Politechnika Łódzka

e-matura

R. Kusztelak, J. Stańdo, K. Szumigaj

Zbiór zadań z matematyki

ZAKRES ROZSZERZONY

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

CZŁOWIEK - NAJLEPSZA INWESTYCJA

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt jest współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Autorzy:
R. Kusztelak
J. Stańdo
K. Szumigaj

Zbiór zadań z matematyki
– zakres rozszerzony

Recenzenci:
T. Ratusiński
J. Guncaga

Książka przygotowana w ramach projektu „E-matura", współfinansowanego przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego, Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki, Priorytet III Wysoka jakość systemu oświaty, Działanie 3.3 Poprawa jakości kształcenia, Poddziałanie 3.3.4 Modernizacja treści i metod kształcenia – projekty konkursowe.

Projekt jest współfinansowany przez
Unię Europejską w ramach
Europejskiego Funduszu Społecznego

Książka jest dystrybuowana bezpłatnie

Recenzenci:
T. Ratusiński
J. Guncaga

Autorzy:
R. Kusztelak
J. Stańdo
K. Szumigaj

Opracowanie graficzne:
Niceday

Książka przygotowana w ramach projektu „E-matura", współfinansowanego przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego, Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki, Priorytet III Wysoka jakość systemu oświaty, Działanie 3.3 Poprawa jakości kształcenia, Poddziałanie 3.3.4 Modernizacja treści i metod kształcenia – projekty konkursowe.

Książka współfinansowana przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

ISBN: 978-83-937551-4-1

Politechnika Łódzka, Biuro Projektu
Wydział Elektrotechniki, Elektroniki, Informatyki i Automatyki,
Instytut Mechatroniki i Systemów Informatycznych
ul. Stefanowskiego 18/22, pokój 122, 90-924 Łódź, budynek A12
tel. (42) 631 25 69, www.e-matura.p.lodz.pl

Spis treści

1. Zakres wymagań – poziom rozszerzony

Zdający demonstruje poziom opanowania poniższych umiejętności, rozwiązując zadania, w których:

1. Liczby rzeczywiste

1) przedstawia liczby rzeczywiste w różnych postaciach (np. ułamka zwykłego, ułamka dziesiętnego okresowego, z użyciem symboli pierwiastków, potęg);

2) oblicza wartości wyrażeń arytmetycznych (wymiernych);

3) posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosuje prawa działań na pierwiastkach;

4) oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych;

5) wykorzystuje podstawowe własności potęg (również w zagadnieniach związanych z innymi dziedzinami wiedzy, np. fizyką, chemią, informatyką);

6) wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym;

7) oblicza błąd bezwzględny i błąd względny przybliżenia;

8) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej;

9) wykonuje obliczenia procentowe, oblicza podatki, zysk z lokat (również złożonych na procent składany i na okres krótszy niż rok).

Ponadto:

a) stosuje twierdzenie o rozkładzie liczby naturalnej na czynniki pierwsze;

wyznacza największy wspólny dzielnik i najmniejszą wspólną wielokrotność pary liczb naturalnych,

b) stosuje wzór na logarytm potęgi i wzór na zamianę podstawy logarytmu,

2. Wyrażenia algebraiczne:

1) używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$.

Ponadto:

a) posługuje się wzorem $(a - 1)(1 + a + \ldots + a^{n-1}) = a^n - 1$,

b) wykonuje dzielenie wielomianu przez dwumian $x - a$; stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x - a$,

c) stosuje twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych

3. Równania i nierówności:

1) sprawdza, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania lub nierówności;

2) wykorzystuje interpretację geometryczną układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi;

3) rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą;

4) rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą;

5) rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą;

6) korzysta z definicji pierwiastka do rozwiązywania równań typu $x^3 = - 8$;

7) korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x + 1)(x - 7) = 0$;

8) rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych, np.

$\frac{x+1}{x+3} = 2, \frac{x+1}{x} = 2x$.

Ponadto:

a) stosuje wzory Viète'a,

b) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe z parametrem, przeprowadza dyskusję i wyciąga z niej wnioski,

c) rozwiązuje równania i nierówności wielomianowe,

d) rozwiązuje proste równania i nierówności wymierne, np. $\frac{x+1}{x+3} > 2; \frac{x+1}{x} < 3$

e) rozwiązuje proste równania i nierówności z wartością bezwzględną, typu: $||x + 1| + 2| > 3$ i $|x + 1| + |x + 2| < 3$

4. Funkcje:

1) określa funkcje za pomocą wzoru, tabeli, wykresu, opisu słownego;

2) oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu. Posługuje się poznanymi metodami rozwiązywania równań do obliczenia, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje daną wartość;

3) odczytuje z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak; punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą);

4) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x + a)$, $y = f(x) + a$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$;

5) rysuje wykres funkcji liniowej, korzystając z jej wzoru;

6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie;

7) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej;

8) szkicuje wykres funkcji kwadratowej, korzystając z jej wzoru;

9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie;

10) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje);

11) wyznacza wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym;

12) wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym);

13) szkicuje wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ dla danego a, korzysta ze wzoru i wykresu tej funkcji do interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi;

14) szkicuje wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw;

15) posługuje się funkcjami wykładniczymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym.

Ponadto:

mając dany wykres funkcji $y = f(x)$ potrafi naszkicować:

a) wykres funkcji $y = |f(x)|$,

b) wykresy funkcji $y = c \cdot f(x)$, $y = f(c \cdot x)$, gdzie f jest funkcją trygonometryczną,

c) wykres będący efektem wykonania kilku operacji, na przykład $y = |f(x+2) - 3|$,

d) wykresy funkcji logarytmicznych dla różnych podstaw,

e) rozwiązuje zadania (również umieszczone w kontekście praktycznym) z wykorzystaniem takich funkcji,

5. Ciągi liczbowe:

1) wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;

2) bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny;

3) stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego;

4) stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

Ponadto:

a) wyznacza wyrazy ciągów zdefiniowanych rekurencyjnie,

6. Trygonometria:

1) wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180°;

2) korzysta z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych (odczytanych z tablic lub obliczonych za pomocą kalkulatora);

3) oblicza miarę kąta ostrego, dla której funkcja trygonometryczna przyjmuje daną wartość (miarę dokładną albo – korzystając z tablic lub kalkulatora – przybliżoną);

4) stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi: $sin2\alpha + cos2\alpha = 1$, $tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$ oraz $\sin(90^0 - \alpha) = cos\alpha$;

5) znając wartość jednej z funkcji: sinus lub cosinus, wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego.

Ponadto:

a) stosuje miarę łukową i miarę stopniową kąta,

b) wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta, przez sprowadzenie do przypadku kąta ostrego,

c) posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych przy rozwiązywaniu nierówności typu, $sinx < a, cosx > a, tgx > a$.

d) stosuje związki: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ oraz wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów w dowodach tożsamości trygonometrycznych,

e) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne, na przykład $\sin 2x = 1$, $\sin^2 x + \cos x = 1$, $\cos 2x < \frac{1}{2}$

Planimetria:

1) stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym;

2) korzysta z własności stycznej do okręgu i własności okręgów stycznych;

3) rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów;

4) korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi.

Ponadto:

a) stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu,

b) stosuje twierdzenie o związkach miarowych między odcinkami stycznych i siecznych,

c) stosuje własności figur podobnych i jednokładnych w zadaniach, także umieszczonych w kontekście praktycznym,

d) znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów,

8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej:

1) wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej);

2) bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych;

3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt;

4) oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych;

5) wyznacza współrzędne środka odcinka;

6) oblicza odległość dwóch punktów;

7) znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych (punktu, prostej, odcinka, okręgu, trójkąta itp.) w symetrii osiowej względem osi układu współrzędnych i symetrii środkowej względem początku układu.

Ponadto:

a) interpretuje geometrycznie nierówność liniową z dwiema niewiadomymi i układy takich nierówności,

b) rozwiązuje zadania dotyczące wzajemnego położenia prostej i okręgu, oraz dwóch okręgów na płaszczyźnie kartezjańskiej,

c) oblicza odległość punktu od prostej,

d) opisuje koła za pomocą nierówności,

e) oblicza współrzędne oraz długość wektora; dodaje i odejmuje wektory oraz mnoży je przez liczbę,

f) interpretuje geometrycznie działania na wektorach,

g) stosuje wektory do rozwiązywania zadań, a także do dowodzenia własności figur,

h) stosuje wektory do opisu przesunięcia wykresu funkcji,

9. Stereometria:

1) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi, itp.), oblicza miary tych kątów;

2) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami), oblicza miary tych kątów;

3) rozpoznaje w walcach i w stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą), oblicza miary tych kątów;

4) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami;

5) określa, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną;

6) stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości.

Ponadto:

a) wyznacza przekroje wielościanów płaszczyzną,

b) stosuje twierdzenie o trzech prostych prostopadłych,

10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka:

1) oblicza średnią ważoną i odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretuje te parametry dla danych empirycznych;

2) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania;

3) oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Ponadto:

a) wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji i wariacji do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych

2. Zbiory liczbowe

1.1 Liczby rzeczywiste

ZADANIE 1.A

Podaj przykład dwóch liczb niewymiernych których suma jest równa 3.

Rozwiązanie.

$\sqrt{5}, -\sqrt{5}+3$

ZADANIE 1.B

Podaj przykład dwóch liczb niewymiernych dla których iloczyn jest równy 1.

Odpowiedź/wskazówka

$\sqrt{2}+1, \sqrt{2}-1$

ZADANIE 2.A

Wykaż, że $\sqrt{5}$ jest liczbą niewymierną.

Rozwiązanie.

Dowód nie wprost:

Przypuśćmy, że $\sqrt{5}$ jest liczbą wymierną, tzn. da się przedstawić w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego o całkowitym liczniku i mianowniku. Innymi słowy istnieją $n, k \in \mathbb{N}$ i n, k - względem siebie pierwsze, że

$$\sqrt{5} = \frac{n}{k}$$

Z definicji pierwiastka mamy dalej, że

$$\left(\frac{n}{k}\right)^2 = 5$$

Czyli $\frac{n^2}{k^2} = 5$

Przekształcając uzyskujemy, że

$$n^2 = 5k^2$$

co oznacza, że liczba n^2 jest podzielna przez 5.

Prawdziwa jest własności:

(W1): Kwadrat liczby niepodzielnej przez 5 jest liczbą niepodzielną przez 5.

(W2): Kwadrat liczby podzielnej przez 5 jest liczbą podzielną przez 5.

Z powyższych własności oraz z ostatniej równości wynika zatem, że n to liczba podzielna przez 5. Można ją zatem przedstawić w postaci iloczynu pewnej liczby naturalnej p oraz liczby 5

$$n = 5p$$

Podstawiając tak przedstawione n do poprzedniej równości uzyskujemy

$$(5p)^2 = 5k^2$$

Czyli

$$25p^2 = 5k^2$$

Zatem dzieląc stronami przez 5 mamy

$$k^2 = 5p^2$$

Oznacza to, że k^2 jest liczbą podzielną przez 5. Wobec własności **(W2)** k jest również podzielne przez 5.

Uzyskaliśmy więc, że n oraz k są liczbami podzielnymi przez 5. Doszliśmy zatem do sprzeczności z założeniem, że są one względnie pierwsze. Zatem $\sqrt{5}$ NIE jest liczbą wymierną.

ZADANIE 2.B

Skonstruuj odcinek o długości $\sqrt{5}$.

Odpowiedź/wskazówka

Zbuduj trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne maja odpowiednio długości: $2, 1$.

1.2 Wartość bezwzględna

ZADANIE 1.A

Rozwiąż równanie: $\big||x-1|+3\big| = 5$.

Rozwiązanie.

Korzystamy z definicji wartości bezwzględnej

$$|x-1|+3 = -5 \quad \vee \quad |x-1|+3 = 5$$

$$|x-1| = -8 \quad \vee \quad |x-1| = 2$$

Pierwsze równanie jest sprzeczne (moduł nie może być ujemny), zatem jego zbiór rozwiązań jest pusty. Dalej rozwiązujemy zatem tylko drugie równanie

$$|x-1| = 2$$

Korzystamy z definicji wartości bezwzględnej

$$x-1 = -2 \quad \vee \quad x-1 = 2$$

$$x = -1 \quad \vee \quad x = 3$$

Odpowiedź:

$x = -1 \quad \vee \quad x = 3$

ZADANIE 1.B

Rozwiąż nierówność: $\big||x+4|-2\big| < 5$.

Odpowiedź/wskazówka

Skorzystamy z własności

$$|a| < b \Leftrightarrow a > -b \quad \wedge \quad a < b$$

$$\big||x+4|-2\big| < 5 \Leftrightarrow |x+4|-2 > -5 \quad \wedge \quad |x+4|-2 < 5$$

Dalej

$$|x+4| > -3 \quad \wedge \quad |x+4| < 7$$

Pierwsza nierówność jest spełniona zawsze (moduł jest zawsze większy od liczby ujemnej), zatem dalej rozwiązujemy tylko drugą nierówność

$$|x+4|<7$$

Ponownie korzystamy z wypisanej własności

$$-7<x+4<7$$

$$-11<x<3$$

Odpowiedź: $x \in (-11; 3)$

ZADANIE 1C

Rozwiąż nierówność $|2x+8|+|x-2| \leq 15$.

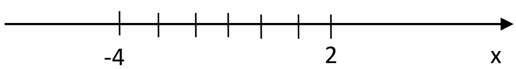
Rozwiązanie.

Znajdujemy miejsca zerowe funkcji spod znaków wartości bezwzględnej.

$$2x+8=0 \Leftrightarrow x=-4$$

$$x-2=0 \Leftrightarrow x=2$$

Zaznaczamy je na osi liczbowej



Zaznaczone punkty dzielą całą prostą rzeczywistą na trzy przedziały:
$(-\infty;\ -4), \langle -4, 2), \langle 2, +\infty)$

W każdym z tych przedziałów funkcje spod znaku wartości bezwzględnych są stałego znaku. Stosujemy więc definicję wartości bezwzględnej. Nierówność przyjmuje odpowiednio postać:

1. Dla $x \in (-\infty;\ -4)$

$$-(2x+8)-(x-2) \leq 15$$
$$-2x-8-x+2 \leq 15$$
$$-3x \leq 21$$
$$x \geq -7$$

Uwzględniając przedział, w którym nierówność przyjęła powyższą postać otrzymujemy zbiór rozwiązań w tym przypadku
<u>Odp1</u>: $x \in < -7;\ -4)$

2. Dla $x \in < -4; 2)$

$$(2x + 8) - (x - 2) \leq 15$$
$$2x + 8 - x + 2 \leq 15$$
$$x \leq 5$$

Uwzględniając przedział, w którym nierówność przyjęła powyższą postać otrzymujemy zbiór rozwiązań w tym przypadku
<u>Odp2</u>: $x \in < -4;\ 2)$

3. Dla $x \in < 2;\ +\infty)$

$$(2x + 8) + (x - 2) \leq 15$$
$$2x + 8 + x - 2 \leq 15$$
$$3x \leq 9$$
$$x \leq 3$$

Uwzględniając przedział, w którym nierówność przyjęła powyższą postać otrzymujemy zbiór rozwiązań w tym przypadku
<u>Odp3</u>: $x \in < 2;\ 3 >$

Aby uzyskać zbiór rozwiązań nierówności danej w zadaniu sumujemy zbiory rozwiązań dla każdego z rozważonych przypadków.

$$|2x + 8| + |x - 2| \leq 15 \Leftrightarrow x \in < -7;\ -4) \cup < -4;\ 2) \cup < 2;\ 3 >$$

Odpowiedź:

$|2x + 8| + |x - 2| \leq 15 \Leftrightarrow x \in < -7; 3 >$

ZADANIE 2.A

Uzasadnij, że $|-x| = |x|$.

Rozwiązanie.

Dla $x \leq 0$ mamy $|-x| = (-x)$, $|x| = -x$, Dla $x > 0$ mamy $|-x| = -(-x) = x$, $|x| = x$.

ZADANIE 2.B

Uzasadnij, że $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

Odpowiedź/wskazówka

Skorzystaj z definicji wartości bezwzględnej i odpowiednich własności.

1.3 Logarytmy

ZADANIE 1.A

Wartość wyrażenia $\left(\frac{1}{8}\right)^{\log_2 3}$ można obliczyć m. in. w następujący sposób:

Niech

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{\log_2 3} = t$$

gdzie $t > 0$. Logarytmując stronami logarytmem o podstawie 2 uzyskujemy

$$\log_2 \left(\frac{1}{8}\right)^{\log_2 3} = \log_2 t$$

$$\log_2 3 \cdot \log_2 \left(\frac{1}{8}\right) = \log_2 t$$

$$\log_2 3 \cdot \log_2 2^{-3} = \log_2 t$$

$$-3 \cdot \log_2 3 = \log_2 t$$

$$\log_2 \frac{1}{27} = \log_2 t$$

$$t = \frac{1}{27}$$

Zatem

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{\log_2 3} = \frac{1}{27}$$

Rozumując w podobny sposób oblicz $16^{\log_4 5}$

Odpowiedź:

$16^{\log_4 5} = 25$

ZADANIE 1.B

Wiadomo, że $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$ dla $n, a, b > 0, a \neq 1$. Oblicz $\log_{625} \sqrt{3} - \log_5 \sqrt{3}$.

Odpowiedź/wskazówka

$\log_5 \frac{1}{\sqrt[8]{27}}$ lub analogicznie: $-\frac{3 \log_5 3}{8}$.

Wystarczy zauważyć, że $625 = 5^4$ i skorzystać z podanej własności.

ZADANIE 2.B

Wiadomo, że $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ dla $a, b > 0, a, b \neq 1$. Uzasadnij $\frac{1}{\log_3 2} + \log_2 5 = \log_2 15$.

Rozwiązanie.

$$\frac{1}{\log_3 2} + 5 = \log_2 3 + \log_2 5 = \log_2 15$$

ZADANIE 2.B

Wiadomo, że $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ dla $a, b > 0, a, b \neq 1$. Uzasadnij, że $3 + \log_{\sqrt{2}} \sqrt{3} \cdot \log_{\sqrt{3}} \sqrt{2}$

jest liczbą całkowitą.

Odpowiedź/wskazówka

Po skorzystaniu z podanej własności uzyskujemy rozwiązanie.

1.4 Wyrażenia algebraiczne

ZADANIE 1.A

Doprowadź do najprostszej postaci korzystając ze wzorów skróconego mnożenia.

$$(2x+1)^3-\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)$$

Odpowiedź/wskazówka

Stosujemy wzór na sześcian sumy oraz na różnicę kwadratów:

$$8\,x^3+12\,x^2+6\,x+1-(x^2-5)=8\,x^3+11\,x^2+6\,x+6$$

ZADANIE 1.B

Doprowadź do najprostszej postaci korzystając ze wzorów skróconego mnożenia.

$$(-2x+1)^3-(-x-3)^3$$

Odpowiedź/wskazówka

$28+21\,x+21\,x^2-7\,x^3$

Stosujemy wzór na sześcian różnicy oraz na sześcian sumy.

ZADANIE 2.A

Zapisz wyrażenie: x^3+2x^2+x+2 w postaci iloczynowej.

Rozwiązanie.

$$x^3+2x^2+x+2=x^2(x+2)+(x+2)=(x+2)(x^2+1)$$

ZADANIE 2.B

Zapisz wyrażenie: $2x^4-21x^3+74x^2-105x+50$ w postaci iloczynowej.

Odpowiedź/wskazówka

$(x-2)(x-1)(2x-5x)(x-5)$

Korzystamy z własności wynikającej z twierdzenia Bezouta.

ZADANIE 3.A

Uzasadnij, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb naturalnych jest nieparzysta.

Rozwiązanie.

Niech n – dowolna liczba naturalna. Różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb naturalnych będzie miała zatem postać:

$$n^2-(n+1)^2=n^2-(n^2+2n+1)=n^2-n^2-2n-1=-2n-1=-(2n+1)$$

Zauważmy, że $2n+1$ jest zawsze nieparzyste jako suma liczby parzystej $2n$ i jedynki.

$$n^3-(n+1)^3=n^3-(n^3+3\,n^2+3\,n+1)=-3\,n^2-3\,n-1=$$

$$-(3n(n+1)+1)$$

$n(n+1)$ - liczba parzysta, jako iloczyn parzystej i nieparzystej

$3n(n+1)$ - liczba parzysta, jako wielokrotność (tutaj: 3-krotność) liczby parzystej

$3n(n+1)+1$ - liczba nieparzysta, jako suma parzystej i 1

$-(3n(n+1)+1)$ – liczba nieparzysta, jako iloczyn nieparzystej i (-1).

ZADANIE 3.B

Zapisz wyrażenie: x^8+x^4-2 w postaci iloczynowej.

Odpowiedź/wskazówka

$(x\ +\ 1)\cdot(x\ -\ 1)\cdot(x^2\ +\ 1)\cdot(x^4\ +\ 2)$

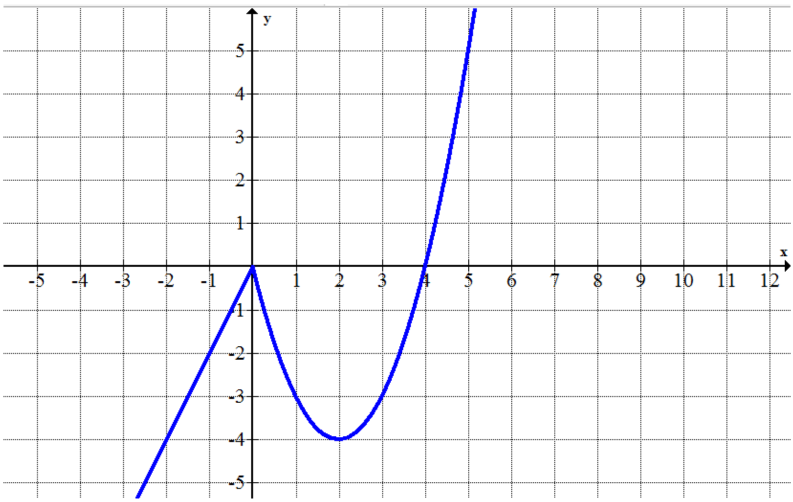
Jednym ze sposobów rozkładu na czynniki tego wielomianu jest zastosowanie podstawienia $x^4=t$.

2 Funkcje

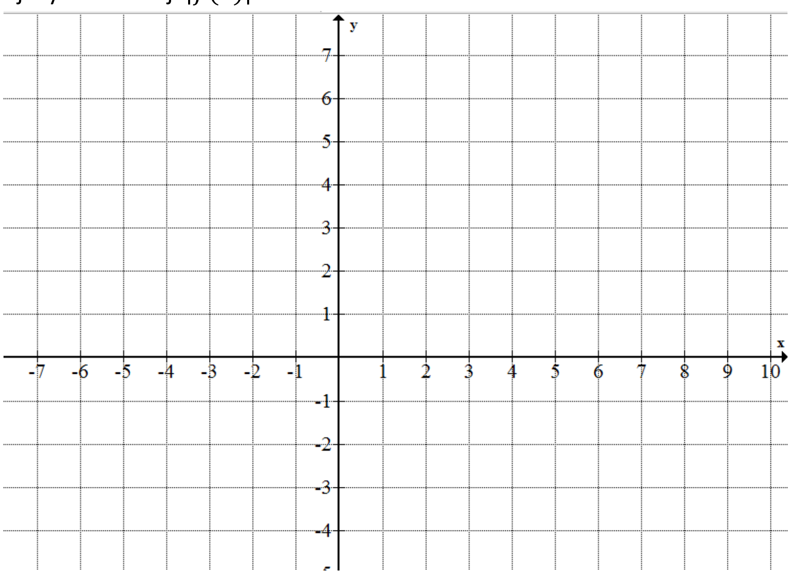
2.1 Ogólne pojęcie funkcji i jej własności

ZADANIE 1.A

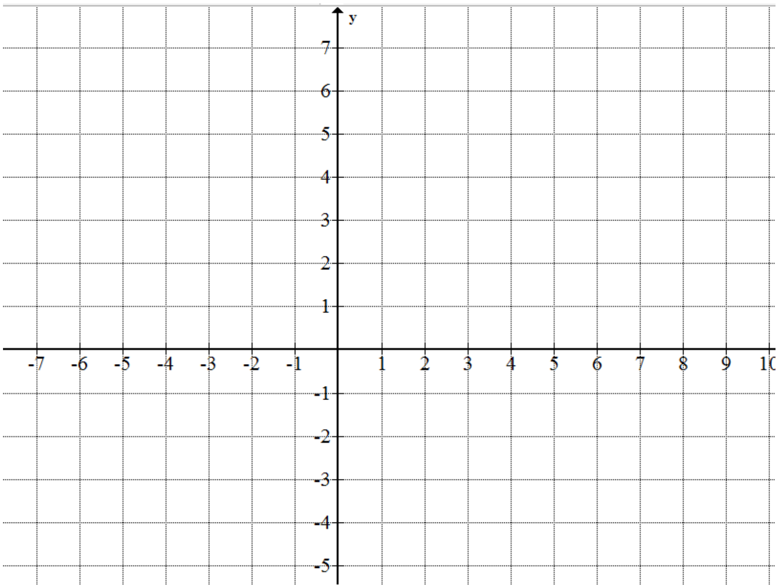
Dany jest wykres funkcji f.



a) Narysuj wykres funkcji $|f(x)|$

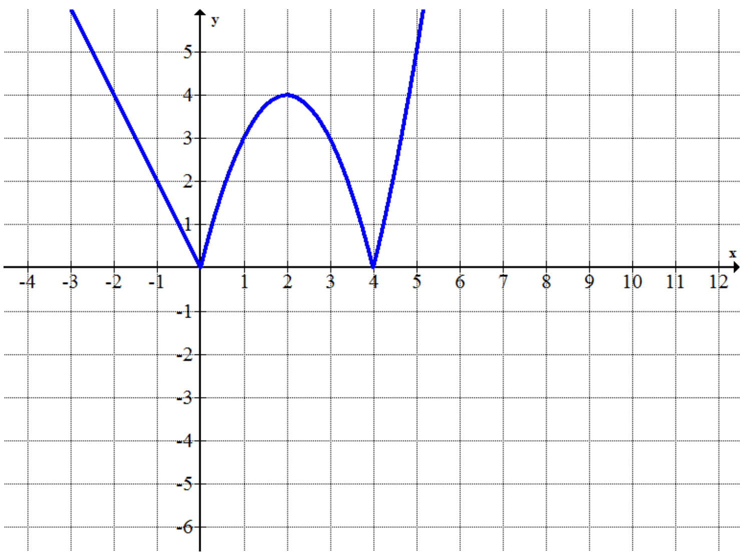


b) Narysuj wykres funkcji $f(2x)$

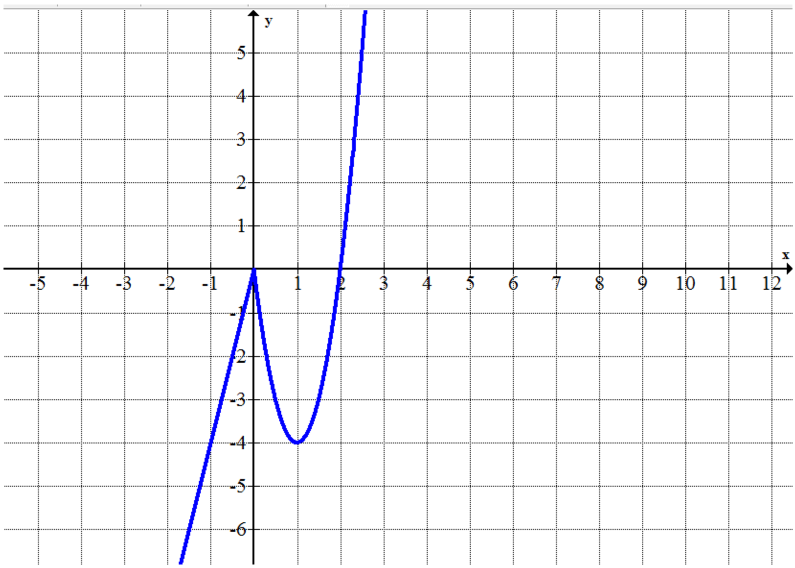


Rozwiązanie.

a)

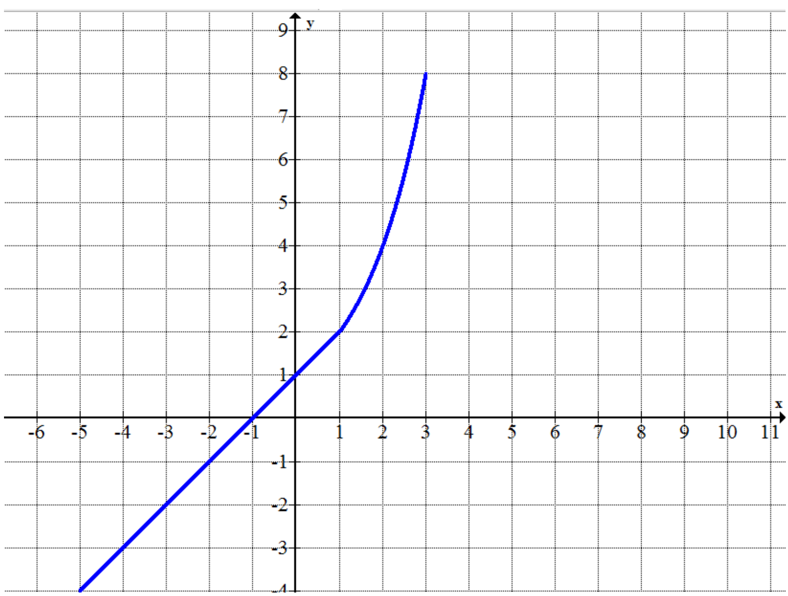


b)

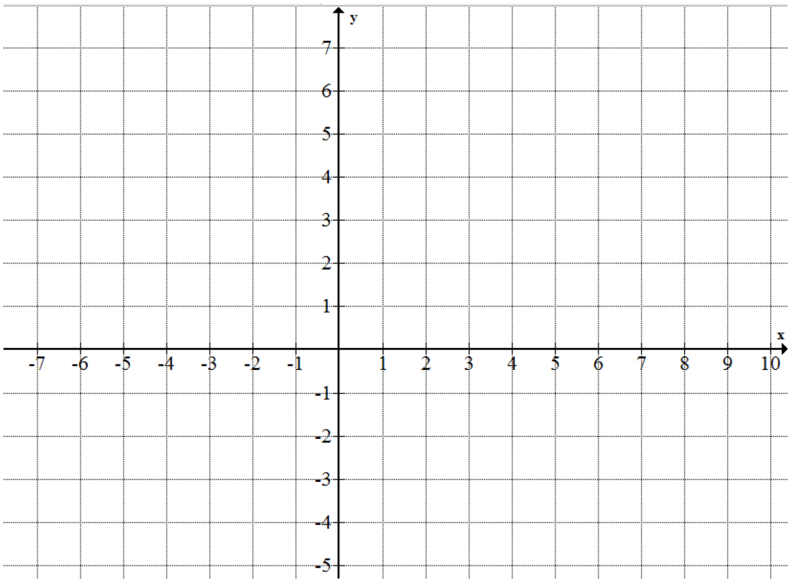


ZADANIE 1.B

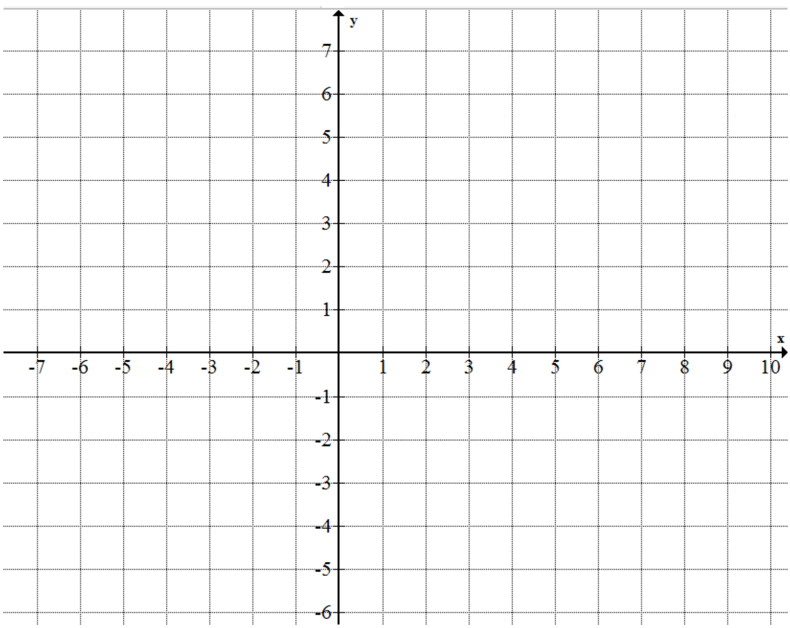
Dany jest wykres funkcji f.



a) Narysuj wykres funkcji: $-|f(x)|$

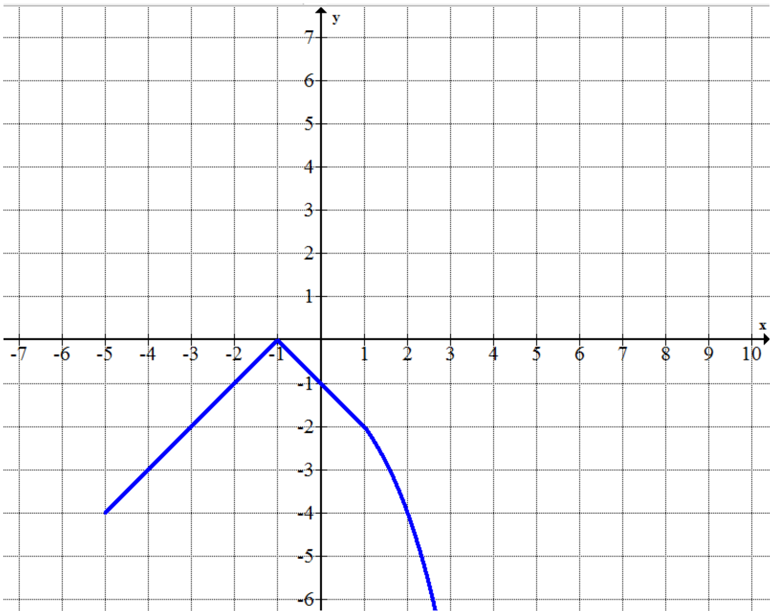


b) Narysuj wykres funkcji $f\left(\frac{1}{2}x\right)$

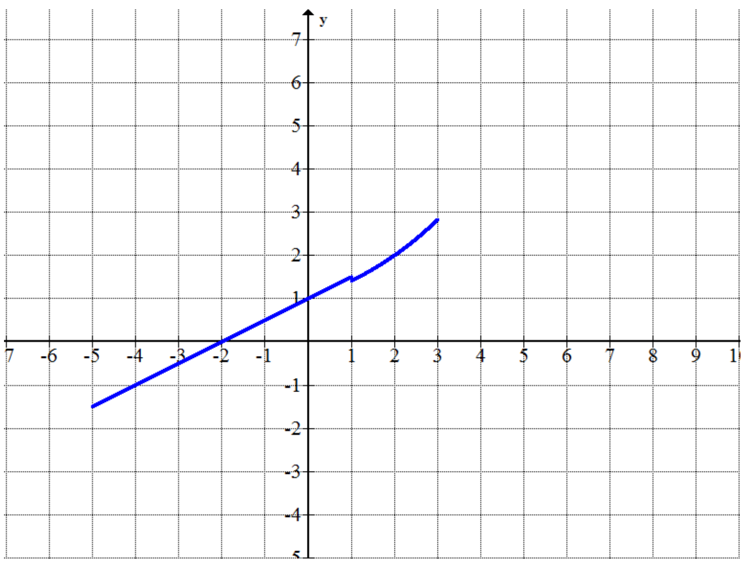


Odpowiedź/wskazówka

a)



b)



ZADANIE 2.A

Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} -x^2 - x & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$. Znajdź wzór funkcji $g(x) = f(3x)$.

Rozwiązanie.

$$g(x) = f(3x) = \begin{cases} -9x^2 - 3x & x \leq 0 \\ 3x & x > 0 \end{cases}.$$

ZADANIE 2.B

Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x \leq 1 \\ -2 & x > 1 \end{cases}$. Znajdź wzór funkcji $g(x) = f(-x) + 1$.

Odpowiedź/wskazówka

$$g(x) = f(-x) + 1 = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq -1 \\ -1 & x < -1 \end{cases}$$

ZADANIE 2.C

Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ 2^x & x > 1 \end{cases}$. Znajdź wzór funkcji $g(x) = f(x+1) - 2$.

Odpowiedź/wskazówka

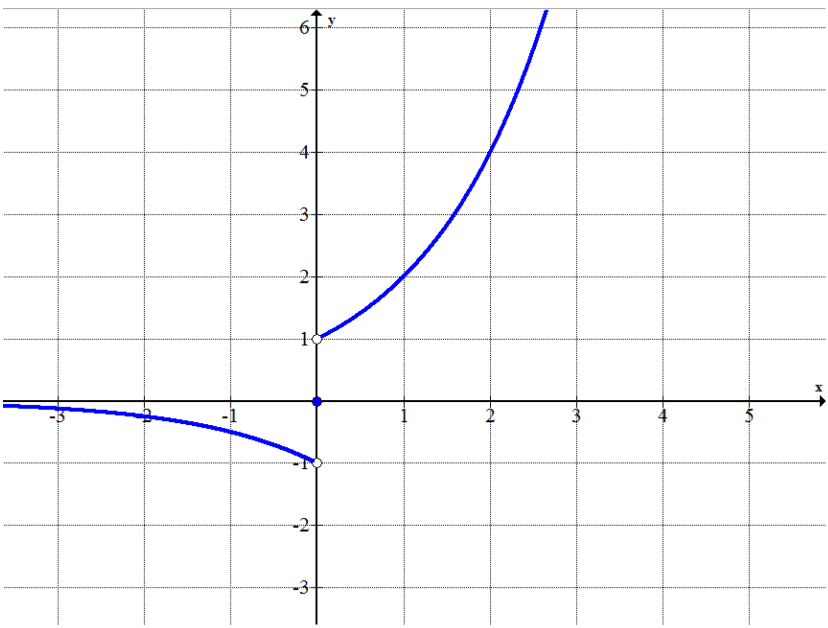
$$g(x) = f(x+1) - 2 = \begin{cases} -2 & x \leq 0 \\ 2^{x+1} - 2 & x > 0 \end{cases}.$$

ZADANIE 3.A

Dana jest funkcja $sgn(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. Znajdź wzór i narysuj wykres funkcji $g(x) = sgn(x) \cdot f(x)$, gdzie $f(x) = 2^x$.

Rozwiązanie.

$$g(x) = sgn(x) \cdot f(x) = \begin{cases} -2^x & x < 0 \\ 2^x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

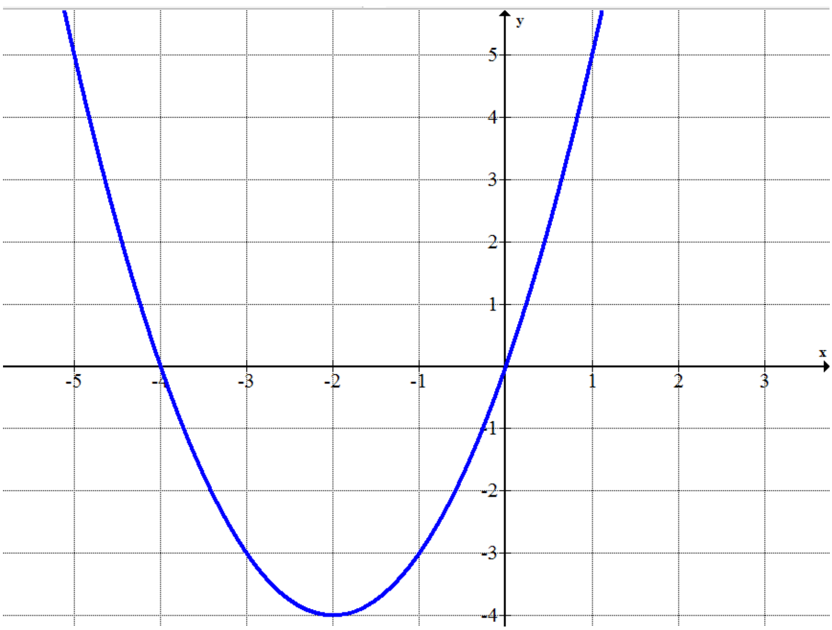


ZADANIE 3.B

Dana jest funkcja $sgn(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. Znajdź wzór i narysuj wykres funkcji $g(x) = sgn(x^2) \cdot f(x)$, gdzie $f(x) = x^2 + 4x$.

Odpowiedź/wskazówka

$g(x) = sgn(x^2) \cdot f(x) = x^2 + 4x.$



ZADANIE 3.C

Dana jest funkcja $sgn(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. Znajdź wzór i narysuj wykres funkcji $g(x) = \frac{sgn(x)}{f(x)}$, gdzie $f(x) = |x|+1$.

Odpowiedź/wskazówka

$$g(x) = \frac{sgn(x)}{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ \dfrac{1}{x-1} & x < 0 \end{cases}$$

2.2 Funkcja kwadratowa

ZADANIE 1.A

Dla jakiej wartości parametru m równanie $(2-m)x^2-(2m-3)x+3-m=0$ ma tylko jedno rozwiązanie? Podaj to rozwiązanie.

Rozwiązanie.

Równanie powyższej postaci będzie miało jedno rozwiązanie gdy będzie równaniem liniowym lub gdy będzie to równanie kwadratowe o wyróżniku równym zero.

$$2-m=0 \ \vee (2-m \neq 0 \ \wedge \Delta = 0)$$

$$m=2 \ \vee (m \neq 2 \ \wedge (-(2m-3))^2-4\cdot(2-m)(3-m)=0)$$

$$m=2 \ \vee (m \neq 2 \ \ \wedge \ \ 8\,m-15=0)$$

$$m=2 \ \vee \left(m \neq 2 \ \ \wedge \ \ m=\frac{15}{8}\right)$$

$$m=2 \quad \vee \quad m=\frac{15}{8}$$

Pierwszy przypadek: $m=2$. Równanie przyjmuje wówczas postać:

$$-x+1=0$$

$$x=1$$

Drugi przypadek: $m=\frac{15}{8}$. Równanie przyjmuje wówczas postać:

$$\frac{x^2}{8}-\frac{3\,x}{4}+\frac{9}{8}=0$$

$$x^2-6\,x+9=0$$

$$(x-3)^2=0$$

$$x=3$$

Odpowiedź

Równanie posiada jedno rozwiązanie dla $m=2$ $(x=1)$ lub dla $m=\frac{15}{8}$ $(x=3)$.

ZADANIE 1.B

Dla jakich wartości parametru m równanie $(m+4)x^2-(4m+3)x+m-1=0$ ma dwa różne rozwiązania o jednakowych znakach?

Odpowiedź/wskazówka

Musimy zapewnić jednocześnie:

- „kwadratowość” równania
- istnienie różnych rozwiązań
- te same znaki rozwiązań (jaki jest iloczyn liczb o tych samych znakach?).

$m \in (-\infty;\ -4) \cup (1;\ +\infty)$

ZADANIE 2.A

Dla jakich wartości parametru m równanie $(2m+1)x^2-(3m+2)x+m-3=0$ ma dwa różne rozwiązania ujemne?

Odpowiedź/wskazówka

Musimy zapewnić jednocześnie:

- „kwadratowość” równania: współczynnik przy x^2 musi być różny od zera
- istnienie różnych rozwiązań: wyróżnik dodatni
- ujemność obu rozwiązań: iloczyn rozwiązań dodatni a suma ujemna

$$\begin{cases} 2m+1 \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \wedge x_1 + x_2 < 0 \end{cases}$$

Rozpatrzmy kolejne warunki

- $2m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -\frac{1}{2}$
- $\Delta > 0 \Leftrightarrow (3m+2)^2 - 4 \cdot (2m+1) \cdot (m-3) > 0$

$$m^2 + 32\,m + 16 > 0$$

$$m < -4\sqrt{15} - 16 \ \vee m > 4\sqrt{15} - 16$$

- $x_1 \cdot x_2 > 0 \wedge x_1 + x_2 < 0 \Leftrightarrow \frac{(m-3)}{(2m+1)} > 0 \ \wedge \ \frac{(3m+2)}{(2m+1)} < 0$

$$\left(m < -\frac{1}{2} \vee m > 3\right) \wedge \left(-\frac{2}{3} < m < -\frac{1}{2}\right)$$

Zatem musi być spełniony układ warunków

$$\begin{cases} m \neq -\frac{1}{2} \\ m < -4\sqrt{15} - 16 \ \vee m > 4\sqrt{15} - 16 \\ \left(m < -\frac{1}{2} \vee m > 3\right) \wedge \left(-\frac{2}{3} < m < -\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

W rezultacie $m \in \left(4\sqrt{15} - 16;\ -\frac{1}{2}\right)$.

Odpowiedź:

Równanie $(2m+1)x^2 - (3m+2)x + m - 3 = 0$ ma dwa różne rozwiązania ujemne dla $m \in \left(4\sqrt{15} - 16;\ -\frac{1}{2}\right)$

ZADANIE 2.B

Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + m\,x + 26 = 0$ ma dwa różne rozwiązania, których kwadrat różnicy jest równy 121. Znajdź te rozwiązania.

Odpowiedź/wskazówka

Dla $m = -15$: $x_1 = 2$, $x_2 = 13$, lub dla $m = 15$ $x_1 = -13$, $x_2 = -2$.

Musimy zapewnić jednocześnie:

- istnienie różnych rozwiązań
- opisać kwadrat różnicy rozwiązań w zależności od ich sumy i iloczynu, aby skorzystać ze wzorów Viete'a.

2.3 Funkcja wielomianowa

2.3.1 Równania wielomianowe

ZADANIE 1.A

Rozwiąż równanie

$$x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 3 = 0$$

Odpowiedź/wskazówka

$x = 1$ (pierwiastek podwójny)

Pierwiastków wielomianu szukamy wśród podzielników wyrazu wolnego a następnie korzystamy z twierdzenia Bezout'a.

ZADANIE 1.B

Rozwiąż równanie

$$8x^3 - 60x^2 + 150x - 125 = 0$$

Odpowiedź/wskazówka

$x = \frac{5}{2}$ (pierwiastek potrójny)

Zwróćmy uwagę, że lewa strona równania da się „zwinąć" ze wzoru skróconego mnożenia na sześcian różnicy.

ZADANIE 2.A

Dla jakich wartości m, k liczba (-3) jest podwójnym pierwiastkiem wielomianu

$$x^3 + 2\,x^2 + \ mx + k$$

Odpowiedź/wskazówka

Dla $m = -15$ i $k = -36$

Skoro liczba (-3) jest podwójnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to wielomian ten jest podzielny bez reszty przez $(x + 3)^2$.

ZADANIE 2.B

Podaj przykład miejsca zerowego funkcji wielomianowej $W(x) = x^{2n+2} + 3x^3 - 4$, dla $n \in N$.

Odpowiedź/wskazówka

Zauważmy, że $W(1) = 0$.

2.4 Funkcja wymierna

2.4.1 Równania i nierówności wymierne

ZADANIE 1.A

Rozwiąż nierówność

$$\frac{x-4}{x+1} \leq 3$$

Rozwiązanie

Wyznaczamy dziedzinę nierówności: $x + 1 \neq 0$. Zatem $x \neq -1$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Mnożymy obie strony nierówności przez kwadrat mianownika

$$\frac{x-4}{x+1} \leq 3 \quad | \cdot (x+1)^2$$

$$(x-4)(x+1) \leq 3 \cdot (x+1)^2$$

$$x^2 - 3\,x - 4 \leq 3\,x^2 + 6\,x + 3$$

$$3\,x^2 + 6\,x + 3 - (x^2 - 3\,x - 4) \geq 0$$

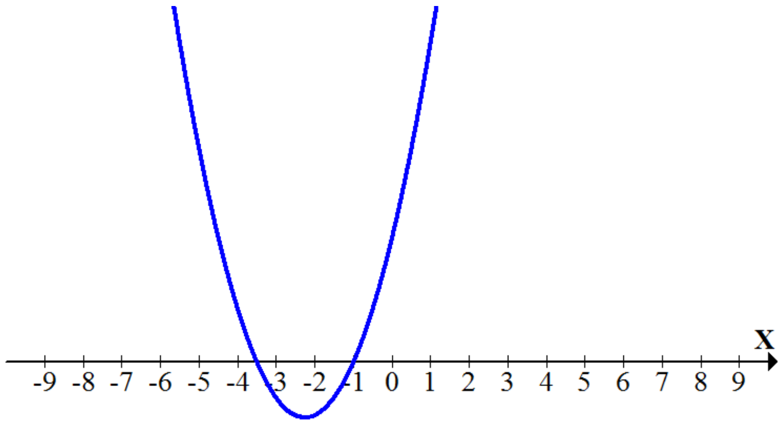
$$2\,x^2 + 9\,x + 7 \geq 0$$

Pomocniczo rozwiązujemy równanie kwadratowe

$$2\,x^2 + 9\,x + 7 = 0$$

$$x = -\frac{7}{2} \ \lor \ x = -1$$

Szkicujemy wykres funkcji kwadratowej znajdującej się po lewej stronie nierówności



Z wykresu odczytujemy rozwiązanie nierówności kwadratowej

$$x \in (-\infty;\ -\frac{7}{2} > \cup < -1;\ +\infty)$$

Rozwiązaniem nierówności wymiernej danej w zadaniu jest część wspólna znalezionego powyżej rozwiązania nierówności kwadratowej z dziedziną

$$x \in \left((-\infty;\ -\frac{7}{2} > \cup < -1;\ +\infty)\right) \cap D$$

Odpowiedź:

$$\frac{x-4}{x+1} \leq 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty;\ -\frac{7}{2} > \cup\ (-1;\ +\infty)$$

ZADANIE 1.B

Rozwiąż nierówność: $\frac{x-3}{x^2-25} \geq \frac{7-x}{5x-x^2}$.

Odpowiedź/wskazówka

$x \in (-5;\ 0) \cup (5; 35 >$

Pamiętajmy również o dziedzinie $D = R\backslash\{-5, 0, 5\}$

ZADANIE 2.A

Rozwiąż nierówność

$$\left|\frac{5}{x+2}\right| \geq 1$$

Odpowiedź/wskazówka

$x \in < -7;\ -2) \cup (-2; 3 >$

Korzystamy z własności: $|a| > b \Leftrightarrow a < -b\ \vee a > b$

Pamiętajmy również o dziedzinie $D = R\backslash\{-2\}$

ZADANIE 2.B

Rozwiąż nierówność

$$\left|\frac{4-x}{x+3}\right| \leq \frac{1}{2}$$

Odpowiedź/wskazówka

$x \in < \frac{5}{3};\ 11 >$

Korzystamy z własności: $|a| < b \Leftrightarrow a < b\ \wedge\ a > -b$

Pamiętajmy również o dziedzinie $D = R\backslash\{-3\}$

2.5 Funkcja wykładnicza i logarytmiczna

ZADANIE 1.A

Rozwiąż nierówność

$4^x \geq 5 \cdot 2^x + 24$

Odpowiedź/wskazówka

$x \in < 3;\ +\infty)$

Po zastosowaniu podstawienia $2^x = t$ sprowadzamy nierówność wykładniczą do nierówności kwadratowej $k^2 - 5k - 24 \geq 0$.

ZADANIE 1.B

Rozwiąż nierówność

$\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{x+12}{3-x}} \geq \left(\frac{1}{9}\right)^x$

Odpowiedź/wskazówka

$x \in \langle -\frac{3}{4};3) \cup \langle 4;+\infty)$

Korzystamy z własności działań na potęgach oraz monotoniczności funkcji wykładniczej. Pamiętajmy również o wyznaczeniu dziedziny (w wykładniku mamy do czynienia z funkcją wymierną).

ZADANIE 2.A

Rozwiąż nierówność: $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) > -2$

Rozwiązanie

Wyznaczamy dziedzinę nierówności logarytmicznej: $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

$$D = (1;\ +\infty)$$

Po obu stronach nierówności doprowadzamy do logarytmu o tej samej podstawie

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-1) > \log_{\frac{1}{3}} 9$$

Korzystamy z monotoniczności funkcji logarytmicznej (funkcja logarytmiczna o podstawie logarytmu z przedziału $(0; 1)$ jest malejąca, zatem większą wartość przyjmuje dla mniejszego argumentu – stąd opuszczając znak logarytmu i zapisując nierówność na argumentach (liczbach logarytmowanych) zmieniamy kierunek znaku nierówności na przeciwny)

$$x - 1 < 9$$

Czyli

$$x < 10$$

Rozwiązanie nierówności logarytmicznej uzyskujemy biorąc część wspólną rozwiązania powyższej nierówności wielomianowej z dziedziną nierówności logarytmicznej

$$x \in (-\infty; 10) \cap D$$

Odpowiedź

$\log_{\frac{1}{3}}(x-1) > -2 \Leftrightarrow x \in (1, 10).$

ZADANIE 2.B

Rozwiąż nierówność

$$\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 + \log_{\frac{1}{2}} x - 2 \leq 0$$

Odpowiedź/wskazówka

$$x \in \langle \frac{1}{2}, 4 \rangle$$

Nierówność logarytmiczną przez podstawienie

$$\log_{\frac{1}{2}} x = k$$

sprowadzamy do nierówności kwadratowej postaci:

$k^2 + k - 2 \leq 0$

Pamiętajmy o dziedzinie $D = (0;\ +\infty)$ oraz fakcie, że funkcja logarytmiczna, która w podstawie ma liczbę z przedziału $(0; 1)$ jest funkcją malejącą.

ZADANIE 3.A

Uzasadnij, że $3^{\pi} > 27$.

Rozwiązanie.

$3^{\pi} > 3^3 = 27$.

ZADANIE 3.B

Uzasadnij, że $\pi^{\pi} > 9\frac{3}{5}$.

Odpowiedź/wskazówka

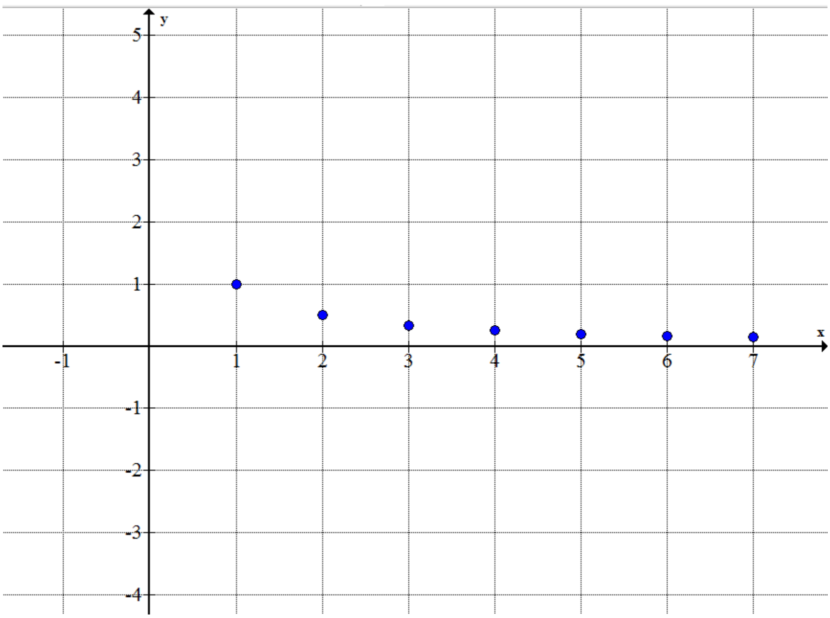
Analogicznie jak w 3A.

3 Ciągi liczbowe

3.1 Granica ciągu

ZADANIE 1.A

Na podstawie szkicu wykresu ciągu (a_n) podaj jego granicę (o ile istnieje).

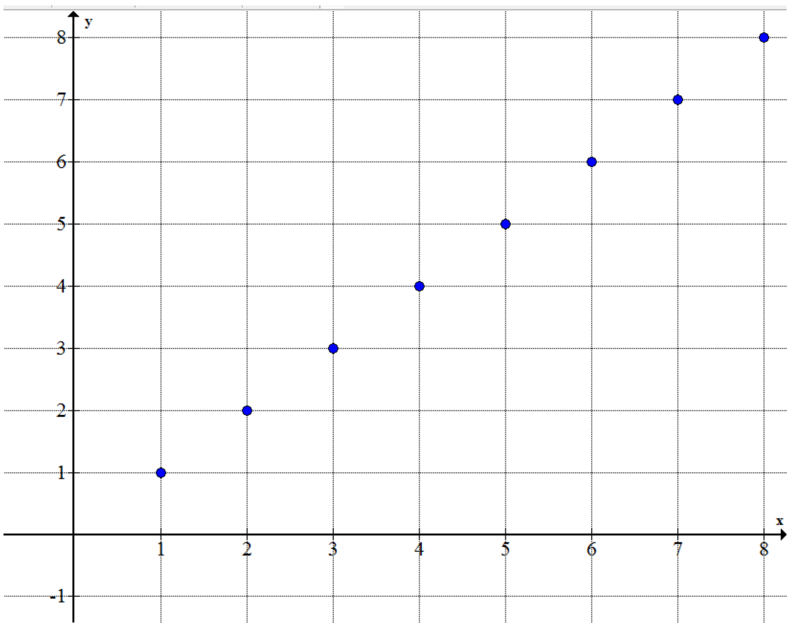


Rozwiązanie.

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

ZADANIE 1.B

Na podstawie szkicu wykresu ciągu (a_n) podaj jego granicę (o ile istnieje).

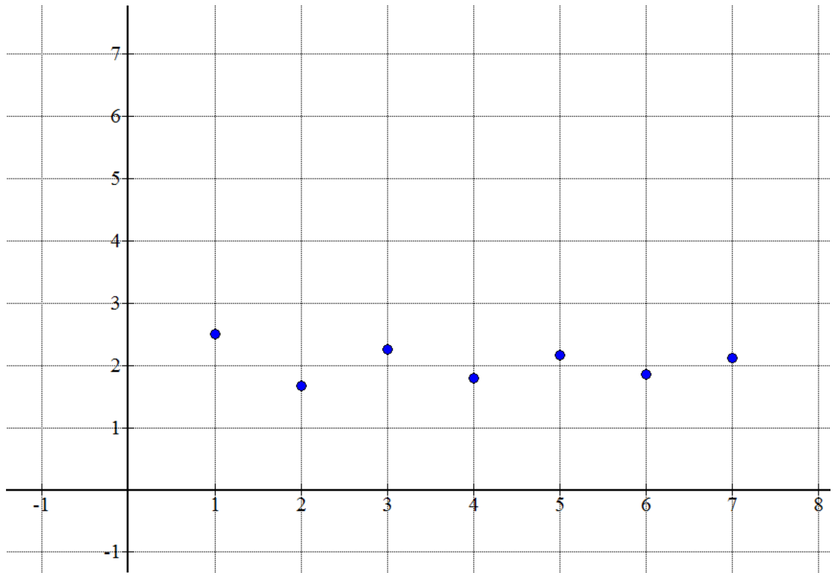


Odpowiedź/wskazówka

Ciąg jest rozbieżny

ZADANIE 1.C

Na podstawie szkicu wykresu ciągu (a_n) podaj jego granicę (o ile istnieje).



Odpowiedź/wskazówka

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$

ZADANIE 2.A

Wyznacz granicę ciągu:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n-1}{n^2+n-5}$$

Rozwiązanie.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n-1}{n^2+n-5} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2\left(3+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n}-\frac{5}{n^2}\right)} = 3$

ZADANIE 2.B

Wyznacz granicę ciągu:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+40n-15}{n^2+7n-50}$$

Odpowiedź/wskazówka

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+40n-15}{n^2+7n-50}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(3+\frac{40}{n}-\frac{15}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{7}{n}-\frac{50}{n^2}\right)}=3$$

ZADANIE 2.C

Wyznacz granicę ciągu:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+9n-5}{n-8}$$

Odpowiedź/wskazówka

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+9n-5}{n-8}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{9}{n}-\frac{5}{n^2}\right)}{n\left(1+\frac{8}{n}\right)}=\infty$$

ZADANIE 3.A

Wyznacz granicę ciągu:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^{20}+n-1}{(n-1)^{20}+n}$$

Rozwiązanie.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^{20}+n-1}{n^{20}+\cdots\ldots\ldots}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{20}\left(3+\frac{1}{n^{19}}-\frac{1}{n^{20}}\right)}{n^{20}(1+\cdots..)}=3$$

ZADANIE 3.B

Wyznacz granicę ciągu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{10}}{(2n+1)^{10}}$$

Odpowiedź/wskazówka

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{10}}{n^{10}(2^{10}+\cdots\dots\dots).} = \frac{1}{2^{10}}$$

ZADANIE 3.C

Wyznacz granicę ciągu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{2n^2-8}$$

Odpowiedź/wskazówka

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2+n}{2}}{2n^2-8} = \frac{1}{4}$

3.2 Ciąg arytmetyczny

ZADANIE 1.A

Dla jakich wartości x liczby $x^2 + 2, 2x + 4, 6$ w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny?

Rozwiązanie.

Aby liczby podane w zadaniu w podanej kolejności tworzyły ciąg arytmetyczny musi być spełniony warunek

$$2x + 4 - (x^2 + 2) = 6 - (2x + 4)$$

$$2x + 4 - (x^2 + 2) - \left(6 - (2x + 4)\right)$$

$$4\,x - x^2 = 0$$

$$-x\,(x - 4) = 0$$

$$x = 0 \;\vee\; x = 4$$

Istotnie,

- dla $x = 0$ mamy ciąg: $(2, 4, 6)$
- dla $x = 4$ mamy ciąg: $(18, 12, 6)$

Odpowiedź:

Liczby podane w zadaniu w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny dla $x = 0 \;\vee\; x = 4$

ZADANIE 1.B

Uzasadnij, że nie istnieje takie x, aby liczby $x^{10}, x^{10} + 2, x^{10} + 6$ w podanej kolejności tworzyły ciąg arytmetyczny.

Odpowiedź/wskazówka

Sprawdź warunek jak w zadaniu 1A.

ZADANIE 2.A

Ciągi a_n , b_n są arytmetyczne. Uzasadnij, że ciąg $3a_n + 2b_n$ też jest arytmetyczny.

Rozwiązanie.

Niech odpowiednio $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r_a$ oraz $b_n = b_1 + (n-1) \cdot r_b$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ i a_1, b_1, $r_a, r_b \in \mathbb{R}$. Tworzymy ciąg $c_n = 3a_n + 2b_n$.

$$c_n = 3a_n + 2b_n$$

$$c_n = 3(a_1 + (n-1) \cdot r_a) + 2(b_1 + (n-1) \cdot r_b)$$

$$c_n = 3\,a_1 + 2\,b_1 + (n-1)\,(3\,r_a + 2\,r_b)$$

Ciąg c_n jest arytmetyczny o ile jest spełniony warunek

$$c_{n+1} = \frac{c_n + c_{n+2}}{2}$$

Sprawdźmy

$$c_{n+1} = 3\,a_1 + 2\,b_1 + n\,(3\,r_a + 2\,r_b)$$

$$\frac{c_n + c_{n+2}}{2} = \frac{3\,a_1 + 2\,b_1 + (n-1)\,(3\,r_a + 2\,r_b) + 3\,a_1 + 2\,b_1 + (n+1)\,(3\,r_a + 2\,r_b)}{2} =$$

$$= 3\,a_1 + 2\,b_1 + n\,(3\,r_a + 2\,r_b)$$

Czyli zależność $c_{n+1} = \frac{c_n + c_{n+2}}{2}$ przyjmuje postać

$$3\,a_1 + 2\,b_1 + n\,(3\,r_a + 2\,r_b) = 3\,a_1 + 2\,b_1 + n\,(3\,r_a + 2\,r_b)$$

$$0 = 0$$

Jest zatem spełniona w sposób tożsamościowy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i dowolnych a_1, b_1, $r_a, r_b \in \mathbb{R}$. Zatem dla dowolnych ciągów arytmetycznych a_n, b_n ciąg $c_n = 3a_n + 2b_n$ jest również ciągiem arytmetycznym.

ZADANIE 2.B

Uzasadnij, że suma trzech ciągów arytmetycznych też jest ciągiem arytmetycznym.

Odpowiedź/wskazówka

Postępuj analogicznie jak w zadaniu 2A.

3.3 Ciąg geometryczny

ZADANIE 1.A

Dla jakich wartości x liczby $x+2, 2x+4, 8$ w podanej kolejności tworzą ciąg geometryczny?

Rozwiązanie.

Aby liczby podane w zadaniu w podanej kolejności tworzyły ciąg geometryczny musi być spełniony warunek

$$\frac{2x+4}{x+2} = \frac{8}{2x+4} \land x \neq -2$$

$$(2x+4)^2 = 8(x+2)$$

$$4\,x^2 + 8\,x = 0$$

$$4\,x\,(x+2) = 0$$

$x = 0$ lub $x = -2$ (nie spełnia warunków zadania)

Istotnie,

- dla $x = 0$ mamy ciąg: $(2, 4, 8)$
- dla $x = -2$ mamy ciąg: $(0, 0, 8)$ - nie jest to ciąg geometryczny

Odpowiedź:

Liczby podane w zadaniu w podanej kolejności tworzą ciąg geometryczny tylko dla $x = 0$.

ZADANIE 1.B

Uzasadnij, że nie istnieje takie x, aby liczby $x^{20}, 2x^{10}, 3x^{10}$ w podanej kolejności tworzyły ciąg geometryczny.

Odpowiedź/wskazówka

Sprawdź warunek jak w zadaniu 1A.

ZADANIE 2.A

Ciągi a_n , b_n są geometryczne. Uzasadnij, że ciąg $3 \cdot a_n \cdot b_n$ też jest geometryczny.

Rozwiązanie.

Niech odpowiednio $a_n = a_1 \cdot q_a^{n-1}$ oraz $b_n = b_1 \cdot q_b^{n-1}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ i $a_1,\ b_1,\ q_a,\ q_b \in \mathbb{R}$. Tworzymy ciąg $c_n = 3 \cdot a_n \cdot b_n$.

$$c_n = 3 \cdot\ a_1 \cdot q_a^{n-1} \cdot b_1 \cdot q_b^{n-1}$$

$$c_n = 3 \cdot\ a_1 \cdot b_1 \cdot (q_a \cdot q_b)^{n-1}$$

Ciąg c_n jest geometryczny o ile jest spełniony warunek

$$c_{n+1}^2 = c_n \cdot c_{n+2}$$

Sprawdźmy

$$c_{n+1}^2 = (3 \cdot\ a_1 \cdot b_1 \cdot (q_a \cdot q_b)^n)^2 = 9\, {a_1}^2\, {b_1}^2\, (q_a\, q_b)^{2\,n}$$

$$c_n \cdot c_{n+2} = 3 \cdot\ a_1 \cdot b_1 \cdot (q_a \cdot q_b)^{n-1} \cdot 3 \cdot\ a_1 \cdot b_1 \cdot (q_a \cdot q_b)^{n+1} =$$

$$= 9\, {a_1}^2\, {b_1}^2\, (q_a\, q_b)^{2\,n}$$

Czyli zależność $c_{n+1}^2 = c_n \cdot c_{n+2}$ przyjmuje postać

$$9\, {a_1}^2\, {b_1}^2\, (q_a\, q_b)^{2\,n} = 9\, {a_1}^2\, {b_1}^2\, (q_a\, q_b)^{2\,n}$$

$$0 = 0$$

Jest zatem spełniona w sposób tożsamościowy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i dowolnych $a_1, b_1,$ $q_a, q_b \in \mathbb{R}$.

Zatem dla dowolnych ciągów geometrycznych a_n, b_n ciąg $c_n = 3 \cdot a_n \cdot b_n$ jest również ciągiem geometrycznym.

ZADANIE 2.B

Uzasadnij, że iloczyn trzech ciągów geometrycznych też jest ciągiem geometrycznym.

Odpowiedź/wskazówka

Postępuj analogicznie jak w zadaniu 2A.

3.4 Ciąg rekurencyjny

ZADANIE 1.A

Oblicz trzeci wyraz ciągu, jeśli $a_1 = 3, a_{n+1} = n + a_n$

Rozwiązanie.

$$a_2 = 1 + a_1 = 1 + 3 = 4$$

$$a_3 = 2 + a_2 = 2 + 4 = 6$$

Odpowiedź:

$a_3 = 6$.

ZADANIE 1.B

Oblicz dziesiąty wyraz ciągu, jeśli $a_1 = 0, a_{n+1} = (n^3 + 3n + 7) \cdot a_n$

Odpowiedź/wskazówka

$a_{10} = 0$.

ZADANIE 2.A

Podaj wzór na n-ty wyraz ciągu (a_n), jeśli $a_1 = 1, a_{n+1} = 3 \cdot a_n$.

Rozwiązanie.

Zauważmy, że jest to ciąg geometryczny, gdzie $a_1 = 1$ oraz iloraz $q = 3$. Zatem

$$a_n = 3^{n-1}$$

ZADANIE 2.B

Podaj wzór na n-ty wyraz ciągu (a_n), jeśli $a_1 = 25, a_{n+1} = 5 \cdot a_n$.

Odpowiedź/wskazówka

Zauważmy, że jest to ciąg geometryczny $a_n = 5^{n+1}$.

4 Trygonometria

4.1 Wartości funkcji trygonometrycznych

ZADANIE 1.A

Oblicz $\sin 120^0$.

Rozwiązanie.

$\sin 120^0 = \sin(180^0 - 60^0) = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ZADANIE 1.B

Oblicz $\mathrm{tg}\frac{7}{4}\pi$.

Odpowiedź/wskazówka

Oblicz $\mathrm{tg}\frac{7}{4}\pi = -1$.

ZADANIE 2.A

Oblicz $\cos 510^0$.

Rozwiązanie.

$\cos 510^0 = \cos(360^0 + 180^0 - 30^0) = \cos(180^0 - 30^0) = -\cos 30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ZADANIE 2.B

Oblicz $\mathrm{tg}\frac{13}{6}\pi$.

Odpowiedź/wskazówka

Oblicz $\mathrm{tg}\frac{13}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

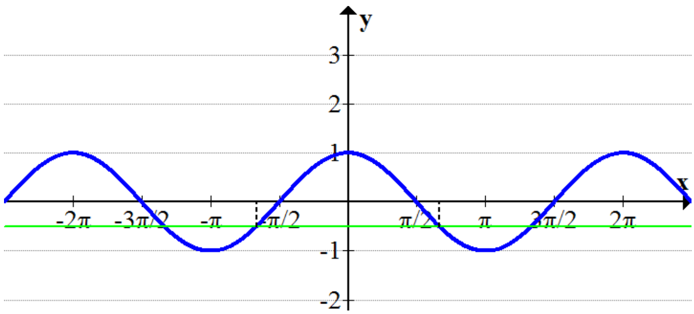
4.2 Równania i nierówności trygonometryczne

ZADANIE 1.A

Rozwiąż nierówność $\cos x > -\frac{1}{2}$.

Rozwiązanie.

Rysujemy wykresy funkcji znajdujących się po obu stronach nierówności.



Pytamy kiedy $\cos x > -\frac{1}{2}$, czyli kiedy kosinusoida leży powyżej prostej $y = -\frac{1}{2}$.

W okresie $< -\pi; \pi >$ ma to miejsce dla $x \in (-\frac{2}{3}\pi; \frac{2}{3}\pi)$. Korzystając z okresowości funkcji kosinus zapiszemy rozwiązanie w całym zbiorze liczb rzeczywistych:

$$x \in \left(-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi; \frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right)$$

Odpowiedź:

$\cos x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi; \frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

ZADANIE 1.B

Rozwiąż nierówność $2\sin 2x \geq 1$.

Odpowiedź/wskazówka

$x \in \langle\frac{\pi}{12} + k\pi; \frac{5\pi}{12} + k\pi\rangle$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

Robimy podstawienie $t = 2x$ i rozwiązujemy nierówność analogicznie jak w zadaniu 1A. Na koniec wracamy do podstawienia.

ZADANIE 2.A

Rozwiąż nierówność: $\operatorname{tg}^2 x - 1 > 0$

Odpowiedź/wskazówka

Wyznaczmy dziedzinę: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

Zróbmy podstawienie $\operatorname{tg} x = t$

$$t^2 - 1 > 0$$

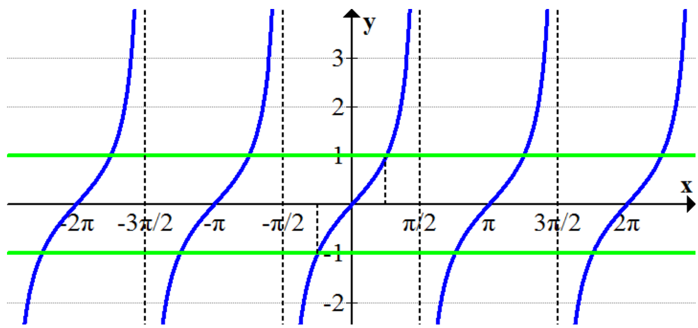
$$(t-1)(t+1) > 0$$

$$t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$

$$t < -1 \vee t > 1$$

Wracamy do podstawienia

$$\operatorname{tg} x < -1 \vee \operatorname{tg} x > 1$$



Geometrycznie, rozwiązaniem nierówności są te argumenty $x \in D$, dla których wykres funkcji tangens leży poniżej prostej $y = -1$ lub powyżej prostej $y = 1$.

W okresie $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ ma to miejsce dla

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right) \vee x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$$

Korzystając z okresowości funkcji tangens możemy zapisać rozwiązanie w całej dziedzinie

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; -\frac{\pi}{4} + k\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

ZADANIE 2.B

Rozwiąż nierówność $\sin^2 x + \cos(2x) \geq 0$

Odpowiedź/wskazówka

$\sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x \geq 0$, $\cos^2 x \geq 0$, zatem $x \in R$.

4.3 Zastosowanie wzorów trygonometrycznych

ZADANIE 1.A

Oblicz $\sin 75^0$.

Rozwiązanie.

$\sin 75^0 = \sin(45^0 + 30^0) = \sin 45^0 \cos 30^0 + \sin 30^0 \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

ZADANIE 1.B

Oblicz $\mathrm{tg} 15^0$.

Odpowiedź/wskazówka

Zauważmy, że $\mathrm{tg} 15^0 = \mathrm{tg}(45^0 - 30^0)$ i skorzystajmy ze wzoru na tangens różnicy.

ZADANIE 2.A

Wyprowadź wzór na $\sin(3x)$.

Rozwiązanie.

$$\sin(3x) = \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x =$$

$$= 2 \sin x \cos x \cos x + \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x) =$$

$$= 2 \sin x \cos^2 x + \sin x \cos^2 x - \sin^3 x =$$

$$= 3 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x = \sin x (3 \cos^2 x - \sin^2 x)$$

ZADANIE 2.B

Wyprowadź wzór na $\mathrm{tg}(4x)$.

Odpowiedź/wskazówka

Zauważmy, że $\mathrm{tg}(4x) = \mathrm{tg}(2x + 2x)$ i skorzystajmy ze wzoru na tangens sumy.

5 Geometria

5.1 Geometria analityczna

5.1.1 Prosta

ZADANIE 1.A

Napisz równanie prostej prostopadłej do prostej o równaniu $y = 2x - 4$ i przechodzącej przez punkt $(2, 6)$.

Rozwiązanie.

Równanie prostej prostopadłej: $y = -\frac{1}{2}x + b$. Ponieważ prosta przechodzi przez punkt $(2, 6)$, zatem $6 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + b$, więc $y = -\frac{1}{2}x + 7$.

ZADANIE 1.B

Napisz równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $y = 3x - 4$ i przechodzącej przez punkt $(1, 5)$.

Odpowiedź/wskazówka

Równanie prostej równoległej: $y = 3x + b$. Ponieważ prosta przechodzi przez punkt $(1, 5)$, zatem $5 = 3 \cdot 1 + b$, więc $y = 3x + 2$.

ZADANIE 2.A

Dany jest trójkąt ABC. Punkty A, B należą do prostej o równaniu $4x + 3y - 4 = 0$. Oblicz długość wysokości trójkąta poprowadzonej z wierzchołka $C = (1, 2)$.

Rozwiązanie.

$$h = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{6}{5}$$

ZADANIE 2.B

Dany jest równoległobok $ABCD$. Punkty A, B należą do prostej o równaniu $6x + 8y - 2 = 0$. Oblicz długość wysokości równoległoboku poprowadzonej z wierzchołka $C = (0, 2)$.

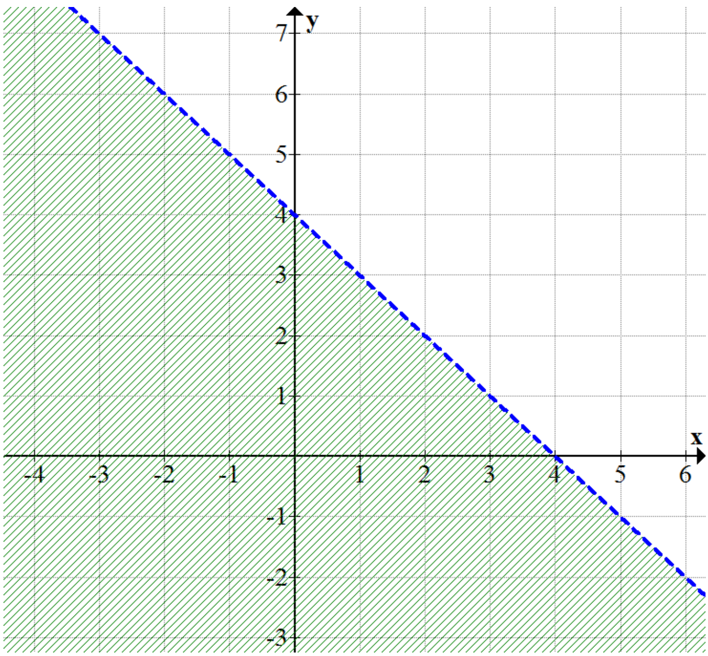
Odpowiedź/wskazówka

$$h = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|6 \cdot 0 + 8 \cdot 2 - 2|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{7}{5}$$

5.1.2 Układy nierówności

ZADANIE 1.A

Zapisz rozwiązanie nierówności:



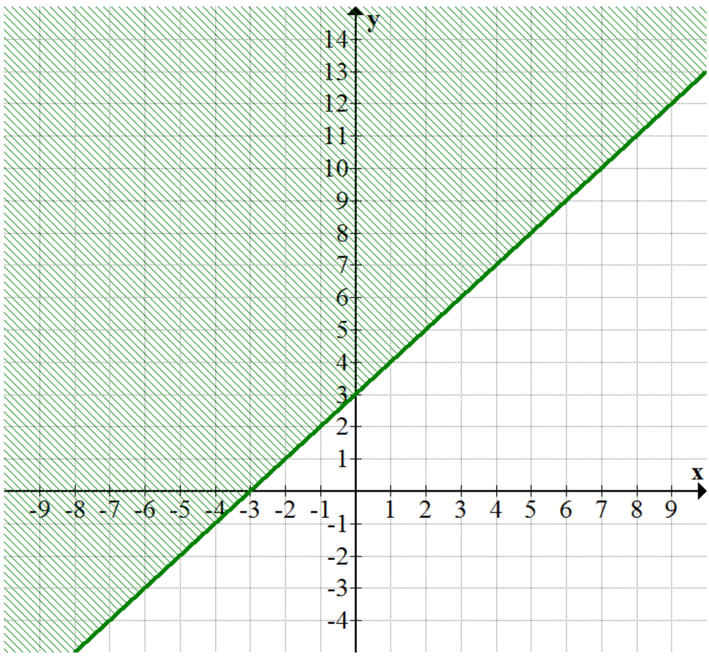
Rozwiązanie.

$$y < -x + 4$$

ZADANIE 1.B

Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór spełniający nierówność: $y \geq x + 3$.

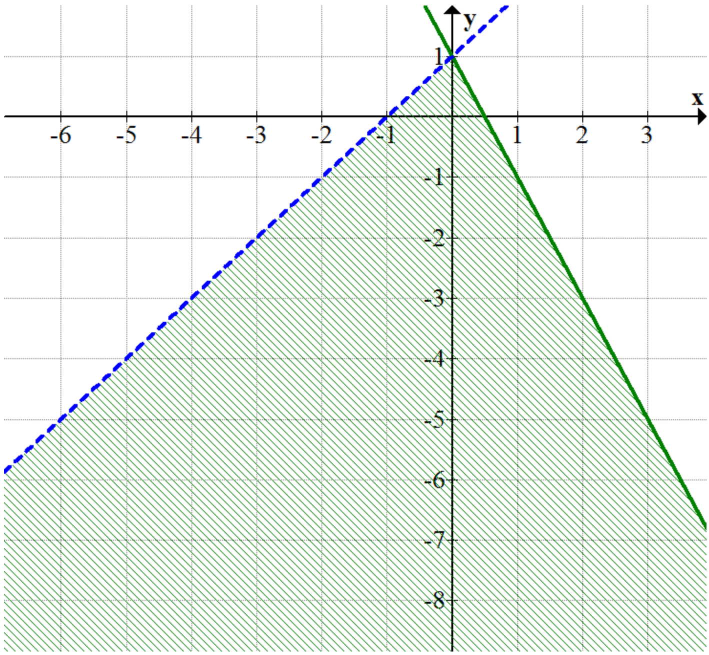
Odpowiedź/wskazówka



ZADANIE 2.A

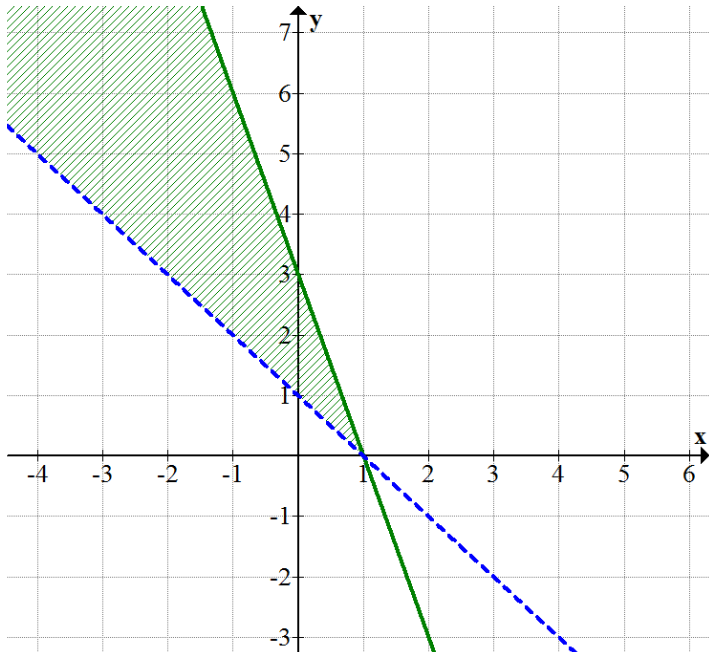
Rozwiąż graficznie układ nierówności: $\begin{cases} 2x + y \leq 1 \\ x - y > -1 \end{cases}$.

Rozwiązanie.



ZADANIE 2.B

Na podstawie rysunku opisz podany podzbiór płaszczyzny przez odpowiedni układ nierówności.



Odpowiedź/wskazówka

$$\begin{cases} 3x + y \leq 3 \\ x + y > 1 \end{cases}.$$

5.1.3 Okrąg i koło

ZADANIE 1.A

Wyznacz środek i promień okręgu o równaniu $x^2 - 4x + y^2 = 0$.

Rozwiązanie.

$(x-2)^2 - 4 + y^2 = 0$, $(x-2)^2 + y^2 = 2^2$.

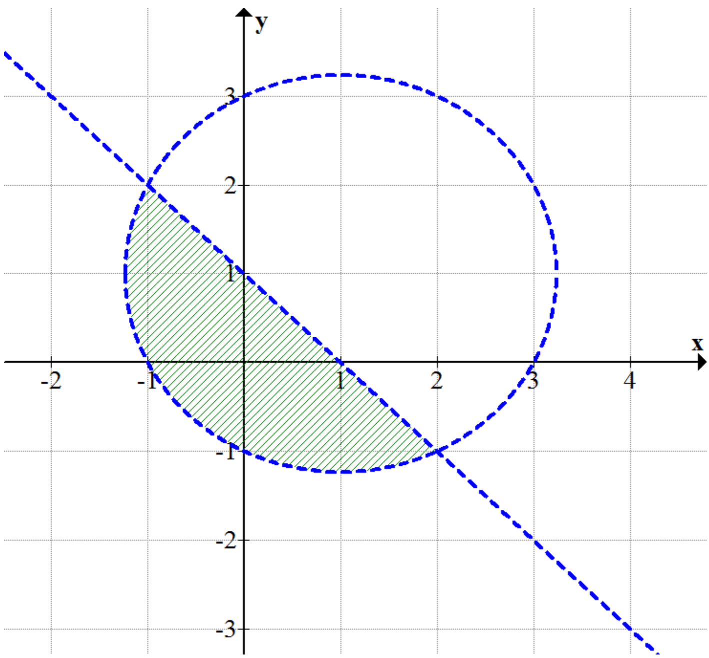
$S(2, 0)$, $r = 2$.

ZADANIE 1.B

Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór spełniający układ nierówności:

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 - 2y < 3 \\ x + y < 1 \end{cases}$$

Rozwiązanie.



ZADANIE 2.A

Dla jakiej wartości parametru a okrąg o równaniu $x^2 - 2x + y^2 = 0$ jest styczny do prostej o równaniu $y = x + a$.

Rozwiązanie.

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 = 0 \\ y = x + a \end{cases}$$

$$x^2 - 2x + (x + a)^2 = 0$$

$$2x^2 + (2a - 2)x + a^2 = 0$$

Prosta będzie styczna do okręgu, gdy uzyskane równanie będzie miało jedno rozwiązanie

$$\Delta = 0$$

$$(2a - 2)^2 - 8a^2 = 0$$

$$(2a - 2)^2 - 8a^2$$

$$-4\,a^2 - 8\,a + 4 = 0$$

$$a = -\sqrt{2} - 1 \text{ lub } a = \sqrt{2} - 1$$

Odpowiedź

Okrąg i prosta dane w zadaniu będą styczne, gdy $a = -\sqrt{2} - 1$ lub $a = \sqrt{2} - 1$.

ZADANIE 2.B

Dla jakiej wartości parametru a okrąg o równaniu $x^2 + y^2 - 4y = 0$ nie ma punktów stycznych z prostą o równaniu $y = -x + a$.

Odpowiedź/wskazówka

Warunki zadania będą spełnione, gdy układ równań zbudowany z równań prostej i okręgu NIE będzie miał rozwiązań.

Układ równań sprowadza się do równania postaci:

$$x^2 + (-x + a)^2 - 4(-x + a) = 0$$

$$2\,x^2 + (4 - 2\,a)x \; + a^2 - 4\,a = 0$$

Równanie to NIE ma rozwiązań, gdy jego wyróżnik jest ujemny

$$(4-2\,a)^2-4\cdot 2\cdot (a^2-4\,a)<0$$

$$16+16\,a-4\,a^2<0$$

Wykonując niezbędne rachunki uzyskujemy, że

$$a<2-2\,\sqrt{2}\ \text{lub}\ a>2\,\sqrt{2}+2$$

Czyli

$$a\in \left(-\infty;\ 2-2\,\sqrt{2}\,\right)\cup (2+2\,\sqrt{2};\ +\infty)$$

5.1.4 Wektory

ZADANIE 1.A

Dane są wektory: $\vec{u} = [-3, 4]$, $\vec{v} = [1,3]$

a) Oblicz $\vec{u} + 2\vec{v}$
b) Oblicz $\vec{u} - 3\vec{v}$
c) Oblicz długość wektora: $\vec{u}$

Rozwiązanie.

a) $\vec{u} + 2\vec{v} = [-3, 4] + 2 \cdot [1, 3] = [-1, 10]$
b) $\vec{u} - 3\vec{v} = [-3, 4] - 3 \cdot [1, 3] = [-6, -5]$
c) $|\vec{u}\ | = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5.$

ZADANIE 1.B

Dany jest równoległobok $ABCD$. Punkty $A = (1, 3), B = (2, 4), C = (2, 6)$. Wyznacz współrzędne punktu D.

Odpowiedź/wskazówka

Niech niewiadomy punkt D ma współrzędne (x, y)

$$D(x, y)$$

$$\overrightarrow{AB} = [1,1]$$

$$\overrightarrow{DC} = [2 - x, 6 - y]$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

$$[1,1] = [2 - x, 6 - y]$$

Zatem $D = (1, 5)$.

ZADANIE 2.A

Napisz wzór funkcji $g(x)$ po przesunięciu o wektor $\vec{u} = [3,1]$ funkcji $f(x) = 2^x - 3$.

Rozwiązanie.

$g(x) = f(x-3) + 1 = 2^{x-3} - 3 + 1 = 2^{x-3} - 2.$

ZADANIE 2.B

Napisz wzór funkcji $g(x)$ po przesunięciu o wektor $\vec{u} = [1, -2]$ funkcji

$f(x) = (x+1)^3 - 3.$

Odpowiedź/wskazówka

$g(x) = f(x-1) - 2 = (x+1-1)^3 - 3 - 2 = x^3 - 5.$

5.2 Planimetria

5.2.1 Okrąg opisany lub wpisany w czworokąt

ZADANIE 1.A

Na czworokącie $ABCD$ opisano okrąg. Kąt przy wierzchołku B jest pięć razy większy od kąta A, a kąt przy wierzchołku C jest trzy razy większy od kąta przy wierzchołku A. Wyznacz miary kątów w czworokącie.

Rozwiązanie.

$\sphericalangle A, \sphericalangle B = 5 \cdot \sphericalangle A, \sphericalangle C = 3 \cdot \sphericalangle A$

Wiadomo, że $\sphericalangle A + \sphericalangle C = \sphericalangle B + \sphericalangle D$, więc $\sphericalangle A + 5 \cdot \sphericalangle A = 3 \cdot \sphericalangle A + \sphericalangle D$, zatem $\sphericalangle D = 3 \cdot \sphericalangle A$. Wiadomo także, że $\sphericalangle A + 5 \cdot \sphericalangle A + 3 \cdot \sphericalangle A + 3\sphericalangle A = 360^0$

$$\sphericalangle A = 30^0, \sphericalangle B = 150^0, \sphericalangle C = 90^0, \sphericalangle D = 90^0$$

ZADANIE 1.B

W czworokąt $ABCD$ o obwodzie równym 60 wpisano okrąg. Długość boku BC jest pięć razy większa od długości boku AB, a długość boku CD jest trzy razy większa od długości boku AB. Wyznacz długości boków.

Odpowiedź/wskazówka

$|AB|, |BC| = 5 \cdot |AB|, |CD| = 3 \cdot |AB|$.

W czworokąt wpisano okrąg, zatem

$$|AB| + |CD| = |BC| + |DA|$$

Korzystając wypisanych zależności między długościami poszczególnych boków uzyskujemy

$$|AB| + 5 \cdot |AB| = 3 \cdot |AB| + |DA|$$

$$|DA| = 3 \cdot |AB|$$

Z treści zadania wiadomo także, że

$$|AB| + 5 \cdot |AB| + 3 \cdot |AB| + 3 \cdot |AB| = 60$$

Czyli

$$|AB| = 5$$

W rezultacie uzyskujemy:

$|AB| = 5, |BC| = 25, |CD| = 15, |DA| = 15.$

ZADANIE 2.A

W czworokąt $ABCD$ wpisano okrąg. Uzasadnij, że jeśli cztery kolejne długości boków tworzą ciąg arytmetyczny, to wszystkie długości boków czworokąta są równe.

Rozwiązanie.

$$a_1, a_1 + r, a_1 + 2r, a_1 + 3r$$

$$a_1 + a_1 + 2r = a_1 + r + a_1 + 3r$$

$$r = 0$$

Zatem wszystkie długości są równe.

ZADANIE 2.B

W czworokąt $ABCD$ wpisano okrąg. Uzasadnij, że jeśli cztery kolejne długości boków tworzą ciąg geometryczny, to wszystkie długości boków czworokąta są równe.

Odpowiedź/wskazówka

$$a_1 + a_1q^2 = a_1q + a_1q^3$$

$$(1 + q^2)(1 - q) = 0$$

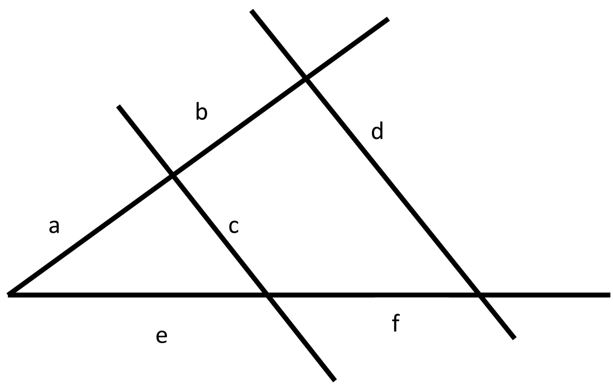
$$q = 1$$

Zatem wszystkie długości są równe.

5.2.2 Twierdzenie Talesa

ZADANIE 1.A

Ramiona kąta przecięto prostymi równoległymi – patrz rysunek poniżej. Odpowiednie odcinki mają długości: $a = 4, b = 5, c = 3$. Wyznacz długość odcinka d.



Rozwiązanie.

Korzystając z prostego twierdzenia Talesa mamy:

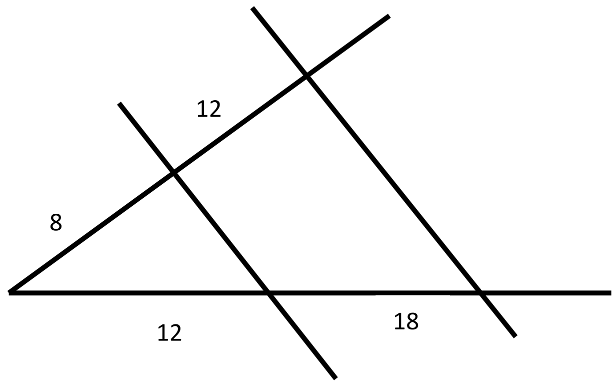
$$\frac{|a|}{|a| + |b|} = \frac{|c|}{|d|}$$

$$\frac{4}{9} = \frac{3}{|d|}$$

$$|d| = \frac{27}{4}$$

ZADANIE 1.B

Czy proste przecinające kąt są do siebie równoległe? Uzasadnij.



Odpowiedź/wskazówka

Zauważmy, że zachodzi związek

$$\frac{8}{20} = \frac{12}{30}$$

Zatem na podstawie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa proste są równoległe.

ZADANIE 2.A

Dany jest trójkąt ABC. Punkt D jest środkiem odcinka BC, a punkt E jest środkiem odcinka AC. Wykaż, że odcinki AB i DE są równoległe.

Rozwiązanie.

Z treści zadania wynika, że mamy następujące związki miarowe:

$$|BD| = |CD| = \frac{|BC|}{2} \text{ oraz } |AE| = |CE| = \frac{|AC|}{2}$$

Zwróćmy zatem uwagę, że

$$\frac{|CD|}{|CB|} = \frac{1}{2} \text{ oraz } \frac{|CE|}{|CA|} = \frac{1}{2}$$

Zatem

$$\frac{|CD|}{|CB|} = \frac{|CE|}{|CA|}$$

a to na podstawie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa oznacza, że odcinki AB i DE są równoległe.

ZADANIE 2.B

Dany jest trójkąt CDE. Punkt A jest środkiem odcinka CD, a punkt B jest środkiem odcinka CE. Wykaż, że odcinki AB i DE są równoległe.

Odpowiedź/wskazówka

Postępujemy analogicznie jak w zadaniu 2A.

5.2.3 Jednokładność

ZADANIE 1.A

Punkt $A = (1, 3)$. Znajdź obraz punktu A w jednokładności o środku w punkcie $S(2,4)$ i skali $k = -2$.

Rozwiązanie.

Z definicji jednokładności mamy, że obrazem punktu A w jednokładności o środku S i skali k będzie punkt A' wtedy i tylko wtedy, gdy wektor $\overrightarrow{SA'}$ jest równy iloczynowi skali podobieństwa i wektora $\overrightarrow{SA}$

$$J_S^k(A) = A' \overset{def}{\Longleftrightarrow} \overrightarrow{SA'} = k \cdot \overrightarrow{SA}$$

Niech $A' = (x', y')$. W warunkach zadania będziemy mieli wówczas:

$$[x' - 2, y' - 4] = -2 \cdot [1 - 2, 3 - 4]$$

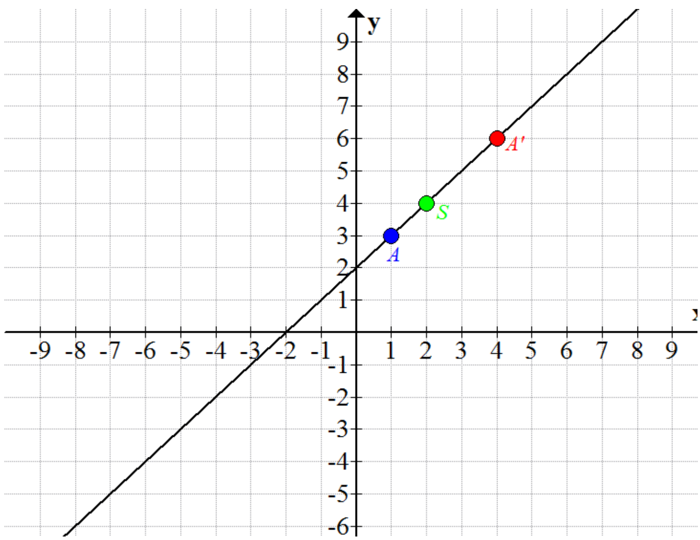
$$[x' - 2, y' - 4] = [2, 2]$$

Korzystając z definicji równości wektorów uzyskujemy

$$x' - 2 = 2 \ \wedge \ y' - 4 = 2$$

$$x' = 4 \ \wedge \ y' = 6$$

Czyli, $\quad A' = (4, 6)$



ZADANIE 1.B

Dana jest prosta $l\colon x+y+2=0$. Napisz równanie obrazu prostej l w jednokładności o środku w początku układu współrzędnych i skali $k=2$.

Odpowiedź/wskazówka

$l'\colon x+y+4=0$

Możemy obrać dwa dowolne punkty leżące na prostej l i znaleźć ich obrazy w jednokładności. Następnie napisać równanie prostej przechodzącej przez te dwa punkty.

ZADANIE 2.A

Znajdź wzór funkcji $g(x)$, której wykres powstał jako obraz wykresu funkcji $y=4x-2$ w jednokładności o środku w punkcie $S(0,0)$ i skali $k=2$.

Rozwiązanie.

Korzystamy z definicji jednokładności

$$J_S^k(A)=A' \overset{def}{\Longleftrightarrow} \overrightarrow{SA'}=k\cdot\overrightarrow{SA}$$

Jeśli odpowiednio: $A(x,y)$, $A'(x',y')$, $S(x_0,y_0)$, to zależność z definicji można zapisać w postaci:

$$x'-x_0=k(x-x_0)\wedge y'-y_0=k(y-y_0)$$

W warunkach zadania sprowadza się do układu warunków

$$x'=2x \wedge y'=2y$$

Zatem

$$x=\frac{x'}{2}\wedge y=\frac{y'}{2}$$

Prosta l jest opisana równaniem

$$y=4x-2$$

Wstawiając wcześniej uzyskane zależności uzyskujemy

$$\frac{y'}{2}=4\cdot\frac{x'}{2}-2$$

$$y' = 4x' - 4$$

Wracając do standardowych oznaczeń zapiszemy:

$$l' \colon y = 4x - 4$$

ZADANIE 2.B

Znajdź wzór funkcji $g(x)$, której wykres powstał jako obraz wykresu funkcji $y = x^2$ w jednokładności o środku w punkcie $S(1,3)$ i skali $k = 3$.

Odpowiedź/wskazówka

Postępujemy analogicznie jak w zadaniu 2A.

$$x' - 1 = 3(x - 1) \wedge y' - 3 = 3(y - 3)$$

Zatem

$$x = \frac{x' + 2}{3} \wedge y = \frac{y'}{3} + 2$$

Wstawiamy do wzoru danej funkcji uzyskujemy

$$y = x^2$$

$$\frac{y'}{3} + 2 = \left(\frac{x' + 2}{3}\right)^2$$

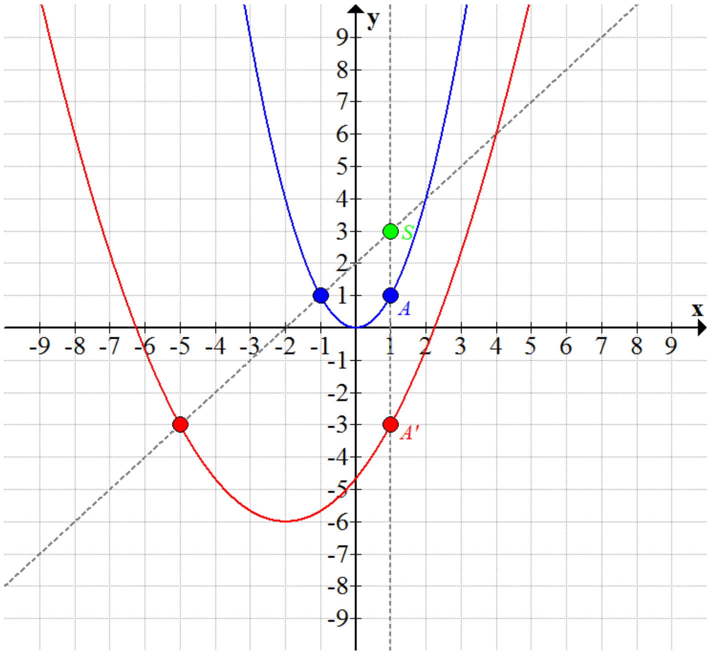
$$y' = 3 \cdot \left(\frac{x' + 2}{3}\right)^2 - 6$$

$$y' = \frac{(x')^2 + 4x' - 14}{3}$$

Wracając do standardowych oznaczeń zapiszemy:

$$l' \colon \; y = \frac{x^2 + 4x - 14}{3}$$

Interpretacja geometryczna – poniżej. Zwróćmy uwagę, że każdy punkt wykresu krzywej l' (czerwona linia) jest obrazem odpowiedniego punktu krzywej l (niebieska linia).


y
x
S
A
A'

5.2.4 Podobieństwo

ZADANIE 1.A

Długości boków prostokąta zwiększono czterokrotnie. Jak zwiększyło się pole prostokąta?

Rozwiązanie.

$P = a \cdot b$. Po zwiększeniu długości boków, pole będzie wynosiło $P' = (4a) \cdot (4b) = 16a \cdot b$

Pole prostokąta zwiększyło się szesnastokrotnie.

ZADANIE 1.B

Długości boków prostokąta zwiększono trzykrotnie. Jak zwiększył się obwód prostokąta?

Odpowiedź/wskazówka

$OB = 2 \cdot (a + b)$. Po zwiększeniu długości boków, obwód będzie wynosiło $OB' = 2 \cdot (3a + 3b) = 6(a + b)$

Obwód prostokąta zwiększył się trzykrotnie.

ZADANIE 2.A

Podaj jeden warunek na to, aby dwa trójkąty prostokątne były podobne.

Rozwiązanie.

Kąty ostre mają równe miary.

ZADANIE 2.B

Podaj jeden warunek na to, aby dwa równoległoboki były podobne.

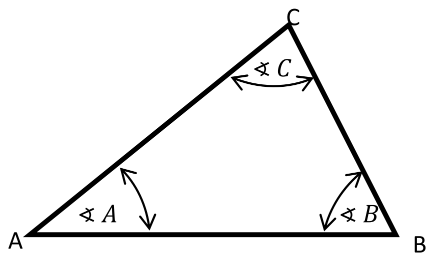
Odpowiedź/wskazówka

Np. Odpowiadające sobie kąty mają równe miary i stosunki długości boków są równe.

5.2.5 Twierdzenie sinusów i kosinusów

ZADANIE 1.A

Dany jest trójkąt ABC. Wiadomo, że $|AB| = 10$, $|AC| = 12$, $\sphericalangle A = 60^0$. Wyznacz $|BC|$.



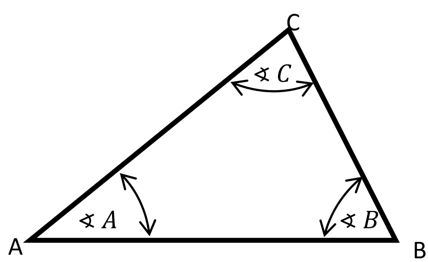
Rozwiązanie.

$$|BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2 - 2|AC||AC|\cos 60^0 = 144 + 100 - 2 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} = 124$$

$$|BC| = \sqrt{124} = 2\sqrt{31}$$

ZADANIE 1.B

Dany jest trójkąt ABC. Wiadomo, że $|AB| = 10$, $\sphericalangle C = 45^0$, $\sphericalangle B = 60^0$. Wyznacz $|AC|$.



Odpowiedź/wskazówka

Skorzystaj z twierdzenia sinusów.

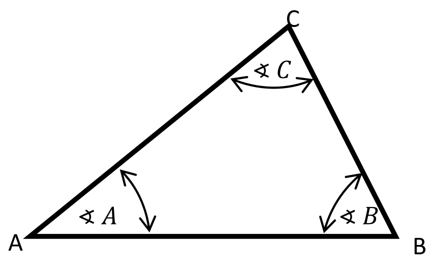
$$\frac{|AB|}{\sin \sphericalangle C} = \frac{|AC|}{\sin \sphericalangle B}$$

$$\frac{10}{\sin 45^0} = \frac{|AC|}{\sin 60^0}$$

$$|AC| = \frac{10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 5\sqrt{6}$$

ZADANIE 2.A

Dany jest trójkąt ABC. Wiadomo, że $|AB| = 8$, $|AC| = 10$, $\sphericalangle A = 15^0$. Wyznacz $|BC|$.



Rozwiązanie.

$$\cos 15^0 = \cos(45^0 - 30^0) = \cos 45^0 \cos 30^0 + \sin 45^0 \sin 30^0 =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

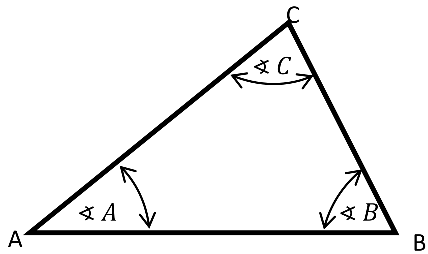
$$|BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2 - 2|AC||AC|\cos 15^0 = 64 + 100 - 2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$|BC|^2 = 164 - 40\sqrt{2} - 40\sqrt{6}$$

$$|BC| = \sqrt{164 - 40\sqrt{2} - 40\sqrt{6}} \approx 3.07$$

ZADANIE 2.B

Dany jest trójkąt ABC. Wiadomo, że $|AB| = 16$, $\sphericalangle C = 75^0$, $\sphericalangle A = 60^0$. Wyznacz długość odcinka $|AC|$.



Odpowiedź/wskazówka

Skorzystaj z twierdzenia sinusów.

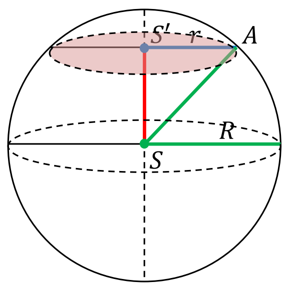
5.3 Stereometria

5.3.1 Przekroje

ZADANIE 1.A

Sferę o środku S i promieniu $R = 10$ przecięto płaszczyzną, której przekrojem jest okrąg o środku S' i promieniu $r = 6$. Oblicz długość odcinka SS'.

Rozwiązanie.



Szukaną długość $|SS'|$ znajdziemy z trójkąta prostokątnego $SS'A$. Zauważmy, że

$$|SA| = R = 10$$

$$|S'A| = r = 6$$

Zatem z twierdzenia Pitagorasa

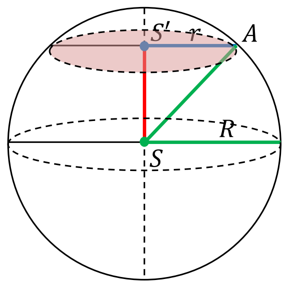
$$|SS'| = \sqrt{|SA|^2 - |S'A|^2}$$

$$|SS'| = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

ZADANIE 1.B

Kulę o środku S i promieni $R = 10$ przecięto płaszczyzną, której przekrojem jest koło o środku S' i promieniu r. Oblicz pole powierzchni przekroju, jeśli odległość w jakiej znajdują się środki $|SS'| = 4$.

Odpowiedź/wskazówka



Zwróćmy uwagę, że tym razem niezbędne jest wyznaczenie promienia przekroju r. Na tej podstawie, korzystając z wzoru na pole koła znajdziemy pole przekroju.

$$r^2 = |SA|^2 - |SS'|^2$$

$$r^2 = 84$$

Niech P - pole przekroju opisanego w zadaniu.

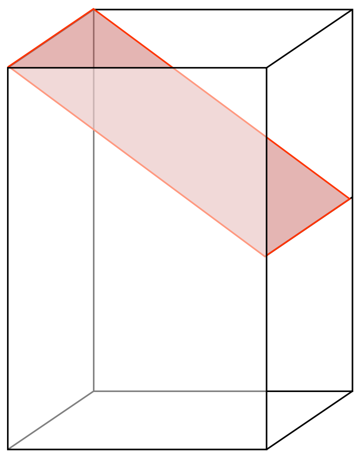
$$P = \pi r^2$$

$$P = 84\,\pi$$

ZADANIE 2.A

Prostopadłościan, który w podstawie ma kwadrat o boku długości 4 przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i środki przeciwległych krawędzi bocznych. Oblicz pole powierzchni przekroju, jeśli długość wysokości prostopadłościanu wynosi 10.

Rozwiązanie.



Zauważmy, że uzyskany przekrój jest prostokątem. Do policzenia jego pola niezbędne są długości jego boków.

$$P = a \cdot b$$

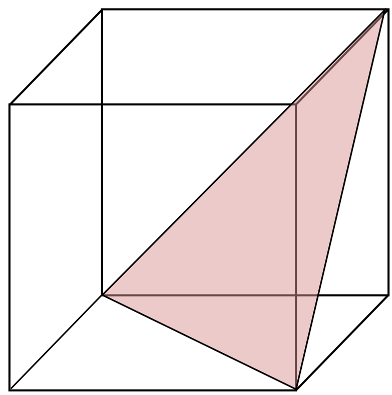
$$a = 4,\, b = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$$

$$P = 4\sqrt{41}$$

ZADANIE 2.B

Sześcian o długości krawędzi równej 8 przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i przekątną ściany bocznej. Wyznacz pole uzyskanego przekroju.

Odpowiedź/wskazówka



Zauważmy, że uzyskany przekrój jest trójkątem równobocznym o długości boku równej długości przekątnej kwadratu.

$$P = \frac{d^2\sqrt{3}}{4}$$

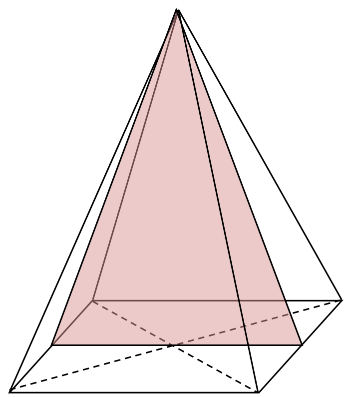
$$d = a\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

$$P = \frac{\left(8\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} = 32\sqrt{3}$$

ZADANIE 3.A

Pole przekroju ostrosłupa prawidłowego czworokątnego przeciętego płaszczyzną przechodzącą przez wysokość ściany bocznej i przez wysokość ostrosłupa wynosi 40. Oblicz objętość ostrosłupa, jeśli jego wysokość wynosi 10.

Rozwiązanie.



$$V = \frac{1}{3} P_p H$$

$P_p -$ pole podstawy – tutaj: pole kwadratu. Niech $P_p = a^2$.

H – długość wysokości ostrosłupa – tutaj: $H = 10$.

Przekrój jest trójkątem równoramiennym, którego wysokość pokrywa się z wysokością ostrosłupa. Wiadomo, że pole przekroju $P' = 40$, zatem

$$P' = \frac{1}{2} \cdot a \cdot H$$

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot 10 = 40$$

$$a = 8$$

Skoro

$$V = \frac{1}{3}a^2H$$

Więc

$$V = \frac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot 10 = \frac{640}{3}$$

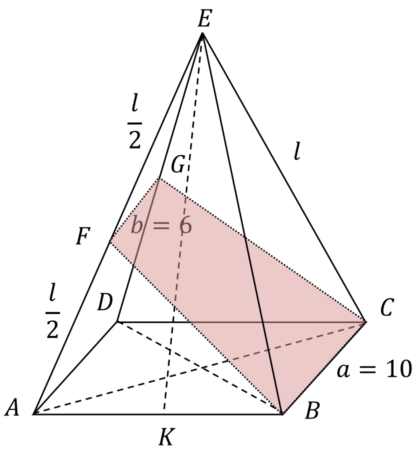
Odpowiedź

Objętość ostrosłupa wynosi $\frac{640}{3}$.

ZADANIE 3.B

Przekrojem ostrosłupa prawidłowego czworokątnego przeciętego płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i środki przeciwległych krawędzi bocznych jest trapez o podstawach długości: 10 oraz 6. Oblicz pole tego przekroju, jeśli wysokość ostrosłupa wynosi 16.

Odpowiedź/wskazówka



Pole trapezu wyraża się wzorem

$$P = \frac{(a+b)}{2} \cdot h$$

Długość krawędzi bocznej ostrosłupa $l = \sqrt{16^2 + \left(\frac{10\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 3\sqrt{34}$

Rozważmy trójkąt prostokątny AKE: $|AE| = l = 3\sqrt{34}$, $|AK| = \frac{a}{2} = 5$. Zauważmy, że

$$\cos \measuredangle A = \frac{|AK|}{|AE|} = \frac{5}{3\sqrt{34}} = \frac{5\sqrt{34}}{102}$$

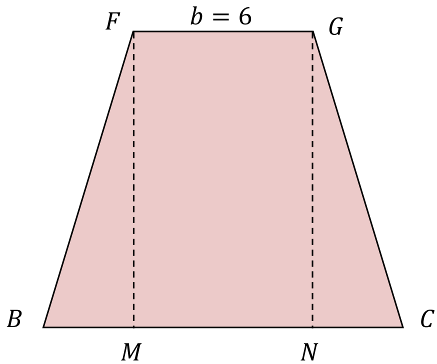
Dalej rozważmy trójkąt ABF: $|AB| = a = 10$, $|AF| = \frac{l}{2} = \frac{3\sqrt{34}}{2}$. Z twierdzenia kosinusów możemy opisać $|BF|$:

$$|BF|^2 = |AB|^2 + |AF|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AF| \cdot \cos \measuredangle A$$

$$|BF|^2 = 10^2 + \left(\frac{3\sqrt{34}}{2}\right)^2 - 2 \cdot 10 \cdot \frac{3\sqrt{34}}{2} \cdot \frac{5\sqrt{34}}{102} = \frac{253}{2}$$

$$|BF| = \sqrt{\frac{253}{2}} = \frac{\sqrt{506}}{2} \approx 11.25$$

Rozważmy teraz trapez równoramienny, którego pole mamy policzyć: $|BC| = a = 10$, $|FG| = b = 6$, $|BF| = |CG| = \frac{\sqrt{506}}{2}$. Zauważmy, że $|BM| = |NC| = \frac{10-6}{2} = 2$.



Weźmy pod uwagę trójkąt prostokątny BMF. Z twierdzenia Pitagorasa mamy:

$$|FM| = \sqrt{|BF|^2 - |BM|^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{506}}{2}\right)^2 - 2^2} = \frac{7\sqrt{10}}{2}$$

Zwróćmy uwagę, że odcinek FM jest jednocześnie wysokością naszego trapezu. Zatem $h = |FM| = \frac{7\sqrt{10}}{2}$.

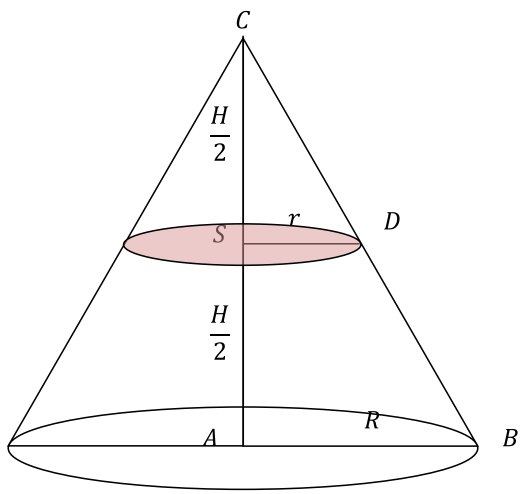
W rezultacie pole trapezu

$$P = \frac{(a+b)}{2} \cdot h = \frac{(10+6)}{2} \cdot \frac{7\sqrt{10}}{2} = 28\sqrt{10}$$

ZADANIE 4.A

Z dużego stożka, którego objętość wynosi 512, odcięto mały stożek przez przecięcie dużego stożka płaszczyzną równoległą do podstawy w połowie jego wysokości. Oblicz objętość odciętego (małego) stożka.

Rozwiązanie.



Niech

V_d - objętość dużego stożka. $V_d = \frac{1}{3}\pi R^2 H$. Tutaj: $V_d = 512$

Rozważmy trójkąt prostokątny ABC, jaki możemy uzyskać z dużego stożka jako część przekroju tego stożka płaszczyzną zawierającą jego wysokość.

Z twierdzenia Talesa mamy:

$$\frac{|CA|}{|AB|} = \frac{|CS|}{|SD|}$$

Czyli

$$\frac{H}{R} = \frac{\frac{H}{2}}{r}$$

Z czego uzyskujemy, że

$$R = 2r \Rightarrow r = \frac{R}{2}$$

Zatem zarówno wysokość jak i promień małego stożka są równe połowie długości odpowiednich wymiarów dużego stożka.

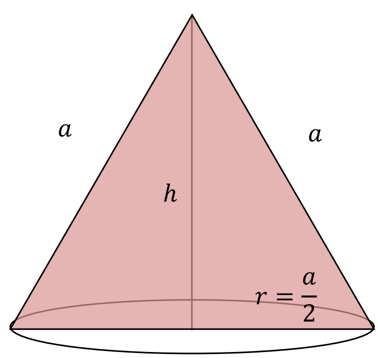
Objętość małego stożka możemy więc opisać następująco:

$$V_m = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot \frac{H}{2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{8} \cdot V_d = \frac{1}{8} \cdot 512 = 64$$

ZADANIE 4.B

Przekrojem stożka jest trójkąt równoboczny o polu równym $12\sqrt{3}$. Wyznacz objętość stożka.

Odpowiedź/wskazówka



$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

P - pole trójkąta równobocznego – tutaj: pole przekroju, $P = 12\sqrt{3}$

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Zatem

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}$$

$$a = 4\sqrt{3} \ \vee \ a = -4\sqrt{3}$$

Pamiętamy, że a oznacza długość boku trójkąta, zatem $a > 0$, więc

$$a = 4\sqrt{3}$$

Promień postawy stożka $r = \frac{a}{2} = 2\sqrt{3}$.

Do wyliczenia objętości brakuje jeszcze wysokości stożka, ale ta jest równa wysokości trójkąta równobocznego będącego rozważanym przekrojem stożka

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{4 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 6$$

Ostatecznie

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(2\sqrt{3}\right)^2 \cdot 6 = 24\pi$$

6 Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa

6.1 Elementy kombinatoryki

ZADANIE 1.A

Dany jest zbiór $X = \{a, b, c\}$.

a) Wypisz wszystkie permutacje bez powtórzeń elementów tego zbioru.
b) Stosując odpowiedni wzór oblicz <u>liczbę</u> permutacji elementów tego zbioru.

Rozwiązanie.

Przypomnijmy definicję silni oraz permutacji:

Silnia

Przyjmujemy

$$0! = 1$$

$$\bigwedge_{n \in \mathrm{N}} \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

Permutacje bez powtórzeń

Permutacją zbioru n-elementowego nazywamy każdy n-elementowy, różnowartościowy ciąg elementów tego zbioru.

<u>Liczba</u> wszystkich permutacji zbioru n-elementowego (oznaczenie P_n) wyraża się wzorem

$$P_n = n!$$

Ad. a)

Wypisujemy wszystkie permutacje zbioru X:

$$(c, b, a)$$

$$(c, a, b)$$

$$(b, c, a)$$

$$(b, a, c)$$

$$(a, b, c)$$

$$(a, c, b)$$

Ad. b)

Liczba wszystkich permutacji 3-elementowego zbioru X

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

Co oczywiście zgadza się podpunktem a).

ZADANIE 1.B

Na regale ustawiamy 8 różnych książek. Wśród nich mamy 6 części „Władcy pierścieni". Na ile sposobów możemy rozmieścić książki na regale tak, aby wszystkie części „Władcy pierścieni" znajdowały się obok siebie (w dowolnej kolejności)?

Rozwiązanie.

Jednym ze sposobów rozwiązania tego zadania jest skorzystanie z permutacji.

Zauważmy, że skoro mamy wszystkie części „Władcy pierścieni" mają znajdować się obok siebie, to możemy je potraktować umownie jako jedną „dużą książkę". Oprócz tego mamy jeszcze 2 woluminy. Zatem rozmieszczamy na półce umownie 3 książki. Liczba możliwych rozmieszczeń równa się liczbie wszystkich permutacji zbioru 3-elementowego P_3.

Jednocześnie z treści zadania wynika, że poszczególne części powieści Tolkiena nie muszą być uporządkowane. Zatem liczba wszystkich możliwych rozmieszczeń „Władcy pierścieni" jest równa liczbie permutacji zbioru 6-elementowego P_6.

Przy każdej ustalonej lokalizacji „Władcy pierścieni” względem pozostałych dwóch książek (których jest P_3) poszczególne części możemy permutować między sobą na P_6 sposobów. Zatem liczba wszystkich możliwych rozmieszczeń wszystkich książek na półce zgodnie z opisem podanym w zadaniu będzie równa iloczynowi:

$$P_3 \cdot P_6$$

Zatem uzyskujemy

$$P_3 \cdot P_6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 6 \cdot 720 = 4320$$

Odpowiedź:

Zgodnie z opisem podanym w zadaniu książki możemy rozmieścić na 4320 sposobów.

ZADANIE 1.C

Ile różnych wyrazów (mających sens albo nie) możemy uzyskać przestawiając litery w wyrazie KOMBINATORYKA?

Odpowiedź/wskazówka

$$\frac{13!}{2! \cdot 2! \cdot 2!}$$

Zauważmy, że gdyby wszystkie litery w podanym wyrazie były różne, to liczba wyrazów (mających sens albo nie) jakie moglibyśmy wtedy utworzyć byłaby równa P_{13}. W naszym przypadku niektóre litery się powtarzają, więc zamiana miejscami takich liter NIE skutkuje powstaniem nowego wyrazu. Stąd pierwotną liczbę wyrazów (P_{13}) musimy dzielić przez liczbę permutacji dla każdej powtarzającej się litery P_k, gdzie k to liczba powtórzeń danej litery.

ZADANIE 2.A

Dany jest zbiór $X = \{a, b, c\}$.

a) Wypisz wszystkie kombinacje 2-elementowe bez powtórzeń elementów tego zbioru.

b) Stosując odpowiedni wzór oblicz liczbę kombinacji 2-elementowych elementów tego zbioru.

Rozwiązanie.

Przypomnijmy definicję:

Kombinacje bez powtórzeń

Kombinacją k-elementową zbioru n-elementowego gdzie $k \leq n$ nazywamy każdy k-elementowy podzbiór tego zbioru.

Liczba wszystkich k-elementowych kombinacji zbioru n-elemntowego (oznaczenie: C_n^k) wyraża się wzorem

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} \overset{ozn}{=} \binom{n}{k}$$

Ad. a) Wypisujemy wszystkie kombinacje 2-elementowe bez powtórzeń elementów zbioru X:

$$\{\, a, b\}$$

$$\{\, a, c\}$$

$$\{\, b, c\}$$

Ad. b) Liczba wszystkich kombinacji 3-elementowych bez powtórzeń elementów zbioru X:

$$C_3^2 = \binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)!\cdot 2!} = \frac{3!}{1!\cdot 2!} = \frac{2!\cdot 3}{1!\cdot 2!} = 3$$

Co oczywiście zgadza się podpunktem a).

ZADANIE 2.B

Na ile sposobów możemy skreślić „szóstkę” w Dużym Lotku?

Rozwiązanie.

Zwróćmy uwagę, że w czasie losowań w Dużym Lotku:

- Losowanych jest 6 spośród 49 kul numerowanych
- Kolejność w jakiej losowane są kule NIE ma żadnego znaczenia

Losowane są zatem 6-elementowe podzbiory zbioru 49-elementowego.

Liczba możliwych wyników takiego losowania jest zatem równa liczbie kombinacji 6-elementowych zbioru 49-elementowego

$$C_{49}^{6} = \binom{49}{6} = \frac{49!}{(49-6)! \cdot 6!} = \frac{49!}{43! \cdot 6!} = \frac{43! \cdot 44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49}{43! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$$

Po wykonaniu obliczeń uzyskujemy, że

$$C_{49}^{6} = 13\,983\,816$$

Odpowiedź:

„Szóstkę” w Dużym Lotku możemy skreślić na $13\,983\,816$ sposobów (czyli prawie na 14 milionów sposobów).

ZADANIE 3.A

Dany jest zbiór $X = \{a, b, c\}$.

a) Wypisz wszystkie 2-wyrazowe wariacje bez powtórzeń elementów tego zbioru.
b) Stosując odpowiedni wzór oblicz liczbę wariacji 2-wyrazowych elementów tego zbioru.

Rozwiązanie.

Przypomnijmy definicję:

Wariacje bez powtórzeń

> Wariacją bez powtórzeń k-wyrazową zbioru n-elementowego gdzie $k \leq n$ nazywamy każdy k-wyrazowy, różnowartościowy ciąg elementów tego zbioru.

Liczba wszystkich k-wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego (oznaczenie V_n^k) wyraża się wzorem

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Zwróćmy uwagę k-wyrazowe wariacje bez powtórzeń uzyskujemy wybierając k-elementowe podzbiory a następnie permutując wybrane elementy (ustawiając je we wszystkie możliwe ciągi). Stąd też postać wzoru na ich liczbę:

$$V_n^k = C_n^k \cdot P_k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ad. a) Wypisujemy wszystkie 2-wyrazowe wariacje bez powtórzeń elementów zbioru X:

$$(a, b)$$

$$(b, a)$$

$$(a, c)$$

$$(c, a)$$

$$(b, c)$$

$$(c, b)$$

Ad. b) Liczba wszystkich 3-wyrazowych wariacji bez powtórzeń elementów zbioru X:

$$V_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

Co oczywiście zgadza się podpunktem a).

ZADANIE 3.B

Ile różnych 3-cyfrowych liczb naturalnych NIEparzystych o NIE powtarzających się cyfrach możemy uzyskać z cyfr $1, 2, 5, 6, 8$?

Odpowiedź/wskazówka

- Zbiór cyfr jakimi dysponujemy składa się z 5 elementów ($n = 5$).
- Tworzymy liczby 3-cyfrowe (kolejność cyfr jest istotna). Aby utworzona liczba była nieparzysta jej ostatnia cyfra musi być nieparzysta. Tworzone liczby są zatem postaci: ??1 lub ??5

Zatem liczb powyższej postaci możemy utworzyć odpowiednio:

- ??1: V_4^2 (cyfra jedności ustalona, cyfry NIE mogą się powtarzać)
- ??5: V_4^2 (cyfra jedności ustalona, cyfry NIE mogą się powtarzać)

Niech p – liczba szukanych liczb.

$$p = 2 \cdot V_4^2 = 2 \cdot \frac{4!}{(4-2)!} = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

ZADANIE 4.A

Dany jest zbiór $X = \{a, b, c\}$.

a) Wypisz wszystkie 2-wyrazowe wariacje z powtórzeniami elementów tego zbioru.
b) Stosując odpowiedni wzór oblicz liczbę 2-wyrazowych wariacji z powtórzeniami elementów tego zbioru.

Rozwiązanie.

Przypomnijmy definicję:

Wariacje z powtórzeniami

Wariacją z powtórzeniami k-wyrazową zbioru n-elementowego nazywamy każdy k-wyrazowy ciąg elementów tego zbioru.

Liczba wszystkich k-wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru n-elementowego ($\bar{V}_n^k$) wyraża się wzorem

$$\bar{V}_n^k = n^k$$

Ad. a)

Wypisujemy wszystkie 2-wyrazowe wariacje z powtórzeniami elementów zbioru X. Znajdą się wśród nich oczywiście wszystkie 2-wyrazowe wariacje bez powtórzeń plus wariacje z powtarzającymi się wyrazami:

$$(a, b)$$

$$(b, a)$$

$$(a, c)$$

$$(c, a)$$

$$(b, c)$$

$$(c, b)$$

$$(a, a)$$

$$(b, b)$$

$$(c, c)$$

Ad. b)

Liczba wszystkich 2-wyrazowych wariacji z powtórzeniami elementów zbioru X:

$$\bar{V}_3^2 = 3^2 = 9$$

Co oczywiście zgadza się podpunktem a).

ZADANIE 4.B

W pewnym powiecie numery na tablicach rejestracyjnych są ustalane według następującego klucza: 2 początkowe znaki to EL, dalej 3 cyfry (niekoniecznie różne) i jeszcze dwie litery współczesnego podstawowego alfabetu łacińskiego (26 znaków) bez litery O. Ile różnych numerów można nadać w ten sposób?

Odpowiedź/wskazówka

Poprawne numery nadane według tego klucza to np.: EL 778KK, EL 698RW itd.

W przypadku grupy trzech cyfr mamy:

- Kolejność jest istotna
- Cyfry mogą się powtarzać (choć nie muszą)

Tworzymy zatem ciągi 3-wyrazowe ze zbioru 10-elementowego $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Ich liczba będzie więc równa liczbie 3-wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru 10-elemntowego $\bar{V}_{10}^{3}$.

Do ustalonego ciągu cyfr dobieramy jeszcze 2 znaki z alfabetu. Tutaj również:

- Kolejność znaków jest istotna
- Litery mogą się powtarzać (choć nie muszą)

Tworzymy zatem ciągi 2-wyrazowe ze zbioru 25-elementowego {A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L,M,N,P,Q,R,S,T,U,V,W,X,Y,Z}. Ich liczba będzie więc równa liczbie 2-wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru 25-elemntowego $\bar{V}_{25}^{2}$.

Liczba różnych numerów rejestracyjnych, jakie można utworzyć według opisanego klucza jest więc równa iloczynowi

$$\bar{V}_{10}^{3} \cdot \bar{V}_{25}^{2} = 10^3 \cdot 25^2 = 1000 \cdot 625 = 625\,000$$

Odpowiedź:

Liczba różnych numerów rejestracyjnych, jakie można utworzyć według opisanego klucza jest równa $625\,000$.

6.2 Elementy rachunku prawdopodobieństwa

ZADANIE 1.A

W pewnej 26-osobowej klasie nauczyciel przeprowadził kartkówkę z matematyki. Okazało się, że 10 osób uzyskało wynik negatywny, zaś pozostałe osoby – wynik pozytywny. Losujemy 3 spośród tych kartkówek. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na wylosowaniu dwóch kartkówek z wynikiem pozytywnym i jednej z wynikiem negatywnym.

Rozwiązanie.

I Sposób

Ω - podzbiory 3-elementowe zbioru 26-elementowego

$$|\Omega| = C_{26}^{3} = \binom{26}{3} = \frac{26!}{3! \cdot 23!} = \frac{23! \cdot 24 \cdot 25 \cdot 26}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 23!} = 4 \cdot 25 \cdot 26 = 2600$$

A - zdarzenie polegające na wylosowaniu dwóch kartkówek z wynikiem pozytywnym i jednej z wynikiem negatywnym

$$|A| = C_{16}^{2} \cdot C_{10}^{1} = \binom{16}{2} \cdot \binom{10}{1} = \frac{16!}{2! \cdot 14!} \cdot \frac{10!}{1! \cdot 9!} = \frac{14! \cdot 15 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 14!} \cdot 10 = 1200$$

Z klasycznej definicji prawdopodobieństwa mamy:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1200}{2600} = \frac{6}{13} \approx 0.46$$

II Sposób

Szukane prawdopodobieństwo możemy również obliczyć wykorzystując działania na zdarzeniach. Wygodnie będzie wówczas przyjąć, że kolejność, w jakiej losujemy kartkówki ma dla nas znaczenie. Przyjmijmy zatem oznaczenia:

Z_i - za i-tym razem wylosowano kartkówkę z wynikiem pozytywnym („zaliczoną”), $i = 1,2,3$.

N_i - za i-tym razem wylosowano kartkówkę z wynikiem negatywnym („NIEzaliczoną”), $i = 1,2,3$.

A - zdarzenie polegającego na wylosowaniu dwóch kartkówek z wynikiem pozytywnym i jednej z wynikiem negatywnym.

$$P(A) = P(Z_1 \cap Z_2 \cap N_3 \cup\ Z_1 \cap N_2 \cap Z_3 \cup\ N_1 \cap Z_2 \cap Z_3\ )$$

Zauważmy, że zdarzenia $Z_1 \cap Z_2 \cap N_3$, $Z_1 \cap N_2 \cap Z_3$, $N_1 \cap Z_2 \cap Z_3$wykluczają się wzajemnie. Prawdopodobieństwo ich sumy równa się więc sumie ich prawdopodobieństw

$$P(A) = P(Z_1 \cap Z_2 \cap N_3) + P(Z_1 \cap N_2 \cap Z_3) + P(N_1 \cap Z_2 \cap Z_3\ )$$

Zatem

$$P(A) = \frac{16}{26} \cdot \frac{15}{25} \cdot \frac{10}{24} + \frac{16}{26} \cdot \frac{10}{25} \cdot \frac{15}{24} + \frac{10}{26} \cdot \frac{16}{25} \cdot \frac{15}{24} = \frac{6}{13} \approx 0.46$$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na wylosowaniu dwóch kartkówek z wynikiem pozytywnym i jednej z wynikiem negatywnym wynosi $\frac{6}{13}$.

ZADANIE 1.B

W pudełku znajduje się n cukierków, w tym 10 z nadzieniem czekoladowym. Losujemy 2 cukierki bez zwrotu. Ile co najwyżej może być cukierków w pudełku, aby prawdopodobieństwo, że oba wylosowane cukierki mają nadzienie czekoladowe było większe niż 25%?

Rozwiązanie.

Ω - podzbiory 2-elementowe zbioru n-elementowego

$$|\Omega| = C_n^2 = \binom{n}{2} = \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = \frac{(n-2)! \cdot (n-1) \cdot n}{2! \cdot (n-2)!} = \frac{(n-1) \cdot n}{2}$$

A - zdarzenie polegające na wylosowaniu dwóch cukierków z nadzieniem czekoladowym

$$|A| = C_{10}^2 = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2! \cdot (10-2)!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 8!} = 45$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{45}{\frac{(n-1) \cdot n}{2}} = \frac{90}{n^2 - n}$$

Z treści wynika, że $P(A) > 0.25\%$.

Zatem

$$\frac{90}{n^2 - n} > \frac{1}{4}$$

Czyli

$$\frac{n^2 - n}{90} < \frac{4}{1}$$

Stąd

$$n^2 - n - 360 < 0$$

Rozwiązując powyższą nierówność kwadratową uzyskujemy, że

$$n > \frac{1 - \sqrt{1441}}{2} \ \wedge \ n < \frac{\sqrt{1441} + 1}{2}$$

Zatem w przybliżeniu

$$n > -18.48 \ \wedge \ n < 19.48$$

n oznacza u nas liczbę cukierków w pudełku, zatem $n \in \mathbb{N}$

Dodatkowo, z treści zadania wynika, że $n \geq 10$.

Reasumując:

$$n \in \mathbb{N} \ \wedge \ 10 \leq n < 19.48$$

Czyli

$$n \in \{10, 11,12,13,14,15,16,17,18,19\}$$

Odpowiedź:

W pudełku może być co najwyżej 19 cukierków.

<u>II sposób</u>

Przyjmijmy, że kolejność w jakiej losujemy cukierki ma znaczenie.

Niech

C_i - za i-tym razem wylosowano cukierek czekoladowy, $i = 1, 2$.

$$P(A) = P(C_1 \cap C_2) = P(C_1) \cdot P(C_2|C_1) = \frac{10}{n} \cdot \frac{9}{n-1} = \frac{90}{n \cdot (n-1)}$$

Dalej – jak wyżej.

Zadanie 2.A

Rzucamy 2 razy symetryczną kostką sześcienną do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że suma uzyskanych oczek będzie równa 9, jeśli wiadomo, że za pierwszym razem wyrzucono 5 oczek.

Rozwiązanie

A – suma oczek uzyskanych w dwóch rzutach będzie równa się 9

B – w pierwszym rzucie wypadnie 5 oczek

Zwróćmy uwagę, że zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych Ω ma więc postać:

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ &(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ &(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ &(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ &(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ &(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}\end{aligned}$$

Składa się on z 36 elementów

$$|\Omega| = 36$$

Dalej

$$A = \{(3,6),(4,5),(5,4)(6,3)\}$$

$$B = \{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\}$$

$$A \cap B = \{(5,4)\}$$

Szukane prawdopodobieństwo, to prawdopodobieństwo warunkowe. Przypomnijmy zatem:

Prawdopodobieństwo warunkowe

$P(A|B)$ - prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B, gdzie $P(B) > 0$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Zatem

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{6}$$

Odpowiedź:

Szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{1}{6}$.

ZADANIE 2.B

Rzucamy 4 razy symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo uzyskania parzystej liczby reszek, jeśli wiadomo, że za drugim razem wyrzucono orła.

Odpowiedź/wskazówka

A – uzyskano dodatnią parzystą liczbę reszek

B – w drugim rzucie wypadł orzeł

Zwróćmy uwagę, że liczba wszystkich zdarzeń elementarnych związanych z tym doświadczeniem wyraża się przez liczbę 4-wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru 2-elementowego

$$|\Omega| = \bar{V}_2^4 = 2^4 = 16$$

Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych Ω ma postać:

$$\Omega = \{OOOO, ROOO, OROO, OORO, OOOR, OORR, OROR, ROOR, RORO, RROO, ORRO, ORRR, RORR, RROR, RRRO, RRRR\}$$

Rozważanym zdarzeniom losowym sprzyjają następujące zdarzenia elementarne

$A = \{OORR, OROR, ROOR, RORO, RROO, ORRO, RRRR\}$
$B = \{OOOO, ROOO, OORO, OOOR, OORR, ROOR, RORO, RORR\}$

$$A \cap B = \{OORR, ROOR, RORO\}$$

$P(A|B)$ - szukane prawdopodobieństwo uzyskania parzystej liczby reszek pod warunkiem, że za drugim razem wyrzucono orła

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{8}{16}} = \frac{3}{8}$$

Odpowiedź:

Szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{3}{8}$.

ZADANIE 3.A

W magazynie sklepu komputerowego znajduje się 12 płyt głównych firmy F1, 8 firmy F2 oraz 10 firmy F3. Badania wykazały, że wadliwość produktów wymienionych firm wynosi odpowiednio: F1 - 1%, F2 - 3%, zaś F3 to ewidentne buble o wadliwości 20%.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrana płyta NIE jest wadliwa?
b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowana płyta pochodzi z firmy F3, jeśli wiemy, że NIE jest wadliwa?

Rozwiązanie.

Przypomnijmy:

Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym

Jeżeli zdarzenia $\boldsymbol{A_1, A_2, \dots, A_n \subset \Omega}$ spełniają warunki:

i. $\boldsymbol{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n} = \Omega$ - wyczerpują wszystkie możliwości
ii. $\boldsymbol{A_i \cap A_j} = \emptyset$ gdy $\boldsymbol{i \neq j}$ - wykluczają się wzajemnie
iii. $\boldsymbol{P(A_i) > 0}$ dla każdego *i* – mają niezerowe prawdopodobieństwa

to dla dowolnego zdarzenia $\boldsymbol{B \subset \Omega}$ zachodzi równość

$$\boldsymbol{P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \dots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)}$$

O układzie zdarzeń spełniającym jednocześnie warunki i, ii, iii mówimy, że jest to tzw. zupełny układ zdarzeń.

Ad. a)

Niech odpowiednio:

D - zdarzenie polegające na wylosowaniu płyty, która jest dobra (NIE jest wadliwa)

W - zdarzenie polegające na wylosowaniu płyty, która jest wadliwa

F_1 - zdarzenie polegające na wylosowaniu płyty, która pochodzi z firmy F1

F_2 - zdarzenie polegające na wylosowaniu płyty, która pochodzi z firmy F2

F_3 - zdarzenie polegające na wylosowaniu płyty, która pochodzi z firmy F3

Zwróćmy uwagę, że w doświadczeniu opisanym w zadaniu możemy wyróżnić dwa etapy

I. Losowanie płyty z magazynu
II. Ocena, czy jest ona dobra czy wadliwa

Zauważmy, że skoro losujemy jedną płytę z magazynu, to prawdopodobieństwa, że płyta pochodzi z ustalonej firmy wynoszą odpowiednio

$$P(F_1) = \frac{12}{30}$$

$$P(F_2) = \frac{8}{30}$$

$$P(F_3) = \frac{10}{30}$$

Wobec zróżnicowanej wadliwości płyt w zależności od firmy z której pochodzą będziemy mieli odpowiednio:

$P(D|F_1) = \frac{99}{100}$ - prawdopodobieństwo, że płyta jest dobra, pod warunkiem, że pochodzi z firmy F_1

$P(W|F_1) = \frac{1}{100}$ - prawdopodobieństwo, że płyta jest wadliwa, pod warunkiem, że pochodzi z firmy F_1 (jako prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego do poprzedniego).

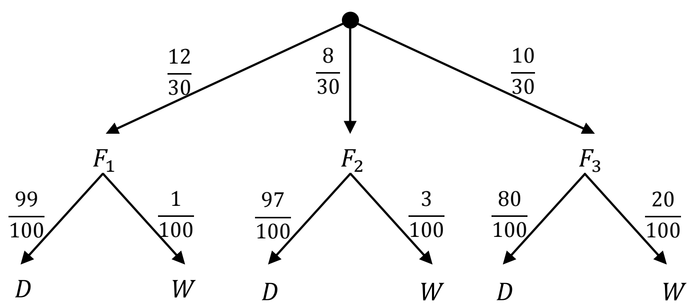
Analogicznie

$P(D|F_2) = \frac{97}{100}$, $P(W|F_2) = \frac{3}{100}$

$P(D|F_3) = \frac{80}{100}$, $P(W|F_3) = \frac{20}{100}$

Zwróćmy uwagę, że układ zdarzeń związany z pierwszym etapem doświadczenia F_1, F_2, F_3 jest to zupełny układ zdarzeń. Możemy skorzystać zatem z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym.

Dodatkowo całe doświadczenie możemy przedstawić za pomocą drzewka.



Chcemy obliczyć $P(D)$, zatem z drzewka oraz z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym mamy:

$$P(D) = P(F_1) \cdot P(D|F_1) \ + \ P(F_2) \cdot P(D|F_2) + P(F_3) \cdot P(D|F_3)$$

Czyli

$$P(D) = \frac{12}{30} \cdot \frac{99}{100} + \frac{8}{30} \cdot \frac{97}{100} + \frac{10}{30} \cdot \frac{80}{100}$$

Po wykonaniu obliczeń mamy:

$$P(D) = \frac{691}{750} \approx 0.921$$

Ad. b)

Aby formalnie zapisać szukane prawdopodobieństwo, że wylosowana płyta pochodzi z firmy F3, jeśli wiemy, że NIE jest wadliwa skorzystamy z prawdopodobieństwa warunkowego:

$$P(F_3|D)$$

Korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe (przypomniany powyżej) uzyskujemy

$$P(F_3|D) = \frac{P(F_3 \cap D)}{P(D)} = \frac{P(F_3) \cdot P(D|F_3)}{P(D)}$$

Zwróćmy uwagę, że prawdopodobieństwo z mianownika zostało policzone w podpunkcie a) z wykorzystaniem wzoru na prawdopodobieństwo całkowite. Wykorzystując zatem wcześniejsze obliczenia mamy

$$P(F_3|D) = \frac{P(F_3) \cdot P(D|F_3)}{P(D)} = \frac{\frac{10}{30} \cdot \frac{80}{100}}{\frac{691}{750}} = \frac{200}{691} \approx 0.29$$

ZADANIE 3.B

Doświadczenie przebiega według następującego schematu:

- Najpierw rzucamy monetą
- Jeśli wyrzucimy orła, to następnie rzucamy jeden raz jedną kostką do gry
- Jeśli wyrzucimy reszkę, to następnie rzucamy jeden raz dwoma kostkami do gry
- Oblicz prawdopodobieństwo uzyskania sumy oczek wynoszącej co najwyżej 5. Uwaga: w przypadku rzutu jedną kostką jako sumę oczek traktujemy wynik rzutu na tej jednej kostce.

Odpowiedź/wskazówka

Niech odpowiednio:

A - uzyskano sumę oczek wynoszącą co najwyżej 5

B - uzyskano sumę oczek wynoszącą więcej niż 5

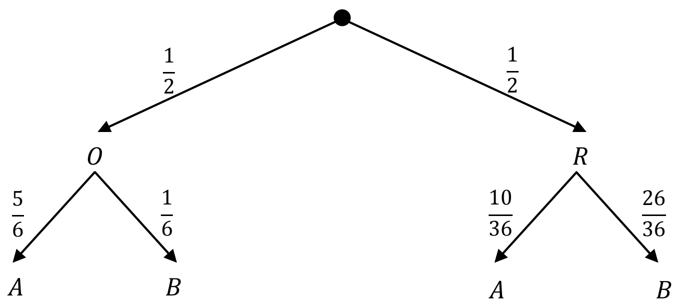
O - wyrzucono orła

R – wyrzucono reszkę

Zwróćmy uwagę, że w doświadczeniu opisanym w zadaniu możemy wyróżnić dwa etapy

I. Rzut monetą.
II. Rzut kostką/kostkami.

$A|R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(4,1)\}$



Chcemy obliczyć $P(A)$, zatem z drzewka oraz z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym mamy:

$$P(A) = P(O) \cdot P(A|O) \; + \; P(R) \cdot P(A|R)$$

Czyli

$$P(D) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{36} = \frac{5}{9} \approx 0.56$$

7 Rachunek różniczkowy

7.1 Granica funkcji

ZADANIE 1.A

Wyznacz granicę funkcji:

$$\lim_{x\to\infty}(x^2+2)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x^2+2)=$$

$$\lim_{x\to3}(x^2+2)=$$

Rozwiązanie.

$$\lim_{x\to\infty}(x^2+2)=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x^2+2)=\infty$$

$$\lim_{x\to3}(x^2+2)=11$$

ZADANIE 1.B

Wyznacz granicę funkcji $f(x)=\begin{cases}x+3 & x<0\\ x^2+2 & x\geq 0\end{cases}$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=$$

$$\lim_{x\to1}f(x)=$$

Odpowiedź/wskazówka

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=2$$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 3$

$\lim_{x \to 1} f(x) = 3$

ZADANIE 1.C

Wyznacz granicę funkcji $f(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ 2^{-x} & x \geq 1 \end{cases}$

$\lim_{x \to \infty} f(x) =$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) =$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) =$

$\lim_{x \to 2} f(x) =$

Odpowiedź/wskazówka

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

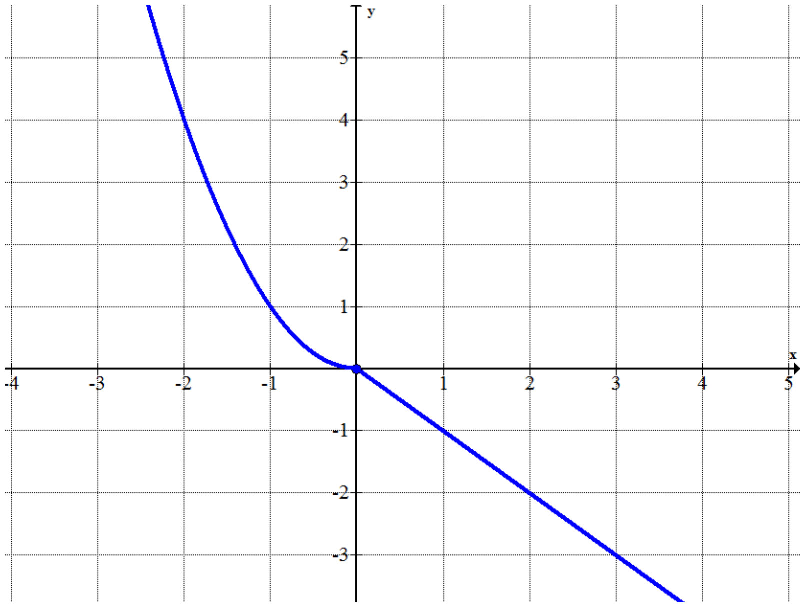
$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{1}{2}$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$

$\lim_{x \to 2} f(x) = \frac{1}{4}$

ZADANIE 1.A

Odczytaj granicę funkcji na podstawie wykresu:



$$\lim_{x\to 0^+} f(x) =$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) =$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) =$$

Rozwiązanie.

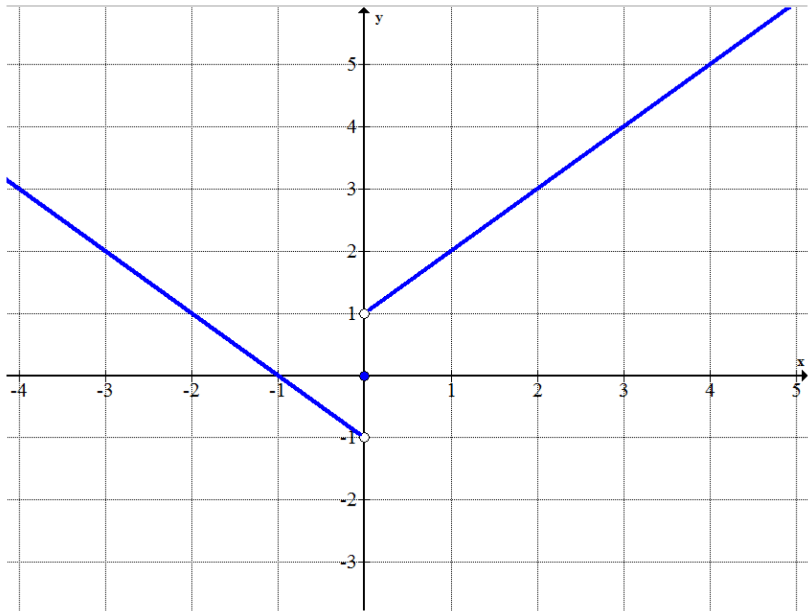
$$\lim_{n\to 0^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{n\to 0^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{n\to 1} f(x) = 1$$

ZADANIE 1.B

Odczytaj granicę funkcji na podstawie wykresu:



$\lim_{x\to 0^+} f(x) =$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) =$

$\lim_{x\to 1} f(x) =$

oraz wyznacz $f(0)$.

Odpowiedź/wskazówka

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$

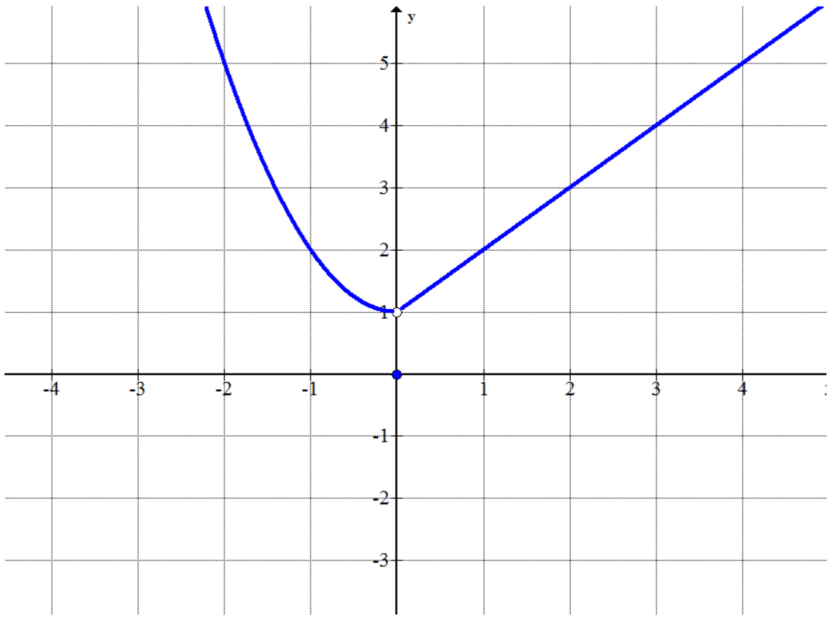
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$

$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$

$f(0) = 0.$

ZADANIE 1.C

Odczytaj granicę funkcji na podstawie wykresu:



$\lim_{x \to 0^+} f(x) =$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) =$

$\lim_{x \to -1} f(x) =$

oraz wyznacz $f(0)$.

Odpowiedź/wskazówka

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$

$\lim_{x \to -1} f(x) = 2$

$f(0) = 0.$

ZADANIE 1.A

Narysuj wykres funkcji na podstawie danych:

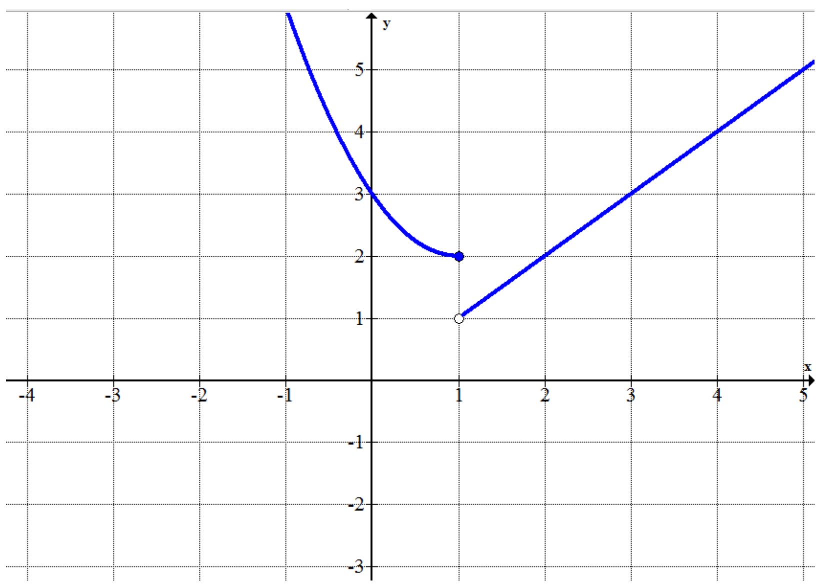
$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$

$\lim_{x \to 2} f(x) = 2$

$f(1) = 2$

Rozwiązanie.



ZADANIE 1.B

Narysuj wykres funkcji na podstawie danych:

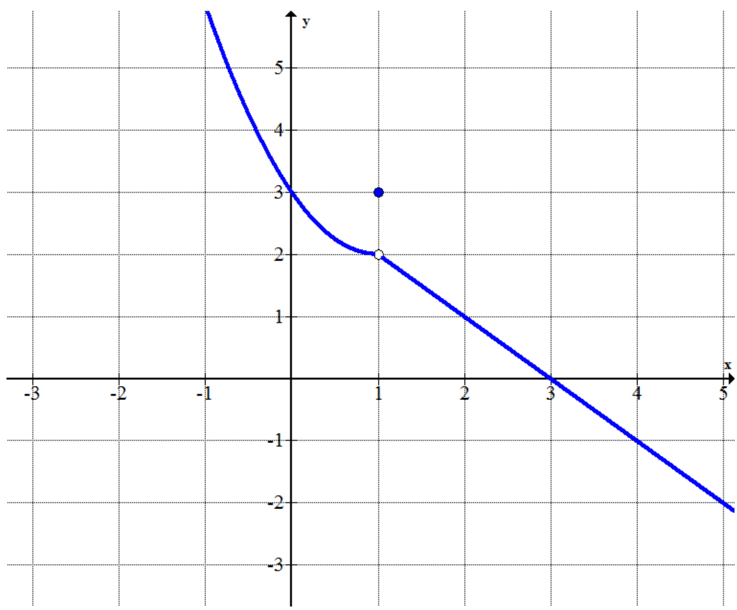
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 3$$

$f(1) = 3.$

Odpowiedź/wskazówka



ZADANIE 1.C

Narysuj wykres funkcji na podstawie danych:

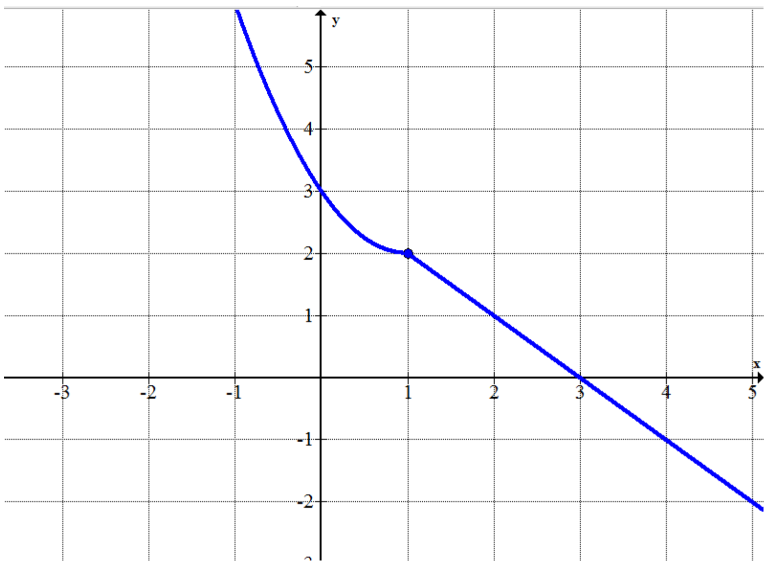
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 3$$

$f(1) = 2.$

Odpowiedź/wskazówka



7.2 Pochodna funkcji

ZADANIE 1.A

Oblicz pochodną funkcji:

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 4.$$

Rozwiązanie.

$f'(x) = 4x + 3$

ZADANIE 1.B

Oblicz pochodną funkcji:

$$f(x) = 2x^3 + x^2 + x - 4.$$

Odpowiedź/wskazówka

$f'(x) = 6x^2 + 2x + 1$

ZADANIE 1.C

Oblicz pochodną funkcji:

$$f(x) = x^{10} + x^8 + x - 1.$$

Odpowiedź/wskazówka

$f'(x) = 10x^9 + 8x^7 + 1$

ZADANIE 2.A

Oblicz pochodną funkcji:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-2}.$$

Rozwiązanie.

$f'(x) = \frac{2x-4-2x-1}{(x-2)^2} = \frac{-5}{(x-2)^2}$

ZADANIE 2.B

Oblicz pochodną funkcji:

$$f(x) = \frac{1}{x-4}.$$

Odpowiedź/wskazówka

$f'(x) = \frac{-1}{(x-4)^2}$

ZADANIE 2.C

Oblicz pochodną funkcji:

$$f(x) = \frac{x^2}{x-3}.$$

Odpowiedź/wskazówka

$f'(x) = \frac{x^2-6x}{(x-3)^2}$

7.3 Ekstrema i przedziały monotoniczność funkcji

ZADANIE 1.A

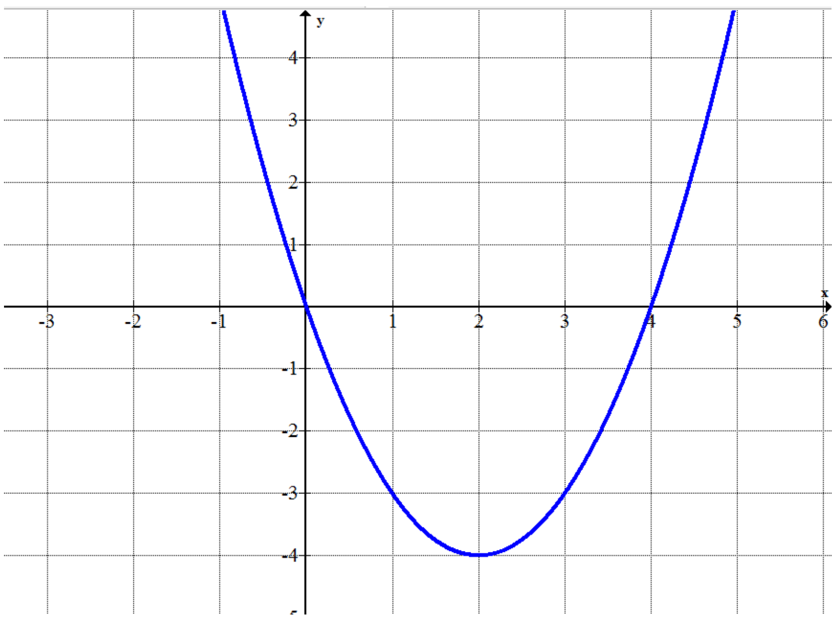
Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x.$$

Rozwiązanie.

$f'(x) = x^2 - 4$

Wykres pochodnej:



Dla $x = 0$ funkcja osiąga maksimum

Dla $x = 4$ funkcja osiąga minimum

Dla $x \in (-\infty, 0)$ funkcja jest rosnąca

Dla $x \in (0,4)$ funkcja jest malejąca

Dla $x \in (4, +\infty)$ funkcja jest rosnąca

ZADANIE 1.B

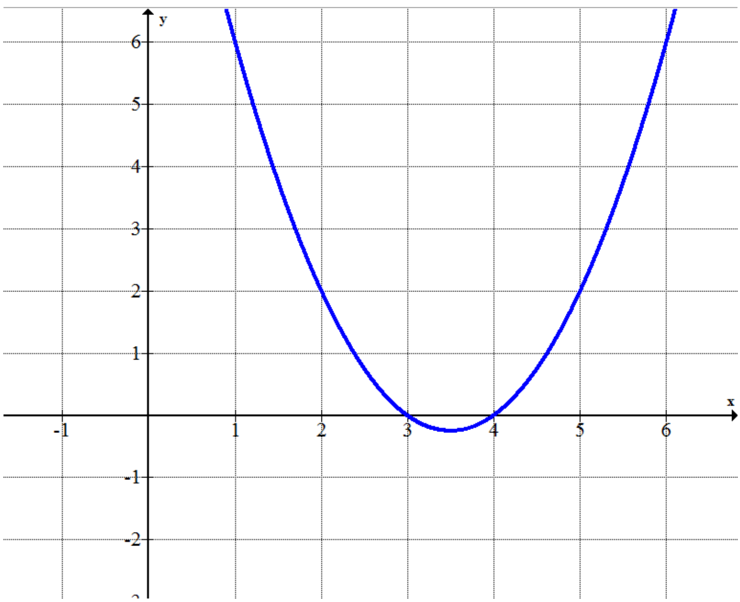
Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 12x - 1.$$

Odpowiedź/wskazówka

$f'(x) = x^2 - 7x + 12$

Wykres pochodnej:



Dla $x = 3$ funkcja osiąga maksimum

Dla $x = 4$ funkcja osiąga minimum

Dla $x \in (-\infty, 3)$ funkcja jest rosnąca

Dla $x \in (3,4)$ funkcja jest malejąca

Dla $x \in (4, +\infty)$ funkcja jest rosnąca

ZADANIE 1.C

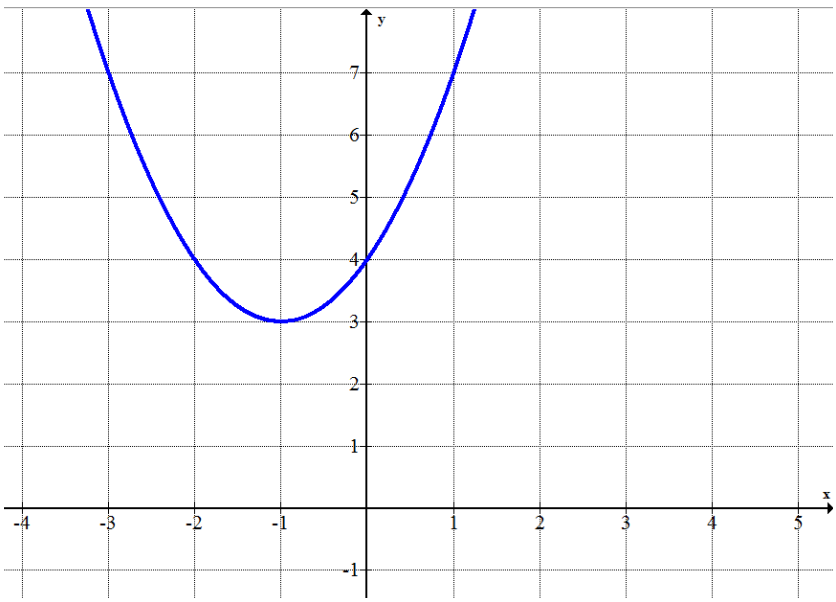
Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 4x + 2.$$

Odpowiedź/wskazówka

$f'(x) = x^2 + 2x + 4$

Wykres pochodnej:



Dla $x \in (-\infty, \infty)$ funkcja jest rosnąca

Funkcja nie posiada ekstremów.

ZADANIE 2.A

Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji:

$$f(x) = \frac{2x+4}{x-3}$$

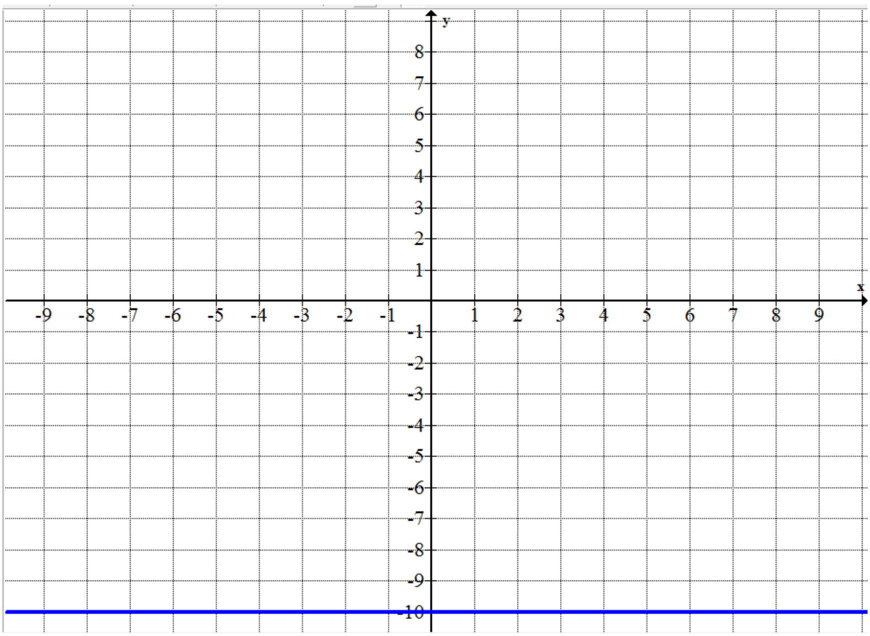
dla $x \neq 3$.

Rozwiązanie.

$D: x \neq 3$

$f'(x) = \frac{2x-6-2x-4}{(x-3)^2} = \frac{-10}{(x-3)^2}$

Wykres licznika pochodnej:



Dla $x \in (-\infty, 3)$ funkcja jest malejąca

Dla $x \in (3, +\infty)$ funkcja jest malejąca

ZADANIE 2.B

Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji:

$$f(x) = \frac{2x^2}{x-1}$$

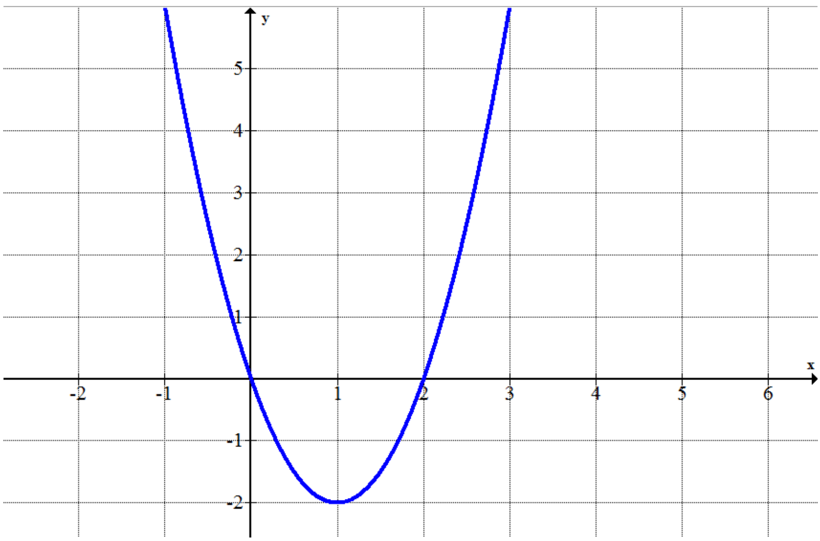
dla $x \neq 1$.

Odpowiedź/wskazówka

$D: x \neq 1$.

$f'(x) = \frac{2x^2-4x}{(x-1)^2}$

Wykres licznika pochodnej:



Dla $x = 0$ funkcja osiąga maksimum

Dla $x = 2$ funkcja osiąga minimum

Dla $x \in (-\infty, 0)$ funkcja jest rosnąca

Dla $x \in (0,1)$ funkcja jest malejąca

Dla $x \in (1,2)$ funkcja jest malejąca

Dla $x \in (2, +\infty)$ funkcja jest rosnąca

ZADANIE 2.C

Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji:

$$f(x) = \frac{-x^2}{x-3}$$

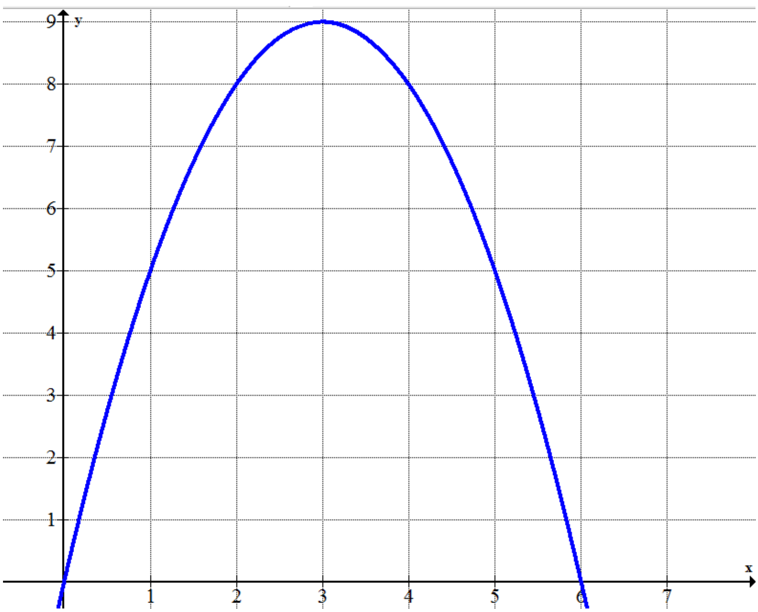
dla $x \neq 3$.

Odpowiedź/wskazówka

$D: x \neq 3.$

$f'(x) = \frac{-x^2+6x}{(x-3)^2}$

Wykres licznika pochodnej:



Dla $x = 6$ funkcja osiąga maksimum

Dla $x = 0$ funkcja osiąga minimum

Dla $x \in (-\infty, 0)$ funkcja jest malejąca

Dla $x \in (0,3)$, $x \in (3,6)$ funkcja jest rosnąca

Dla $x \in (6, +\infty)$ funkcja jest malejąca

8 Projekt -„e-matura”

8.1 Wstęp

Ponad 10 lat temu w Polsce wprowadzono system egzaminów zewnętrznych. Do dnia dzisiejszego egzaminy sprawdzane są metodą tradycyjną. Uczniowie piszą egzaminy na przygotowanych arkuszach, następnie egzaminy sprawdzane są przez egzaminatorów. Obecnie Centralna Komisja Egzaminacyjna rozpoczęła próby wdrażania tzw. e-oceniania. System e-oceniania, to taki system, który umożliwia sprawdzanie prac egzaminacyjnych przez egzaminatora nie poprzez przeglądanie papierowych dokumentów, lecz na ekranie monitora. System taki należy rozumieć, jako aplikację webową zapewniającą autoryzowany dostęp przez Internet. Dzięki takiemu rozwiązaniu możliwe jest sprawne organizowanie pracy dla egzaminatorów. E-ocenianie umożliwia przejście od punktowania przez egzaminatorów całych prac obejmujących od kilku do kilkudziesięciu zadań do specjalizacji w ocenianiu poszczególnych zadań. System e-oceniania został już na dużą skalę wprowadzony między innymi w Wielkiej Brytanii czy Stanach Zjednoczonych. Doświadczenia, jakie zdobyły w tym obszarze cztery duże komisje egzaminacyjne w tych krajach (AQA, OCR i EDEXCEL – Wielka Brytania; ETS – Stany Zjednoczone) pozwalają stwierdzić, że przejście od oceniania tradycyjnego do e-oceniania wiąże się nie tylko ze zmianą organizacji procesu przygotowania prac do oceniania, ale również poprawia jego jakość.

Projekt E-matura jest kolejnym krokiem rozwoju egzaminów zewnętrznych w stosunku do e-oceniania. Takie rozwiązania do tej pory nie funkcjonują ani w Europie, ani na Świecie na taką skalę. Przez realizację tego projektu chcemy pokazać, że pierwsze próby wdrożenia mogą funkcjonować w Polsce już za cztery lata. Decyzja będzie należała do MEN. Pierwszy krok wdrożenia e-matury jest możliwy w tzw. dodatkowym terminie matury – tzw. Próbna matura, w którym w Polsce zdaje około 2 tysięcy uczniów (rok 2011) ze wszystkich przedmiotów (około 150 z matematyki).

8.2 Czym jest e-matura?

Projekt e-matura stanowi nowoczesny i innowacyjny system egzaminacyjny w skali kraju, który pozwala rozwiązywać dotychczasowe problemy, jakie występowały podczas przeprowadzania egzaminów, w nowy sposób. System pozwala na przeprowadzanie egzaminów maturalnych z matematyki z wykorzystaniem komputerów podłączonych do Internetu. Przebieg egzaminu jest bardzo zbliżony do zwykłego egzaminu maturalnego, w którym uczniowie zasiadają o ustalonej godzinie przed komputerami i przystępują jednocześnie do pisania egzaminu. Po wystartowaniu egzaminu przez ucznia uzyskuje on dostęp do pytań egzaminacyjnych zaprezentowanych w nowoczesnej multimedialnej formie. W przypadku, gdy uczeń nie do końca rozumie, w jaki sposób dany typ zadania ma zostać rozwiązany może skorzystać z kontekstowej pomocy przypisanej do każdego pytania.

Użytkownikami systemu e-matura będą docelowo uczniowie klas maturalnych, którzy będą mogli wykorzystać umieszczane w systemie materiały i egzaminy do podnoszenia wiedzy i lepszego przygotowania do egzaminu urzędowego. System został przygotowany w taki sposób, aby mogli z niego korzystać uczniowie również z miejscowości, gdzie dostęp do Internetu jest na słabszym poziomie (częste przerwania połączenia, słaba przepustowość łączy) – poprzez wykorzystanie aplikacji typu „grupy klient". Dzięki temu każdy ze zdających egzamin na platformie e-matura ma jednakowe szanse i zdaje na takich samych zasadach bez względu, z jakiej miejscowości przystępuje do udziału w projekcie. Ponadto system zakłada wsparcie dla osób niepełnosprawnych poprzez dostosowanie interfejsu użytkownika do osób niedowidzących.

Zadania egzaminacyjne można sklasyfikować, jako tzw. zamknięte i otwarte. Zadanie zamknięte składa się z dystraktorów (wzorców błędnych odpowiedzi) i jednego lub kilku werstraktorów (wzorców prawidłowych odpowiedzi). W zadaniach otwartych samodzielnie formułuje się i zapisuje odpowiedzi. Stosowanie zadań zamkniętych jest wygodne pod kątem tworzenia systemu automatycznego oceniania, zarówno w przypadku skanowania formularzy z rozwiązaniami jak i systemów egzaminów online.

Projekt e-matura jest budowany w sposób na tyle uniwersalny, że jest w stanie obsłużyć egzaminy również z innych przedmiotów takich jak fizyka czy geografia. System może służyć również do bieżącej nauki wspierając nauczycieli i uczniów podczas całego procesu dydaktycznego. Ponieważ e-matura jest systemem informatycznym, który wykorzystując zaawansowane algorytmy sprawdzania pytań może mocno uprościć i wspomóc pracę nauczyciela, dzięki czemu uczniowie będą mogli rozwiązywać samodzielnie większą ilość zadań i na bieżąco sprawdzać swoje możliwości bez potrzeby sprawdzania wszystkich prac przez nauczyciela.

Nauczyciel ma również dostęp do raportów tworzonych automatycznie w systemie e-matura, dzięki czemu może przez cały czas śledzić postępy danego ucznia i sprawdzać, w jakich dziedzinach uczeń ma problemy i musi się jeszcze poprawić. Aplikacja umożliwia bardzo rozbudowany system raportowania. Oprócz standardowego wyniku logowane są również takie dane jak ilość wejść ucznia w dane pytanie, czas rozwiązywania danego pytania, jak często uczeń korzystał z pomocy kontekstowej podczas rozwiązywania danego pytania. Dzięki takim informacjom zarówno nauczyciele jak i osoby przygotowujące egzaminy maturalne mogą jeszcze lepiej dostosowywać układane pytania, aby zostały jak najlepiej zrozumiane przez zdających egzamin.

Projekt e-matura jest innowacyjnym podejściem do tematu egzaminowania uczniów na dużą skalę z wykorzystaniem systemu opartego o sieć Internet. Zastosowanie projektu do przeprowadzenia egzaminu maturalnego niesie za sobą pewne wymagania dotyczące daty i godziny, w której taki egzamin się odbywa. Aby zapewnić równość i jednolite zasady zdawania dla wszystkich uczestników projektu system musi umożliwiać jednoczesne przystąpienie do egzaminu przez bardzo dużą liczbę użytkowników. Aby sprostać takim wymaganiom system został zaprojektowany z wykorzystaniem rozproszonej infrastruktury zarówno od strony bazy danych jak i aplikacji udostępnianej użytkownikom.

Baza danych jest kluczowym elementem projektu, który zapewnia dostęp do tajnych aż do chwili startu egzaminu pytań oraz miejsca, w którym są odkładane udzielone przez użytkowników odpowiedzi. Baza danych została zbudowana z wykorzystaniem silnika bazy danych Microsoft SQL Server 2008 R2. Aby zapewnić odpowiednią szybkość działania został do tego celu zbudowany klaster złożony z dwóch fizycznych serwerów bazodanowych podłączonych poprzez sieć SAN do współdzielonej macierzy opartej na twardych dyskach z interfejsem SAS. Serwery bazodanowe zostały odseparowane fizycznie od sieci Internet i są dostępne tylko za pośrednictwem aplikacji udostępnianej przez serwery aplikacyjne. Zastosowanie technologii klastrowej zapewnia dużą wydajność oraz bezpieczeństwo – w przypadku fizycznej awarii jednego z serwerów drugi z powodzeniem przejmuje jego rolę i serwuje dalej usługi tak, aby użytkownik końcowy nawet się nie zorientował, że wystąpiły jakieś problemy techniczne. Ponieważ w bazie danych odkładane są wszelkie informacje o aktywności użytkownika podczas egzaminu (odpowiedzi – nawet jeśli użytkownik zmieni odpowiedź, każda udzielona przez niego odpowiedź jest oddzielnie zapisywana do późniejszej analizy, czas udzielania odpowiedzi, ilość wejść w dane pytanie, informacje o korzystaniu z kontekstowej pomocy technicznej itd.) wymagana jest duża wydajność działania silnika bazodanowego. Podczas testów projektu przeprowadzonych w kwietniu 2011, w których wzięło udział 2349 uczniów ze szkół z woj. łódzkiego udało się zmierzyć obciążenie bazy danych na poziomie około 10-15% wykorzystania sprzętu, który został zakupiony na potrzeby projektu. Na podstawie testów syntetycznych przeprowadzonych z użyciem serwerów, które przeprowadzały kontrolowane ataki DDOS na serwery bazodanowe projektu e-matura wynika, że zakupiony sprzęt powinien sprostać liczbie około 25 do 30 tysięcy (dla porównania liczba maturzystów podchodzących pierwszy raz do matury w woj. łódzkim z 2011 wynosiła 22315)[1] jednoczesnych użytkowników odwołujących się do bazy danych przez aplikację e-matura. Biorąc pod uwagę wyniki testów syntetycznych oraz wprowadzane cały czas optymalizacje w systemie zakupiony na potrzeby projektu sprzęt powinien sprostać wymaganiom przeprowadzenia egzaminu maturalnego dla wszystkich maturzystów z województwa łódzkiego. Zwiększanie liczby użytkowników będzie wymagało inwestycji w rozbudowę sprzętu.

Aplikacja e-matura jest interfejsem użytkownika, przez który uczniowie komunikują się z bazą danych pobierając pytania oraz udzielając na nie odpowiedzi. Aplikacja została zbudowane w oparciu o model tzw. grubego klienta z wykorzystaniem technologii Silverlight 4.0. Zastosowanie takiego modelu umożliwiło zbudowanie dużo bezpieczniejszej aplikacji, a także znaczące zwiększenie wygody korzystania z aplikacji przez zdających egzamin uczniów. Aplikacja jest uruchamiana z poziomu przeglądarki WWW i z punktu widzenia użytkownika cały czas działa jak strona sieci web. Jest to jednak aplikacja w modelu grubego klienta, co

[1] Dane z OKE Łódź

oznacza, że cała aplikacja jest pobierana na lokalny komputer użytkownika i działa całkowicie autonomicznie. Interfejs użytkownika jest tak samo responsywny dla użytkowników podłączonych do Internetu łączem o dużej przepustowości jak i dla tych, którzy mają dużo słabsze łącza, czego nie dałoby się osiągnąć przy wykorzystaniu standardowej strony WWW, gdyż użytkownicy ze słaby podłączeniem do Internetu dużo dłużej musieliby czekać na przeładowywanie się stron z kolejnymi pytaniami. Aplikacja e-matura niweluje ten problem, przez co znacząco zwiększa równość szans przy zdawaniu egzaminu przez wszystkich użytkowników. Aplikacja już na samym początku pobiera wszystkie pytania i odwołuje się do serwera tylko w przypadku udzielania odpowiedzi na dane pytanie. Jeśli nawet łączność z Internetem zostanie przerwana na chwilę odpowiedzi użytkownika są zapisywane w pamięci podręcznej aplikacji i gdy tylko łączność z serwerem zostaje odzyskana aplikacja wysyła wszystkie dane w tle, nie wpływając w żaden sposób na pracę użytkownika.

Środowisko fizyczne, które jest wykorzystywane do serwowania aplikacji e-matura zostało stworzone w oparciu o 4 serwery wykorzystujące system operacyjny Microsoft Windows 2008 R2. Serwerem, który serwuje aplikację dla użytkowników końcowych oraz pośredniczy w komunikacji pomiędzy aplikacją, a serwerem bazy danych jest IIS w wersji 7.5. Ponadto jest jeszcze jeden serwer pełniący rolę tzw. „load balancer'a", do którego kierowana są wszystkie odwołania użytkowników, którzy uruchamiają aplikację. Serwer ten kieruje zapytania użytkowników do serwerów udostępniających aplikację w taki sposób, aby jak najlepiej rozłożyć obciążenie pomiędzy 4 serwery aplikacyjne zapewniając w ten sposób maksymalną wydajność serwowania danych. Wykorzystanie infrastruktury rozproszonej zwiększa ponadto bezpieczeństwo korzystania z aplikacji poprzez zabezpieczenie przed awarią sprzętową. W przypadku awarii jednego z serwerów zapytania, które były do niego kierowane są przekierowywane do pozostałych serwerów, które automatycznie przejmują jego rolę.

Projekt e-matura został zbudowany w sposób innowacyjny, aby jak najlepiej spełnić wymagania stawiane przed egzaminami maturalnymi z matematyki i nie tylko. Projekt jest budowany w taki sposób, aby był jak najbardziej uniwersalny i mógł być wykorzystywany po wprowadzeniu pewnych przeróbek również w zastosowaniu do innych przedmiotów.

E-Matura jest systemem egzaminacyjnym czasu rzeczywistego pozwalająca na przeprowadzenie wybranego egzaminu dla dużej próbki uczniów w jednym czasie. Dzięki zastosowaniu nowoczesnych rozwiązań z dziedziny informatyki system pozwala na przeprowadzenie interaktywnego egzaminu dla kilkudziesięciu tysięcy osób. System został stworzony na potrzeby przeprowadzenia egzaminu maturalnego z matematyki jednak jest elastyczna architektura pozwala na dostosowanie go do każdej innej dziedziny nauki czy sztuki.

8.3 Cele projektu

Zakłada się, że celem głównym projektu jest dostarczenie innowacyjnego narzędzia służącego do dokonania zmian w metodach nauczania i uczenia się, będącego jednocześnie narzędziem pozwalającym na weryfikację zdobytej wiedzy, dzięki zastosowaniu możliwości sprawdzania poziomu zdobytej wiedzy za pośrednictwem interaktywnej platformy i zgromadzonego tam materiału jak, również statystycznej analizy zbieranych wyników.

Przy założeniu celu głównego sprecyzowane zostały następujące cele szczegółowe projektu:

- *Dostarczenie odbiorcom możliwości na wyrównania lub podniesienia poziomu posiadanej wiedzy w zakresie matematyki, jak również zweryfikowanie jej i ocenienie*

Wskaźnikiem osiągnięcia celu będzie odsetek uczniów, którzy podnieśli swój poziom posiadanej wiedzy z matematyki.

Źródłem danych będzie przeprowadzenie badań podłużnych wśród użytkowników platformy. Te same osoby podchodzić będą do egzaminu z matematyki za pośrednictwem platformy e-matura, co najmniej dwa razy. Pozwoli to porównać osiągane przez nie wyniki i stwierdzić, w jakim stopniu podniosły one swój poziom wiedzy i umiejętności z zakresu matematyki.

Wartość docelowa: Cel zostanie osiągnięty, jeżeli zostanie stwierdzone, że co najmniej 960 uczniów podniesie swój poziom wiedzy z matematyki.

- *Dostarczenie użytkownikom możliwości wykorzystania innowacyjnego narzędzia celem podniesienia atrakcyjności prowadzonych form nauczania, a tym samym przełamywania istniejących w tym zakresie stereotypów.*

Wskaźnikiem osiągniecia celu będzie stopień wykorzystania platformy e-matura zarówno przez nauczycieli jak i uczniów.

Źródłem danych będzie analiza wyników badań ankietowych przeprowadzonych w etapie testowania projektu.

Wartość docelowa: cel zostanie osiągnięty, jeżeli co najmniej 32 placówki i 64 nauczycieli zdeklaruje, że uzyskała innowacyjne możliwości wykorzystania platformy e-matura.

- *Dostarczenie użytkownikom instytucjonalnym, przy zachowaniu poufności, możliwości zbierania i analizowania danych*

Wskaźnikiem osiągnięcia celu będzie odsetek dyrektorów/nauczycieli, którzy będą wykorzystywać gromadzone po każdym egzaminie dane dotyczące osiąganych przez uczniów wyników.

Źródłem danych będzie analiza wyników badań ankietowych przeprowadzonych w gronie dyrektorów i nauczycieli ze szkół uczestniczących w projekcie.

Wartość docelowa: cel zostanie osiągnięty, jeżeli co najmniej 64 dyrektorów/nauczycieli z 32 placówek zadeklaruje chęć wykorzystywania zgromadzonego dzięki platformie materiału.

- *Otwarcie się szkół ponadgimnazjalnych na działania innowacyjne doprowadzające do udostępniania gromadzonej na uczelniach wyższych wiedzy*

Wskaźnikiem osiągnięcia celu będzie odsetek szkół zainteresowanych udziałem w projekcie.

Źródłem danych będzie analiza wyników badań ankietowych przeprowadzonych zarówno wśród szkół biorących udział w etapie testowania jak również szkół losowo wybranych, które nie wzięły udziału w tym etapie.

Wartość docelowa: cel zostanie osiągnięty, jeżeli co najmniej 32 placówki zadeklarują chęć wzięcia udziału w projekcie.

- *Zwiększenie zainteresowania uczniów szkół ponadgimnazjalnych kontynuacją kształcenia na kierunkach o kluczowym znaczeniu dla gospodarki opartej na wiedzy*

Wskaźnikiem osiągnięcia celu będzie odsetek uczniów biorących udział w badaniu ankietowym, który uzna, że wprowadzanie i używanie narzędzi typu platforma e-matura korzystnie wpływa na popularyzację przedmiotów ścisłych i tym samym na zwiększenie liczby uczniów zainteresowanych kontynuacją nauki na kierunkach o kluczowym znaczeniu dla gospodarki opartej na wiedzy.

Źródłem danych będzie analiza wyników badań ankietowych przeprowadzonych w gronie użytkowników platformy e-matura. Badania te przeprowadzone będą dla każdego uczestnika dwukrotnie: najpierw podczas badania w klasie przedmaturalnej a później w klasie maturalnej, dlatego można będzie porównać odpowiedzi przed korzystaniem z platformy jak i po e-egzaminie.

Wartość docelowa: Cel zostanie osiągnięty, jeśli 20% biorących udział w ankiecie uzna, że wprowadzanie i używanie narzędzi typu platforma e-matura korzystnie wpływa na popularyzację przedmiotów ścisłych i tym samym na zwiększenie liczby uczniów zainteresowanych kontynuacją kształcenia na kierunkach o kluczowym znaczeniu dla gospodarki opartej na wiedzy.

8.4 W jaki sposób nasz projekt może pomóc?

Elektroniczna forma przeprowadzania egzaminów rozwiązuje wiele problemów.

1. Przede wszystkim **zmniejszone zostaną koszty przeprowadzenia egzaminu** gdyż poza jednorazowym wydatkiem na sprzęt, oprogramowanie i jego utrzymanie następne egzaminy mogą się już odbywać **przy minimalnych kosztach eksploatacyjnych**. Ponadto znikają też koszty, jakie należy ponieść na opłacenie nauczycieli sprawdzających prace egzaminacyjne,
2. **Dostarczenie pytań do jednostek egzaminujących jest w pełni bezpieczne i poufne** automatyczne i działa na zasadzie szyfrowania kluczem asymetrycznym pochodzącym z certyfikatów wystawionych przez autoryzowane jednostki certyfikujące. Dzięki takiemu podejściu pytania docierają bezpiecznie do odbiorcy bez możliwości ich „wycieku”. Serwery z danymi są włączane do sieci dopiero w momencie uruchomienia e-matury. Co eliminuje wcześniejsze włamania hakerów.
3. Elektroniczna matura pozwala uzyskać **natychmiastowy wynik,** ponieważ system według zadanych parametrów dokona analizy i sprawdzenia prac dostarczając do ucznia wynik zaraz po zakończonym egzaminie dając egzaminowanej osobie o wiele większy komfort psychiczny.
4. Elektroniczna matura **znacząco ogranicza możliwość „ściągania”**.
5. Kolejnym elementem, na jaki pozwala elektroniczne egzaminowanie jest **zbieranie danych statystycznych o czasie trwania i liczbie powtórzeń poszczególnych czynności** w trakcie rozwiązywania egzaminu. Co umożliwia doskonalenie zadań ulepszanie dydaktyki, gdyż każdy nauczyciel otrzyma **dane, wskazujące w jakim obszarze uczeń ma największe braki, aby można było je jeszcze odpowiednio wcześnie skorygować**. Uzyskanie takich informacji z matur tradycyjnych nie jest możliwe. W systemie gromadzone będą wyniki umożliwiające prowadzenie badań statystycznych przez użytkowników produktu, a odbiorcom wskażą obszary, w których występują braki wiedzy potrzebnej do zdania egzaminu maturalnego z matematyki. Przeprowadzenie egzaminu maturalnego w wersji elektronicznej z wykorzystaniem budowanego systemu informatycznego daje dodatkowe możliwości zbierania i analizy danych. w przeprowadzonej w kwietniu 2011 próbnej e-maturze system egzaminacyjny zapisywał m. in. następujące informacje:
   1) Liczbę prób rozwiązania danego zadania;
   2) Sumaryczny czas spędzony przez ucznia nad danym zadaniem (razem we wszystkich próbach);
   3) Oczywiście liczba punktów uzyskanych za zadanie. w przypadku braku punktów za zadanie system rozróżniał sytuacje:

   a) uczeń próbował rozwiązywać i uzyskał 0 punktów,

   b) uczeń nie podjął próby podania odpowiedzi.

Czas spędzony przez ucznia nad danym zadaniem jak i liczbę prób rozwiązania danego zadania można traktować, obok liczby punktów uzyskanych za zadanie, jako swoiste miary trudności zadania. Patrzenie na uzyskaną przez uczniów punktację z uwzględnieniem w/w danych oraz np. informacji na temat liczby uczniów, którzy nie podjęli próby rozwiązania zadania pozwala wyciągnąć o wiele więcej wniosków niż byłoby to możliwe tylko w oparciu samą punktację.

Informacje te są cenne zarówno dla egzaminatorów jak i nauczycieli oraz uczniów.

Na podstawie przeprowadzonej krótkiej analizy nasuwają się nam następujące wnioski:

- skumulowana informacja o punktacji, czasie rozwiązania i liczbie powrotów do danego zadania mogą stanowić cenne wskazówki dla nauczyciela i ucznia. Nawet zadowalająca punktacja za zadanie przy dużej liczbie powrotów do zadania i długim czasie rozwiązania mogą świadczyć o zbyt słabym wyćwiczeniu i ugruntowaniu danej partii materiału;
- fakt braku podejmowania próby rozwiązania danego zadania np. na egzaminie maturalnym mimo zgodności treści zadania z podstawą programową powinien być sugestią dla egzaminatorów , aby być może zmienić formę zadania;
- informacje o średnim czasie rozwiązania danego zadania (szerzej – zadania danego typu) pomogą lepiej dopasować czas egzaminu do rzeczywistego poziomu trudności zadań (tzn. poziomu trudności z punktu widzenia ucznia).[2]

6. <u>wykorzystanie infrastruktury informatycznej szkół</u>

7. <u>ułatwienie dostępu osób niepełnosprawnych do egzaminów</u>

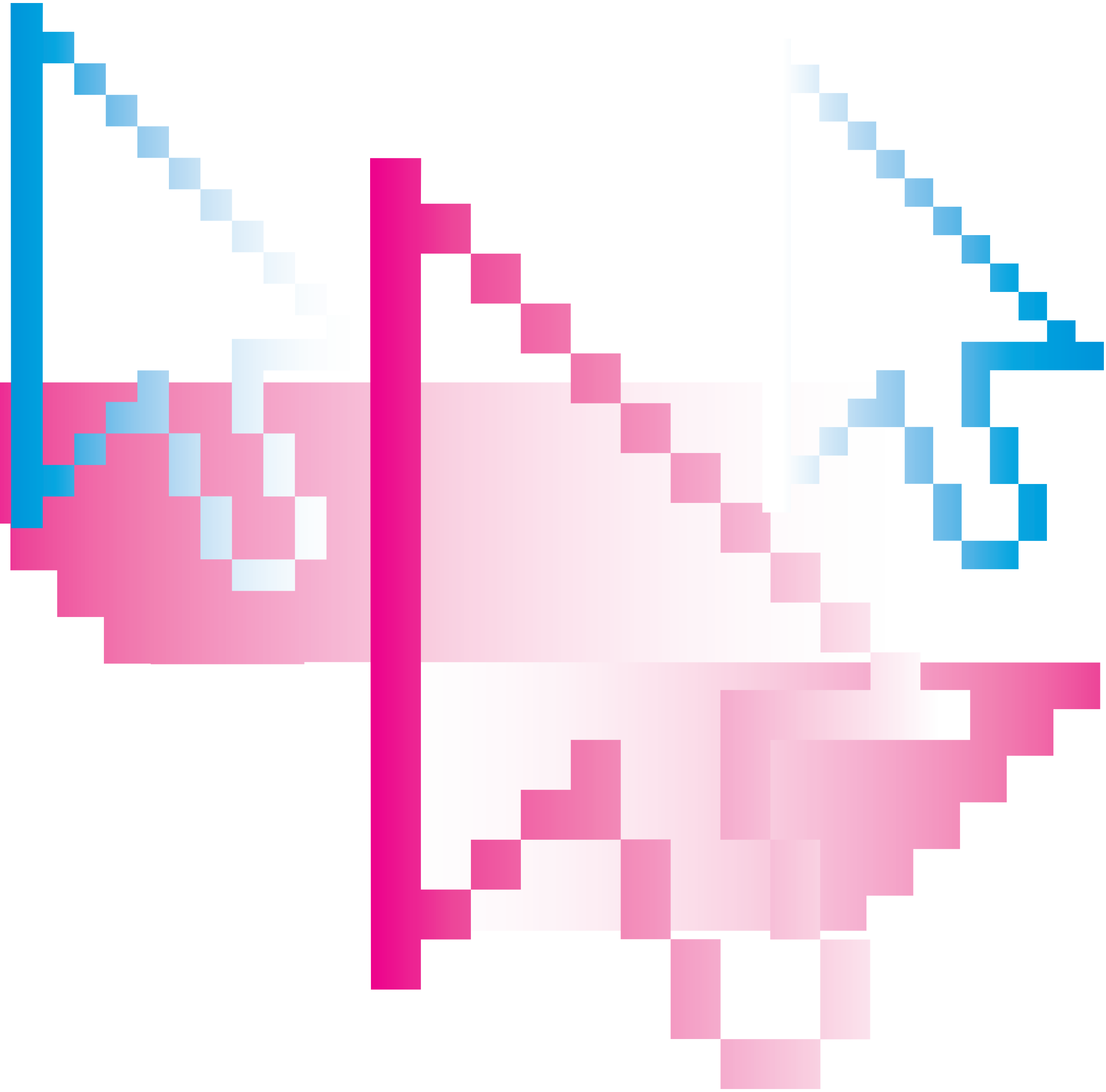
[2] Badania własne

8.5 Grupy, które mogą korzystać ze wsparcia

Założenia projektu wskazują, iż finalnie z wypracowanej, przetestowanej i udostępnionej platformy będą korzystali uczniowie klas maturalnych z terenu województwa łódzkiego przystępujący do egzaminu maturalnego z matematyki. Jak zostało wspomniane wcześniej na etapie testowania do grupy docelowej zostaną włączeni także uczniowie klas przedostatnich (drugich w przypadku liceum, trzecich w przypadku technikum)

Platforma zostanie udostępniona również uczniom z niepełnosprawnościami. Grupa docelowa to również wszyscy uczniowie szkół ponadgimnazjalnych, którzy wobec braku możliwości korzystania z zajęć dodatkowych lub też chcący na bieżąco weryfikować posiadaną wiedzę dzięki oferowanemu, innowacyjnemu wsparciu będą mogli przeciwdziałać dysproporcjom występującym w poziomie przekazywanej w szkole wiedzy jak również w nierównym dostępie do zajęć pozalekcyjnych.

Książka przygotowana w ramach projektu „E-matura", współfinansowanego przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego, Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki, Priorytet III Wysoka jakość systemu oświaty, Działanie 3.3 Poprawa jakości kształcenia, Poddziałanie 3.3.4 Modernizacja treści i metod kształcenia – projekty konkursowe.



ISBN 978-83-937551-4-1

Książka jest dystrybuowana bezpłatnie