jest:

- **A.** 11 funkcji
- **B.** 5 funkcji
- **C.** 7 funkcji
- **D.** co najmniej 6 funkcji



DZIAŁ V

CIĄGI

DZIUGLAK RÓŻNICZKA MATCYFRZAK WYMIERNIAK

52. Szkoła w Deltoigrodzie liczy 555 uczniów, wśród których jest *d* dziewcząt. Pierwsza dziewczyna podoba się 10 chłopcom, druga 11 chłopcom, trzecia 12 chłopcom itd. Ostatnia z dziewcząt podoba się wszystkim chłopcom. Wynika z tego, że:

A. chłopców jest parzysta liczba
B. dziewcząt jest nieparzysta liczba
C. chłopców jest o 9 więcej
D. liczba chłopców wynosi 273

53. Długości boków trójkąta są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o różnicy 4. Kąt rozwarty trójkąta wynosi 120°. Wynika z tego, że:

A. obwód trójkąta jest równy 30
B. pole koła wpisanego w trójkąt wynosi $3\ \pi j^2$
C. pole trójkąta jest liczbą wymierną
D. najmniejszy kąt trójkąta jest mniejszy niż $\frac{\pi}{6}$

54. Trzynasty wyraz ciągu arytmetycznego równy jest 0. Wynika z tego, że:

A. ciąg jest rosnący
B. ciąg jest malejący
C. suma $S_{25} = 0$
D. suma S_{13} jest dodatnia

55. Wymierniak, Dziuglak i Różniczka zapisali po trzy liczby a_1, a_2, a_3 takie, które tworzą ciąg arytmetyczny i geometryczny jednocześnie. Wśród tych trójek liczb mogły być takie, które spełniają warunki:

A. $a_1 \neq a_2 \neq a_3$
B. $a_1 = a_2 = a_3$
C. $a_1 + 3 = a_2 + a_1 = 2a_4$
D. $a_1 + a_2 = \frac{1}{2} a_3$

56. Suma jedenastu pierwszych wyrazów ciągu arytmetycznego wynosi zero. Wynika z tego, że:

A. $a_1 > a_{11}$
B. $a_{11} > a_1$
C. $a_6 = 0$
D. $a_1 = a_{11}$

57. Dane są ciągi arytmetyczne a_n, b_n, c_n. Prawdziwe mogą być zależności:

A. $a_n + b_n = c_n$

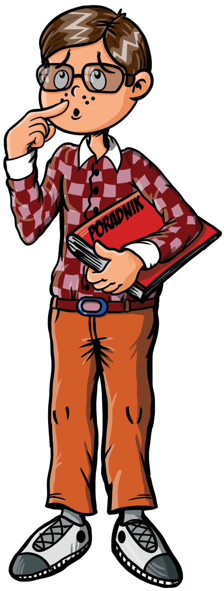
B. $a_n \cdot b_n = c_n$

C. $a_n - b_n = c_n$

D. $\frac{b_n}{a_n} = c_n$

DZIAŁ VI

TRYGONOMETRIA



WYMIERNIAK

58. Dziedzina wyrażenia $\log_{\cos x}(x^2-9)$ jest zbiorem:

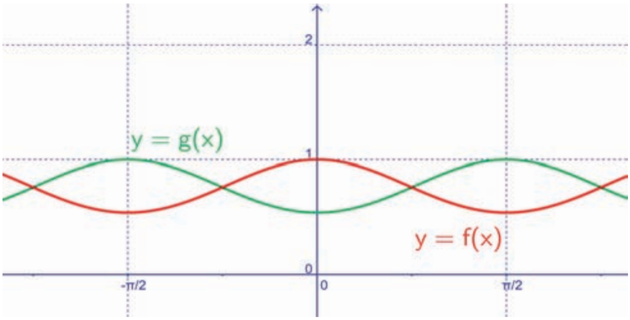
A. $x \in (-3;3)$ B. $x \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$

C. $x \in \langle -3;3 \rangle$ D. $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

59. Jednym z rozwiązań równania $\sin(\pi \cos x)=0$ jest:

A. $x = \frac{\pi}{2}$ B. $x = 2\pi$ C. $x = -\pi$ D. $x = -2\pi$

60. Na rysunku przedstawiono dwie funkcje: $y=\cos(\cos x)$ i $y=\cos(\sin x)$.



Prawdziwe stwierdzenie to:

A. $f(x)=\cos(\cos x)$; $g(x)=\cos(\sin x)$

B. $f(x)=\cos(\sin x)$; $g(x)=\cos(\cos x)$

C. $f(x)=-g(x)$

D. $f((x)=-g(x)+1,5$

61. Największą wartością funkcji $y=(\sin x)^{\sin x}$ w przedziale $\langle 0;\pi \rangle$ jest:

A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 1

62. Wykres funkcji $f(x) = \cos x$ można otrzymać przekształcając wykres funkcji $g(x) = \sin x$. Prawdziwe jest więc przekształcenie:

A. $f(x) = g(x + \frac{\pi}{2})$ B. $f(x) = -g(-x)$

C. $f(x) = g(|x|)$ D. $f(x) = -g(x - \frac{\pi}{2})$

DZIAŁ VII

PLANIMETRIA I GEOMETRIA W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH

DZIUGLAK

63. W dowolnym n - kącie foremnym, gdzie suma kątów wynosi s, a liczba przekątnych d, można stwierdzić, że:

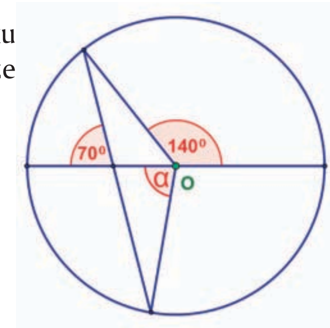
A. $d = \frac{n(n-3)}{2}$

B. $s = (n-1) \cdot 180°$

C. wyrażenie $n^2 - 3n - 10$ pozwoli na wyliczenie ilości boków wielokąta o 5 przekątnych

D. $s \cdot (\frac{s}{\pi} - 3) = 2d$

64. Środek okręgu przedstawionego na rysunku oznaczono w punkcie O. Wynika z tego, że kąt α jest:



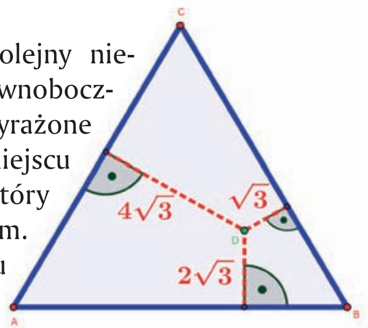
A. wierzchołkowy z kątem o wartości 140°

B. przyległy do jednego z kątów

C. równy 70°

D. równy 80°

65. Kwadratolus Łodyga zaprojektował kolejny nietypowy ogród w kształcie trójkąta równobocznego (patrz rysunek – jednostki wyrażone w metrach). W specjalnie wyliczonym miejscu umieścił kamień (punkt D na rysunku), który pomaga wspaniale rozwijać się roślinom. Posługując się informacjami z rysunku można powiedzieć, że:



A. pole powierzchni ogrodu wynosi blisko 85 m²

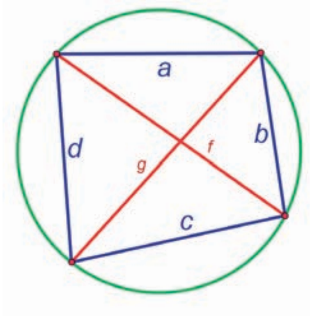
B. ogrodzenie ogrodu musi mieć ponad 40 metrów

C. jest zbyt mało danych, by określić wartość powierzchni trójkąta

D. długość obwodu ogrodu jest liczbą podzielną przez 7

66. Dziuglak wpisał w okrąg czworokąt o bokach a, b, c, d i przekątnych f

i g (patrz rysunek). Prawdziwe równanie to:



A. $a^2 + b^2 = f^2$

B. $ab = \frac{1}{2} g \cdot f$, jeśli $a = b = c = d$

C. $a + c = b + d$

D. $ac + bd = fg$

67. W dowolnym trójkącie punkt przecięcia się:

A. środkowych nazywamy barycentrum

B. wysokości nazywamy ortocentrum

C. wysokości nazywamy środkiem ciężkości

D. środkowych nazywamy środkiem ciężkości

68. Przekątne sześciokąta foremnego mogą przecinać się pod kątem:

A. 60° **B.** 120° **C.** 90° **D.** 45°

69. W trapezie $KLMN$ o polu 25 cm² przekątne przecięły się w punkcie S, gdzie $KL \parallel MN$. Wiedząc, że $|KL| = 4\ |MN|$ można stwierdzić, że:

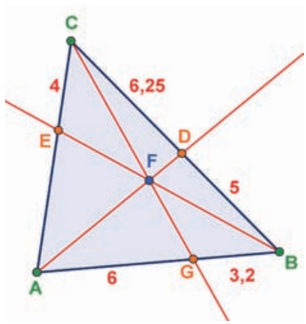
A. pole trójkąta SMN równe jest 4 cm²

B. pole trójkąta KLS równe jest 16 cm²

C. pola trójkątów KSN i SLM są równe

D. pola trójkąta KSN nie można obliczyć

70. Z wierzchołków trójkąta ABC poprowadzono półproste, które przecięły się w punkcie F oraz przecięły boki w punktach $D; E; G$. Posługując się danymi z rysunku można stwierdzić, że:



A. półprosta AD jest dwusieczną kąta przy wierzchołku A

B. odcinek $|AE| = 6$

C. $\frac{[CE]}{[EA]} = \frac{2}{3}$

D. nie można obliczyć długości odcinka $|AE|$

71. Azymut to kąt wyznaczony między północą a danym kierunkiem poziomym. Wartość azymutu odmierza się kompasem lub busolą zgodnie z ruchem wskazówek zegara i najczęściej podaje się ją w stopniach. Mieszkańcy dwóch miast – Deltoigrodu i Kołogrodu (leżących na jednej szerokości geograficznej w odległości 40 km od siebie) – często udają się do magicznego źródełka mocy położonego w górach. Azymut kierunku, w jakim trzeba iść, by dojść do źródełka mierzony w Deltoigrodzie wynosi 60°, a azymut z tym samym celem mierzony w Kołogrodzie wynosi 330°. Do źródełka można dojść z obu tych miast i są to jedyne dwie możliwe drogi, a pomiędzy tymi miastami też jest tylko jedna droga. Wynika z tego, że:

A. magiczne źródełko mocy leży bliżej Deltoigrodu

B. magiczne źródełko mocy leży bliżej Kołogrodu

C. magiczne źródełko mocy leży w tej samej odległości od obu miast

D. mieszkańcy Kołogrodu mają do źródełka ponad 14 km bliżej niż mieszkańcy Deltoigrodu

72. Zielony samochód ogrodnika Kwadratolusa Łodygi jeździ na ekopaliwie. Spala go bardzo mało, bo średnio 3 litry na 100 kilometrów. Między Deltoigrodem – stolicą Kwadratolandii a górami w Trójkolandii na mapie w skali 1:500000 można zmierzyć odległość 24 cm. Kwadratolus Łodyga potrzebuje więc na przejazd z Deltoigrodu w góry i z powrotem:

A. ok. 5 litrów ekopaliwa

B. $3\frac{3}{5}$ litra ekopaliwa

C. 36 litrów ekopaliwa

D. mniej niż 4 litry ekopaliwa

73. Piłka do gry w piłkę nożną składa się z 32 łatek: czarnych pięciokątnych i białych sześciokątnych rozmieszczonych jak na rysunku. Można obliczyć, że:

A. piłka składa się z 18 białych i 14 czarnych łatek

B. piłka składa się z 20 białych i 12 czarnych łatek

C. ilość czarnych łatek jest o 40% mniejsza od ilości łatek białych

D. ilość łatek poszczególnych kolorów różni się o 2

74. W posiadłości Kwadratolusa Łodygi znajdują się dwa okrągłe klomby z kwiatami styczne do siebie nawzajem oraz do ścieżki. Pomiędzy klombami a ścieżką znajduje się niezagospodarowany fragment ogrodu. Wiedząc, że mniejszy klomb ma promień równy 1 metr, a drugi 3 metry, powierzchnia tej części ma wartość:

A. mniejsza niż 2 m^2

B. równą $(4\sqrt{3} - \frac{11}{6}\pi)$ m^2

C. mniejszą niż 1 m^2, ale dokładnie nie można obliczyć

D. równą $(2\sqrt{3} + \frac{8}{3}\pi)$ m^2

75. W trapezie prostokątnym przekątne są prostopadłe. Wiedząc, że stosunek długości podstaw $\frac{a}{b} > 1$ można stwierdzić, że stosunek długości przekątnych jest równy:

A. $\frac{a}{b}$

B. $\frac{b}{a}$

C. $\sqrt{\frac{a}{b}}$

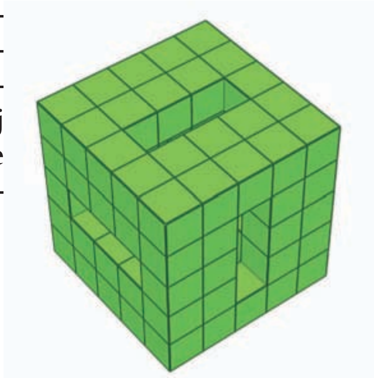
D. $\frac{b^2}{a^2 - b^2}$

DZIAŁ VIII

STEREOMETRIA

MATCYFRZAK

76. Na Święto Sześciana na rynku w Deltoigrodzie postawiono pomnik w kształcie dużej sześciennej kostki zbudowanej z mniejszych sześcianów, w której wydrążono na wylot tunele prostopadłe do ścian (jak na rys.) Do zbudowania pomnika zużyto:



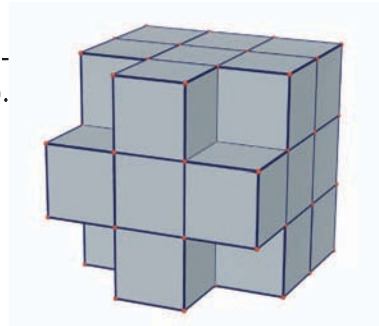
A. 65 sześcianów

B. 88 sześcianów

C. 37 sześcianów

D. 113 sześcianów

77. Z sześcianu o objętości 729 cm^3 wycięto 4 mniejsze sześciany (patrz rysunek). O nowej bryle można powiedzieć, że:



A. *Pc* wynosi 378 cm^2

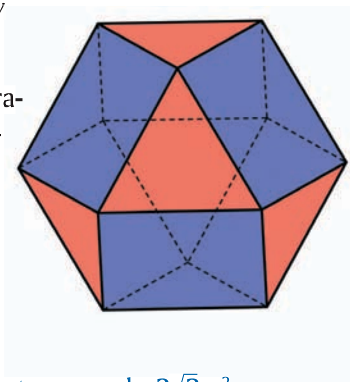
B. *V* wynosi 621 cm^3

C. *V* wynosi 484 cm^3

D. *Pc* wynosi 486 cm^2

Pc - pole powierzchni całkowitej bryły, V - objętość bryły

78. Matcyfrzak skleił sześcio-ośmiościan o krawędzi długości *a* (patrz rysunek). O tej bryle można powiedzieć, że:



A. objętość $V=\frac{5}{3}\sqrt{2}\ a^3$

B. pole całkowite $P_c=(8+2\sqrt{3})\ a^2$

C. ma 24 krawędzie

D. największy przekrój jest sześciokątem o polu $2\sqrt{3}\ a^2$

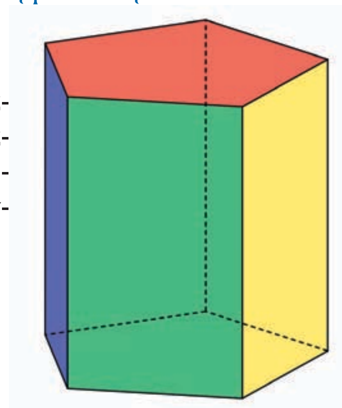
79. Każdy dowolny sześcian ma:

A. co najmniej 4 różne siatki

B. co najmniej 11 różnych siatek

C. liczbę różnych siatek będącą liczbą pierwszą

D. nie więcej niż 5 różnych siatek



80. W pięciokącie foremnym o krawędzi 1 każda przekątna ma długość równą złotej liczbie o wartości $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Przekątna graniastosłupa prawidłowego pięciokątnego o wysokości 2 i krawędzi 1 ma:

A. zawsze taką samą długość

B. długość mniejszą od 3

C. długość niewymierną

D. długość dłuższą o 1 od liczby złotej

81. Akwarium w kształcie prostopadłościanu o kwadratowej podstawie i sumie wszystkich krawędzi równej 120 dm ma największą objętość gdy:

A. $a=5$ dm, $H=20$ dm

B. $a=10$ dm, $H=10$ dm

C. $a > H$

D. $a < H$

a - krawędź podstawy, H - wysokość

82. Przekątną d prostopadłościanu o krawędziach a, b, c można wyrazić wzorem:

A. $d^2=a^2 + b^2 + c^2$

B. $d=\sqrt{abc}$

C. $d=\sqrt{ab + bc + ac}$

D. $d=\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

DZIAŁ IX

KOMBINATORYKA, RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA I ELEMENTY STATYSTYKI

DZIUGLAK RÓŻNICZKA MATCYFRZAK WYMIERNIAK

83. Matcyfrzak, Dziuglak, Wymierniak, Różniczka i Całka wsiedli na parterze do windy ośmiopiętrowego budynku. Dwoje z nich wysiadło na jednym piętrze, a pozostała trójka – każdy na innym piętrze. Ilość wszystkich możliwości wysiadania według opisanego schematu to:

A. $80 \cdot 7^3$ **B.** $1{,}68 \cdot 10^4$

C. $1{,}6 \cdot 10^2 \cdot 7^3$ **D.** ponad 100 tysięcy

84. Różnych słów z sensem lub bez, które można ułożyć ze wszystkich liter słowa KWADRATOLANDIA jest:

A. więcej niż 10^9 **B.** więcej niż 10^{12}

C. mniej niż miliard **D.** mniej niż sto milionów

85. W Kwadratolandii zorganizowano zawody w liczeniu na czas. Zawodnicy spotykali się w „bitwach na liczby" każdy z każdym, a ten kto rozegra najwięcej zwycięskich bitew wygrywa zawody. Po rozegraniu pięciu bitew dwóch zawodników wycofało się. Pozostali rozgrywali do końca bitwy między sobą. Jeżeli wiadomo, że wszystkich meczy rozegrano 86, to wszystkich zgłoszonych do zawodów zawodników było:

A. 10 **B.** 15

C. 12 **D.** więcej niż 10

86. Z cyfr 1,2,3 ułożono wszystkie możliwe liczby czterocyfrowe. Prawdopodobieństwo, że suma cyfr tej liczby będzie równa:

A. 7 wynosi $\frac{16}{81}$

B. 4 wynosi $\frac{4}{81}$

C. 11 jest takie samo jak przy sumie cyfr 5

D. 7 jest mniejsze niż $\frac{1}{5}$

87. Na ile sposobów w układzie współrzędnych można dojść z punktu (0;0) do punktu (5;5) poruszając się krokami długości równej jednej jednostce w kierunkach wskazanych przez osie układu współrzędnych? Ilość

wszystkich takich sposobów to liczba:

A. podzielna przez 9
B. 252
C. większa niż 300
D. 324

88. Prawdopodobieństwo, że w 10 rzutach monetą wypadnie 7 orłów jest takie samo jak prawdopodobieństwo, że :

A. wypadną 3 orły
B. wypadnie 5 orłów
C. wypadnie 7 reszek
D. wypadną same orły

89. Pięć osób może wysiąść z autokaru na trzech przystankach na:

A. 5^3 sposobów
B. 3^5 sposobów
C. $\frac{5!}{2!}$ sposobów
D. $5!$ sposobów

DZIAŁ X

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY I CAŁKOWY

RÓŻNICZKA

90. Pole zawarte między wykresem funkcji $y = \sin x$ a osią Ox w przedziale $\langle 0 ; \pi \rangle$:

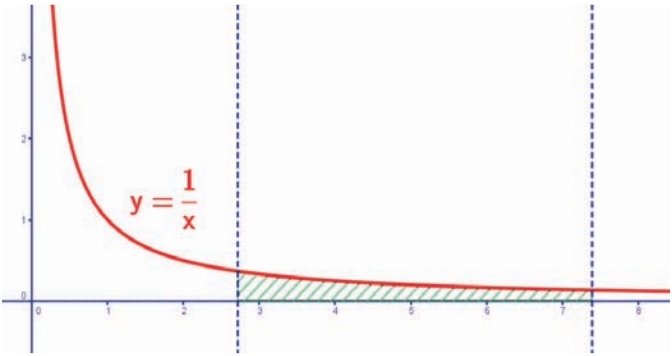
A. wynosi $\frac{\pi^3}{8}$ j^2

B. wynosi 2 j^2

C. wynosi mniej niż 2 j^2

D. jest liczbą niewymierną

91. Funkcję homograficzną $y = \frac{1}{x}$ przecięto dwiema prostymi $x = e$ oraz $x = e^2$. Pole ograniczone prostymi, osią układu i funkcją jest równe:



A. 1 [j^2]

B. $2\sqrt{e}$ [j^2]

C. e [j^2]

D. $\frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}$ [j^2]

92. Funkcja $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ posiada:

A. dwa ekstrema lokalne, w tym jedno $f_{max}(1) = 2$

B. punkt przegięcia dla $x = 2$

C. jedno ekstremum lokalne i dwa punkty przegięcia

D. minimum dla $x = 3$

93. Suma wszystkich krawędzi graniastosłupa prawidłowego czworokątnego wynosi 24. Dla krawędzi podstawy $a = 2$ graniastosłup ten będzie miał:

A. najmniejsze pole powierzchni całkowitej

B. największe pole powierzchni całkowitej

C. najmniejszą objętość

D. największą objętość

94. Wartość $\int(3x^4+2x)\,dx$ jest równe:

A. $\frac{3x^5}{4}+\frac{2x^5}{1}+C$

B. $\frac{3x^5}{5}+x^2+C$

C. $12x^3+2+C$

D. $x^2\left(\frac{3}{5}x^3+1\right)+C$

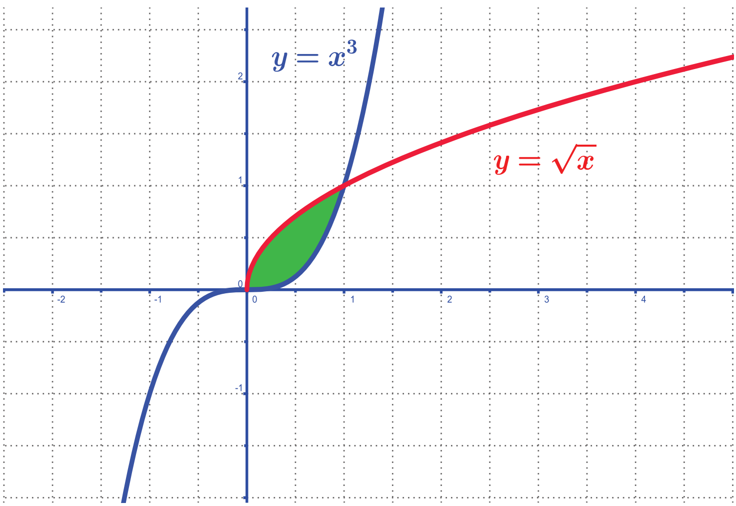
95. Pole obszaru ograniczonego funkcjami $y=x^3$ i $y=\sqrt{x}$ (patrz rysunek) jest:

A. mniejsze od 0,5

B. równe $\frac{5}{12}$

C. równe $\frac{2}{5}$

D. większe niż $\frac{2}{5}$



DZIAŁ XI

ŁAMIGŁÓWKI LOGICZNE

CAŁKA

96. Kwadratolus Łodyga zastanawia się jak może posadzić 10 drzew. Na pewno uda mu się posadzić je w:

A. 5 rzędach po 2 drzewa w każdym

B. 3 rzędach po 3 drzewa w każdym

C. 5 rzędach po 3 drzewa w każdym

D. 5 rzędach po 4 drzewa w każdym

97. Na ratuszowej wieży w Deltoigrodzie zegar wybija pełne godziny zgodnie ze wskazaniem godziny oraz pojedynczym biciem informuje mieszkańców o pełnych kwadransach. Prawdziwe są więc zdania:

A. między 14^{50} a 20^{05} zegar bije więcej razy niż między 1^{48} a 7^{43}

B. uderzeń o pełnych godzinach jest dwa razy więcej niż pozostałych

C. w ciągu doby zegar bije 252 razy

D. w ciągu doby zegar bije 228 razy

98. Matcyfrzak, Dziuglak, Wymierniak i Różniczka trenują zawodowo jazdę na deskorolce. Każdy z nich ma indywidualny trening w inny dzień tygodnia (od poniedziałku do czwartku) z mistrzem Kwadratolandii – Skejciakiem Pionierem. Pierwsza z osób trenuje 1 rok, druga 2 lata, trzecia 3 lata, a czwarta aż 4 lata. Matcyfrzak ma trening we wtorek i nie trenuje ani najkrócej ani najdłużej z wszystkich osób. Dziuglak trenuje nieparzystą liczbę lat. Różniczka trenuje dzień przed Wymierniakiem i dłużej niż Matcyfrzak. W czwartki trenuje osoba z najkrótszym stażem. Prawdziwe informacje to:

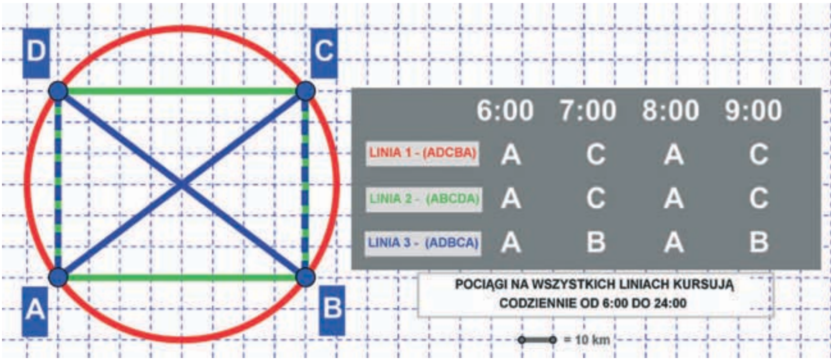
A. najdłużej trenuje Różniczka

B. Wymierniak trenuje ostatni w tygodniu

C. Matcyfrzak trenuje dłużej niż Dziuglak

D. trzy dni po kolei trenują chłopcy

99. W Kwadratolandii kursują na trzech liniach super szybkie pociągi *Power -N*. Linie te przecinają się w głównych stacjach przesiadkowych *A*, *B*, *C*, *D*. Na podstawie planu przebiegu poszczególnych tras oraz danych fragmentu rozkładu jazdy (patrz rysunek i informacje) można stwierdzić, że:



	6:00	7:00	8:00	9:00
LINIA 1 - (ADCBA)	A	C	A	C
LINIA 2 - (ABCDA)	A	C	A	C
LINIA 3 - (ADBCA)	A	B	A	B

A. średnia prędkość pociągu na linii 1 jest największa

B. pociągi na wszystkich liniach mają inne prędkości

C. najwolniejszy pociąg przejedzie w ciągu całego dnia ponad 2500 km

D. średnia prędkość pociągu na linii 3 jest największa i wynosi 160 km/h

100. Matcyfrzak i Wymierniak założyli się kto pierwszy pokona trasę z Deltoigrodu do Kołogrodu. Matcyfrzak całą trasę pokonał rowerem z tą samą szybkością. Wymierniak połowę trasy pokonał pociągiem, który miał średnią prędkość pięć razy większą niż prędkość, z jaką Matcyfrzak pokonywał trasę rowerem. Drugą połowę trasy Wymierniak pokonywał pieszo z prędkością dwa razy mniejszą niż prędkość Matcyfrzaka. Prawdą jest, że:

A. jeden z chłopców pokonał trasę w czasie o 10% dłuższym

B. Wymierniak dotarł do celu szybciej

C. Matcyfrzak dotarł do celu szybciej

D. obaj chłopcy pokonali trasę w tym samym tempie

101. Super szybki pociąg *Power - N* przejeżdża najdłuższy most Kwadratolandii o długości 1000 metrów w 20 sekund, natomiast największy semafor mija w ciągu 10 sekund. Można stwierdzić, że:

A. średnia prędkość pociągu wynosi 50 m/s

B. średnia prędkość pociągu wynosi 180 km/h

C. pociąg jedzie z prędkością większą niż 200 km/h

D. długość pociągu wynosi 500 m

Wydawca:
Firma Edukacyjno-Wydawnicza ELITMAT
www.matematykainnegowymiaru.pl
e-mail: matematykainnegowymiaru@elitmat.pl
tel. 51-81118-51

EGZEMPLARZ BEZPŁATNY

MATEMATYKA INNEGO WYMIARU

WWW.MATEMATYKAINNEGOWYMIARU.PL

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!

ELITMAT
FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Publikacja współfinansowana ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego