Politechnika Łódzka

e-matura

A. Dąbrowicz-Tlałka, G. Kusztelak,
J. Stańdo, K. Szumigaj

Flesz
Teoria z matematyki

POZIOM ROZSZERZONY

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

CZŁOWIEK - NAJLEPSZA INWESTYCJA

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt jest współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Autorzy:
A. Dąbrowicz-Tlałka
G. Kusztelak
J. Stańdo
K. Szumigaj

Flesz – teoria z matematyki
zakres rozszerzony

Recenzenci:
T. Ratusiński
J. Guncaga

Książka przygotowana w ramach projektu „E-matura", współfinansowanego przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego, Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki, Priorytet III Wysoka jakość systemu oświaty, Działanie 3.3 Poprawa jakości kształcenia, Poddziałanie 3.3.4 Modernizacja treści i metod kształcenia – projekty konkursowe.

Projekt jest współfinansowany przez
Unię Europejską w ramach
Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Książka jest dystrybuowana bezpłatnie

Recenzenci:
T. Ratusiński
J. Guncaga

Autorzy:
A. Dąbrowicz-Tlałka
G. Kusztelak
J. Stańdo
K. Szumigaj

Opracowanie graficzne:
Niceday

Książka przygotowana w ramach projektu „E-matura", współfinansowanego przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego, Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki, Priorytet III Wysoka jakość systemu oświaty, Działanie 3.3 Poprawa jakości kształcenia, Poddziałanie 3.3.4 Modernizacja treści i metod kształcenia – projekty konkursowe.

Książka współfinansowana przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

ISBN: 978-83-937551-5-8

Politechnika Łódzka

Politechnika Łódzka, Biuro Projektu
Wydział Elektrotechniki, Elektroniki, Informatyki i Automatyki,
Instytut Mechatroniki i Systemów Informatycznych
ul. Stefanowskiego 18/22, pokój 122, 90-924 Łódź, budynek A12
tel. (42) 631 25 69, www.e-matura.p.lodz.pl

e-matura

Spis treści

1. Podstawa programowa dla szkół ponadgimnazjalnych – poziom rozszerzony

Zdający demonstruje poziom opanowania poniższych umiejętności, rozwiązując zadania, w których:

1. Liczby rzeczywiste

1) przedstawia liczby rzeczywiste w różnych postaciach (np. ułamka zwykłego, ułamka dziesiętnego okresowego, z użyciem symboli pierwiastków, potęg);

2) oblicza wartości wyrażeń arytmetycznych (wymiernych);

3) posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosuje prawa działań na pierwiastkach;

4) oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych;

5) wykorzystuje podstawowe własności potęg (również w zagadnieniach związanych z innymi dziedzinami wiedzy, np. fizyką, chemią, informatyką);

6) wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym;

7) oblicza błąd bezwzględny i błąd względny przybliżenia;

8) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej;

9) wykonuje obliczenia procentowe, oblicza podatki, zysk z lokat (również złożonych na procent składany i na okres krótszy niż rok).

Ponadto:

a) stosuje twierdzenie o rozkładzie liczby naturalnej na czynniki pierwsze;

wyznacza największy wspólny dzielnik i najmniejszą wspólną wielokrotność pary liczb naturalnych,

b) stosuje wzór na logarytm potęgi i wzór na zamianę podstawy logarytmu,

2. Wyrażenia algebraiczne:

1) używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$.

Ponadto:

a) posługuje się wzorem $(a - 1)(1 + a + \ldots + a^{n-1}) = a^n - 1$,

b) wykonuje dzielenie wielomianu przez dwumian $x - a$; stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x - a$,

c) stosuje twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych

3. Równania i nierówności:

1) sprawdza, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania lub nierówności;

2) wykorzystuje interpretację geometryczną układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi;

3) rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą;

4) rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą;

5) rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą;

6) korzysta z definicji pierwiastka do rozwiązywania równań typu $x^3 = - 8$;

7) korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x + 1)(x - 7) = 0$;

8) rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych, np.

$\frac{x+1}{x+3} = 2$, $\frac{x+1}{x} = 2x$.

Ponadto:

a) stosuje wzory Viète'a,

b) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe z parametrem, przeprowadza dyskusję i wyciąga z niej wnioski,

c) rozwiązuje równania i nierówności wielomianowe,

d) rozwiązuje proste równania i nierówności wymierne, np. $\frac{x+1}{x+3} > 2$; $\frac{x+1}{x} < 3$

e) rozwiązuje proste równania i nierówności z wartością bezwzględną, typu: $||x + 1| + 2| > 3$ i $|x + 1| + |x + 2| < 3$

4. Funkcje:

1) określa funkcje za pomocą wzoru, tabeli, wykresu, opisu słownego;

2) oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu. Posługuje się poznanymi metodami rozwiązywania równań do obliczenia, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje daną wartość;

3) odczytuje z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak; punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą);

4) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x + a)$, $y = f(x) + a$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$;

5) rysuje wykres funkcji liniowej, korzystając z jej wzoru;

6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie;

7) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej;

8) szkicuje wykres funkcji kwadratowej, korzystając z jej wzoru;

9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie;

10) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje);

11) wyznacza wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym;

12) wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym);

13) szkicuje wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ dla danego a, korzysta ze wzoru i wykresu tej funkcji do interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi;

14) szkicuje wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw;

15) posługuje się funkcjami wykładniczymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym.

Ponadto:

mając dany wykres funkcji $y = f(x)$ potrafi naszkicować:

a) wykres funkcji $y = |f(x)|$,

b) wykresy funkcji $y = c \cdot f(x)$, $y = f(c \cdot x)$, gdzie f jest funkcją trygonometryczną,

c) wykres będący efektem wykonania kilku operacji, na przykład $y = |f(x + 2) - 3|$,

d) wykresy funkcji logarytmicznych dla różnych podstaw,

e) rozwiązuje zadania (również umieszczone w kontekście praktycznym) z wykorzystaniem takich funkcji,

5. Ciągi liczbowe:

1) wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;

2) bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny;

3) stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego;

4) stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

Ponadto:

a) wyznacza wyrazy ciągów zdefiniowanych rekurencyjnie,

6. Trygonometria:

1) wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180°;

2) korzysta z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych (odczytanych z tablic lub obliczonych za pomocą kalkulatora);

3) oblicza miarę kąta ostrego, dla której funkcja trygonometryczna przyjmuje daną wartość (miarę dokładną albo – korzystając z tablic lub kalkulatora – przybliżoną);

4) stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi: sin2α + cos2α = 1, tgα=sinα/cosα oraz sin (90^0- α)=cos α;

5) znając wartość jednej z funkcji: sinus lub cosinus, wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego.

Ponadto:

a) stosuje miarę łukową i miarę stopniową kąta,

b) wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta, przez sprowadzenie do przypadku kąta ostrego,

c) posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych przy rozwiązywaniu nierówności typu $\sin x < a$, $\cos x > a$, $\operatorname{tg} x > a$,

d) stosuje związki: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ oraz wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów w dowodach tożsamości trygonometrycznych,

e) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne, na przykład $\sin 2x = 1$, $\sin^2 x + \cos x = 1$, $\cos 2x < \frac{1}{2}$

Planimetria:

1) stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym;

2) korzysta z własności stycznej do okręgu i własności okręgów stycznych;

3) rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów;

4) korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi.

Ponadto:

a) stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu,

b) stosuje twierdzenie o związkach miarowych między odcinkami stycznych i siecznych,

c) stosuje własności figur podobnych i jednokładnych w zadaniach, także umieszczonych w kontekście praktycznym,

d) znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów,

8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej:

1) wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej);

2) bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych;

3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt;

4) oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych;

5) wyznacza współrzędne środka odcinka;

6) oblicza odległość dwóch punktów;

7) znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych (punktu, prostej, odcinka, okręgu, trójkąta itp.) w symetrii osiowej względem osi układu współrzędnych i symetrii środkowej względem początku układu.

Ponadto:

a) interpretuje geometrycznie nierówność liniową z dwiema niewiadomymi i układy takich nierówności,

b) rozwiązuje zadania dotyczące wzajemnego położenia prostej i okręgu, oraz dwóch okręgów na płaszczyźnie kartezjańskiej,

c) oblicza odległość punktu od prostej,

d) opisuje koła za pomocą nierówności,

e) oblicza współrzędne oraz długość wektora; dodaje i odejmuje wektory oraz mnoży je przez liczbę,

f) interpretuje geometrycznie działania na wektorach,

g) stosuje wektory do rozwiązywania zadań, a także do dowodzenia własności figur,

h) stosuje wektory do opisu przesunięcia wykresu funkcji.

9. Stereometria:

1) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi, itp.), oblicza miary tych kątów;

2) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami), oblicza miary tych kątów;

3) rozpoznaje w walcach i w stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą), oblicza miary tych kątów;

4) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami;

5) określa, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną;

6) stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości.

Ponadto:

a) wyznacza przekroje wielościanów płaszczyzną,

b) stosuje twierdzenie o trzech prostych prostopadłych.

10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka:

1) oblicza średnią ważoną i odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretuje te parametry dla danych empirycznych;

2) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania;

3) oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Ponadto:

a) wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji i wariacji do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych

2. Zbiory Liczbowe

1.1 Liczby rzeczywiste

Liczby naturalne $0, 1, 2, 3, \dots.$ oznaczamy N. Do niedawna uważano je jako pojęcie pierwotne (czyli nie wymagającego określenia). Pierwsza próbę zdefiniowania liczb naturalnych podjął matematyk G.Peano w XIX wieku.

Liczby całkowite $\dots, -2, -1, \ 0, \ 1, 2, \dots$ oznaczamy Z.

Liczby wymierne to takie które można przedstawić w postaci ułamka $\frac{p}{q}$, gdzie p, q są liczbami całkowitymi i $q \neq 0$. Oznaczamy W.

Liczby niewymierne, to takie które nie dadzą się przedstawić w postaci ułamka $\frac{p}{q}$, gdzie p, q są liczbami całkowitymi i $q \neq 0$. Oznaczamy NW.

Liczby rzeczywiste to suma zbiorów liczby wymiernych i niewymiernych. Oznaczamy R.

DEFINICJA

Liczby całkowite, które są podzielne przez 2 nazywamy liczbami parzystymi.

FLESZ

Każdą liczbę parzystą możemy zapisać w postaci $2k$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

FLESZ

Uzasadnij, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb parzystych jest podzielna przez 4.

Rozwiązanie.

$2k, 2k + 2$-kolejne liczby parzyste. Zatem $4k^2 - (2k + 2)^2 = -4k - 4 = 4(-k - 1)$, dzieli się przez 4.

DEFINICJA

Liczby całkowite, które nie są podzielne przez 2 nazywamy liczbami nieparzystymi.

FLESZ

Każdą liczbę nieparzystą możemy zapisać w postaci $2k+1$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

FLESZ

Uzasadnij, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 8.

Rozwiązanie.

$2k+1, 2k+3$-kolejne liczby nieparzyste. Zatem $(2k+1)^2-(2k+3)^2=-8k-8=8(-k-1)$, dzieli się przez 8.

FLESZ

Uzasadnij, że iloczyn trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 6.

Rozwiązanie.

$k, k+1, k+2-$ kolejne liczby naturalne. Przynajmniej Jedna z tych liczb jest parzysta oraz jedna z nich jest podzielna przez 3. Stąd iloczyn tych liczb:

$$k(k+1)(k+2)$$

jest podzielny przez 6.

DEFINICJA

Liczba naturalna p większa od jedynki, której jedynymi dzielnikami są liczby 1 i p nazywamy liczbą pierwszą.

FLESZ

Liczba 1 nie jest liczbą pierwszą.

DEFINICJA

Liczbę naturalną p większą od jedynki, która nie jest liczbą pierwszą nazywamy złożoną.

FLESZ

Uzasadnij, że jeśli $a = 11b$ oraz $a, b \epsilon N$, to liczba $a + b$ jest złożona.

Rozwiązanie.

$$a + b = 11b + b = 12b$$

Zatem jest to liczba złożona.

TWIERDZENIE

Każda liczba naturalna większa od jedynki jest albo liczbą pierwszą, albo można ją rozłożyć na czynniki będące liczbami pierwszymi. Z dokładnością do kolejności czynników, istnieje dokładnie jeden taki rozkład.

FLESZ

Rozłóż liczbę 60 na czynniki pierwsze.

Rozwiązanie. $60 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5$.

FLESZ

Szukając dzielników liczby naturalnej możemy wykorzystać cechy podzielności liczb.

Liczba jest podzielna przez:

a) 2, jeżeli ostatnia cyfra liczby jest jedną z cyfr: 0, 2, 4, 6, 8;

b) 3, jeżeli suma jej cyfr jest podzielna przez 3;
c) 5, jeżeli ostatnią jej cyfrą jest jedna z cyfr: 0, 5;
d) 9, jeżeli suma jej cyfr jest podzielna przez 9.

Należy pamiętać, że wykonując działania musimy stosować reguły i prawa działań na liczbach.

FLESZ

Uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $k^3 + 5k$ jest podzielna przez 6.

Rozwiązanie. Przekształćmy wyrażenie $k^3 + 5k$ do postaci

$$k^3 + 5k = k^3 - k + 6k = k(k^2 - 1) + 6k = (k - 1)k(k + 1) + 6k.$$

Wśród kolejnych liczb całkowitych postaci $(k - 1)k(k + 1)$ przynajmniej jedna jest parzysta i jedna jest podzielna przez 3. Zatem iloczyn ten jest podzielny przez 6. Drugi składnik – liczba całkowita postaci 6k – jest również podzielna przez 6. Zatem liczba $k^3 + 5k$ jest podzielna przez 6.

FLASZ

Uzasadnij, że iloczyn trzech kolejnych liczb podzielnych przez 3 jest podzielny przez 81.

Rozwiązanie. Zapiszmy w jakiej postaci musi być iloczyn trzech kolejnych liczb podzielnych przez 3, gdzie k oznacza dowolną liczbę całkowitą

$$3k(3k + 3)(3k + 6) = 27k(k + 1)(k + 2).$$

Zauważmy teraz, że liczba postaci $k(k + 1)(k + 2)$ jest iloczynem trzech kolejnych liczb całkowitych. Zatem jedna z nich jest podzielna przez 3. Stąd wynika, że liczba postaci $27k(k + 1)(k + 2)$ jest podzielna przez 27·3, a więc 81.

WŁASNOŚCI

Reguły działań na liczbach wymiernych:

a) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}, b \neq 0, d \neq 0$
b) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - c \cdot b}{b \cdot d}, b \neq 0, d \neq 0$
c) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, b \neq 0, d \neq 0$
d) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$

WŁASNOŚCI

Prawa rozdzielności działań:

a) Prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

b) Prawo rozdzielności mnożenia względem odejmowania

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c.$$

1.2 Potęgi i pierwiastki

DEFINICJA

Dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ potęgą a^n nazywamy iloczyn n czynników równych liczbie a:

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ czynników}$, dla $n > 1$.

Dodatkowo przyjmujemy: $a^1 = a$

$$a^0 = 1 \text{ dla } a \neq 0.$$

FLESZ

Oblicz 5^3.

Rozwiązanie. $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

DEFINICJA

Dla liczby naturalnej n i dla każdej liczby $a \neq 0$ przyjmujemy, że

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

FLESZ

Oblicz 5^{-3}.

Rozwiązanie. $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$.

TWIERDZENIE

Niech $m, n \epsilon N$ oraz $a \neq 0$ i $b \neq 0$. Wtedy

a) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
b) $\frac{a^m}{a^n} = a^{n-m}$
c) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
d) $a^n \cdot b^n = (ab)^n$
e) $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Powyższe wzory zachodzą również w przypadku, gdy liczby *a* i *b* są dowolnymi liczbami dodatnimi, a liczby *m* i *n* są dowolnymi wykładnikami wymiernymi.

FLASZ

Uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $3^k + 3^{k+1} + 3^{k+2}$ jest podzielna przez 13.

Rozwiązanie. Przekształćmy wyrażenie $3^k + 3^{k+1} + 3^{k+2}$ do postaci

$$3^k + 3^{k+1} + 3^{k+2} = 3^k(1 + 3 + 3^2) = 3^k \cdot 13.$$

Zatem liczba całkowita postaci $3^k + 3^{k+1} + 3^{k+2}$ jest podzielna przez 13.

DEFINICJA

Dla dowolnej liczby $a > 0$, liczby naturalnej $n > 0$ i liczby całkowitej m przyjmujemy

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ oraz $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$.

FLESZ

$5^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{5}$, $4^{\frac{5}{3}} = \left(\sqrt[3]{4}\right)^5$.

DEFINICJA

Liczbę dodatnią a możemy przedstawić w postaci iloczynu $a = x \cdot 10^n$. Jeśli liczba x jest z przedziału $\langle 1, 10)$, a liczba n jest liczbą całkowitą, to taki zapis nazywamy notacją wykładniczą.

FLESZ

Zapisz liczbę 5470 w postaci notacji wykładniczej.

Rozwiązanie. $5470 = 5{,}47 \cdot 10^3$

DEFINICJA

Pierwiastkiem arytmetycznym stopnia n z liczby a, gdzie n jest liczbą naturalną oraz $a \geq 0$, nazywamy liczbę b, gdzie $b \geq 0$, taką że $b^n = a$. Zapisujemy to jako $\sqrt[n]{a}$.

WŁASNOŚCI

Aby obliczyć wartość wyrażenia, w którym występują pierwiastki, możemy wykorzystać wzory dla $m, n \epsilon N$ i $m, n > 0$:

a) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, a \geq 0$

b) $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}, a > 0$

oraz dla liczb $a \geq 0$ oraz $b \geq 0$

c) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

d) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0$

e) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

f) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

g) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

Dla $a \in R$:

a) $\sqrt{a^2} = |a|$

b) $\sqrt[3]{a^3} = a.$

Zatem dla dowolnej liczby rzeczywistej mamy

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & gdy \quad a \geq 0 \\ -a & gdy \quad a < 0 \end{cases}.$$

FLESZ

Przykłady zastosowania pierwiastków.

a) $\sqrt{(x-3)^2} = |x-3|,$

b) $\left(\sqrt[9]{37}\right)^9 = \left(37^{\frac{1}{9}}\right)^9 = 37,$

c) $\sqrt[3]{\frac{4}{125}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{5},$

d) $\sqrt[14]{4^2 \cdot 8^3 \cdot (0{,}25)^2 \cdot 32} = \sqrt[14]{(2^2)^2 \cdot (2^3)^3 \cdot (2^{-2})^2 \cdot 2^5} = \sqrt[14]{2^4 \cdot 2^9 \cdot 2^{-4} \cdot 2^5} = \sqrt[14]{2^{14}} = 2.$

FLESZ

Doprowadź wyrażenie $\sqrt{27}+\sqrt{48}+\sqrt{75}-6\sqrt{12}$ do najprostszej postaci.

Rozwiązanie.

$$\sqrt{27}+\sqrt{48}+\sqrt{75}-6\sqrt{12}=$$
$$\sqrt{3\cdot 9}+\sqrt{3\cdot 16}+\sqrt{3\cdot 25}-6\sqrt{3\cdot 4}=$$
$$=3\sqrt{3}+4\sqrt{3}+5\sqrt{3}-12\sqrt{3}=12\sqrt{3}-12\sqrt{3}=0.$$

DEFINICJA

Wspólna wielokrotność liczb naturalnych n i m - to każda liczba c, która dzieli się bez reszty przez n oraz przez m.

Najmniejsza wspólna wielokrotność (NWW) liczb naturalnych n i m - to najmniejsza liczba różna od zera, która jest jednocześnie wielokrotnością liczby n i liczby m.

Najmniejszą wspólną wielokrotność liczb naturalnych n i m zapisujemy

NWW(n, m).

FLESZ

Wyznacz NWW liczb 6 i 8.

Rozwiązanie. Wielokrotności liczby 6, to: 6, 12, 18, **24**, 30, 36, 42, **48**, 54...

Wielokrotności liczby 8, to: 8, 16, **24**, 32, 40, **48**, 56,...

Zatem najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb 6 i 8 jest liczba 24, co zapisujemy

NWW(6, 8) = 24.

Algorytm wyznaczania NWW:

1. Rozkładamy obie liczby na iloczyn czynników pierwszych.
2. Dla każdego czynnika pierwszego sprawdzamy, w którym rozkładzie wystąpił większą liczbę razy i wypisujemy ten czynnik taką liczbę razy.
3. Obliczamy iloczyn wszystkich wypisanych liczb i to będzie nasza szukana NWW.

FLESZ

Wyznacz najmniejszą wspólną wielokrotność liczb 9 i 12.

Rozwiązanie. $9 = 3 \cdot 3,\ \ 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$. Zatem NWW(9, 12)= $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$.

FLESZ

Wyznacz najmniejszą wspólną wielokrotność liczb 15 i 42.

Rozwiązanie. $15 = 3 \cdot 5,\ \ 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$. Zatem NWW(15, 42)= $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$.

DEFINICJA

Największy wspólny dzielnik (NWD) dwóch liczb całkowitych - to największa liczba naturalna, która dzieli obie te liczby bez reszty.

Największy wspólny dzielnik liczb n i m zapisujemy:

NWD(n, m)

Algorytm wyznaczania NWD:

1. Rozkładamy obie liczby na iloczyn czynników pierwszych.
2. Zaznaczamy wszystkie wspólne dzielniki obu liczb.
3. Obliczamy iloczyn zaznaczonych czynników i to będzie nasz szukany NWD.

FLESZ

Wyznacz największy wspólny dzielnik liczb 9 i 12.

Rozwiązanie. $9 = \mathbf{3} \cdot 3,\ \ 12 = 2 \cdot 2 \cdot \mathbf{3}$. Zatem NWD(9, 12)= 3.

FLESZ

Wyznacz największy wspólny dzielnik liczb 15 i 42.

Rozwiązanie. $15 = \mathbf{3} \cdot 5,\ \ 42 = 2 \cdot \mathbf{3} \cdot 7$. Zatem NWD(15, 42)= 3.

FLESZ

Wyznacz największy wspólny dzielnik liczb 24 i 60.

Rozwiązanie. $24 = 2 \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{3},\ \ 60 = \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{3} \cdot 5$. Zatem NWD(15, 42)= $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.

Algorytm Euklidesa wyznaczania $\boldsymbol{NWD(a, b)}$:

1. Oblicz c jako resztę z dzielenia a przez b
2. Zastąp pozycję a liczbą b, a pozycję b liczbą c
3. Jeżeli pozycja $b = 0$, to szukane $NWD = a$, w przeciwnym wypadku przejdź do 1

FLESZ

Wyznacz największy wspólny dzielnik liczb 243 i 111.

Rozwiązanie. $243 : 111 = 2$, reszty 21;

$111 : 21 = 5$, reszty 6;

$21 : 6 = 3$, reszty 3;

$6 : 3 = 2$, reszty 0.

Ostatnia niezerowa reszta wynosi 3. Zatem $NWD(243, 111) = 3$.

1.3 Procenty, punkty procentowe

Procent (od łac. „per centum", „przez sto") jest to sposób wyrażenia liczby jako ułamka o mianowniku 100, zwykle oznaczany symbolem %. Procenty umożliwiają wygodne wyrażenie danej wielkości w stosunku do innej. Z kolei punkty procentowe to różnica pomiędzy dwoma wielkościami podanymi w procentach.

Na przykład wzrost jakiejś wielkości z 10% do 20% jest równy 10 punktom procentowym.

Znak % nie jest skrótem jednostki miary. 1% z długości może być wyrażone w metrach, a 1% z masy w kilogramach. Metr i kilogram to jednostki, a % jest mnożnikiem.

DEFINICJA

Jeden procent to setna część pewnej liczby lub wielkości. Procent oznaczamy przez %.

FLESZ

Jeden procent liczby a (lub innej wielkości), czyli setna część tej liczby wynosi

a) $1\% \cdot a = \frac{1}{100} \cdot a = 0{,}01 \cdot a.$

Zatem *p* procent liczby *a* wynosi

b) $p\% \cdot a = \frac{p}{100} \cdot a.$

Jeżeli liczba *b* stanowi *p* procent liczby *a*, to

c) $b = \frac{p}{100} \cdot a.$

Z ostatniej zależności możemy wyznaczyć zarówno procent *p* $(p > 0)$

d) $p = \frac{100}{a} \cdot b$

jak i liczbę *a*

e) $a = \frac{b}{p} \cdot 100$

w zależności od rodzaju rozwiązywanego problemu.

FLESZ

Wiadomo, że 30% pewnej liczby stanowi 24. Wyznacz tę liczbę.

Rozwiązanie. $24 \cdot \frac{100\%}{30\%} = 80.$

FLESZ

Cenę za korzystanie z Internetu podwyższono o 10%, a następnie (w ramach wakacyjnej promocji) nową cenę obniżono o 10%. Czy cena promocyjna jest równa cenie początkowej (przed podwyżką)? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie. Niech x oznacza początkową cenę usługi. Zatem $1{,}1x$, to cena usługi po podwyżce. Zatem cena usługi po promocyjnej obniżce o 10% wynosi

$$0{,}9 \cdot (1{,}1x) = 0{,}99 \cdot x.$$

Zatem cena promocyjna nie jest równa cenie początkowej – stanowi 99% tej ceny. Jest więc od niej o 1% mniejsza.

DEFINICJA

Punktem procentowym nazywamy różnicę między dwiema wartościami jednej wielkości podanymi w procentach.

FLESZ

W lutym kredyt były oprocentowany 6% a w marcu 7,2%. O ile punktów procentowych wzrosło oprocentowanie kredytu?

Rozwiązanie. $7{,}2 - 6{,}0 = 1{,}2$. Oprocentowanie kredytu wzrosło o jeden i dwie dziesiąte punktu procentowego.

1.4 Wartość bezwzględna

DEFINICJA

Liczbę $|a|$ zdefiniowaną wzorem

$$|a| = \begin{cases} a & \text{gdy} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{gdy} \quad a < 0 \end{cases}.$$

nazywamy wartością bezwzględną liczby *a*.

FLESZ

Oblicz: $|x^2 + 3| = \cdots, |-x^4 - 4| = \ldots..$

Rozwiązanie. $|x^2 + 3| = x^2 + 3, |-x^4 - 4| = x^4 + 4$

WŁASNOŚCI

a) Wartość bezwzględna liczby *a* jest równa odległości tej liczby od 0 na osi liczbowej. Z kolei, gdy weźmiemy pod uwagę dwie dowolne liczby a i b, to odległość na osi liczbowej między tymi liczbami jest równa
$$|a - b|.$$
b) Zauważmy również, że odległość między liczbami *a* i *b* jest taka sama jak między *b* i *a*, zatem
$$|a - b| = |b - a|.$$

WŁASNOŚCI

Zachodzą również następujące własności wartości bezwzględnej dla $a, b \in R$.

a) $|a| \geq 0$
b) $|-a| = |a|$
c) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
d) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$
e) $|a + b| \leq |a| + |b|$

FLESZ

Z własności wartości bezwzględnej mamy:

a) $|x^3 + 4x - 7| \geq 0$ dla każdego $x \epsilon R$
b) $|-x + 3| = |x - 3|$
c) $|(x^3 + 2x) \cdot (3x + 4)| = |x^3 + 2x| \cdot |3x + 4|$
d) $\left|\frac{x+7}{x-5}\right| = \frac{|x+7|}{|x-5|}, x \neq 5$
e) $|3x + x^{10}| \leq |3x| + |x^{10}|$

WŁASNOŚCI

Rozwiązują nierówności z wartością bezwzględną możemy w niektórych przypadkach skorzystać z jej interpretacji geometrycznej. Na przykład nierówność $|x - a| < b$ oznacza, że szukamy na osi rzeczywistej takich liczb x, których odległość od *a* jest mniejsza niż b.

Dla dowolnych liczb a oraz $b \geq 0$ zachodzą wzory:

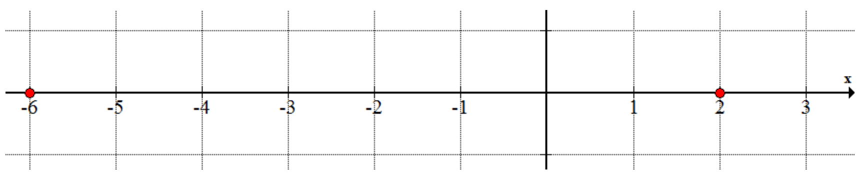
a) $|x - a| = b \Leftrightarrow x = a - b$ lub $x = a + b$
b) $|x - a| \leq b \Leftrightarrow a - b \leq x \leq a + b$
c) $|x - a| \geq b \Leftrightarrow x \leq a - b$ lub $x \geq a + b$

W szczególności

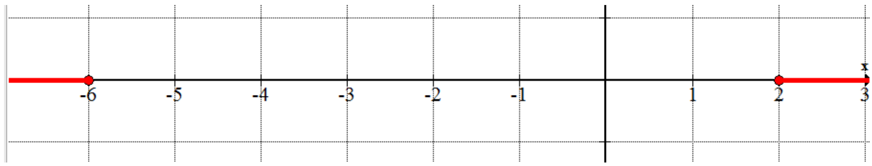
a) $|x| = b \Leftrightarrow x = -b$ lub $x = b$
b) $|x| \leq b \Leftrightarrow -b \leq x \leq b$
c) $|x| \geq b \Leftrightarrow x \leq -b$ lub $x \geq b$

FLESZ

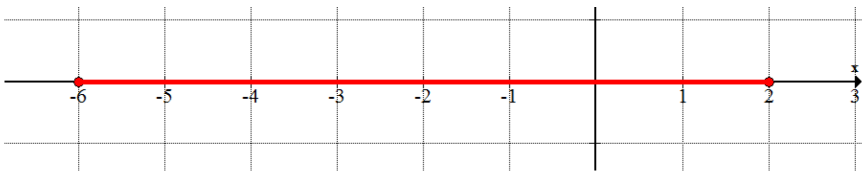
a) $|x - (-2)| = 4 \Leftrightarrow x = -2 - 4 = -6$ lub $x = -2 + 4 = 2$



b) $|x-(-2)| \geq 4 \Leftrightarrow x \leq -6 \text{ lub } x \geq 2$



c) $|x-(-2)| \leq 4 \Leftrightarrow -6 \leq x \leq 2$



1.5 Logarytmy

DEFINICJA

Niech a i b będą liczbami dodatnimi ($a > 0$ oraz $b > 0$) oraz $a \neq 1$. Logarytmem liczby b przy podstawie a nazywamy wykładnik potęgi, do której należy podnieść podstawę a, aby otrzymać liczbę logarytmowaną b. Czyli

$\log_a b = x$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a^x = b$.

Logarytmy o podstawie *10* nazywamy logarytmem dziesiętnym. Zgodnie z umową podstawę 10 zwykle się w zapisach pomija. Na przykład $\log_{10} 7 = \log 7$.

FLESZ

$\log_2 8 = 3$, ponieważ $2^3 = 8$.

WŁASNOŚCI

Jeżeli *a*, *b*, x i y są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, to

a) $\log_a\ a = 1$
b) $a^{\log_a b} = b$
c) $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
d) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
e) $\log_a x^w = w \log_a x$, gdzie $w \in R$
f) $\log_{a^w} x = \frac{1}{w} \log_a x$, gdzie $w \in R \backslash \{0\}$

FLESZ

a) $\log_4\ 4 = 1$
b) $5^{\log_5 8} = 8$
c) $\log_3(7 \cdot 5) = \log_3 7 + \log_3 5$
d) $\log_3 \frac{4}{7} = \log_3 4 - \log_3 7$
e) $\log_4 5^3 = 3 \log_4 5$

TWIERDZENIE

Jeżeli a, b, c i x są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, $b \neq 1$, $c \neq 0$ to

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

FLESZ

Zamień $\log_6 5$ na logarytmy o podstawie 8.

Rozwiązanie. $\log_6 5 = \frac{\log_8 5}{\log_8 6}$

TWIERDZENIE

Jeżeli a, b i x są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, $b \neq 1$, to

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

FLESZ

$\log_5 9 = \frac{1}{\log_9 5}$

FLESZ

Wiedząc, że $\log_5 4 = a, \log_5 3 = b$, oblicz $\log_{25} 12$.

Rozwiązanie.

$\log_{25} 12 = \log_{5^2}(3 \cdot 4) = \frac{1}{2} \cdot \log_5(3 \cdot 4) = \frac{1}{2} \cdot (\log_5 3 + \log_5 4) = \frac{1}{2}(a + b).$

1.6 Wyrażenia algebraiczne

Sprawne przekształcanie i posługiwanie się wyrażeniami algebraicznymi stanowi podstawę do rozwiązywania równań, nierówności oraz bardziej skomplikowanych zadań z różnych działów matematyki.

Jeżeli mamy obliczyć wartość wyrażenia algebraicznego, gdy podane są konkretne wartości liczbowe, możemy wykonać wszystkie obliczenia wstawiając te wartości lub doprowadzić wyrażenie algebraiczne do najprostszej postaci i dopiero na końcu podstawić te wartości do wzoru.

DEFINICJA

Wyrażenie algebraiczne to wynik działań arytmetycznych zapisanych za pomocą cyfr i liter.

WŁASNOŚCI

WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA

a) Kwadrat sumy: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
b) Kwadrat różnicy: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
c) Różnica kwadratów: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
d) Sześcian sumy: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
e) Sześcian różnicy: $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
f) Suma sześcianów: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
g) Różnica sześcianów: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

FLESZ

Uzasadnij, że liczba $3^{18} - 2^{18}$ jest podzielna przez 5, 7 oraz 19.

Rozwiązanie. Korzystając ze wzorów na różnicę sześcianów i różnicę kwadratów przekształćmy wyrażenie $3^{18} - 2^{18}$ do postaci

$$3^{18} - 2^{18} = (3^6)^3 - (2^6)^3 = (3^6 - 2^6)(3^{12} + 6^6 + 2^{12}) =$$
$$= ((3^3)^2 - (2^3)^2)(3^{12} + 6^6 + 2^{12}) =$$
$$= (3^3 - 2^3)(3^3 + 2^3)(3^{12} + 6^6 + 2^{12}) = 19 \cdot 35 \cdot (3^{12} + 6^6 + 2^{12}) =$$
$$= 19 \cdot 5 \cdot 7 \cdot (3^{12} + 6^6 + 2^{12}).$$

Zatem liczba postaci $3^{18} - 2^{18}$ jest podzielna przez 5, 7 oraz 19.

2 Funkcje

2.1 Ogólne pojęcie funkcji i jej własności

DEFINICJA

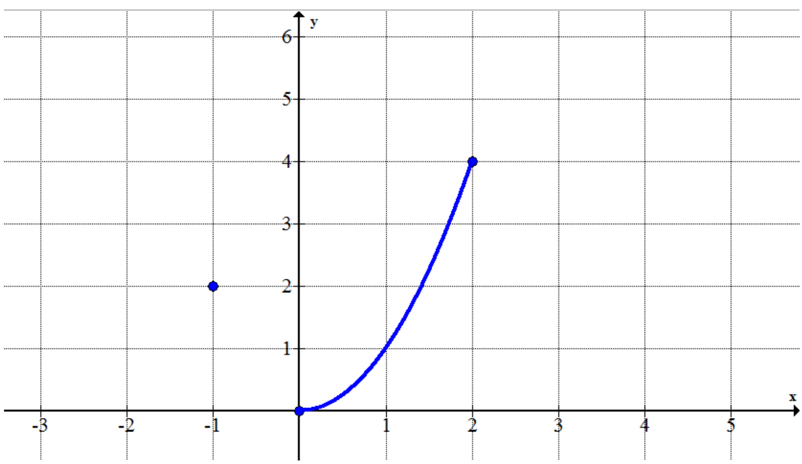
Funkcją f ze zbioru X w zbiór Y nazywamy przyporządkowanie, które każdemu elementowi $x \in X$ przyporządkowuje dokładnie jeden element $y \in Y$. Zbiór X nazywamy dziedziną funkcji *f*, a jego elementy argumentami funkcji *f*.

Używamy zapisu: $f: X \to Y$, a w przypadku, gdy chcemy określić wartość y, którą przyjmuje funkcja f dla argumentu x, $y = f(x)$.

Gdy określamy dziedzinę funkcji danej wzorem przyjmujemy, że jest to zbiór tych wszystkich argumentów, dla których wzór ma sens. Oczywiście w określonych warunkach może być wyraźnie zaznaczone, że dziedzina rozpatrywanej w danym przypadku funkcji jest inna, na przykład możemy rozważać własności funkcji $y = x^2$ tylko dla $x \in \langle 0,1 \rangle$. Dziedzinę funkcji f będziemy oznaczali D_f.

FLESZ

Określ dziedzinę funkcji przedstawionej na wykresie.



Rozwiązanie. Dziedziną funkcji jest przedział $\{-1\} \cup \langle 0; 2 \rangle$.

FLESZ

Określając dziedzinę funkcji podanej wzorem pamiętajmy o tym, że na przykład:

- mianownik wyrażenia nie może być równy 0;

- pod pierwiastkiem parzystego stopnia nie może być liczba ujemna;

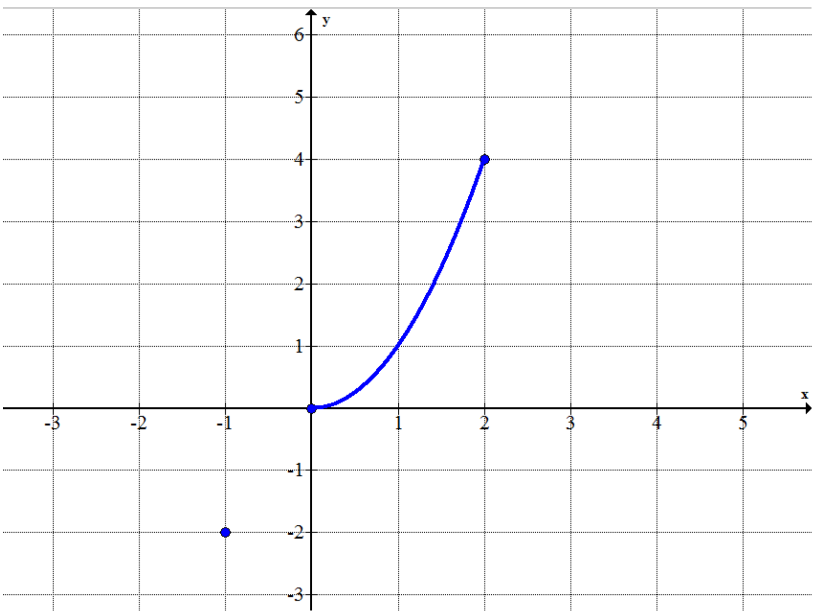
- liczba logarytmowana musi być większa od zera oraz podstawa logarytmu musi być większa od zera i różna od 1.

DEFINICJA

Zbiór wartości funkcji $f: X \to Y$, to zbiór tych wszystkich $y \in Y$, dla których istnieje argument $x \in X$, taki że $f(x) = y$.

FLESZ

Określ zbiór wartości funkcji przedstawionej na wykresie.



Rozwiązanie. Zbiór wartości funkcji jest $\{-2\} \cup \langle 0; 4 \rangle$.

FLESZ

Sposoby opisu funkcji:

a) graf,
b) opis słowny,
c) tabela,
d) wzór,
e) wykres.

DEFINICJA

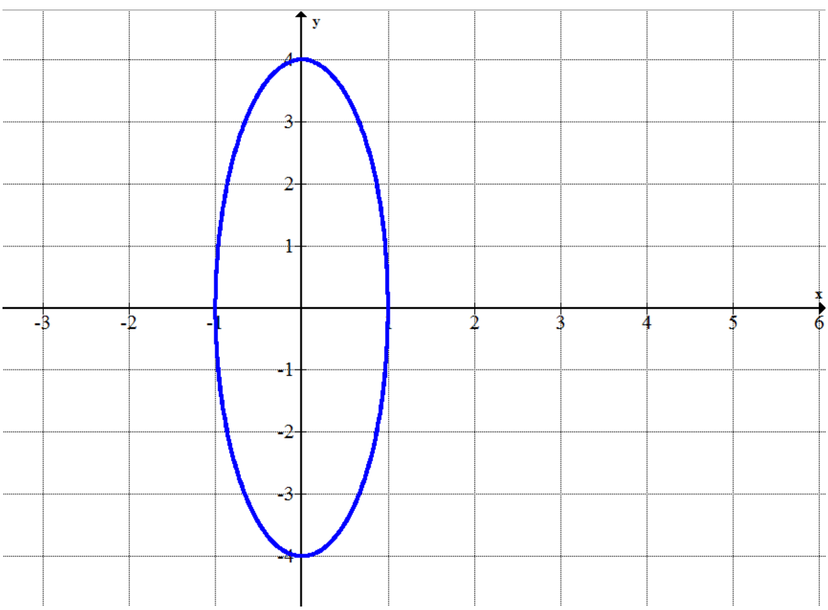
Wykresem funkcji $f: X \to Y$ jest zbiór wszystkich punktów postaci $(x, f(x))$, gdzie $x \in X$.

FLESZ

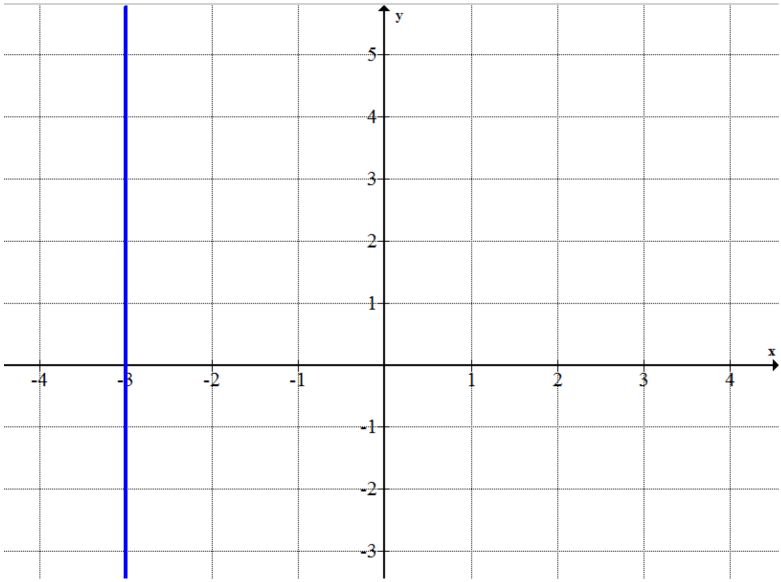
Żadna prosta pionowa nie może przecinać wykresu funkcji w więcej niż jednym punkcie.

PRZYKŁADY WYKRESÓW, KTÓRE NIE SĄ FUNKCJAMI

a)



b)



DEFINICJA

Miejscem zerowym funkcji $f(x)$ nazywamy taką wartość argumentu x, dla której $f(x) = 0$.

FLESZ

Należy pamiętać, że przed wyznaczeniem miejsc zerowych funkcji należy określić dziedzinę tej funkcji. Na przykład miejscem zerowym funkcji $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$, której dziedziną jest $D_f: R\backslash\{-1\}$, jest tylko $x = 1$ (mimo, iż rozwiązaniem równania $x^2 - 1 = 0$ są $x = -1$ lub $x = 1$).

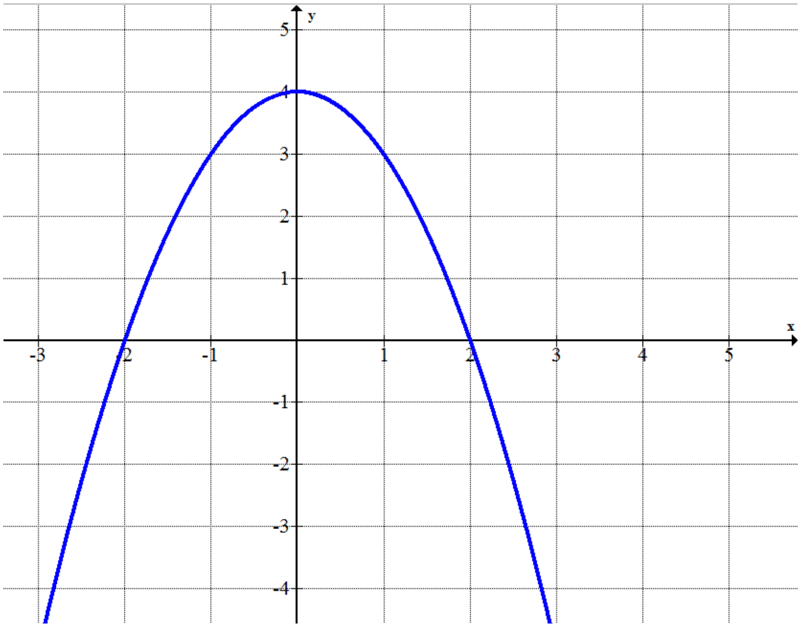
FLESZ

Wyznacz miejsca zerowe funkcji $f(x) = -4x + 12$.

Rozwiązanie. $f(x) = -4x + 12 = 0$, zatem $x = 3$, funkcja ma jedno miejsce zerowe.

FLESZ

Odczytaj z wykresu odczytaj miejsca zerowe funkcji.



Rozwiązanie. Miejsca zerowe funkcji: $x = -2, x = 2$.

DEFINICJA

Funkcję $f\colon X \to R$ nazywamy rosnącą, jeżeli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ zachodzi

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Funkcję $f\colon X \to R$ nazywamy malejącą, jeżeli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ zachodzi

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Funkcję $f\colon X \to R$ nazywamy stałą, jeżeli dla dowolnego argumentu $x \in X$ przyjmuje ona tę samą wartość c, czyli

$$f(x) = c.$$

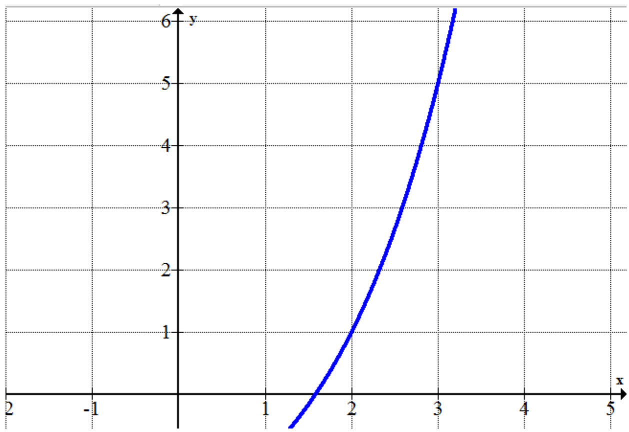
DEFINICJA

Funkcją monotoniczną nazywamy funkcję, która jest rosnąca, malejąca lub stała.

FLESZ

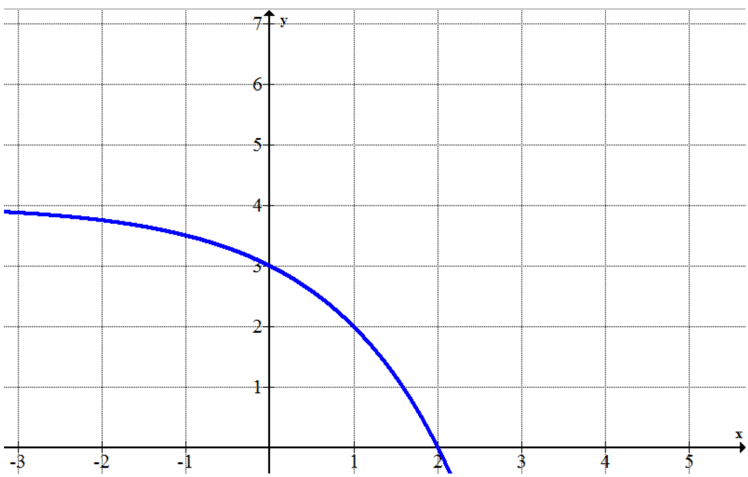
Określ monotoniczność funkcji.

a)



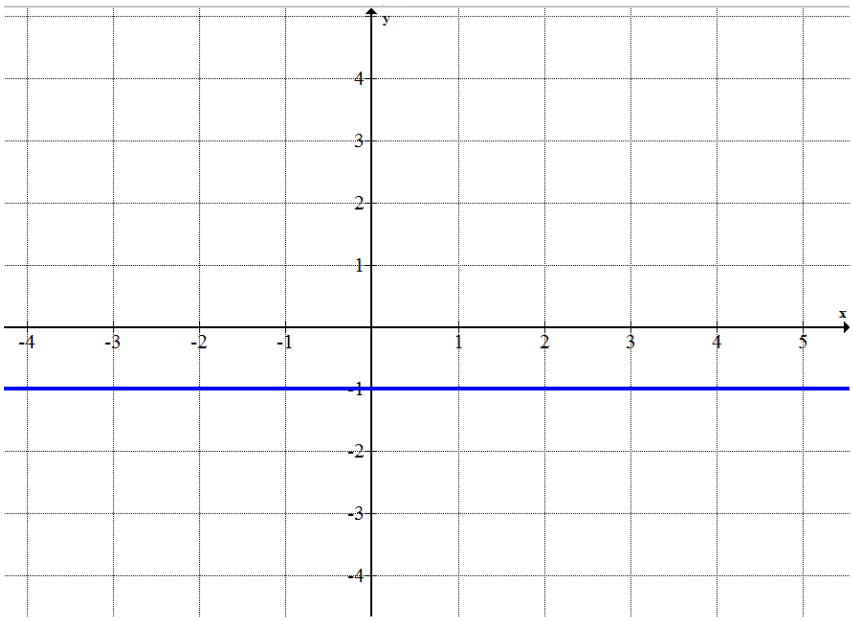
Rozwiązanie. Funkcja jest rosnąca.

b)



Rozwiązanie. Funkcja jest malejąca.

c)



Rozwiązanie. Funkcja jest stała.

WŁASNOŚCI

Niech $p > 0$ oraz $q > 0$. Wtedy

a) Wykres funkcji $y = f(x) + q$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o q jednostek w górę.

b) Wykres funkcji $y = f(x) - q$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o q jednostek w dół.

c) Wykres funkcji $y = f(x + p)$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o p jednostek w lewo.

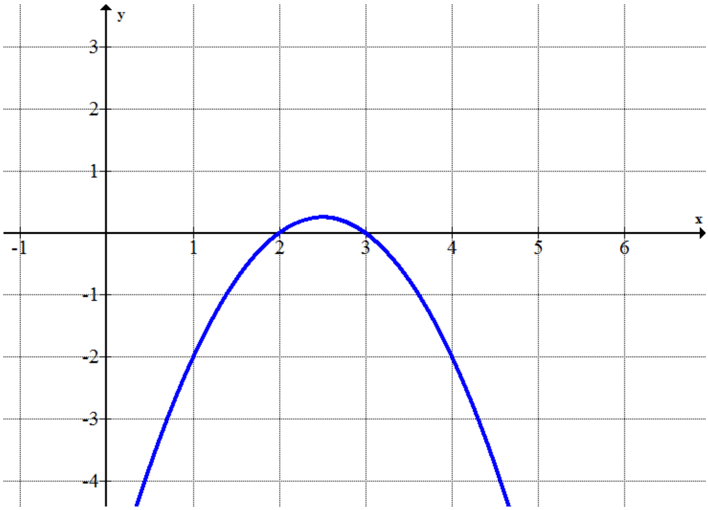
d) Wykres funkcji $y = f(x - p)$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o p jednostek w prawo.

e) Wykres funkcji $y = -f(x)$ otrzymujemy z wykresu funkcji $y = f(x)$ przez wykonanie odbicia symetrycznego tego wykresu względem osi OX.

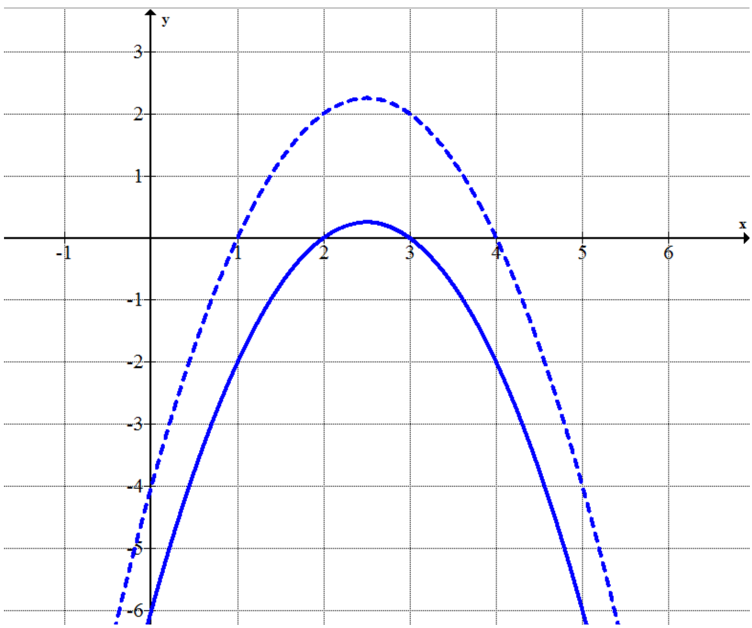
f) Wykres funkcji $y = f(-x)$ otrzymujemy z wykresu funkcji $y = f(x)$ przez wykonanie odbicia symetrycznego tego wykresu względem osi OY.

FLESZ

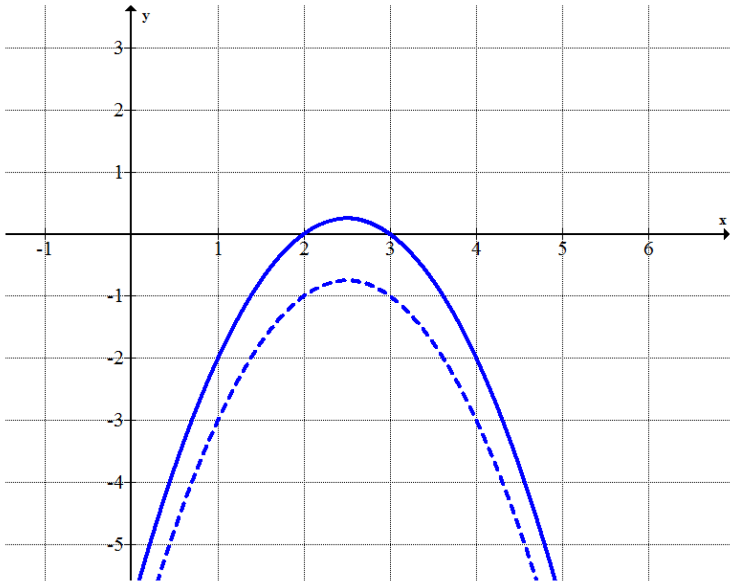
Dany jest wykres funkcji $f(x)$.



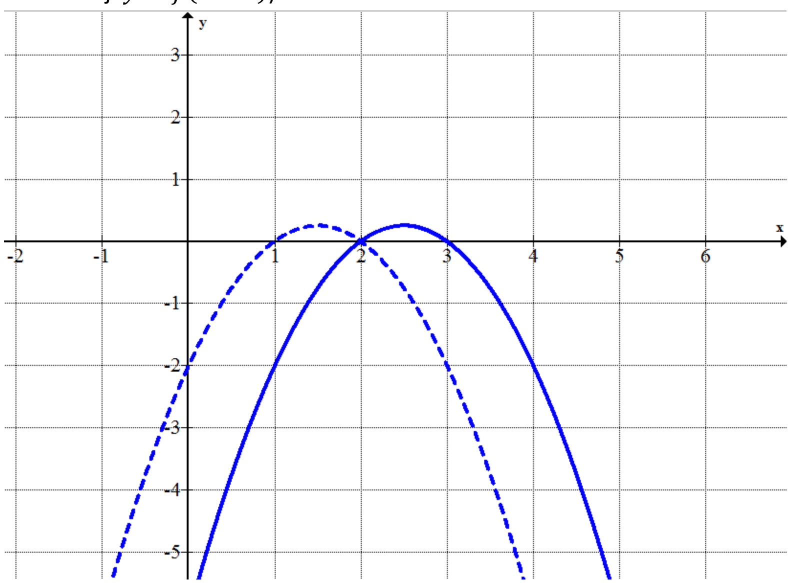
a) Narysuj funkcję $y = f(x) + 2$. Rozwiązanie (linią przerywaną narysowany jest wykres funkcji $y = f(x) + 2$).



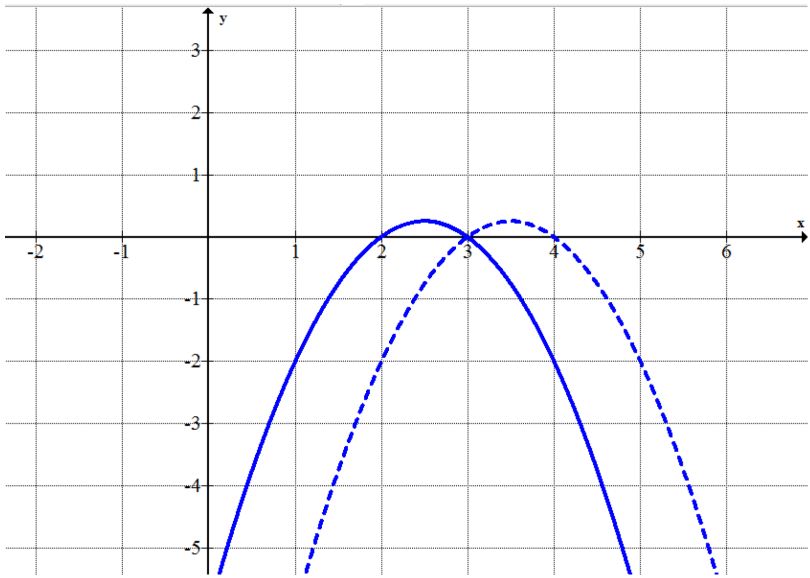
b) Narysuj funkcję $y = f(x) - 1$. Rozwiązanie (linią przerywaną narysowany jest wykres funkcji $y = f(x) - 1$).



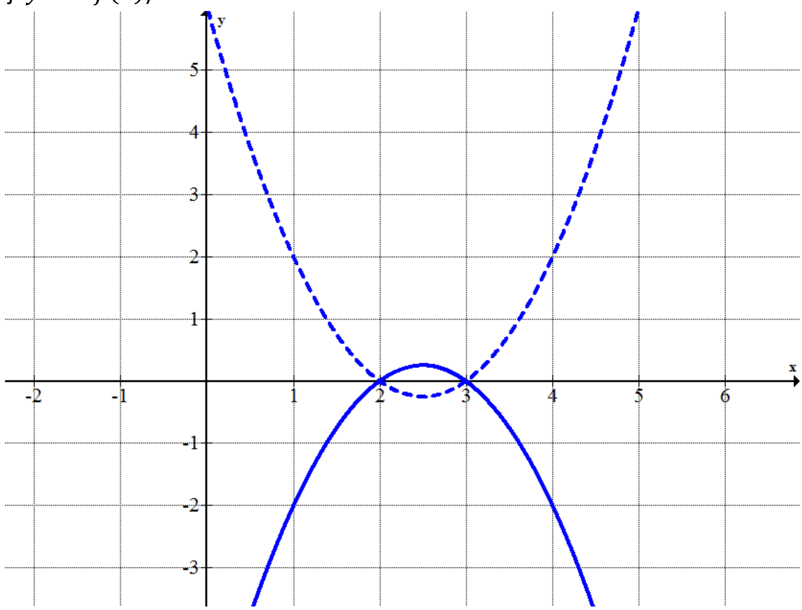
c) Narysuj funkcję $y = f(x + 1)$. Rozwiązanie (linią przerywaną narysowany jest wykres funkcji $y = f(x + 1)$).



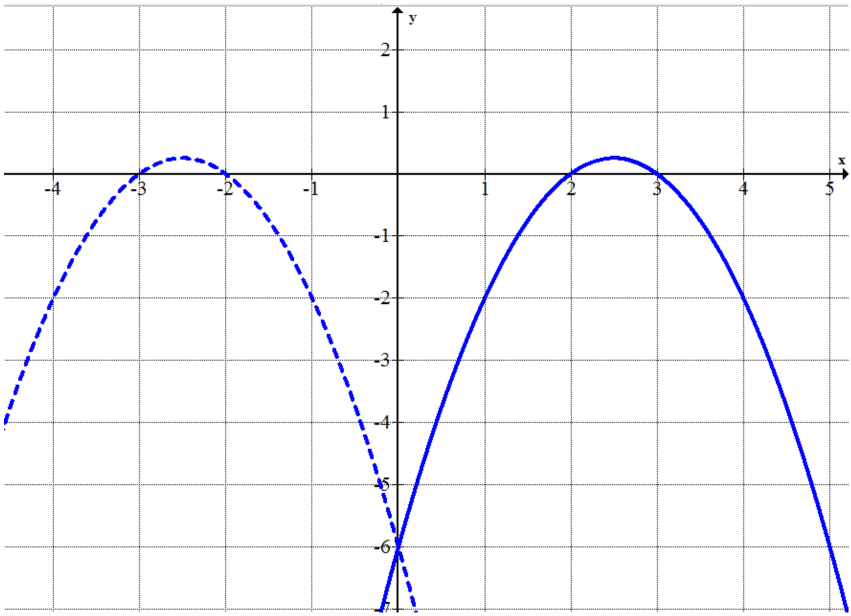
d) Narysuj funkcję $y = f(x-1)$. Rozwiązanie (linią przerywaną narysowany jest wykres funkcji $y = f(x-1)$).



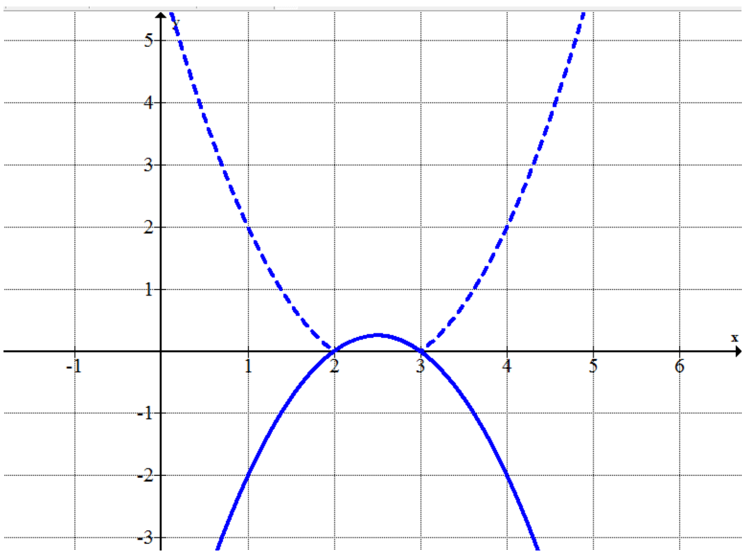
e) Narysuj funkcję $y = -f(x)$. Rozwiązanie (linią przerywaną narysowany jest wykres funkcji $y = -f(x)$).



f) Narysuj funkcję $y = f(-x)$. Rozwiązanie (linią przerywaną narysowany jest wykres funkcji $y = f(-x)$).



g) Narysuj funkcję $y = |f(x)|$ Rozwiązanie.



2.2 Funkcja liniowa

DEFINICJA

Funkcję określoną wzorem

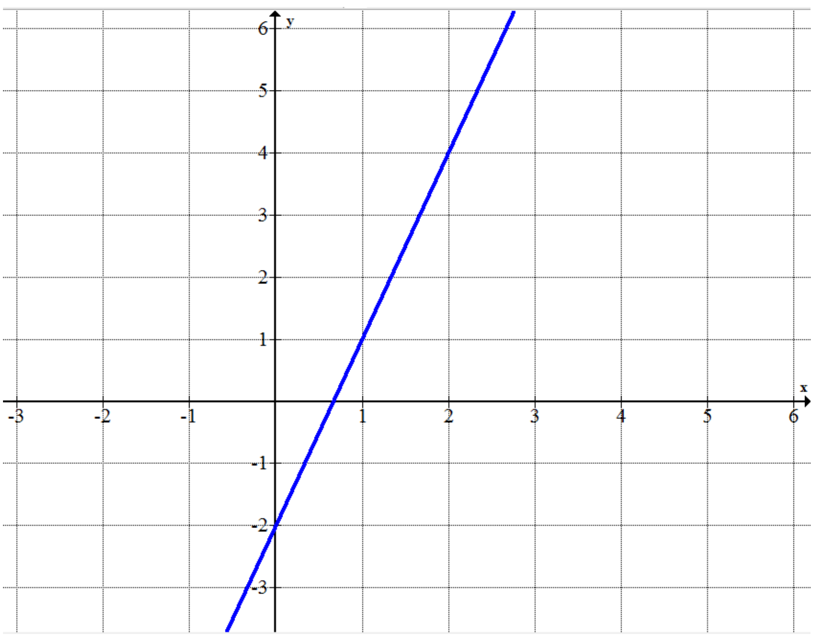
$$f(x) = ax + b$$

dla $x \in R$, gdzie a oraz b są stałymi, nazywamy funkcją liniową. Liczbę a nazywamy współczynnikiem kierunkowym prostej. Wykresem funkcji liniowej jest prosta.

FLESZ

Narysuj wykres funkcji liniowej $f(x) = 3x - 2$.

Rozwiązanie.



WŁASNOŚCI

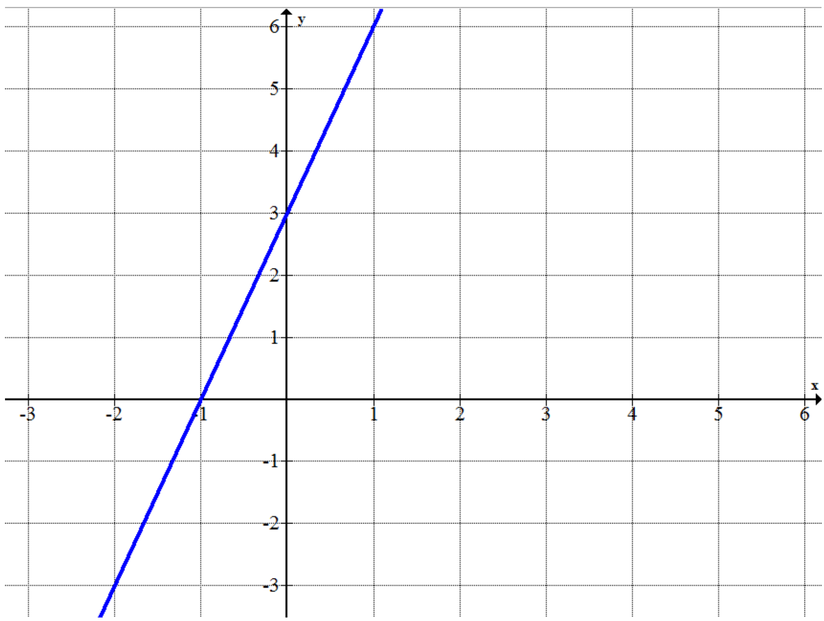
a) Wykresy funkcji liniowych o tych samych współczynnikach a są prostymi równoległymi.

b) Miejscem zerowym funkcji linowej o współczynniku $a \neq 0$ jest $x = -\frac{b}{a}$.

FLESZ

W układzie współrzędnych narysuj wykres funkcji liniowej $f(x) = 3x + 3,$. Określ miejsce zerowe.

Rozwiązanie.



Miejsce zerowe funkcji:

dla $f(x) = 3x + 3,\ x = -1.$

WŁASNOŚCI

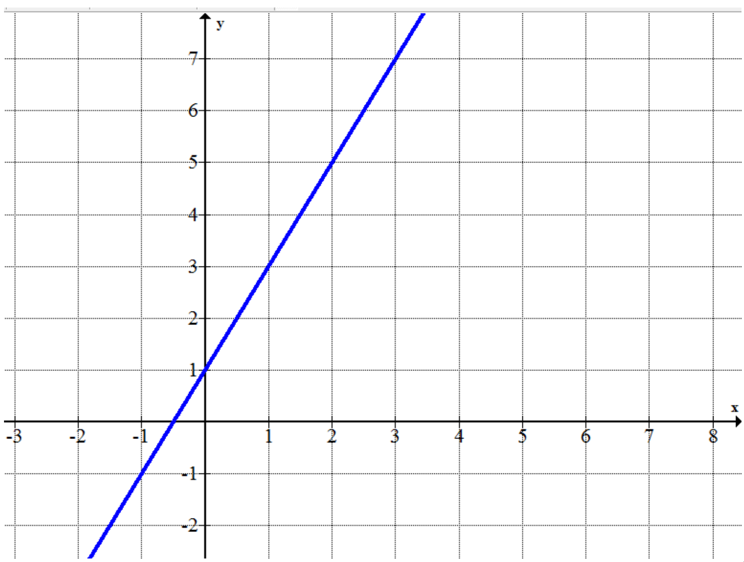
Monotoniczność funkcji liniowej:

a) Jeżeli $a > 0$, to funkcja liniowa jest rosnąca.
b) Jeżeli $a < 0$, to funkcja liniowa jest malejąca.
c) Jeżeli $a = 0$, to funkcja liniowa jest stała.

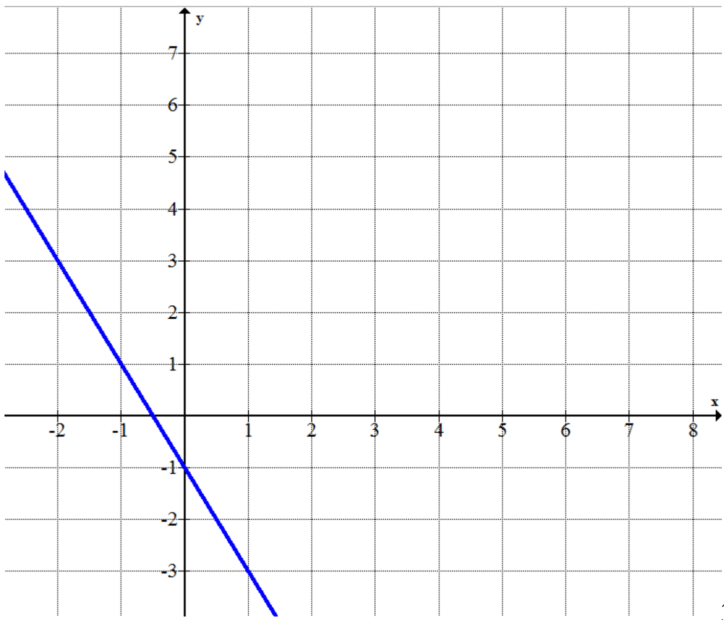
FLESZ

Narysuj wykresy funkcji liniowej: $y = 2x + 1$, $y = -2x - 1$, $y = 2$ i określ ich monotoniczność.

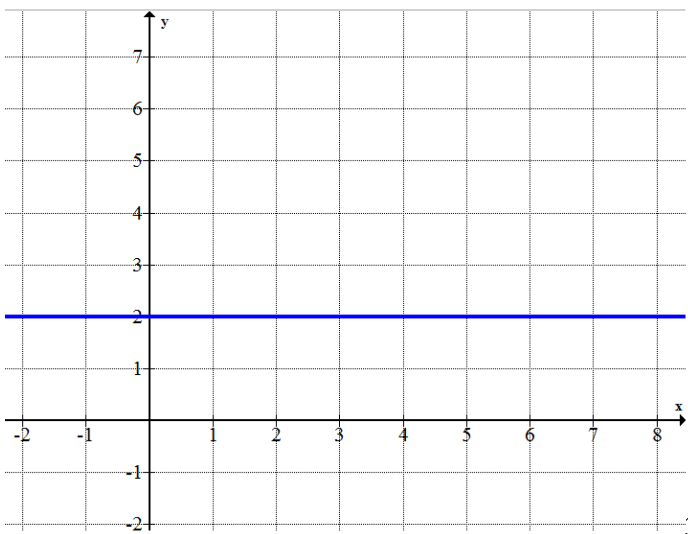
Rozwiązanie. a) Wykresy funkcji: $y = 2x + 1$, $y = -2x - 1$, $y = 2$



$y = 2x + 1$



$y = -2x - 1$



$y = 2$

Monotoniczność:

$y = 2x + 1$, funkcja rosnąca,

$y = -2x - 1$, funkcja malejąca,

$y = 2$, funkcja stała.

WŁASNOŚCI

a) Prosta będąca wykresem funkcji $f(x) = ax + b$ przecina oś OY w punkcie $(0, b)$.
b) Zbiorem wartości funkcji $f(x) = ax + b$ jest zbiór R, gdy $a \neq 0$, zbiór jednoelementowy $\{b\}$, gdy $a = 0$.

Mając dane współrzędne dwóch punktów należących do prostej możemy wyznaczyć równanie tej prostej.

FLESZ

Wyznacz punkt przecięcia się wykresu funkcji $f(x) = 2x - 4$ z osią OY.

Rozwiązanie.

$f(0) = 2 \cdot 0 - 4 = -4$. Wykres przecina oś OY w punkcie $(0, -4)$.

DEFINICJA

Równanie prostej postaci $y = ax + b$ nazywamy równaniem kierunkowym prostej.

Równanie postaci $Ax + By + C = 0$, gdzie $A \neq 0$ lub $B \neq 0$ nazywamy równaniem ogólnym prostej.

FLESZ

Przekształć równanie prostej $y = 3x + 5$ z postaci kierunkowej do postaci ogólnej.

Rozwiązanie. Dane: $y = 3x + 5$. Przenosząc odpowiednie wyrazy na drugą stronę mamy $-3x + y - 5 = 0$.

FLESZ

Przekształć równanie prostej $x - 4y + 8 = 0$ z postaci ogólnej do kierunkowej.

Rozwiązanie. Dane: $x - 4y + 8 = 0$. Przenosząc odpowiednie wyrazy na drugą stronę mamy $y = \frac{1}{4}x + 2$.

TWIERDZENIE

Jeżeli prosta $y = ax + b$ przechodzi przez dwa różne punkty (x_1, y_1) oraz (x_2, y_2), to współczynnik kierunkowy a tej prostej jest równy:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

FLESZ

Wyznacz współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty: $(2, 2)$ oraz $(3, 7)$.

Rozwiązanie. $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7-2}{3-2} = 5$.

WŁASNOŚCI

Równanie prostej o współczynniku kierunkowym a przechodzącej przez punkt (x_1, y_1) możemy zapisać w postaci : $y - y_1 = a(x - x_1)$.

FLESZ

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $(4, -6)$ o współczynniku kierunkowym $a = -2$.

Rozwiązanie. Mamy $y - y_1 = a(x - x_1)$, stąd $y + 6 = -2(x - 4)$, zatem $y = -2x + 2$.

DEFINICJA

Rozwiązaniem układu dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

gdzie $a, b, c, d, e, f \in R$ nazywamy zbiór wszystkich par (x, y), które spełniają oba równania.

DEFINICJA

a) Układ równań liniowych nazywamy układem oznaczonym, gdy jego rozwiązaniem jest dokładnie jedna para liczb.
b) Układ równań liniowych nazywamy układem sprzecznym, gdy nie ma on rozwiązania.
c) Układ równań liniowych nazywamy układem nieoznaczonym, gdy ma nieskończenie wiele rozwiązań.

FLESZ

Rozwiąż układy równań liniowych $\begin{cases} 2x - y = a \\ x - y = 1 \end{cases}$, gdzie a jest parametrem.

Rozwiązanie.

$\begin{cases} 2x - y = a \\ x = y + 1 \end{cases}$. Podstawiając do pierwszego równania mamy $\begin{cases} 2(y+1) - y = a \\ x = y + 1 \end{cases}$, dalej

$\begin{cases} y = a - 2 \\ x = y + 1 \end{cases}$, więc $\begin{cases} y = a - 2 \\ x = a - 1 \end{cases}$.

Rozwiązaniem układu jest para liczb $(a-2, a-1)$.

WŁASNOŚCI

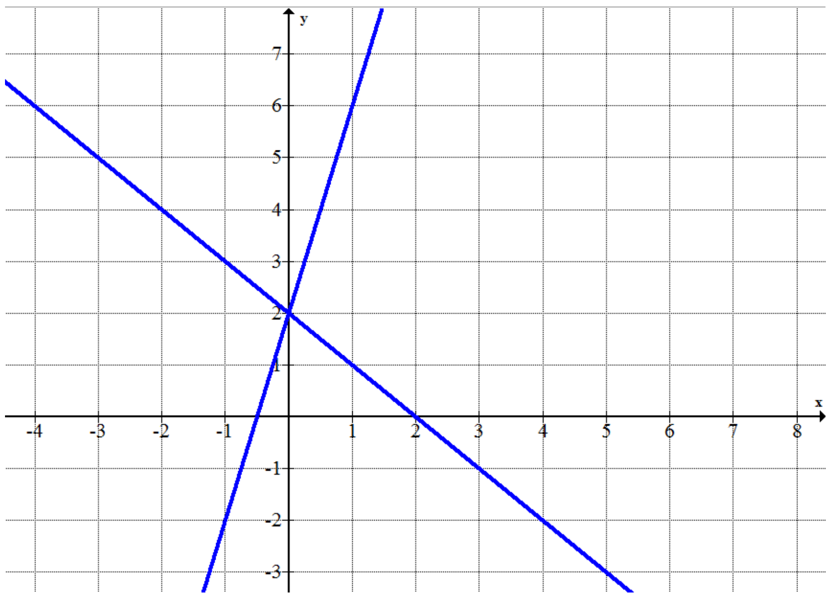
a) Układ równań liniowych jest układem oznaczonym wtedy i tylko wtedy, gdy proste opisane równaniami tego układu przecinają się w jednym punkcie. Liczby będące współrzędnymi tego punktu są rozwiązaniem tego układu.
b) Układ równań liniowych jest układem sprzecznym wtedy i tylko wtedy, gdy proste opisane równaniami tego układu są dwiema różnymi prostymi równoległymi.
c) Układ równań liniowych jest układem nieoznaczonym wtedy i tylko wtedy, gdy proste opisane równaniami tego układu pokrywają się.

FLESZ

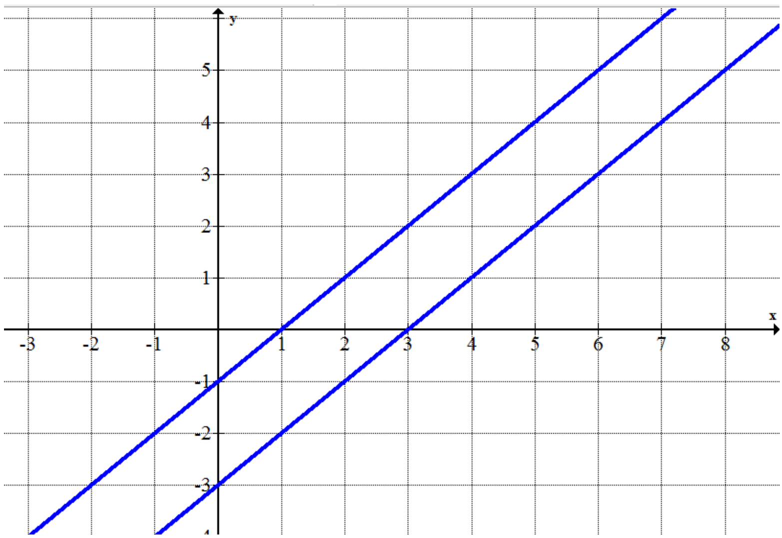
Przedstaw interpretację geometryczną układów równań liniowych: $\begin{cases} 4x - y = -2 \\ x + y = 2 \end{cases}$,
$\begin{cases} x - y = 1 \\ 4x - 4y = 12 \end{cases}$, $\begin{cases} 4x - y = -4 \\ 8x - 2y = -8 \end{cases}$.

Rozwiązanie.

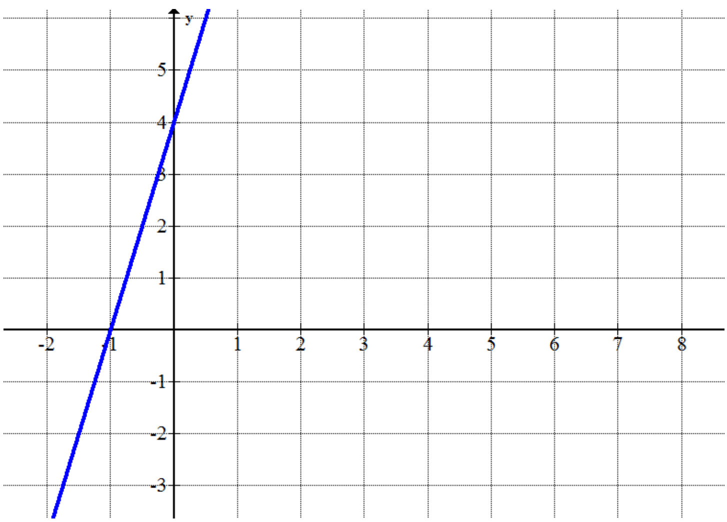
a) Układ $\begin{cases} 4x - y = -2 \\ x + y = 2 \end{cases}$ przekształcamy do postaci $\begin{cases} y = 4x + 2 \\ y = -x + 2 \end{cases}$.



b) Układ $\begin{cases} x - y = 1 \\ 4x - 4y = 12 \end{cases}$ przekształcamy do postaci $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = x - 3 \end{cases}$.



c) Układ $\begin{cases} 4x - y = -4 \\ 8x - 2y = -8 \end{cases}$ przekształcamy do postaci $\begin{cases} y = 4x + 4 \\ y = 4x + 4 \end{cases}$.



DEFINICJA

O wielkościach x i y związanych ze sobą wzorem $y = ax$, gdzie a jest pewną stałą różną od 0, mówimy, że są wprost proporcjonalne. Stałą a nazywamy współczynnikiem proporcjonalności.

FLESZ

Uzupełnij dane przedstawione w tabeli wiedząc, że są one wprost proporcjonalne. Wyznacz współczynnik proporcjonalności.

X	4	6		0
Y	20		$\frac{5}{4}$	

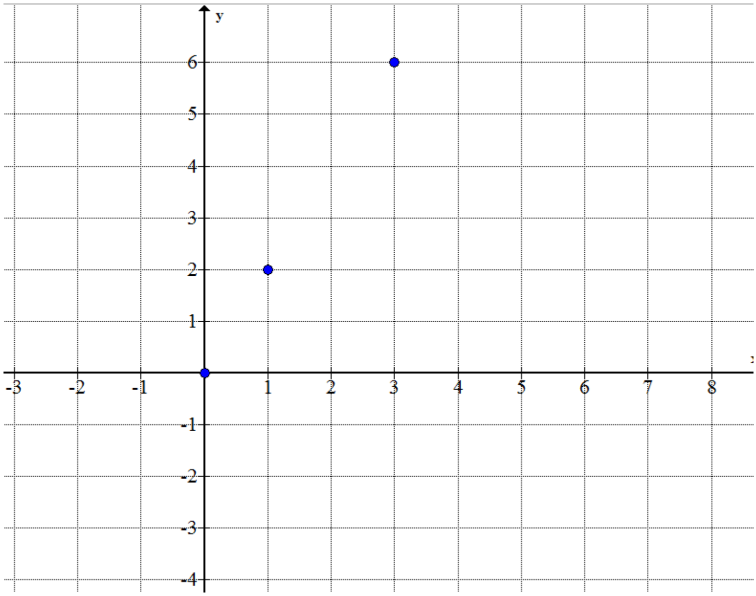
Rozwiązanie.

X	4	6	$\frac{1}{4}$	0
Y	20	30	$\frac{5}{4}$	0

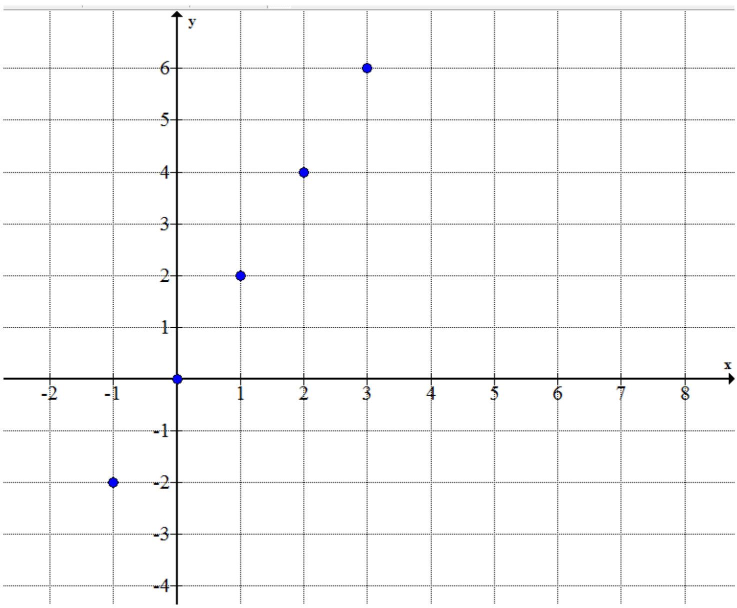
$a = 5$ współczynnik proporcjonalności.

FLESZ

Dorysuj kilka punktów tak aby dane był wprost proporcjonalne.



Rozwiązanie.



2.3 Funkcja kwadratowa

DEFINICJA

Funkcję określoną dla $x \in R$, postaci

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

gdzie $a \neq 0$, nazywamy funkcją kwadratową lub trójmianem kwadratowym. Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola.

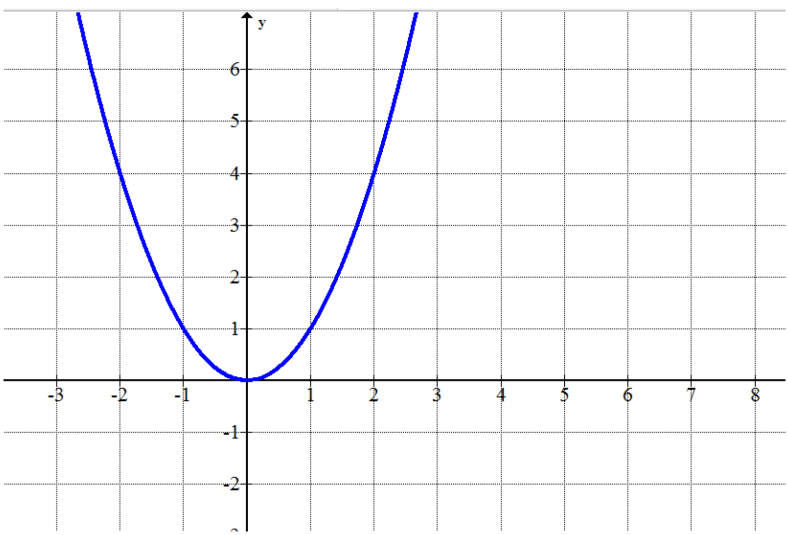
WŁASNOŚCI

Wartość współczynnika a decyduje o tym, czy ramiona paraboli skierowane są do góry, czy do dołu:

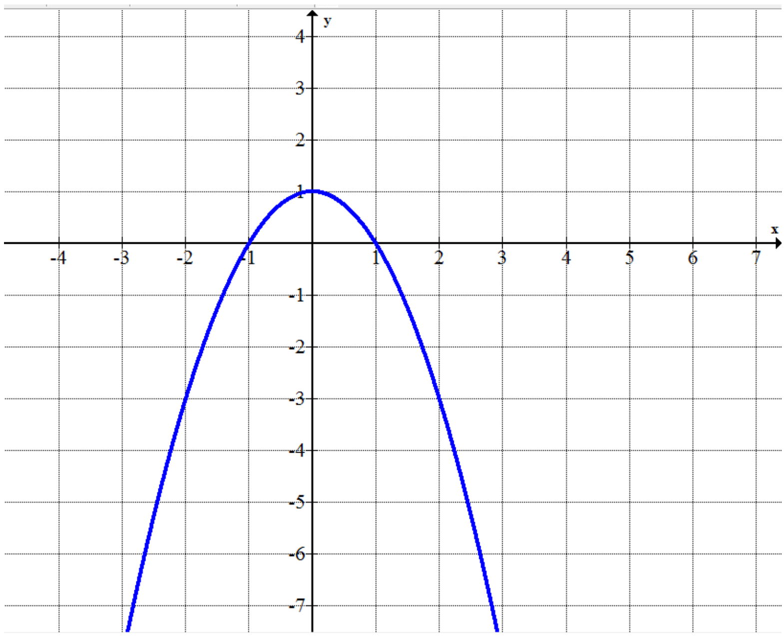
a) ramiona paraboli są skierowane do góry, gdy $a > 0$,
b) ramiona paraboli są skierowane do dołu, gdy $a < 0$.

FLESZ

a) Przykład funkcji kwadratowej – ramiona skierowane do góry



b) Przykład funkcji kwadratowej – ramiona skierowane do dołu



DEFINICJA

Postać

$$y = ax^2 + bx + c$$

gdzie $a \neq 0$, nazywamy postacią ogólną funkcji kwadratowej.

DEFINICJA

Postać

$$y = a(x - p)^2 + q$$

gdzie $a \neq 0, p = -\frac{b}{2a}, q = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ nazywamy postacią kanoniczną.

FLESZ

Przedstaw funkcję $y = 2x^2 - 12x + 10$ w postaci kanonicznej.

Rozwiązanie. Obliczmy

$$p = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{4} = 3, q = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{144 - 80}{8} = -8$$

Postać kanoniczna $y = 2(x-3)^2 - 8$.

TWIERDZENIE

Parabola będąca wykresem funkcji danej wzorem: $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, ma wierzchołek o współrzędnych

$$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right),$$

gdzie $\Delta = b^2 - 4ac$ nosi nazwę wyróżnika trójmianu kwadratowego.

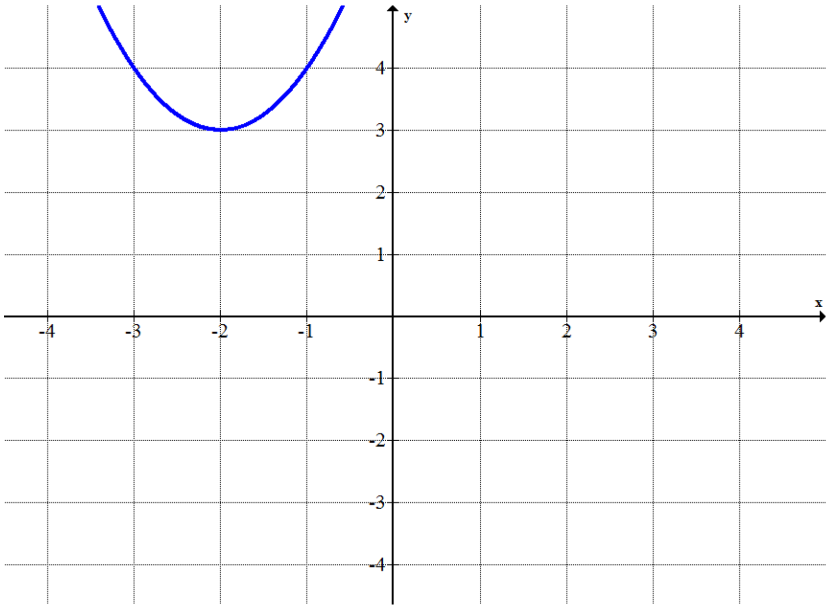
FLESZ

Wyznacz wierzchołek paraboli: $y = 2x^2 - 8x - 10$.

Rozwiązanie. Obliczmy $p = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{4} = 2, q = -\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{64+80}{8} = -18$. Wierzchołek ma współrzędne $(2, -18)$.

FLESZ

Z rysunku odczytaj współrzędne wierzchołka paraboli.



Rozwiązanie. Współrzędne wierzchołka paraboli wynoszą: $(-2, 3)$.

TWIERDZENIE

Funkcja kwadratowa dana wzorem: $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$

a) ma jedno miejsce zerowe, jeśli $\Delta = 0$,
b) ma dwa miejsca zerowe, jeśli $\Delta > 0$,
c) nie ma miejsc zerowych, jeśli $\Delta < 0$.

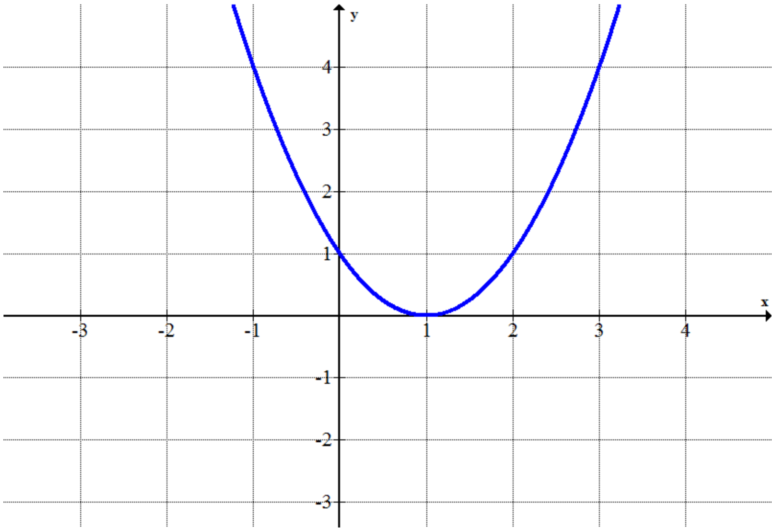
FLESZ

Narysuj przykład funkcji kwadratowej, która

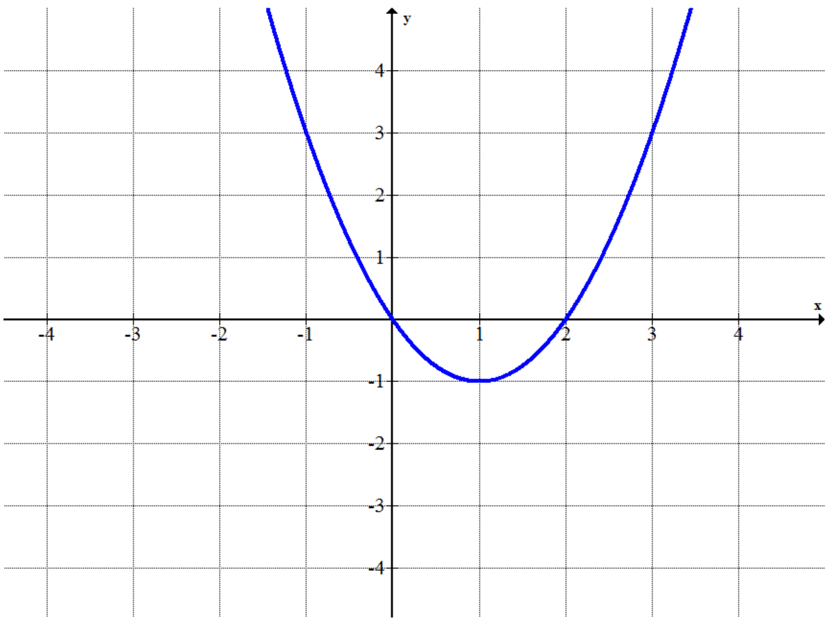
a) ma jedno miejsce zerowe
b) ma dwa miejsca zerowe
c) nie ma miejsc zerowych

Rozwiązanie.

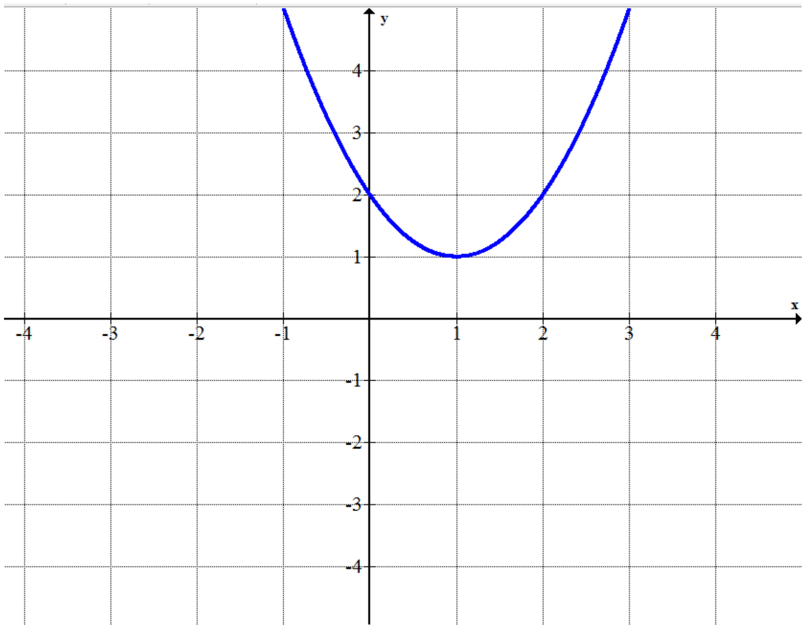
a)



b)



c)



2.3.1 Równania kwadratowe

DEFINICJA

Równanie postaci

$$ax^2 + bx + c = 0$$

gdzie $a \neq 0$ nazywamy równaniem kwadratowym.

TWIERDZENIE

Rozważmy równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$. Jeżeli

a) $\Delta > 0$, to równanie ma dwa pierwiastki postaci $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$;
b) $\Delta = 0$, to równanie ma jeden pierwiastek postaci $x_0 = \frac{-b}{2a}$;
c) $\Delta < 0$, to równanie nie ma pierwiastków.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

FLESZ

Rozwiąż równanie kwadratowe:

a) $x^2 - 4x + 3 = 0$ b) $x^2 - 6x + 9 = 0$ c) $x^2 + x + 1 = 0$

Rozwiązanie.

a) $x^2 - 4x + 3 = 0$, $\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$, zatem równanie ma dwa pierwiastki postaci $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 1$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 3$.

b) $x^2 - 6x + 9 = 0$, $\Delta = 36 - 36 = 0$, zatem równanie ma jeden pierwiastek postaci $x_0 = \frac{-b}{2a} = 3$.

c) $x^2 + x + 1 = 0$, $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, zatem równanie nie ma pierwiastków.

DEFINICJA

Postać

$y = a(x - x_1)(x - x_2)$,

gdzie $a \neq 0$, nazywamy postacią iloczynową trójmianu kwadratowego, a wyrazy $x - x_1$ oraz $x - x_2$ nazywamy czynnikami liniowymi. Postać iloczynowa jest nazywana również rozkładem na czynniki liniowe.

TWIERDZENIE

Rozważmy trójmian kwadratowy $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$. Jeżeli

a) $\Delta > 0$, to trójmian kwadratowy można przedstawić w postaci iloczynowej $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie x_1 oraz x_2 są pierwiastkami trójmianu;
b) $\Delta = 0$, to trójmian kwadratowy można przedstawić w postaci iloczynowej $y = a(x - x_0)^2$, gdzie x_0 jest pierwiastkiem podwójnym trójmianu;
c) $\Delta < 0$, to trójmianu kwadratowego nie można rozłożyć na czynniki liniowe.

FLESZ

Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej (o ile istnieje).

$a)$ $y = 2x^2 - 16x + 16$ b) $y = -x^2 + 6x - 9$ c) $y = x^2 + x + 5$

Rozwiązanie.

a) $2x^2 - 12x + 16 = 0$, $\Delta = 144 - 96 = 16 > 0$, $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 2$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 4$.
Postać iloczynowa: $y = 2(x - 2)(x - 4)$.

b) $-x^2 + 6x - 9 = 0$, $\Delta = 36 - 36 = 0$, $x_0 = \frac{-b}{2a} = 3$. Postać iloczynowa: $y = -(x - 3)^2$.

c) $x^2 + x + 5 = 0$, $\Delta = 1 - 20 = -19 < 0$. Postać iloczynowa nie istnieje.

TWIERDZENIE

Jeżeli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$, ma pierwiastki x_1 oraz x_2, to zachodzą zależności-wzory Viete'a:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

FLESZ

Wiadomo, że równanie kwadratowe $x^2 - 7x + 12 = 0$ posiada dwa pierwiastki. Wyznacz ich sumę i iloczyn.

Rozwiązanie. Ze wzorów Viete'a mamy : $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 7$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 12$.

FLESZ

Korzystając z wzorów Viète'a oblicz sumę kwadratów pierwiastków równania kwadratowego $x^2 + x - 30 = 0$.

Rozwiązanie. Sprawdzamy czy dane równanie ma dwa pierwiastki obliczając wyróżnik $\Delta = 121$. Skoro wyróżnik jest nieujemny, to wiemy, że równanie posiada pierwiastki. Zgodnie ze wzorami Viète'a spełniają one warunki

$$x_1 + x_2 = -\frac{1}{1} = -1\,,$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-30}{1} = -30\,.$$

Mamy obliczyć sumę kwadratów pierwiastków, czyli wartość wyrażenia $x_1^2 + x_2^2$. Skorzystajmy ze wzoru skróconego mnożenia $(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ mamy

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\,.$$

Stąd otrzymujemy

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-1)^2 - 2 \cdot (-30) = 61\,.$$

FLESZ

Wyznacz wartości parametru m, dla których równanie $x^2 - 2x + m - 3 = 0$ ma dwa różne pierwiastki tego samego znaku.

Rozwiązanie. Równanie kwadratowe ma dwa różne pierwiastki, gdy wyróżnik jest większy od zera. Zatem

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m-3) = -4m + 16 > 0.$$

Stąd $m < 4$.

Skoro pierwiastki mają być tego samego znaku, więc ich iloczyn musi być liczbą dodatnią. Czyli $x_1 \cdot x_2 > 0$. Ze wzorów Viète'a mamy tymczasem $x_1 \cdot x_2 = \frac{m-3}{1}$. Zatem

$$\frac{m-3}{1} > 0,$$

a więc $m > 3$.

Rozwiązaniem będzie część wspólna otrzymanych warunków: $m < 4 \text{ i } m > 3$, czyli $m \in (3,4)$.

2.3.2 Nierówności kwadratowe

DEFINICJA

Nierówności postaci

$ax^2 + bx + c > 0$ lub $ax^2 + bx + c < 0$ lub $ax^2 + bx + c \leq 0$ lub $ax^2 + bx + c \geq 0$,

gdzie $a \neq 0$ nazywamy nierównością kwadratową.

FLESZ

Aby rozwiązać nierówność kwadratową należy:

a) wyznaczyć jej miejsca zerowe (o ile istnieją),
b) naszkicować wykres funkcji kwadratowej,
c) zaznaczyć odpowiedni zbiór rozwiązań na osi *OX,*
d) zapisać rozwiązanie za pomocą przedziałów liczbowych, zbioru rozwiązań lub stwierdzić, że rozwiązaniem jest zbiór pusty.

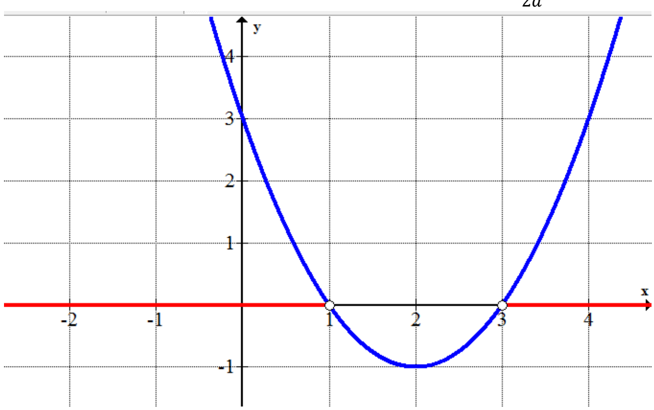
FLESZ

Rozwiąż nierówność kwadratową:

$a)\ x^2 - 4x + 3 > 0$ b) $-x^2 - x - 3 < 0$ c) $x^2 + 4x + 6 < 0$

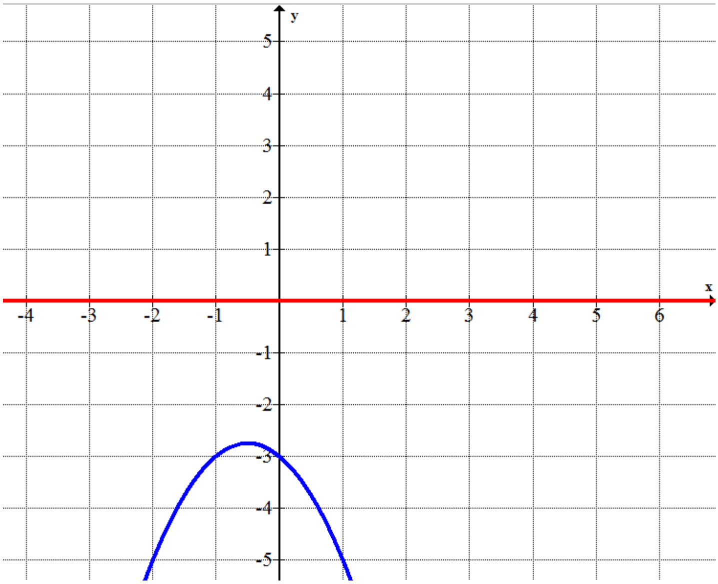
Rozwiązanie.

a) $x^2 - 4x + 3 > 0$, $\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$, $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 1$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 3$.



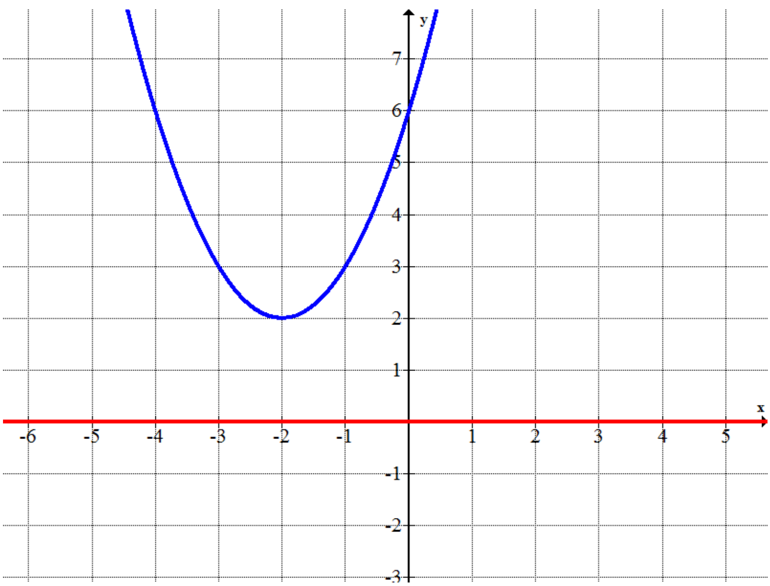
$x \epsilon (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$

b) $-x^2 - x - 3 < 0$, $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ – brak miejsc zerowych



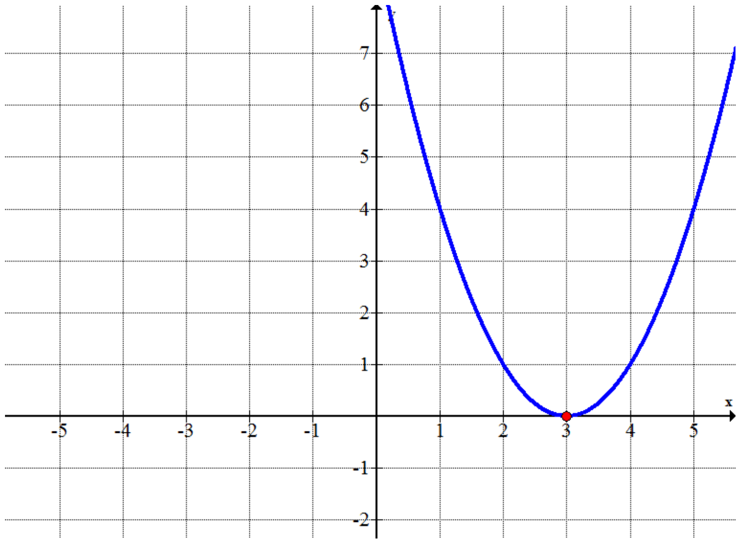
$$x \in R$$

c) $x^2 + 4x + 6 < 0$, $\Delta = 16 - 24 = -8 < 0$ – brak miejsc zerowych



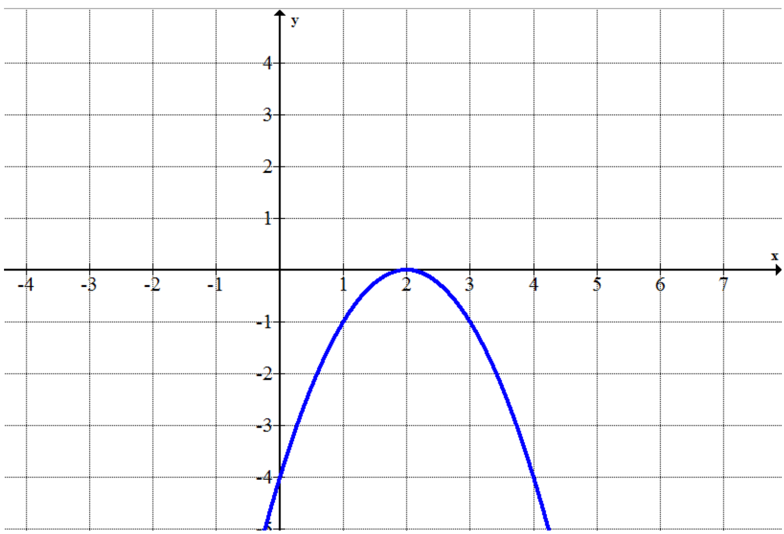
$$x \in \phi$$

d) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$, $\Delta = 36 - 36 = 0$, $x_0 = \frac{-b}{2a} = 3$.



$x = 3$

e) $-x^2 + 4x - 4 > 0$, $\Delta = 16 - 16 = 0$, $x_0 = \frac{-b}{2a} = 2$.



$x \in \phi$

2.4 Funkcja wielomianowa

DEFINICJA

Jednomianem nazywamy funkcję określoną dla $x \in R$, postaci

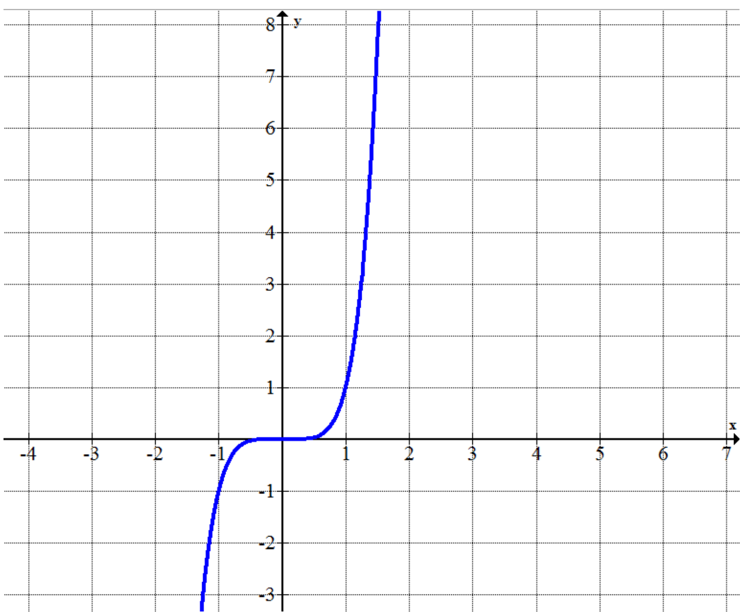
$$y = ax^n$$

gdzie $a \in R$ oraz $n \in N, n > 0$. Jeżeli $a \neq 0$, to liczbę n nazywamy stopniem jednomianu. Funkcja stała $y = 0$ jest jednomianem, którego stopnia nie określamy. Funkcja stała $y = a$, $a \neq 0$ jest jednomianem stopnia 0.

FLESZ

Narysuj wykres jednomianu $y = x^5$.

Rozwiązanie.



DEFINICJA

Funkcję określoną dla $x \in R$, postaci

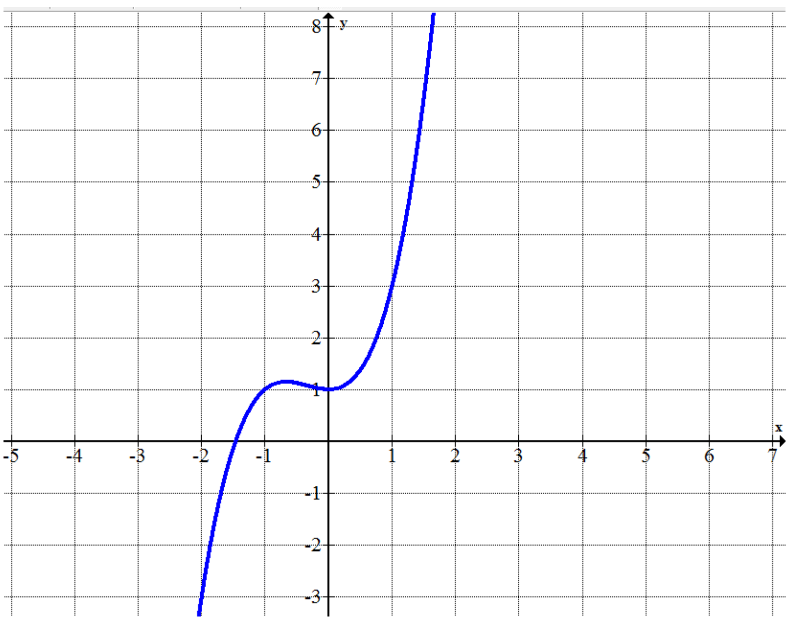
$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

gdzie $a_n \neq 0$ oraz $n \in N$, $n > 0$ nazywamy wielomianem stopnia n. Liczby $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ nazywamy współczynnikami wielomianu, wyraz a_0 nazywamy wyrazem wolnym. Funkcja stała $y = 0$ jest wielomianem, którego stopnia nie określamy. Funkcja stała $y = a$, $a \neq 0$ jest wielomianem stopnia 0.

FLESZ

Narysuj wykres wielomianu $y = x^3 + x^2 + 1$.

Rozwiązanie.



DEFINICJA

W zbiorze wielomianów określa się działania: dodawanie, odejmowanie, mnożenie wielomianów.

Niech $W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $G(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ gdzie $a_n, b_n \neq 0$ oraz $n, m \in N, n \geq m$.

a) Dodawanie: $W(x) + G(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$, gdzie dla $n > m$ $b_{m+1}, b_{m+2}, \ldots, b_m$ są równe 0.

b) Odejmowanie: $W(x) - G(x) = (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0)$, gdzie dla $n > m$ $b_{m+1}, b_{m+2}, \ldots, b_m$ są równe 0.

c) Mnożenie $W(x) \cdot G(x) = (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0) \cdot (b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0)$. Po wymnożeniu grupujemy odpowiednie składniki.

FLESZ

Dane są dwa wielomiany $W(x) = x^3 + 2x + 1, G(x) = x^2 + x$ Wykonaj działania $W(x) + G(x), W(x) - G(x), W(x) \cdot G(x)$.

Rozwiązanie.

a) $W(x) + G(x) = (x^3 + 2x + 1) + (x^2 + x) = x^3 + x^2 + 3x + 1$

b) $W(x) - G(x) = (x^3 + 2x + 1) - (x^2 + x) = x^3 - x^2 + x + 1$

c) $W(x) \cdot G(x) = (x^3 + 2x + 1) \cdot (x^2 + x) = x^5 + x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x$

FLESZ

Rozłóż wielomian $W(x) = x^5 - x^3 + 8x^2 - 8$ na czynniki.

Rozwiązanie. $W(x) = x^5 - x^3 + 8x^2 - 8 = x^3(x^2 - 1) + 8(x^2 - 1) = (x^2 - 1)(x^3 + 8) = (x - 1)(x + 1)(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$.

TWIERDZENIE o całkowitych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych.

Jeżeli wielomian $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, o współczynnikach całkowitych, ma pierwiastek całkowity p, to p jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0.

FLESZ

Rozłóż wielomian $W(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$ na czynniki.

Rozwiązanie. Podzielniki wyrazu wolnego to $\pm 1, \pm 2, \pm 3 \pm 6$. Zauważmy, że $W(1) = 0$, zatem wielomian $W(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$ można podzielić bez reszty przez wielomian $x - 1$. Mamy

$$(x^3 + 4x^2 + x - 6) : (x - 1) = x^2 + 5x + 6.$$

Zatem $W(x) = (x - 1)(x^2 + 5x + 6)$. W przypadku drugiego z czynników, który jest trójmianem kwadratowym, obliczymy watość wyróżnika i jeżeli jest on nieujemny, wyznaczymy jego pierwiastki:

$\Delta = 25 - 24 = 1 > 0, x_1 = -2, x_2 = -3.$

Czyli $W(x) = (x - 1)(x + 2)(x + 3)$.

DZIELENIE WIELOMIANÓW

Niech $W(x)$ i $P(x)$ będą danymi wielomianami. Jeżeli istnieje dokładnie jeden wielomian $Q(x)$ taki, że spełniona jest równość $W(x) = Q(x) \cdot P(x)$, to:

- wielomian $Q(x)$ nazywamy ilorazem wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)$

- wielomian $P(x)$ nazywamy dzielnikiem wielomianu $W(x)$.

Jeżeli $P(x) \neq 0$, to istnieją takie dwa wielomiany $Q(x)$ i $R(x)$, że

$W(x) = Q(x) \cdot P(x) + R(x)$,

przy czym albo wielomian $R(x) = 0$ albo stopień wielomianu $R(x)$ jest mniejszy od stopnia wielomianu $P(x)$. Wielomian R(x) nazywamy resztą z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)$.

Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez wielomian $P(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wielomian $Q(x)$ taki, że

$$W(x) = Q(x) \cdot P(x).$$

TWIERDZENIE o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x - a$, jest równa $W(a)$.

FLESZ

Nie wykonując dzielenia, wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x) = x^5 + 2x^4 + 3x + 1$ przez $P(x) = (x + 2)(x - 1)$.

Rozwiązanie. Reszta $R(x)$ z dzielenia przez wielomian $P(x)$ jest wielomianem stopnia 1, czyli wielomianem postaci $ax + b$. Możemy zatem zapisać $W(x) = P(x)Q(x) + R(x)$:

$$x^5 + 2x^4 + 3x + 1 = (x + 2)(x - 1)Q(x) + ax + b.$$

Podstawmy teraz do powyższej równości miejsca zerowe wielomianu $P(x)$: $x = -2$ oraz $x = 1$. Otrzymujemy

$$\begin{cases} 2a - b = 5 \\ a + b = 7 \end{cases}.$$

Stąd $a = 4$ oraz $b = 3$.

2.4.1 Równania wielomianowe

DEFINICJA

Równanie postaci

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$$

gdzie $a_n \neq 0$ oraz $n \in N$ i $n > 0$ nazywamy równaniem wielomianowym.

WŁASNOŚCI

a) Dwa wielomiany są równe, jeżeli są tego samego stopnia i współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej mają taką samą wartość.
b) Rozkładając wielomian na czynniki korzystamy ze wzorów skróconego mnożenia oraz z wyłączania wspólnego czynnika przed nawias, a w przypadku funkcji kwadratowej z jego postaci iloczynowej.

FLESZ

Wielomian $W(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 24x + 9$ jest kwadratem wielomianu $Q(x) = x^2 + cx + d$. Wyznacz współczynniki rzeczywiste a oraz b.

Rozwiązanie. Skoro $W(x) = (Q(x))^2$, to podnieśmy do kwadratu wielomian $Q(x)$:

$$(Q(x))^2 = (x^2 + cx + d)^2 = x^4 + 2cx^3 + (c^2 + 2d)x^2 + 2cdx + d^2.$$

Należy teraz porównać współczynniki wielomianów $W(x)$ oraz $(Q(x))^2$:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 - 24x + 9 = (x^2 + cx + d)^2 = x^4 + 2cx^3 + (c^2 + 2d)x^2 + 2cdx + d^2.$$

Zatem $\begin{cases} a = 2c \\ b = c^2 + 2d \\ -24 = 2cd \\ 9 = d^2 \end{cases}$.

Z czwartego równania otrzymujemy od razu $d = -3$ oraz $d = 3$. Zatem z trzeciego równania mamy odpowiednio $c = 4$ oraz $c = -4$. Aby wyznaczyć a oraz b wykorzystamy teraz pierwsze i drugie równanie. Mamy więc

$$\begin{cases} a = 8 \\ b = 10 \end{cases} \text{ oraz } \begin{cases} a = -8 \\ b = 22 \end{cases}.$$

TWIERDZENIE

Każdy wielomian da się przedstawić w postaci iloczynu czynników stopnia co najwyżej drugiego.

TWIERDZENIE

Wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków.

WŁASNOŚĆ

Rozwiązując równanie wielomianowe najpierw zapisujemy je w postaci iloczynowej czynników jak najniższych stopni, a następnie każdy czynnik oddzielnie przyrównujemy do zera.

FLESZ

Rozwiąż równanie wielomianowe.

a) $x^3 - 7x^2 + 10x = 0$ b) $x^3 - 4x^2 - 3x + 12 = 0$ c) $x^3 - x^2 + 7x = 0$

Rozwiązanie.

a) $x^3 - 7x^2 + 10x = 0$. Wyłączny x przed nawias: $x(x^2 - 7x + 10) = 0$. Następnie $x^2 - 7x + 10$ zapiszmy w postaci iloczynowej. Wtedy $x(x-5)(x-2) = 0$. Zatem rozwiązaniem jest: $x = 0, x = 5, x = 2$.

b) $x^3 - 4x^2 - 3x + 12 = 0$. Pogrupujmy wyrazy i wyłączmy wspólne czynniki. $x^2(x - 4) - 3(x-4) = 0$. Wtedy $(x-4)(x^2 - 3) = 0$. Rozkładając $x^2 - 2$ na czynniki liniowe dostajemy $(x-4)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0$. Ostatecznie, rozwiązaniem jest: $x = 4, x = \sqrt{3}, x = -\sqrt{3}$.

c) $x^3 - x^2 + 7x = 0$. Wyłączny x przed nawias: $x(x^2 - x + 7) = 0$. Zauważmy, że $x^2 - x + 7$ nie da się zapisać w postaci iloczynowej. Zatem rozwiązaniem jest: $x = 0$.

TWIERDZENIE

Wyraz wolny wielomianu $W(x)$ wyznaczamy obliczając $W(0)$, a sumę współczynników tego wielomianu obliczając $W(1)$.

FLESZ

Oblicz wyraz wolny oraz sumę współczynników wielomianu $W(x) = (x^4 + 1)(2x^2 + 3x + 1)(x + 5)$.

Rozwiązanie. Wyraz wolny $a_0 = W(0) = 1 \cdot 1 \cdot 5 = 5$, a suma współczynników wielomianu wynosi $W(1) = 2 \cdot 6 \cdot 6 = 72$.

FLESZ

Wyznacz sumę współczynników wielomianu $W(x) = (2x - 1)^{n+3} + 4$.

Rozwiązanie. $W(1) = (2 \cdot 1 - 1)^{n+3} + 4 = 5$. Suma współczynników wielomianu wynosi 5.

2.5 Funkcja wymierna

DEFINICJA

Funkcję postaci

$$f(x) = \frac{G(x)}{W(x)}$$

gdzie G oraz W są wielomianami $(W(x) \neq 0)$ nazywamy funkcją wymierną. Dziedziną tej funkcji jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, dla których $W(x) \neq 0$.

FLESZ

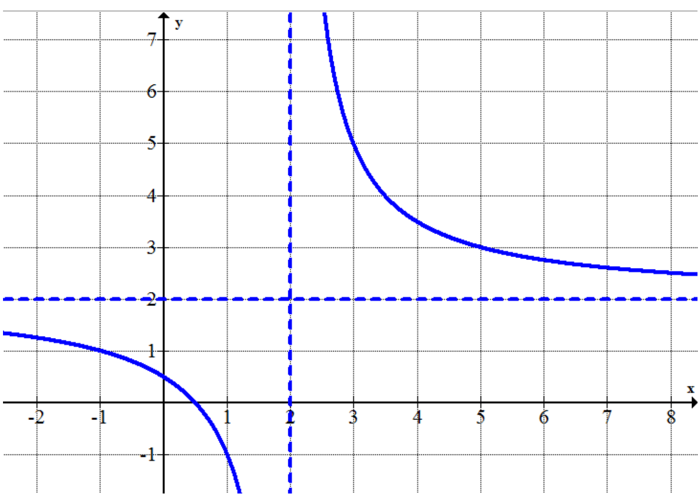
Określ dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{x^4+4x+1}{x-2}$.

Rozwiązanie. $x - 2 \neq 0$. Zatem $x \neq 2$, stąd $D = R \backslash \{2\}$.

FLESZ

Narysuj wykres funkcji wymiernej $f(x) = \frac{2x-1}{x-2}$.

Rozwiązanie.



2.5.1 Równania wymierne

DEFINICJA

Równanie postaci

$$\frac{G(x)}{W(x)} = 0$$

gdzie G oraz W są wielomianami $(W(x) \neq 0)$ nazywamy równaniem wymiernym.

FLESZ

a) Rozwiązywanie równania wymiernego rozpoczynamy od założenia, że mianownik jest różny od zera.

b) Jeżeli skracamy ułamek musimy przy zapisywaniu odpowiedzi wziąć pod uwagę zrobione na początku założenia.

c) Pewne równania wymierne możemy rozwiązać korzystając z własności proporcjonalności.

d) Równanie wymierne postaci

$$\frac{v(x)}{w(x)} = 0$$

rozwiązujemy wyznaczając pierwiastki równania

$$v(x) = 0,$$

a następnie wybieramy z nich te, dla których $w(x) \neq 0$.

e) Równanie wymierne postaci

$$\frac{v(x)}{w(x)} = \frac{a}{b}$$

rozwiązujemy korzystając z proporcjonalności, czyli wyznaczając pierwiastki równania

$$b \cdot v(x) = a \cdot w(x),$$

a następnie wybieramy te, dla których $w(x) \neq 0$.

FLESZ

Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x}{x-2} = 2$

b) $\frac{x}{x-4} + x = 9$

c) $\frac{x}{x-1} + \frac{3}{x+1} = 3$

d) $\frac{x^2+x-6}{x^2-4} = 1$

Rozwiązanie.

a) Ustalmy dziedzinę równania $\frac{x}{x-2} = 2$,
$D = \{x \in R: x \neq 2\}$

Przekształcając mamy:

$$\frac{x}{x-2} - 2 = 0$$

$$\frac{x}{x-2} - \frac{2(x-2)}{x-2} = 0$$

$$\frac{x-2x+4}{x-2} = 0$$

$$\frac{-x+4}{x-2} = 0$$

$$-x+4 = 0$$

$$x = 4 \ \in D$$

b) Ustalmy dziedzinę równania $\frac{x}{x-4} + x = 9$,
$D = \{x \in R: x \neq 4\}$.
Przekształcając mamy:

$$\frac{x}{x-4} + x = 9$$

$$\frac{x}{x-4}+\frac{x(x-4)}{x-4}-\frac{9(x-4)}{x-4}=0$$

$$\frac{x+x^2-4x-9x+36}{x-4}=0$$

$$\frac{x^2-12x+36}{x-4}=0$$

$$x^2-12x+36=0$$

$\Delta= b^2-4ac=144-144=0$, wtedy $x=\frac{-b}{2a}=6\ \in\ D$

c) Ustalmy dziedzinę równania $\frac{x}{x-1}+\frac{3}{x+1}=3$,
$D=\{x\in R: x\neq 1\ i\ x\neq -1\}$,
Przekształcając mamy:

$$\frac{x}{x-1}+\frac{3}{x+1}-3=0$$

$$\frac{x(x+1)+3(x-1)-3(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)}=0$$

$$\frac{x^2+x+3x-3-3x^2+3}{(x-1)(x+1)}=0$$

$$\frac{-2x^2+4x}{(x-1)(x+1)}=0$$

$$-2x^2+4x=0$$

$$-2x(x-2)=0$$

Zatem $x=0\ \in D,\ x=2\ \in D$.

d) Ustalmy dziedzinę równania , $\frac{x^2+x-6}{x^2-4}=1$.
$D=\{x\in R: x\neq 2\ i\ x\neq -2\}$.

Przekształcając mamy:

$$\frac{x^2+x-6}{x^2-4}-1=0$$

$$\frac{x^2+x-6}{x^2-4}-\frac{x^2-4}{x^2-4}=0$$

$$\frac{x^2+x-6-x^2+4}{x^2-4}=0$$

$$\frac{x-2}{x^2-4}=0$$

$$x-2=0$$

$$x=2 \ \notin D$$

Rozwiązaniem jest zbiór pusty.

2.5.2 Nierówności wymierne

DEFINICJA

Nierówność postaci

$$\frac{G(x)}{W(x)} > 0 \text{ lub } \frac{G(x)}{W(x)} < 0 \text{ lub } \frac{G(x)}{W(x)} \geq 0 \text{ lub } \frac{G(x)}{W(x)} \leq 0$$

gdzie G oraz W są wielomianami $(W(x) \neq 0)$ nazywamy nierównością wymierną.

FLESZ

a) Rozwiązywanie nierówności wymiernej rozpoczynamy od założenia, że mianownik jest różny od zera.
b) Jeżeli skracamy ułamek musimy przy zapisywaniu odpowiedzi wziąć pod uwagę zrobione na początku założenia.
c) Nierówność wymierna postaci

$$\frac{G(x)}{W(x)} > 0$$

jest równoważna nierówności $G(x)W(x) > 0$.
d) Nierówność wymierna postaci

$$\frac{G(x)}{W(x)} < 0$$

jest równoważna nierówności $G(x)W(x) < 0$.
e) Nierówność wymierna postaci

$$\frac{G(x)}{W(x)} \geq 0$$

jest równoważna nierówności $G(x)W(x) \geq 0$, gdzie $W(x) \neq 0$.
f) Nierówność wymierna postaci

$$\frac{G(x)}{W(x)} \leq 0$$

jest równoważna nierówności $G(x)W(x) \leq 0$, gdzie $W(x) \neq 0$.

FLESZ

Rozwiąż nierówność $\frac{x+1}{x} < 0$.

Rozwiązanie. Zaczynamy od założenia, że mianownik musi być różny od 0. Zatem $D: x \in R\backslash\{0\}$. Wyjściowa nierówność $\frac{x+1}{x} < 0$ jest równoważna nierówności $(x+1)x < 0$. Zatem $x \in (-1,0)$.

FLESZ

Rozwiąż nierówność $\frac{2x}{x-1} > 1$.

Rozwiązanie. Zaczynamy od założenia, że mianownik musi być różny od 0. Skoro $x - 1 \neq 0$, to $D: x \in R\backslash\{1\}$.

Wyjściowa nierówność $\frac{2x}{x-1} > 1$ jest równoważna nierówności $\frac{2x}{x-1} - 1 > 0$, czyli $\frac{x+1}{x-1} > 0$. Zatem należy rozwiązać nierówność $(x+1)(x-1) > 0$. Rozwiązaniem są $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

FLESZ

Rozwiąż nierówność $\frac{4}{x^2} - \frac{3}{x} \geq 1$.

Rozwiązanie. Zaczynamy od założenia, że mianowniki wyrażeń muszą być różne od 0. Czyli $D: x \in R\backslash\{0\}$.

Wyjściowa nierówność $\frac{4}{x^2} - \frac{3}{x} \geq 1$. jest równoważna nierówności $\frac{4-3x-x^2}{x^2} \geq 0$. Zatem należy rozwiązać nierówność $(-x^2 - 3x + 4)x^2 \geq 0$. Wielomian x^2 przyjmuje dla każdego $x \in D$ wartości większe od 0. Zatem należy rozwiązać nierówność $-x^2 - 3x + 4 \geq 0$ oraz uwzględnić zbiór D. Nierówność $-x^2 - 3x + 4 \geq 0$ można przedstawić w postaci $x^2 + 3x - 4 \leq 0$ (gdzie $\Delta = 25$, $x_1 = -4$, $x_2 = 1$), której rozwiązaniem jest $x \in \langle -4,1 \rangle$. Po uwzględnieniu dziedziny otrzymujemy rozwiązanie: $x \in \langle -4, 0) \cup (0, 1\rangle$.

2.6 Proporcjonalność odwrotna

DEFINICJA

Funkcję postaci

$$y = \frac{a}{x}$$

gdzie $a > 0$ oraz $x \in R_+$ nazywamy proporcjonalnością odwrotną. Współczynnik a nazywamy współczynnikiem proporcjonalności, a wielkości x oraz y nazywamy odwrotnie proporcjonalnymi.

WŁASNOŚĆ

Wzór proporcjonalności odwrotnej możemy zapisać w postaci $x \cdot y = a$, gdzie $a > 0$ oraz $x \in R_+$

FLESZ

Uzupełnij tabelę wiedząc, że dane są odwrotnie proporcjonalne. Wyznacz współczynnik proporcjonalności.

Wielkość dana	9	6		$\frac{1}{3}$	
Wielkość odwrotnie proporcjonalna	$\frac{1}{3}$		4		1

Odpowiedz.

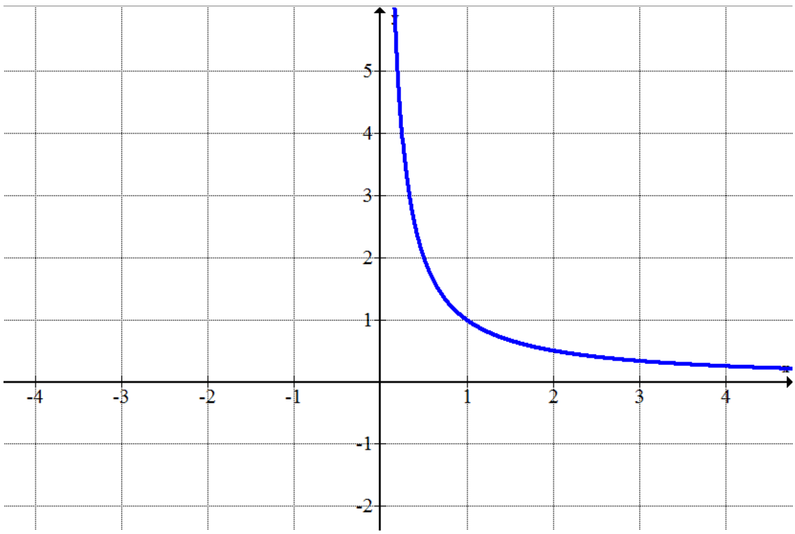
Wielkość dana	9	6	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{3}$	3
Wielkość odwrotnie proporcjonalna	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	4	9	1

$a = 3.$

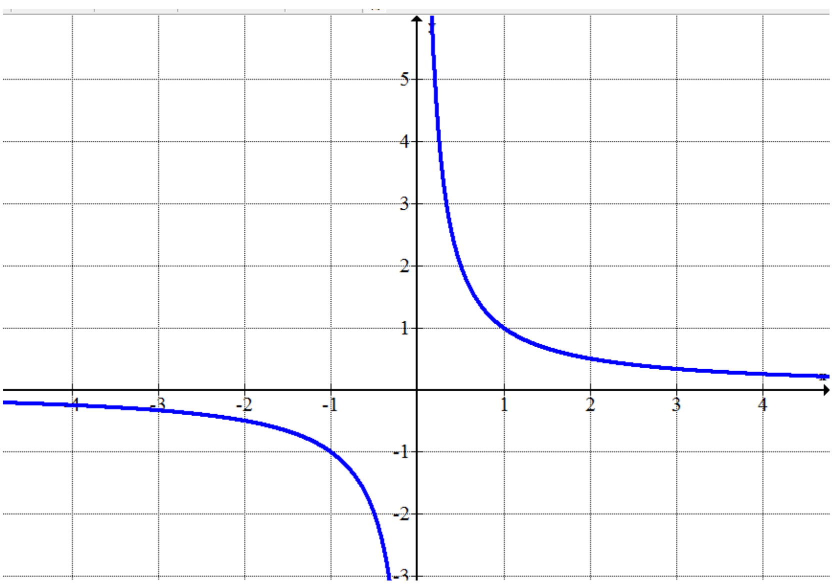
FLESZ

Czy wykres przedstawia proporcjonalność odwrotną.

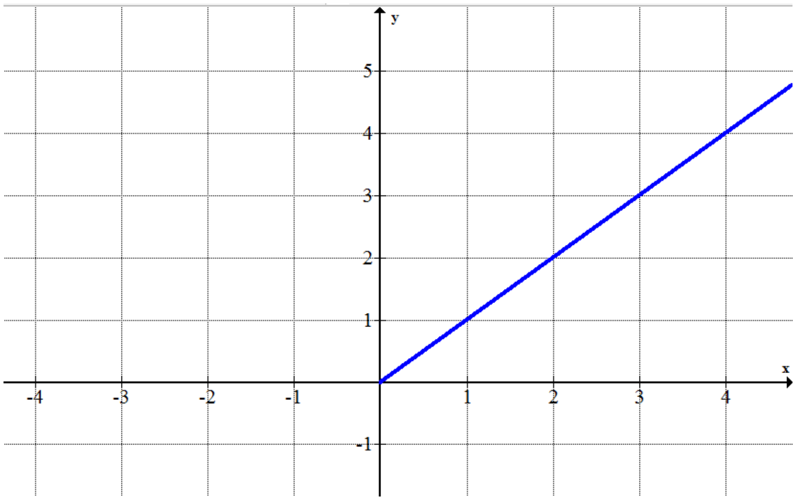
a)



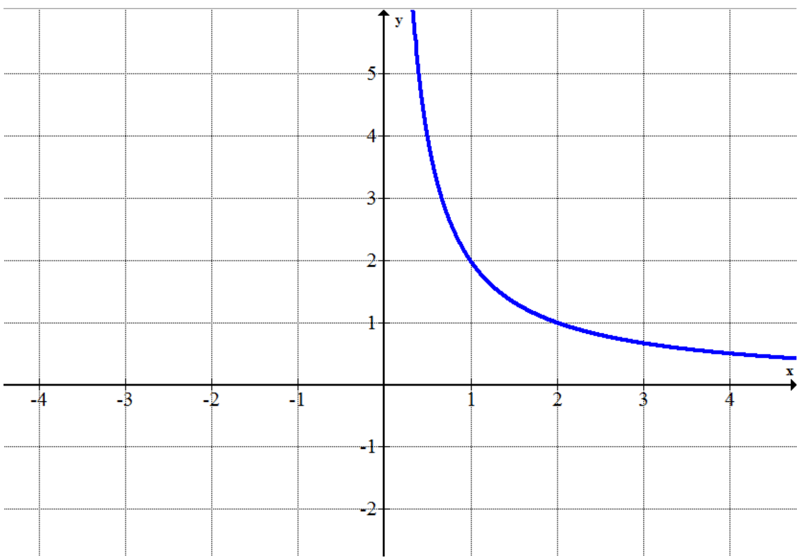
b)



c)



d)



Odpowiedź. a)Tak b) Nie c) Nie d) Tak

2.7 Funkcja wykładnicza

DEFINICJA

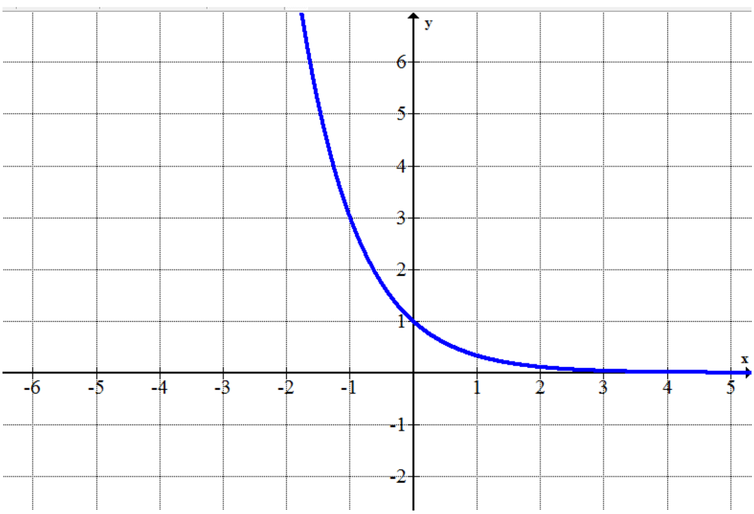
Funkcję określoną dla $x \in R$ postaci

$$f(x) = a^x$$

gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$, nazywamy funkcją wykładniczą. Zbiorem wartości funkcji jest zbiór R_+.

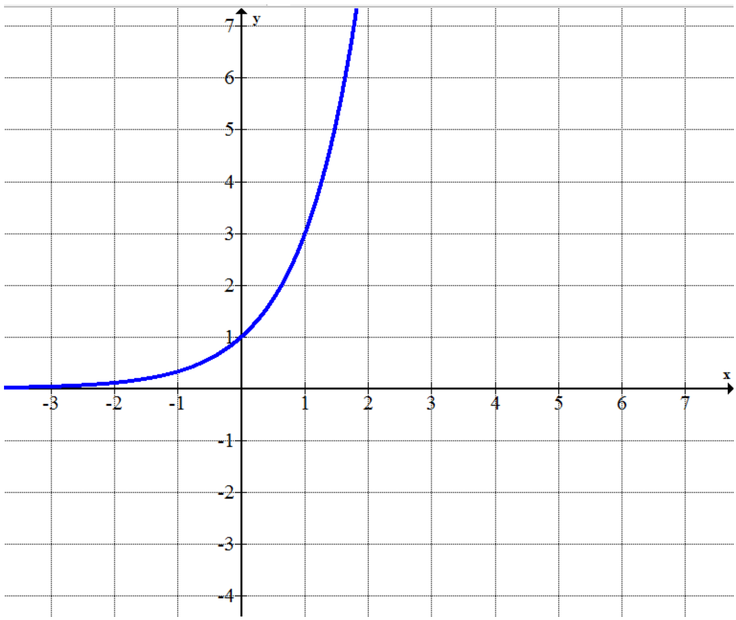
Dla $a \in (0,1)$ funkcja wykładnicza jest malejąca.

Przykład. Wykres funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$



Dla $a \in (1, \infty)$ funkcja wykładnicza jest rosnąca.

Przykład. Wykres funkcji $f(x) = 3^x$



FLESZ

Przedstaw własności funkcji:

a) $f(x) = 3^x$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

Rozwiązanie.

a) Dziedzina: R.
   Zbiór wartości: $x > 0$.
   Miejsca zerowe: brak.
   Monotoniczność: funkcja rosnąca.

b) Dziedzina: R.
   Zbiór wartości: $x > 0$.
   Miejsca zerowe: brak.
   Monotoniczność: funkcja malejąca.

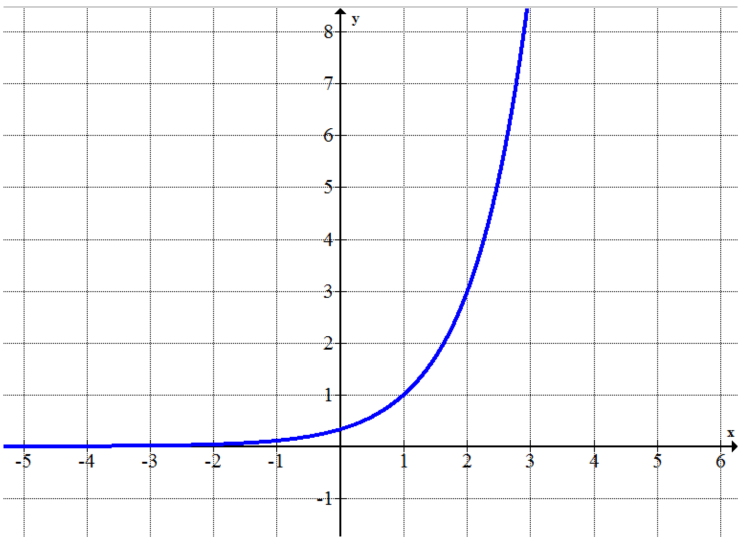
FLESZ

Narysuj wykres funkcji:

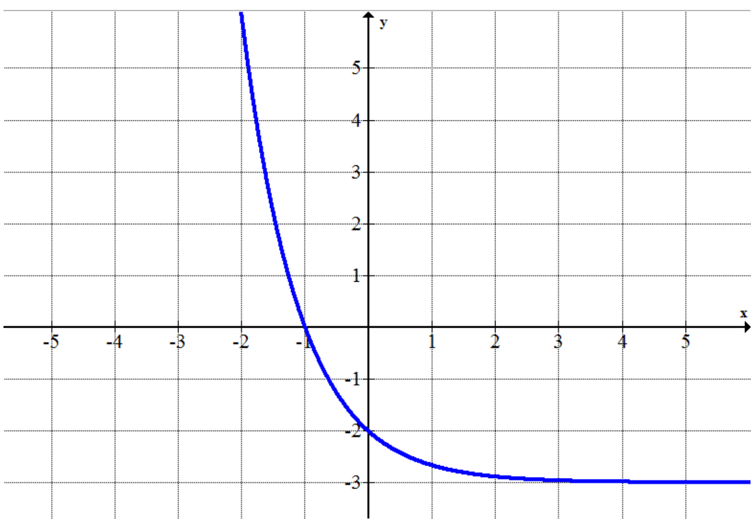
a) $f(x) = 3^{x-1}$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$-3

a)



b)



2.8 Funkcja logarytmiczna

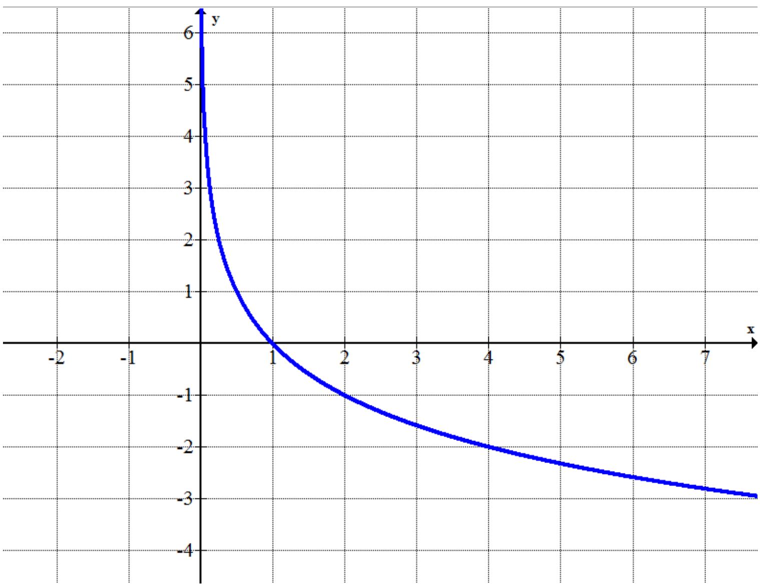
DEFINICJA

Funkcję określoną dla $x \in (0, \infty)$ postaci

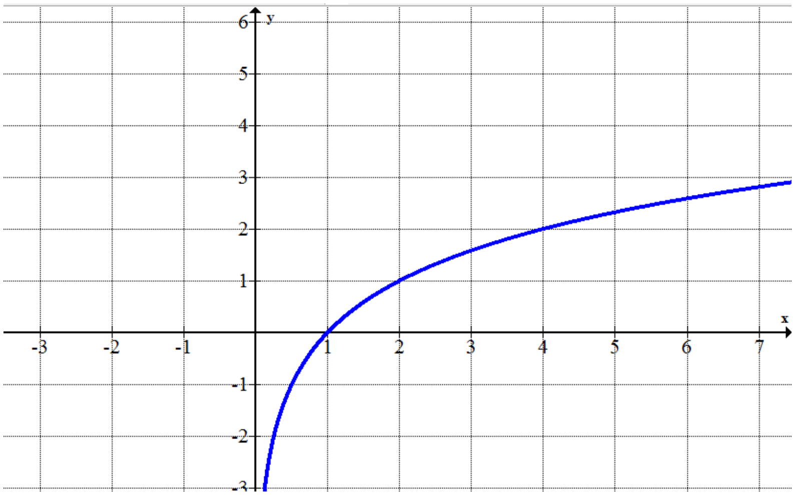
$$f(x) = \log_a x$$

gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$, nazywamy funkcją logarytmiczną o podstawie a. Zbiorem wartości funkcji jest zbiór R.

Dla $a \in (0,1)$ funkcja logarytmiczna jest malejąca.



Dla $a \in (1, \infty)$ funkcja logarytmiczna jest rosnąca.



Wykres funkcji logarytmicznej postaci $f(x) = \log_a x$ ma miejsce zerowe $x = 1$.

Często funkcję logarytmiczną nazywa się krótko logarytmem, chociaż są to różne pojęcia: logarytm liczby to wartość funkcji logarytmicznej dla ustalonego argumentu.

Ponadto funkcja logarytmiczna przesunięta o wektor $\vec{w} = [p, q]$ jest także funkcją logarytmiczną. Funkcja ta będzie wówczas postaci $f(x) = \log_a(x - p) + q$.

FLESZ

Przedstaw własności funkcji:

a) $f(x) = \log_2 x$
b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

Rozwiązanie.

a) Dziedzina: R_+.Zbiór wartości: R. Miejsca zerowe: $x = 1$. Monotoniczność: funkcja rosnąca.
b) Dziedzina: R_+. Zbiór wartości: R. Miejsca zerowe: $x = 1$. Monotoniczność: funkcja malejąca.

FLESZ

Ustal wartość parametru rzeczywistego k, jeżeli wiadomo, że funkcja $f(x) = \log_{k^2-1} x$ jest malejąca.

Rozwiązanie. Funkcja logarytmiczna $f(x) = \log_a x$ jest malejąca, gdy $a \in (0,1)$. Czyli funkcja $f(x) = \log_{k^2-1} x$ jest malejąca, gdy $k^2 - 1 > 0$ i $k^2 - 1 < 1$. Rozwiążmy kolejno

$$k^2 - 1 > 0$$

$$(k-1)(k+1) > 0$$

$$k \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

oraz

$$k^2 - 1 < 1$$

$$k^2 - 2 < 0$$

$$\left(k - \sqrt{2}\right)\left(k + \sqrt{2}\right) < 0$$

$$k \in \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\,\right).$$

Czyli rozwiązaniem są $k \in (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$.

3 Ciągi liczbowe

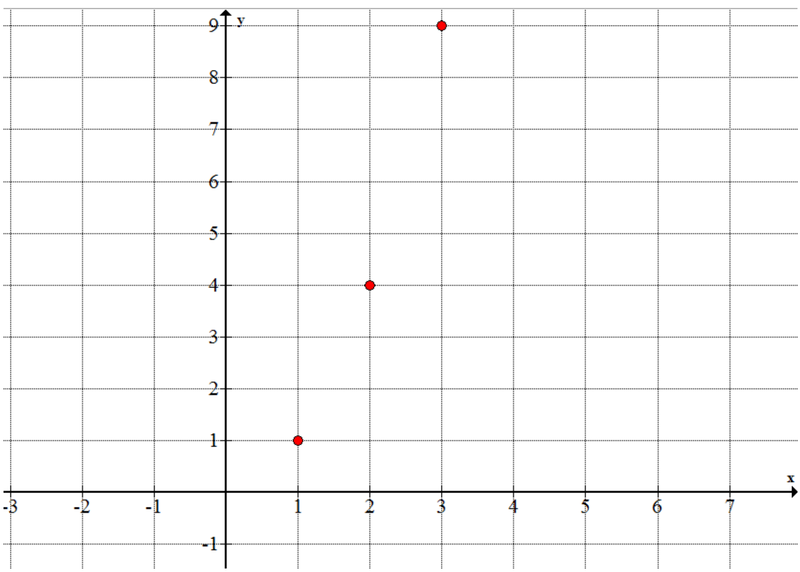
DEFINICJA

Ciągiem nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych dodatnich. Ciąg, którego wyrazami są liczby nazywamy ciągiem liczbowym.

FLESZ

Narysuj wykres trzech pierwszych wyrazów ciągu $a_n = n^2$.

Rozwiązanie.



FLESZ

Sumę początkowych n wyrazów pewnego ciągu, czyli $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ oznaczamy jako S_n.

Zatem

a) $S_1 = a_1$
b) $S_2 = a_1 + a_2$
c) $S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

FLESZ

Jeżeli znamy sumę początkowych n wyrazów oraz $n-1$ wyrazów ciągu, możemy wyznaczyć wartość wyrazu a_n , korzystając ze wzoru : $a_n = S_n - S_{n-1}$.

FLESZ

Suma ciągu wyraża się wzorem $S_n = n^3 + 2$. Wyznacz a_3.

Rozwiązanie. $a_3 = S_3 - S_2 = 29 - 10 = 19$.

3.1 Ciąg arytmetyczny

DEFINICJA

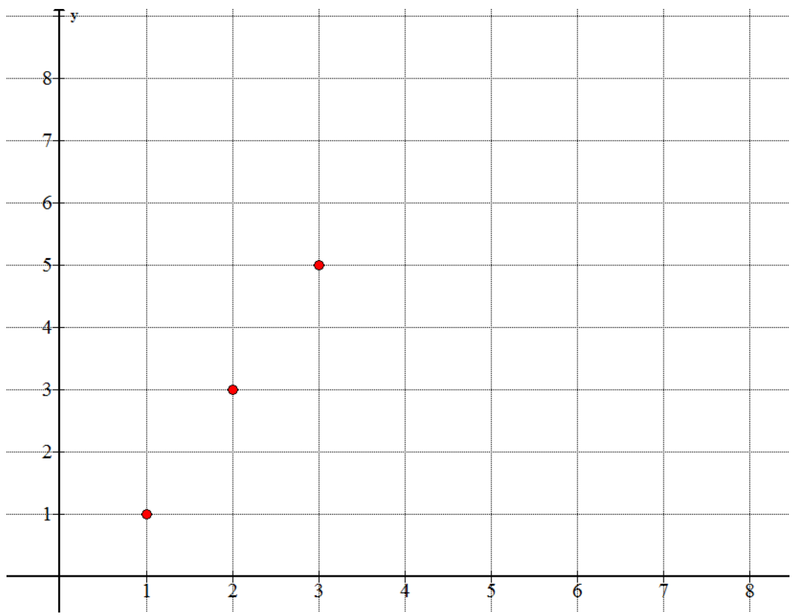
Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy ciągiem arytmetycznym, jeżeli istnieje liczba r taka, że

$$a_{n+1} = a_n + r$$

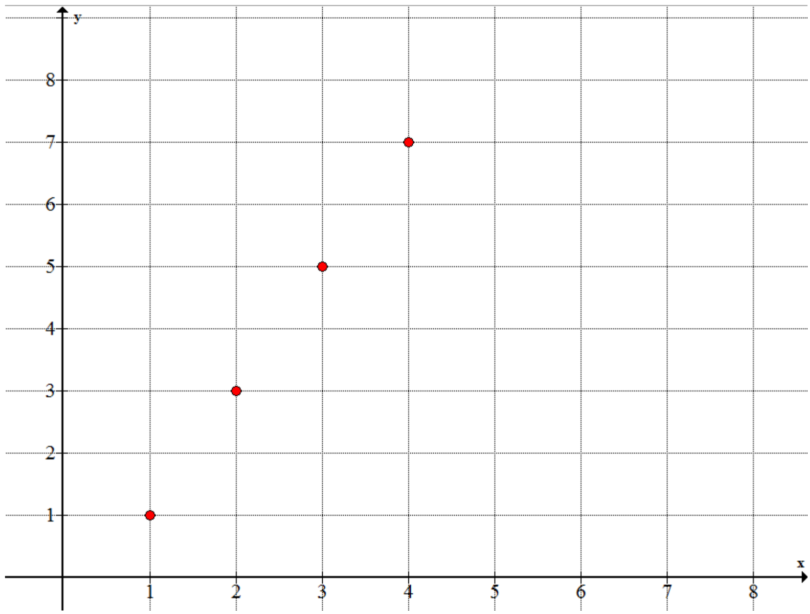
dla każdej liczby naturalnej dodatniej n. Liczbę r nazywamy różnicą ciągu.

FLESZ

Na wykresie zaznaczono trzy pierwsze wyrazy ciągu arytmetycznego. Zaznacz jego czwarty wyraz.



Rozwiązanie.



WŁASNOŚCI

a) Różnicę ciągu arytmetycznego wyznaczymy ze wzoru: $r = a_{n+1} - a_n$.

b) Ogólny wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r wyraża się wzorem $a_n = a_1 + (n-1)r$.

c) Zauważmy, że n-ty wyraz (z wyjątkiem pierwszego) jest średnią arytmetyczną wyrazów z nim sąsiadujących $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$.

d) Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego jest równa średniej arytmetycznej wyrazu pierwszego i ostatniego pomnożonej przez liczbę wyrazów, a więc obliczamy ją ze wzoru $S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$.

e) Jeśli do powyższego wzoru na sumę wstawimy w miejsce a_n wzór na wyraz ogólny $a_n = a_1 + (n-1)r$, to otrzymamy $S_n = \frac{2a_1+(n-1)r}{2} \cdot n$.

FLESZ

Wyznacz wzór ciągu arytmetycznego, jeśli $a_1 = 3, r = -2$.

Rozwiązanie.

$$a_n = a_1 + (n-1)r = 3 + (n-1) \cdot (-2) = -2n + 5.$$

FLESZ

W ciągu arytmetycznym $a_2 = 8$, $a_4 = 12$. Wyznacz różnicę ciągu.

Rozwiązanie.

$$a_4 - a_2 = a_1 + 3r - (a_1 + r) = 2r = 12 - 8 = 4,$$

Zatem $r = 2$.

FLESZ

Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, jeśli $a_1 = 2, r = 3$.

Rozwiązanie.

$$S_{10} = \frac{2 \cdot 2 + (10-1) \cdot 3}{2} \cdot 10 = 155.$$

3.2 Ciąg geometryczny

DEFINICJA

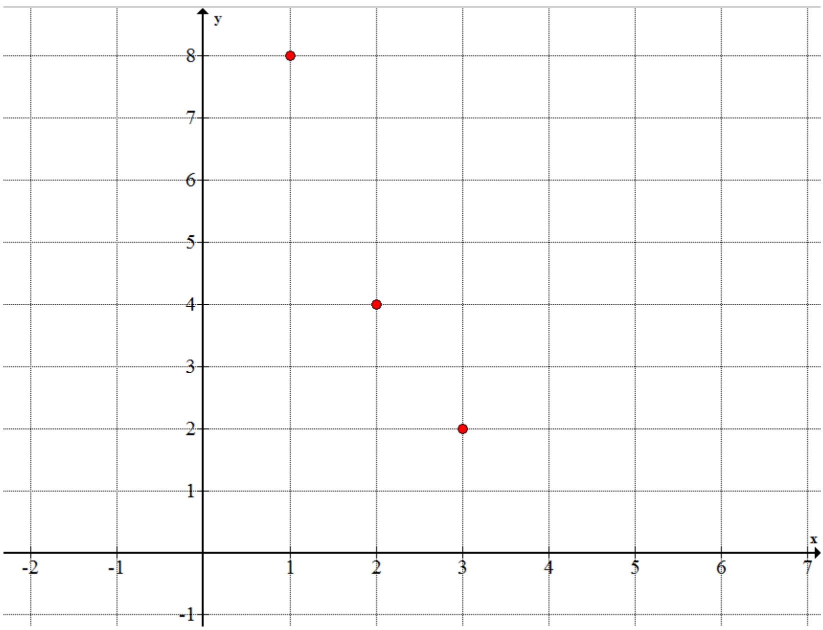
Ciąg liczbowy (a_n), nazywamy ciągiem geometrycznym, jeżeli istnieje taka liczba q, że

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

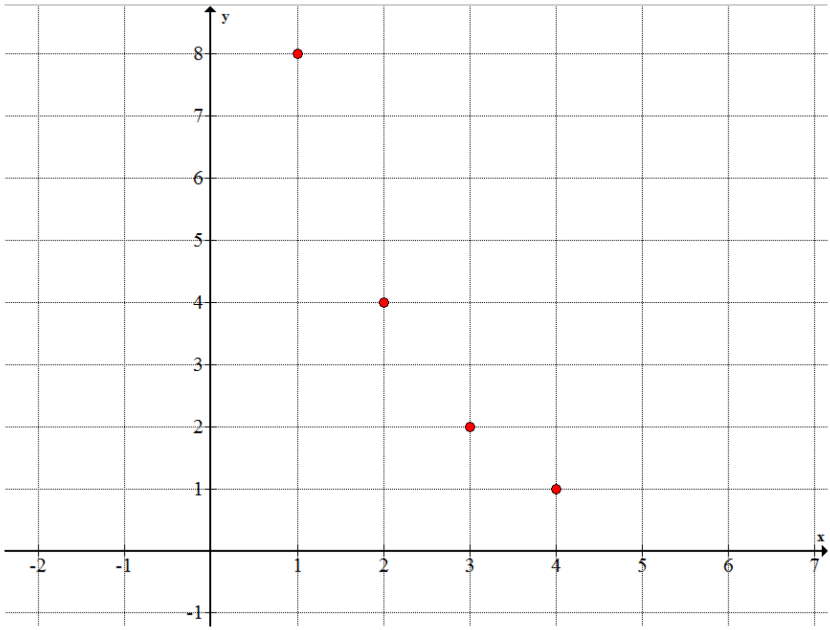
dla każdej liczby naturalnej dodatniej n. Liczbę q nazywamy ilorazem ciągu.

FLESZ

Na wykresie zaznaczono trzy pierwsze wyrazy ciągu geometrycznego. Zaznacz czwarty wyraz tego ciągu.



Rozwiązanie.



WŁASNOŚCI

a) W ciągu geometrycznym, o wyrazach różnych od zera, stosunek dowolnego wyrazu do wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego jest stały $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$.

b) Jeżeli (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q, to $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

c) W przypadku, gdy ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o wyrazach dodatnich, to każdy wyraz oprócz pierwszego jest średnią geometryczną wyrazów sąsiednich $a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$.

d) Sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, w którym iloraz q jest różny od jeden obliczamy ze wzoru $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, \ q \neq 1$.

e) W przypadku, gdy $q = 1$ ciąg geometryczny jest stały, to znaczy wszystkie jego wyrazy mają taka samą wartość. W tym przypadku sumę n początkowych wyrazów ciągu obliczamy ze wzoru $S_n = n \cdot a_1, \ q = 1$.

FLESZ

Wyznacz wzór ciągu geometrycznego, jeśli $a_1 = 2$, q$= -1$.

Rozwiązanie.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot (-1)^{n-1}$$

FLESZ

W ciągu geometrycznym $a_2 = 3$, $a_4 = 12$. Wyznacz iloraz ciągu.

Rozwiązanie.

$$\frac{a_4}{a_2} = \frac{a_1 \cdot q^3}{a_1 \cdot q} = q^2 = \frac{12}{3} = 4$$

Zatem $q = 2$, $q = -2$.

FLESZ

Oblicz sumę trzech początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, jeśli $a_1 = 2$, $q = 2$.

Rozwiązanie.

$$S_3 = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 2 \cdot \frac{1-2^3}{-1} = 14.$$

3.3 Ciąg określony rekurencyjnie

DEFINICJA

Ciąg a_n możemy określić podając wyraz pierwszy (lub kilka początkowych wyrazów) oraz podając wzór na wyraz a_{n+1}w zależności od poprzednich wyrazów. Jest to rekurencyjny sposób określenia ciągu.

Podanie ogólnego wzoru na podstawie wzoru określonego rekurencyjnie może być bardzo trudne lub wręcz nawet niemożliwe. Z kolei z ogólnego wzoru możemy otrzymać opisać go rekurencyjnie.

FLESZ

Zdefiniuj rekurencyjnie wzór ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ (czyli n silnia), gdzie $0! = 1$.

Rozwiązanie. Dla $n \geq 0$ mamy $\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = n!\,(n+1) \end{cases}$. Zatem dla $n \geq 0$ mamy $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = a_n(n+1) \end{cases}$.

FLESZ

Dla $n \geq 1$ mamy ciąg określony rekurencyjnie $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n - 3n + 1 \end{cases}$. Podaj piąty wyraz tego ciągu.

Rozwiązanie. Skoro $a_1 = 1$, to trzymujemy kolejno

$$a_2 = 1 - 3 + 1 = -1,$$

$$a_3 = -1 - 3 \cdot 2 + 1 = -6,$$

$$a_4 = -6 - 3 \cdot 3 + 1 = -14,$$

$$a_5 = -14 - 3 \cdot 4 + 1 = -25.$$

FLESZ

Dla $n \geq 2$ mamy ciąg określony rekurencyjnie $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = a_n + 2 \end{cases}$. Podaj wyraz ogólny tego ciągu.

Rozwiązanie. Skoro $a_{n+1} - a_n = 2$, to oznacza, że mamy do czynienia z ciągiem arytmetycznym o różnicy $r = 2$ oraz wyrazie pierwszym 5. Zatem

$$a_n = a_1 + (n-1)r = 5 + (n-1)2 = 2n + 3.$$

3.4 Granica ciągu liczbowego

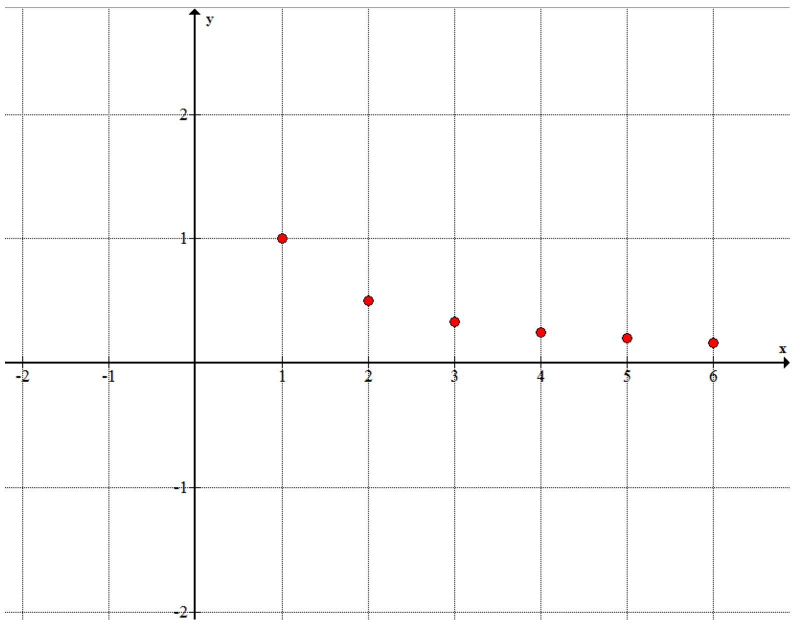
DEFINICJA

Intuicyjne pojecie granicy.

Niech (a_n) będzie ciągiem liczbowym. Liczbę g nazywa się granicą ciągu (a_n), jeżeli dla coraz większych liczb naturalnych n, wartości ciągu zbliżają się do pewnej liczby g.

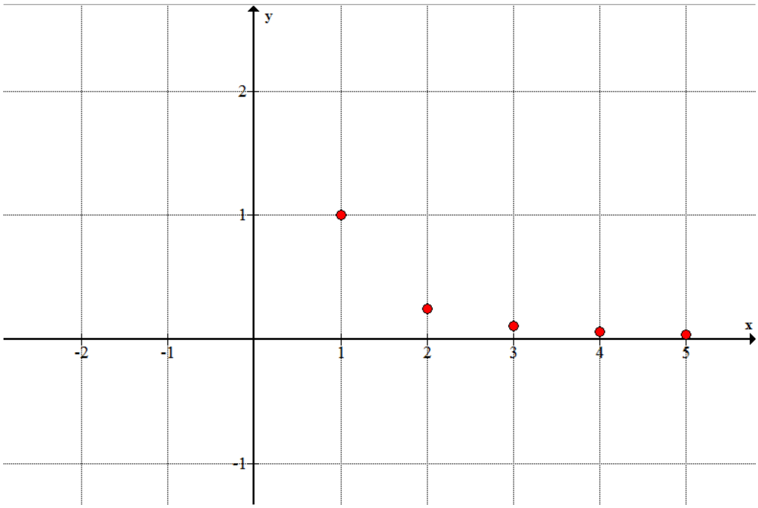
FLESZ

Granicą ciągu $\frac{1}{n}$ jest równa 0, co zapisujemy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$



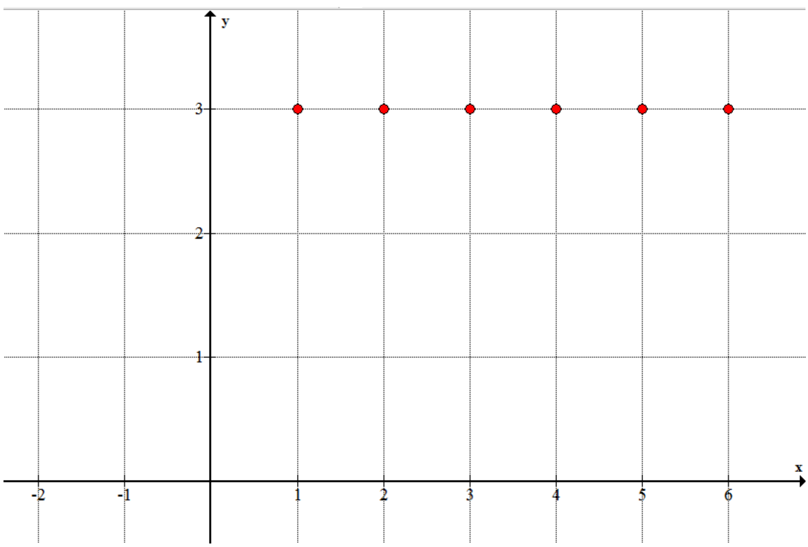
FLESZ

Granicą ciągu $\frac{1}{n^2}$ jest równa 0, co zapisujemy $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$



FLESZ

Granicą ciągu stałego $a_n = 3$ jest równa 3, co zapisujemy $\lim_{n\to\infty} 3 = 3$



DEFINICJA

Ciągi mające granice nazywa się zbieżnymi.

FLESZ

Są także ciągi, które nie są zbieżne.

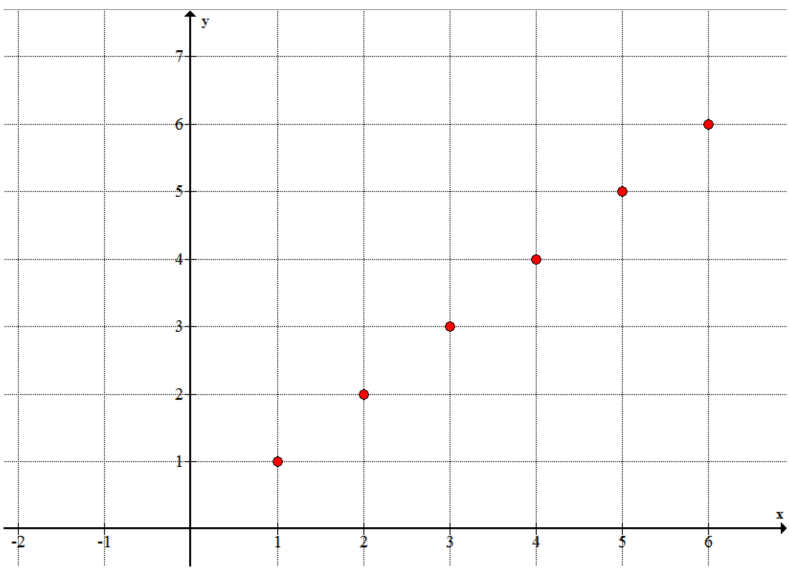
DEFINICJA

Intuicyjne pojecie ciągu rozbieżnego do nieskończoności.

Niech (a_n) będzie ciągiem liczbowym. Mówimy, że ciągu (a_n) jest rozbieżny do nieskończoności, jeżeli dla coraz większych liczb naturalnych n, wartości ciągu dążą do nieskończoności.

FLESZ

Ciąg $a_n = n$ jest rozbieżny do nieskończoności, co zapisujemy $\lim_{n\to\infty} n = \infty$.



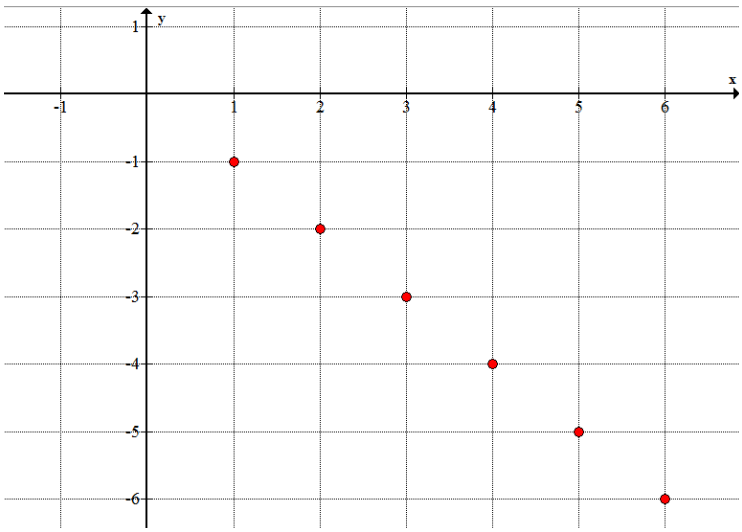
DEFINICJA

Intuicyjne pojecie ciągu rozbieżnego do minus nieskończoności.

Niech (a_n) będzie ciągiem liczbowym. Mówimy, że ciągu (a_n) jest rozbieżny do minus nieskończoności, jeżeli dla coraz większych liczb naturalnych n, wartości ciągu dążą do minus nieskończoności.

FLESZ

Ciąg $a_n = -n$ jest rozbieżny do minus nieskończoności, co zapisujemy $\lim_{n\to\infty} -n = -\infty$.



TWIERDZENIE – DZIAŁANIA ARYTMETYCZNE NA CIĄGACH ZBIEŻNYCH

Jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ oraz } \lim_{n\to\infty} b_n = b,$$

to

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}, \text{o ile } b \neq 0$$

UWAGA

Jeżeli $a \in R\setminus\{0\}$, $m \in N$, to

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n^m} = 0\ .$$

FLESZ

Oblicz granicę ciągu

a) $a_n = \frac{2}{n} + 7$
b) $a_n = \frac{5}{n} - \frac{3}{n^2} - 4$

Rozwiązanie.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n} + 7\right) = 0 + 7 = 7$
b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n} - \frac{3}{n^2} - 4\right) = 0 - 0 - 4 = -4$

3.5 Szereg geometryczny

DEFINICJA

Szeregiem geometrycznym nazywamy szereg postaci

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$$

gdzie $n \in N$. Wówczas a nazywamy pierwszym wyrazem szeregu geometrycznego a q ilorazem szeregu geometrycznego.

Ciąg nieskończony (S_n) o wyrazie ogólnym

$$S_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} aq^{k-1}.$$

gdzie $n, k \in N$, nazywamy ciągiem sum częściowych. Ciąg sum częściowych może być ciągiem zbieżnym o granicy S. Mówimy wtedy, że szereg geometryczny ma sumę S.

Załóżmy, że $a \neq 0$. Szereg geometryczny $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy wartość bezwzględna jego ilorazu q jest mniejsza od 1 (czyli $|q| < 1$).

Suma S tego szeregu dana jest wzorem: $S = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}$.

Jeśli $a = 0$, to $S = 0$.

FLESZ

Wyznacz sumę szeregu geometrycznego

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$
b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5^{n-1}}$

Rozwiązanie.

a) Skoro $|q| = \frac{1}{2} < 1$, $a = 1$, to $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$
b) Skoro $|q| = \frac{1}{5} < 1$, $a = 3$, to $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5^{n-1}} = \frac{3}{1-\frac{1}{5}} = \frac{15}{4}$

3.6 Kredyty i lokaty

DEFINICJA

Dopisywanie odsetek do kapitału nazywamy kapitalizacją odsetek lub krótko kapitalizacją. Czas, po jakim następuje kapitalizacja nazywamy okresem kapitalizacji. Jeżeli w kolejnych latach odsetki są dopisywane do kapitału powiększonego o wcześniej zgromadzone odsetki, to mówimy że kapitał został złożony na procent składany.

FLESZ

Państwo Kowalscy złożyli lokatę w wysokości 2000 zł w Banku. Oprocentowanie roczne lokaty wynosi 5% i kapitalizacja następuje po roku. Jaką kwotę będą mieli po dwóch latach?

Rozwiązanie.

$2000 \cdot 5\% = 100\ zł$ - Odsetki po roku.

$2000 + 100 = 2100\ zł$ - Kapitał po roku.

$2100 \cdot 5\% = 105\ zł$ - Odsetki po drugim roku.

$2100 + 105 = 2205\ zł$- Kapitał po drugim roku.

WŁASNOŚCI

a) Kapitał w wysokości K złożony na rok, gdy oprocentowanie roczne wynosi r, wynosi: $K(1 + r)$.
b) Kapitał w wysokości K złożony na n lat, na procent składany, gdy oprocentowanie roczne wynosi r, po n latach wynosi: $K(1 + r)^n$.
c) Jeżeli kapitał K złożymy na n lat w banku, gdy oprocentowanie roczne wynosi $p\%$, to kapitał końcowy wynosi: $K\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$.

FLESZ

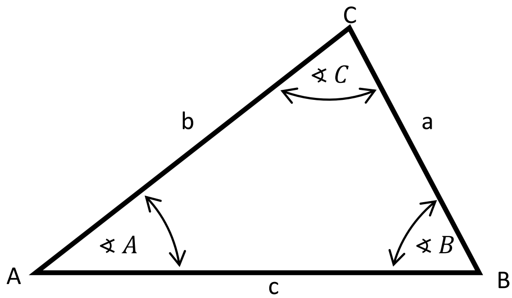
Początkowy kapitał wynosi 100000 zł. Oblicz kapitał po 3 latach, jeśli oprocentowanie roczne w Banku wynosi 10% i odsetki kapitalizowane są co roku.

Rozwiązanie. Korzystając ze wzoru mamy: $K\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = 100000\left(1 + \frac{10}{100}\right)^3 = 133100\ zł.$

4 Trygonometria

4.1 Wprowadzenie do trygonometrii

Trójkąt to wielokąt, który ma trzy boki. Boki będziemy oznaczali a, b, c. Wierzchołki A, B, C a kąty leżące przy odpowiednich wierzchołkach będziemy oznaczali $\sphericalangle A, \sphericalangle B, \sphericalangle C$.



DEFINICJA

a) Kąt ostry, to kąt o mierze mniejszej od 90^0,
b) kąt prosty, to kąt o mierze równej 90^0,
c) kąt rozwarty, to kąt o mierze większej od 90^0 i mniejszej od 180^0.

TWIERDZENIE

Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta jest równa 180^0.

FLESZ

Kąty w trójkącie mają odpowiednio miary: $\sphericalangle A = x + 25^0, \sphericalangle B = 6x + 5^0, \sphericalangle C = 3x$. Wyznacz x.

Rozwiązanie. $x + 25^0 + 6x + 5^0 + 3x = 180^0$, zatem $10x = 150^0$, stąd $x = 15^0$.

TWIERDZENIE

Odcinków długościach a, b, c można zbudować trójkąt tylko wtedy, gdy $a + b > c$, gdzie c jest długością najdłuższego z tych odcinków.

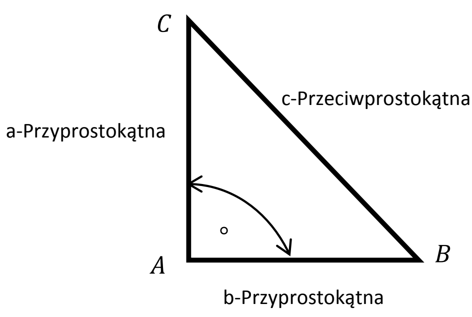
FLESZ

Dane są odcinki o długościach: $a = 2, b = 7, c = 10$. Czy z tych odcinków da się zbudować trójkąt? Odpowiedź uzasadnij.

Odpowiedź. Ponieważ $2 + 7 \ngtr 10$, zatem z tych boków nie da się zbudować trójkąta.

DEFINICJA

Trójkąt prostokątny, to taki trójkąt, którego jeden z kątów wewnętrznych jest prosty. Dwa boki trójkąta wyznaczające ramiona kąta prostego nazywane są przyprostokątnymi, trzeci bok przeciwprostokątną.



TWIERDZENIE PITAGORASA (PROSTE)

W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej: $a^2 + b^2 = c^2$.

FLESZ

W trójkącie prostokątnym długości przyprostokątnych mają odpowiednio długości 12 i 5. Wyznacz długość przeciwprostokątnej.

Rozwiązanie. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa mamy: $12^2 + 5^2 = 169$, więc $c = \sqrt{169} = 13$.

TWIERDZENIE PITAGORASA (ODWROTNE)

Jeżeli suma kwadratów długości dwóch boków pewnego trójkąta jest równa kwadratowi długości trzeciego boku, to trójkąt ten jest prostokątny.

FLESZ

Długości boków trójkąta mają odpowiednio długości: $9, 12, 15$. Sprawdź, czy trójkąt jest prostokątny.

Rozwiązanie. Ponieważ $9^2 + 12^2 = 15^2$, zatem trójkąt jest prostokątny.

WŁASNOŚCI

a) Długość przekątnej kwadratu o boku długości a wynosi $a\sqrt{2}$.
b) Wysokość trójkąta równobocznego o boku długości a wynosi $a\frac{\sqrt{3}}{2}$.

FLESZ

Długość przekątnej kwadratu wynosi 8. Wyznacz długość boku kwadratu.

Rozwiązanie. $a\sqrt{2} = 8$. Stąd $a = 4\sqrt{2}$.

FLESZ

Długość boku trójkąta równobocznego wynosi 6. Wyznacz jego wysokość.

Rozwiązanie. Korzystając ze wzoru otrzymujemy: $h = a\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

DEFINICJA

W trójkącie prostokątnym stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta do długości przeciwprostokątnej nazywamy sinusem kąta.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}.$$

DEFINICJA

W trójkącie prostokątnym stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy kącie do długości przeciwprostokątnej nazywamy cosinusem kąta.

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

DEFINICJA

W trójkącie prostokątnym stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta do długości przyprostokątnej leżącej przy tym kącie nazywamy tangensem kąta.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}.$$

FLESZ

W trójkącie prostokątnym ABC boki mają odpowiednio długości: $|\overline{AB}| = 3, |\overline{AC}| = 4, |\overline{CB}| = 5$ oraz $\sphericalangle BCA = \alpha$. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α.

Rozwiązanie. $\sin\alpha = \frac{3}{5}, \cos\alpha = \frac{4}{5}, \operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$.

WŁASNOŚCI

a) Wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów o mierze $30^0, 45^0, 60^0$ przedstawione są w tabeli.

α	30^0	45^0	60^0
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) Dla dowolnych kątów ostrych zachodzi własność: $\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$.

FLESZ

W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna ma długość 10. Wyznacz długości pozostałych boków trójkąta, jeśli jeden z kątów ostrych ma miarę 30^0.

Rozwiązanie.

$$\sin 30^0 = \frac{a}{c} = \frac{a}{10}$$

Ponieważ

$$\sin 30^0 = \frac{1}{2}$$

Zatem

$$\frac{1}{2} = \frac{a}{10}$$

Więc

$$a = 5$$

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa mamy:

$$5^2 + b^2 = 10^2$$

Zatem $b = 5\sqrt{3}$.

WŁASNOŚCI

Dla dowolnych kątów ostrych zachodzą następujące równości:

a) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$,
b) $\mathrm{tg}\, \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

FLESZ

Wiadomo, że $\sin \alpha = \frac{3}{4}$, wyznacz $\cos \alpha$, $\mathrm{tg}\, \alpha$ gdzie α jest kątem ostrym.

Rozwiązanie. Korzystając z równości $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, mamy $\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$, zatem $\cos^2 \alpha = \frac{7}{16}$, więc $\cos \alpha = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$. Dla kątów ostrych $\cos \alpha > 0$, więc $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Korzystając z równości $\mathrm{tg}\, \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, mamy $\mathrm{tg}\, \alpha = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$.

WŁASNOŚCI

Dla dowolnych kątów zachodzą równości:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

FLASZ

Oblicz

a) $\sin 120^0$
b) $\cos 105^0$
c) $\sin 15^0$

Rozwiązanie.

a) $\sin 120^0 = \sin(2 \cdot 60^0) = 2\sin 60^0 \cdot \cos 60^0 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
b) $\cos 105^0 = \cos(60^0 + 45^0) = \cos 60^0 \cdot \cos 45^0 - \sin 60^0 \cdot \sin 45^0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$
c) $\sin 15^0 = \sin(45^0 - 30^0) = \sin 45^0 \cdot \cos 30^0 - \sin 30^0 \cdot \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

FLASZ

Mając dane kąty ostre α oraz β takie, że $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ oraz $\sin\beta = \frac{1}{4}$. Wyznacz wartość $\sin(\alpha+\beta)$.

Rozwiązanie. Skoro $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, to musimy zatem wyznaczyć wartości $\cos\alpha$ oraz $\cos\beta$. Korzystając ze wzoru na jedynkę trygonometryczną oraz z tego, że α oraz β są kątami ostrymi otrzymujemy

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\cos\beta = \sqrt{1-\frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

Zatem $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{15}+2\sqrt{2}}{12}$.

FLESZ

Wykaż, że jeżeli $\cos x \neq 0$, to równanie $\frac{1}{\cos x} - \cos x = \sin x \cdot \operatorname{tg} x$ jest tożsamością.

Rozwiązanie. $\frac{1}{\cos x} - \cos x = \frac{1}{\cos x} - \frac{\cos x}{1} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos x} = \frac{\sin^2 x+\cos^2 x-\cos^2 x}{\cos x} = \frac{\sin^2 x}{\cos x} = \sin x \frac{\sin x}{\cos x}$ = $\sin x \cdot \operatorname{tg} x$. Zatem podana równość jest tożsamością.

DEFINICJA

Radian (rad) jest to kąt płaski zawarty pomiędzy promieniami koła, wycinający z okręgu tego koła łuk o długości równej promieniowi.

$$1\,\text{rad} = 360°/2\pi \approx 57{,}29578°, \qquad 1° \approx 0{,}017453\,\text{rad}.$$

Kąt 180^0 (stopni) zwany półpełnym odpowiada mierze łukowej kąta o wartości π (radianów).

Zachodzą wzory: (gdzie α (radiany), β(stopnie)):

- stopniowej na radialną:

$$\alpha = \frac{\beta \cdot \pi}{180^0}$$

- radialnej na stopniową:

$$\beta = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot 360^0$$

FLESZ

Zapisz

a) 360^0
b) 180^0
c) 90^0
d) 60^0
e) 45^0
f) 30^0

za pomocą radianów.

Rozwiązanie.

a) $\alpha = \frac{360^0\pi}{180^0} = 2\pi$
b) $\alpha = \frac{180^0\pi}{180^0} = \pi$
c) $\alpha = \frac{90^0\pi}{180^0} = \frac{\pi}{2}$
d) $\alpha = \frac{60^0\pi}{180^0} = \frac{\pi}{3}$
e) $\alpha = \frac{45^0\pi}{180^0} = \frac{\pi}{4}$
f) $\alpha = \frac{30^0\pi}{180^0} = \frac{\pi}{6}$

FLESZ

Zapisz

a) $\frac{3\pi}{4}$
b) $\frac{2\pi}{3}$
c) $\frac{5\pi}{6}$
d) 3π
e) 4π

za pomocą stopni.

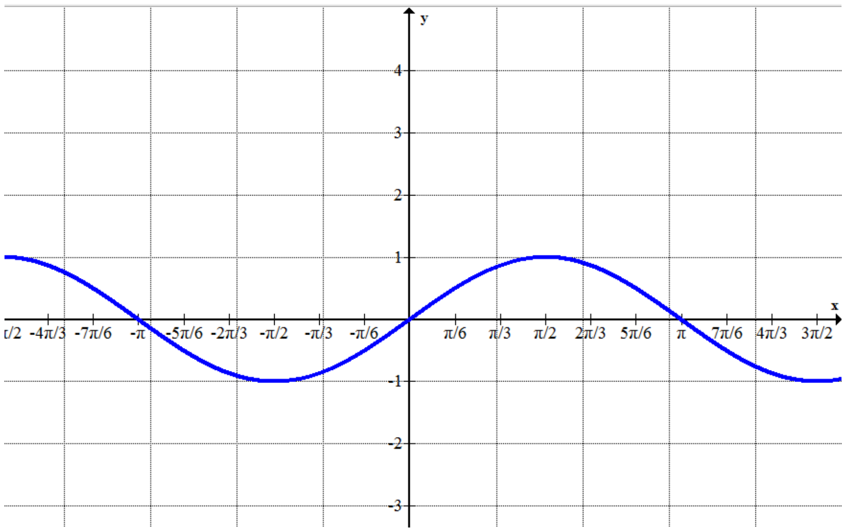
Rozwiązanie.

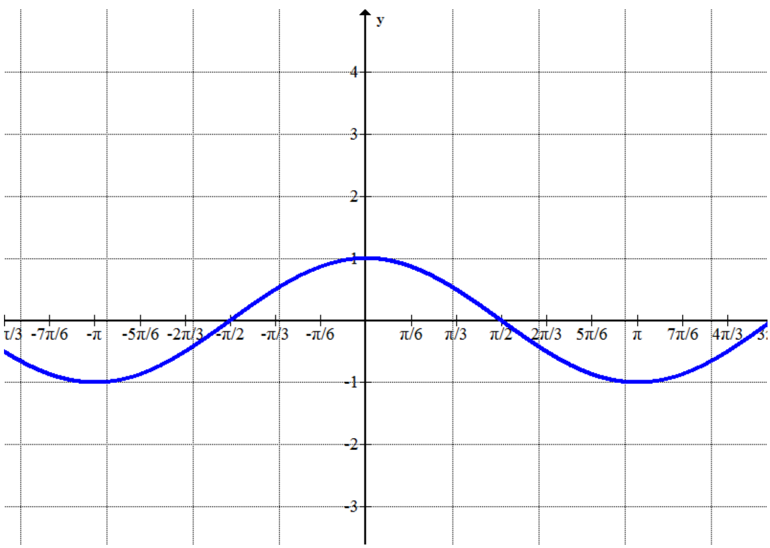
a) $\beta = \frac{\frac{3\pi}{4}}{2\pi} \cdot 360^0 = \frac{3\pi}{8} \cdot 360^0 = 135^0$
b) $\beta = \frac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi} \cdot 360^0 = \frac{1}{3} \cdot 360^0 = 120^0$
c) $\beta = \frac{\frac{5\pi}{6}}{2\pi} \cdot 360^0 = \frac{5}{12} \cdot 360^0 = 150^0$
d) $\beta = \frac{3\pi}{2\pi} \cdot 360^0 = \frac{3}{2} \cdot 360^0 = 540^0$
e) $\beta = \frac{4\pi}{2\pi} \cdot 360^0 = 2 \cdot 360^0 = 720^0$

4.2 Funkcje trygonometryczne

Funkcje trygonometryczne, choć wywodzą się z pojęć geometrycznych, są rozpatrywane także w oderwaniu od geometrii.

Rozpatrzmy funkcje trygonometryczne $y = \sin x$ oraz $y = \cos x$ dla argumentu będącego liczbą rzeczywistą.





WŁASNOŚCI

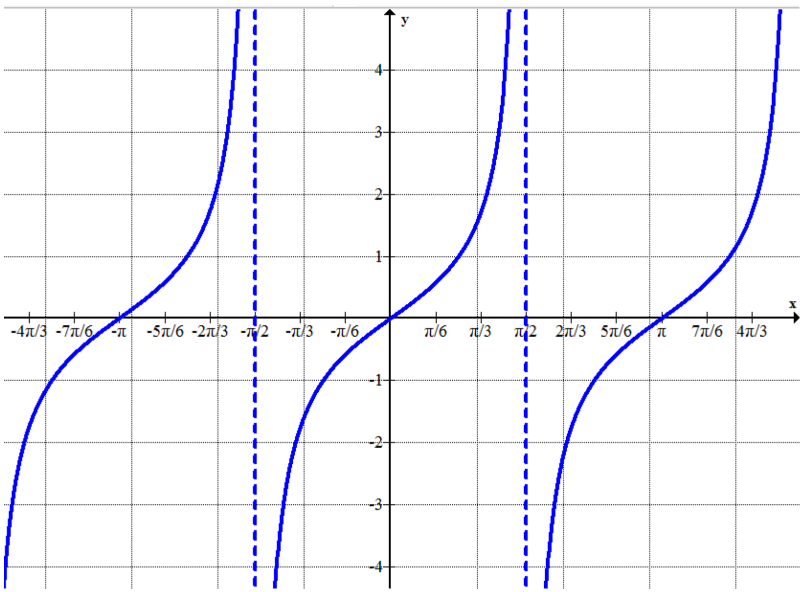
Przedstawione funkcje mają własności:

funkcja $y = \sin x$ jest określona dla każdej liczby rzeczywistej: $D = R$ oraz jej zbiorem wartości jest $\langle -1,1 \rangle$, miejsca zerowe tej funkcji to $x = 180^0 \cdot k$ czyli $x = k\pi$, gdzie gdzie k jest liczbą całkowitą;

funkcja $y = \cos x$ jest określona dla każdej liczby rzeczywistej: $D = R$ oraz jej zbiorem wartości jest $\langle -1,1 \rangle$, miejsca zerowe tej funkcji to $x = 90^0 + 180^0 \cdot k$ czyli $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie gdzie k jest liczbą całkowitą.

Krzywe, będące wykresami funkcji sinus oraz cosinus nazywa się odpowiednio sinusoidą oraz cosinusoidą (kosinusoidą).

Rozpatrzmy funkcję trygonometryczną $y = \operatorname{tg} x$.



Ma ona następujące własności.

Jest określona na zbiorze powstałym przez usunięcie ze zbioru wszystkich liczb rzeczywistych mających postać $90^0 + 180^0 \cdot k$ czyli $\frac{\pi}{2} + k\pi$, czyli dziedziną jest zbiór $D = R \backslash \{90^0 + 180^0 \cdot k\}$ czyli $D = R \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Zbiorem wartości jest zbiór liczb rzeczywistych.

Miejsca zerowe to $x = 180^0 \cdot k$ czyli $x = k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Wykres funkcji tangens nazywa się tangensoidą.

WŁASNOŚCI

Dla funkcji trygonometryczny $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, gdzie x jest dowolnym kątem, a k dowolną liczbą całkowitą, zachodzi:

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$$

$$\sin(x + 360^0 k) = \sin x \text{, czyli } \sin(x + 2k\pi) = \sin x,$$

$$\cos(x + 360^0 k) = \cos x \text{, czyli } \cos(x + 2k\pi) = \cos x$$

$$\operatorname{tg}(x + 180^0 k) = \operatorname{tg} x \text{, czyli } \operatorname{tg}(x + 2k\pi) = \operatorname{tg} x.$$

4.3 Równania i nierówności trygonometryczne

DEFINICJA

Równanie postaci

$$sinx = a, cosx = a, tgx = a,$$

nazywamy podstawowym równaniem trygonometrycznym.

DEFINICJA

Nierówność postaci

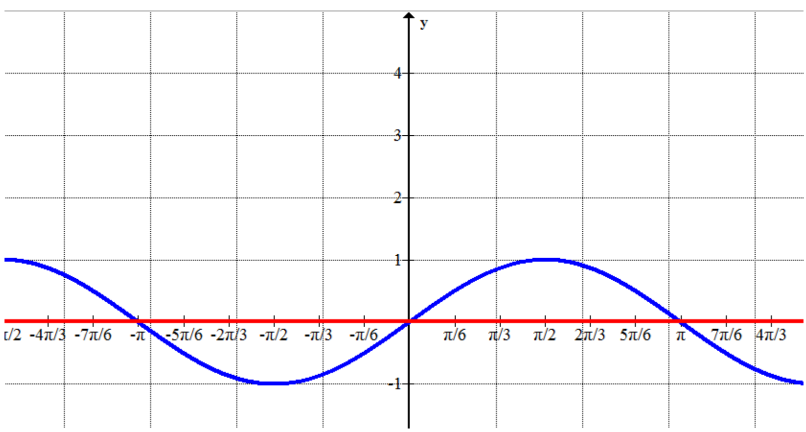
$$sinx > a, cosx < a, tgx \geq a,$$

nazywamy podstawową nierównością trygonometrycznym.

FLESZ

Rozwiąż równanie $\sin 3x = 0$.

Rozwiązanie. Równość $\sin a = 0$ ma rozwiązanie $a = 0 + 2k\pi = 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

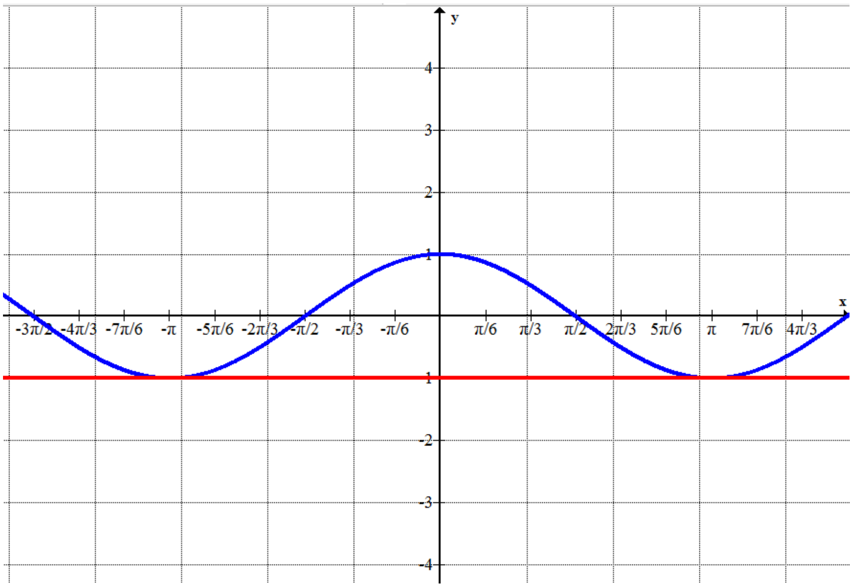


Zatem $\sin 3x = 0$, gdy $3x = 0 + 2k\pi$=$2k\pi$, czyli $x = \frac{2}{3}k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

FLESZ

Rozwiąż równanie $\cos 2x = -1$.

Rozwiązanie. Równość $\cos a = -1$ ma rozwiązanie $a = \pi + 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

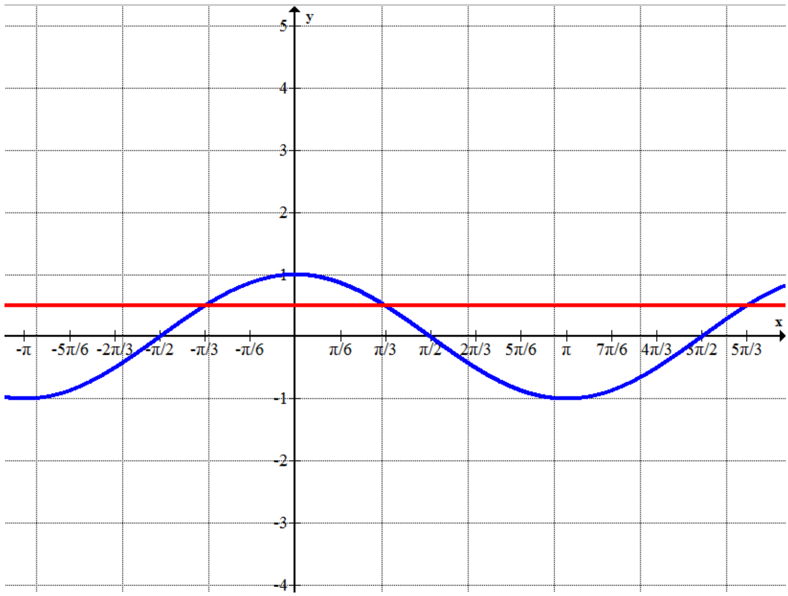


Zatem $\cos 2x = -1$, gdy $2x = \pi + 2k\pi$, czyli $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

FLESZ

Rozwiąż nierówność $\cos(x) > \frac{1}{2}$.

Rozwiązanie. Rozważmy nierówność $\cos(x) > \frac{1}{2}$.



Rozwiązanie $a\epsilon\left(-\frac{\pi}{3}+2k\pi,,\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

FLESZ

Rozwiąż nierówność $4\cos^2 x > 8\sin x - 1$.

Rozwiązanie. Korzystając ze wzoru na jedynkę trygonometryczną przekształćmy nierówność do postaci, w której występuje tylko funkcja $\sin x$:

$$4(1-\sin^2 x) > 8\sin x - 1$$

$$-4\sin^2 x - 8\sin x + 5 > 0$$

Zastosujmy podstawienie $\sin x = t$, gdzie $t \in \langle -1,1\rangle$. Otrzymujemy

$$-4t^2 - 8t + 5 > 0$$

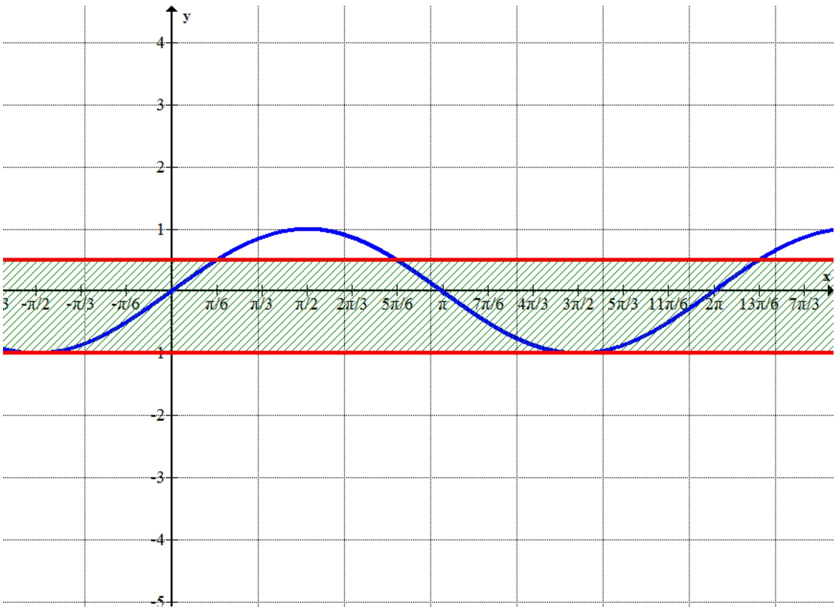
$$4t^2 + 8t - 5 < 0$$

gdzie $\Delta = 64 + 80 = 144$. Czyli

$$t_1 = -\frac{5}{2}, t_2 = \frac{1}{2}.$$

Po uwzględnieniu założenia $t\epsilon\langle -1, \frac{1}{2}\big)$. Zatem

$$\sin x\, \epsilon \langle -1, \frac{1}{2}\big).$$



Rozwiązanie ostateczne:

są postaci $x\epsilon(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{13\pi}{6} + 2k\pi)$ gdzie gdzie k jest liczbą całkowitą.

4.4 Tożsamości trygonometryczne

DEFINICJA

Tożsamości trygonometryczne, to zależności pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi.

Podstawowe tożsamości:

$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1,$

$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1,$

$tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha},$

$ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha},$

$\sin(2\alpha) = 2 \cdot sin\alpha \cdot cos\alpha,$

$\cos(2\alpha) = cos^2\alpha - sin^2\alpha$

FLESZ

Wykaż, $(sin \propto + cos \propto)^2 + (sin \propto - cos \propto)^2 = 2$

Rozwiązanie.

$(sin \propto + cos \propto)^2 + (sin \propto - cos \propto)^2 = sin^2\alpha + 2 \cdot sin\alpha \cdot cos\alpha + cos^2\alpha + sin^2\alpha - 2 \cdot sin\alpha \cdot cos\alpha + cos^2\alpha = 2(sin^2\alpha + cos^2\alpha) = 2$

5 Geometria

5.1 Planimetria

5.1.1 Podobieństwo, jednokładność i przystawanie figur

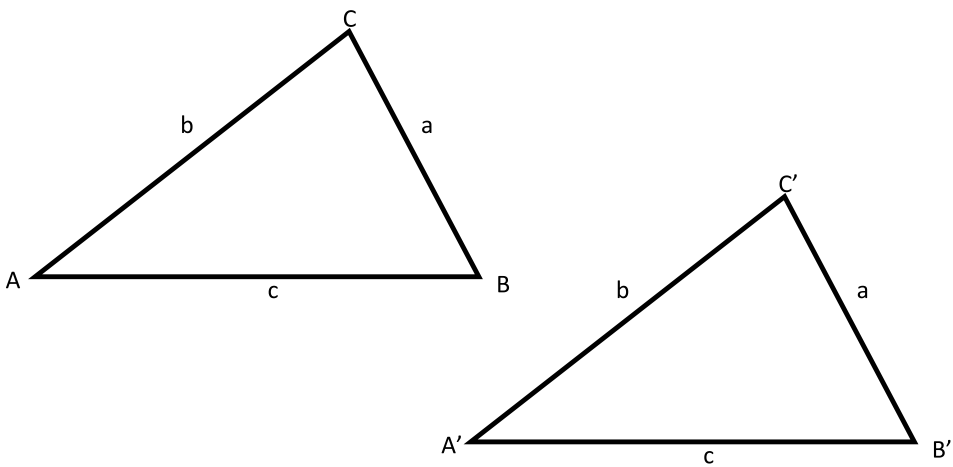
Figury tego samego kształtu i wielkości nazywamy przystającymi. Zdefiniujmy to pojęcie na przykładzie trójkątów.

DEFINICJA

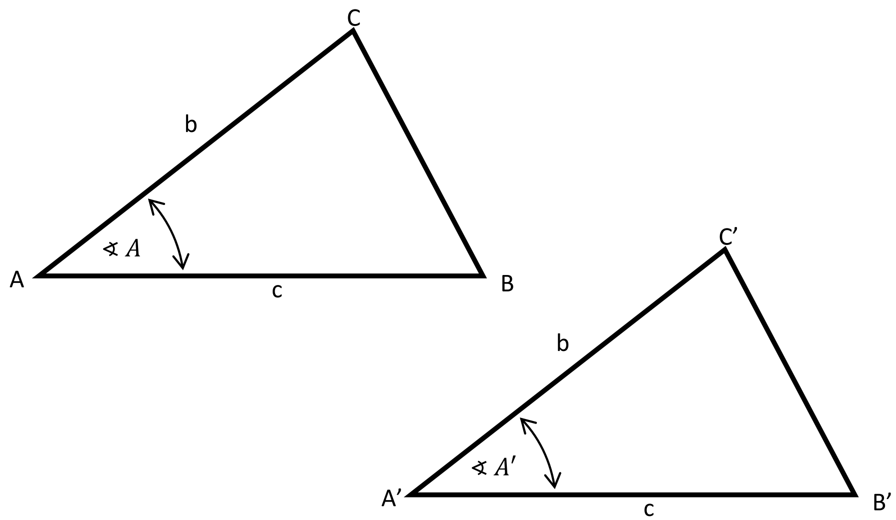
Trójkąty są przystające, jeżeli ich odpowiednie długości boków i odpowiednie miary kątów są równe.

TWIERDZENIE

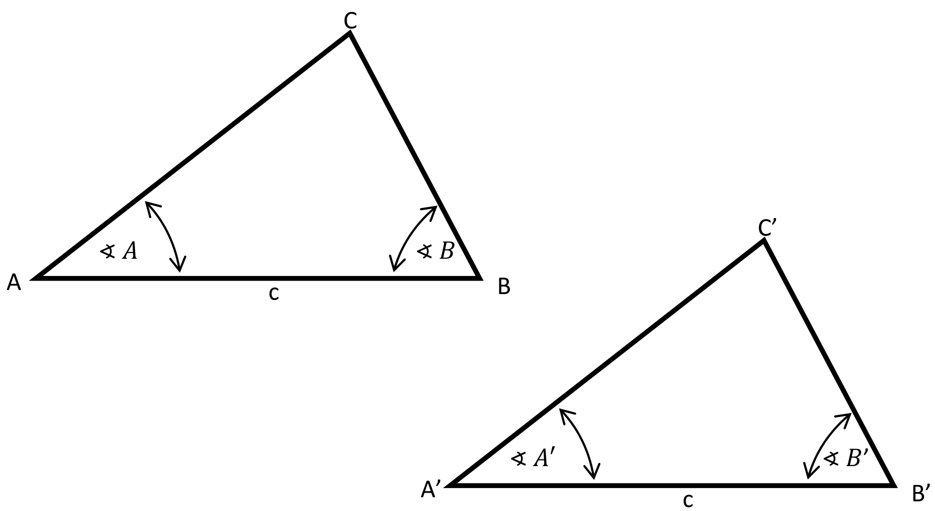
a) Jeżeli długości trzech boków danego trójkąta są odpowiednio równe długością trzem bokom drugiego trójkąta, to te trójkąty są przystające.



b) Jeżeli długości dwóch boków i miara kąta zawartego między nimi w jednym z trójkątów są odpowiednio równe długościom dwóch bokom i mierze kąta zawartego między nimi w drugim trójkącie, to te trójkąty są przystające.



c) Jeżeli długość boku i miary dwóch leżących przy nim kątów w jednym z trójkątów są odpowiednio równe długości boku i miarą dwóch kątów leżących przy nim w drugim trójkącie, to te trójkąty są przystające.



FLESZ

Trójkąt ABC jest przystający do trójkąta DEF. Wiadomo, że $|AB| = 3, |AC| = 7, |DE| = 3, |EF| = 12$. Wyznacz $|DF|$.

Rozwiązanie.

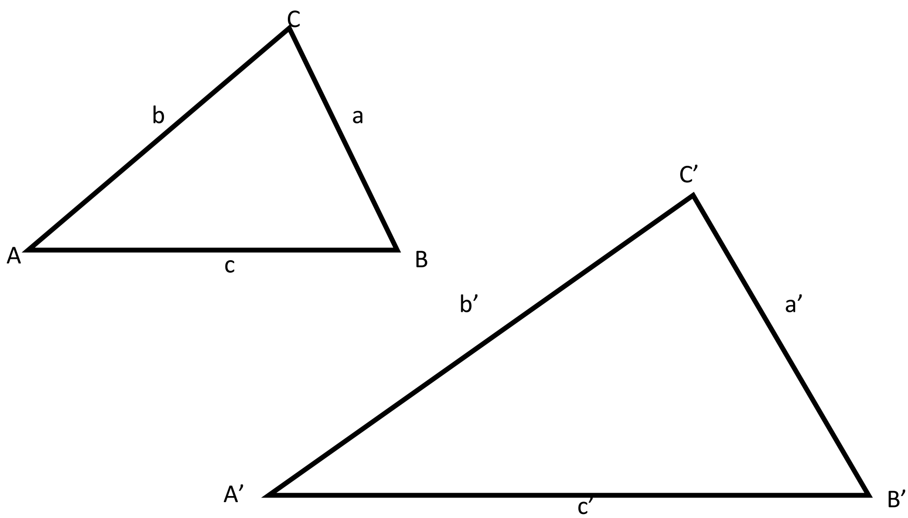
Korzystając z powyższego twierdzenia (podpunkt a)) mamy $|DF|$=7.

DEFINICJA

Trójkąty są podobne, jeżeli ich odpowiednie miary kąty są równe, a odpowiednie długości boków są proporcjonalne.

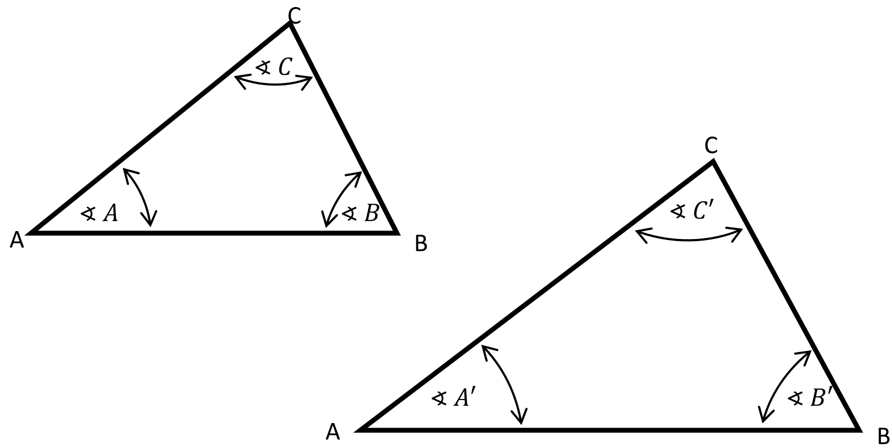
TWIERDZENIE

a) Jeżeli długości trzech boków danego trójkąta są odpowiednio proporcjonalne do długości trzech boków drugiego trójkąta, to te trójkąty są podobne.



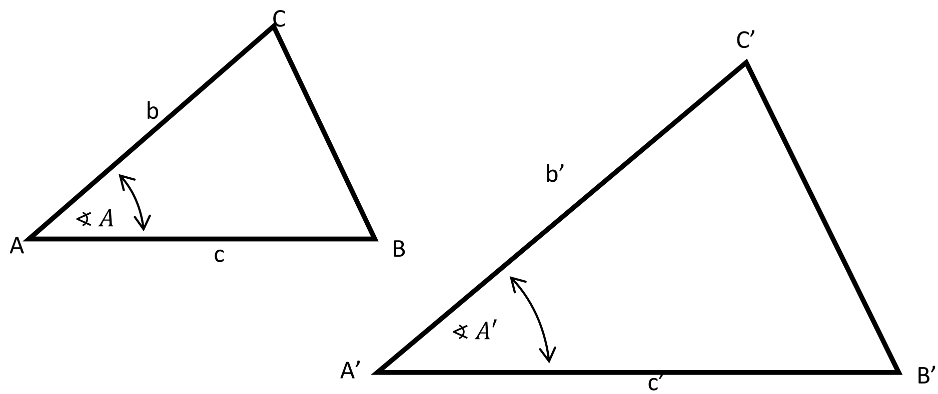
$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}, \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}, \frac{c}{b} = \frac{c'}{b'}$.

b) Jeżeli miary trzech kątów danego trójkąta są odpowiednio równe miarom trzech kątów drugiego trójkąta, to te trójkąty są podobne.



$\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$, $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$.

c) Jeżeli długości dwóch boków jednego trójkąta są proporcjonalne do długości dwóch boków drugiego trójkąta oraz miary kątów zawarte między tymi bokami są równe w obu trójkątach, to te trójkąty są podobne.



$\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$.

FLESZ

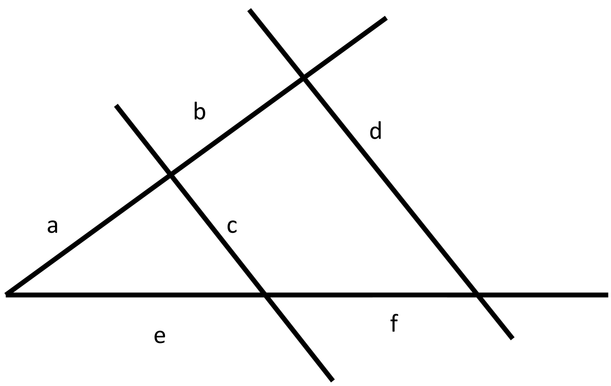
Trójkąt ABC jest podobny do trójkąta DEF. Wiadomo, że $|AB| = 3, |AC| = 7, |BC| = 5, |DE| = 12, |DF| = 28$. Wyznacz $|EF|$.

Rozwiązanie.

Korzystając z powyższego twierdzenia (podpunkt a)) mamy $|EF|$=20.

TWIERDZENIE TALESA (PROSTE)

Jeżeli ramiona kąta przetniemy dwiema prostymi równoległymi, to długości odcinków wyznaczonych przez te proste na jednym z ramion tego kąta są proporcjonalne (patrz rysunek) do długości odpowiednich odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim z ramion tego kąta.



$$\frac{a}{a+b} = \frac{e}{e+f} = \frac{c}{d}$$

TWIERDZENIE TALESA (ODWROTNE)

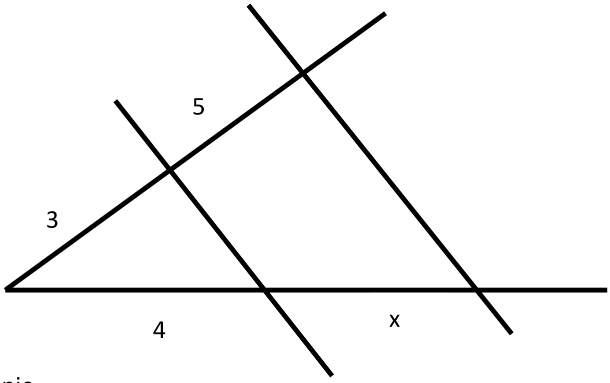
Jeżeli długości odcinków wyznaczone przez dwie proste na jednym z ramion kąta są proporcjonalne do odpowiednich długości odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim z ramion tego kąta

$$\frac{a}{a+b} = \frac{e}{e+f} = \frac{c}{d}$$

(patrz rysunek), to proste te są prostymi równoległymi.

FLESZ

Wyznacz długość odcinka x wiedząc, że proste przecinające kąt są do siebie równoległe.



Rozwiązanie.

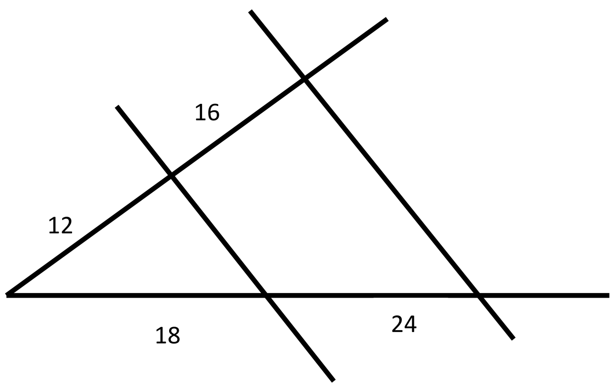
Korzystając z twierdzenia Talesa (prostego) mamy:

$$\frac{3}{8} = \frac{4}{4+x}$$

Stąd $3(x+4) = 32$, zatem $x = \frac{20}{3}$.

FLESZ

Czy proste przedstawione na rysunku przecinające kąt są do siebie równoległe? Uzasadnij.



Rozwiązanie.

Korzystając z twierdzenia Talesa (odwrotnego) mamy: $\frac{12}{28} = \frac{18}{42}$. Zatem proste są równoległe.

DEFINICJA

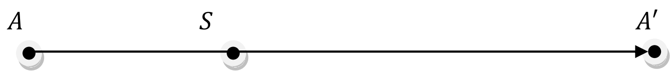
Jednokładnością o środku S i niezerowej skali k, nazywamy przekształcenie płaszczyzny na płaszczyznę, które dowolnemu punktowi A przyporządkowuje punkt A' taki, że

$$\overrightarrow{SA'} = k \cdot \overrightarrow{SA}$$

FLESZ

Znajdź obraz punktu A w jednokładności o środku S i niezerowej skali $k = -3$.

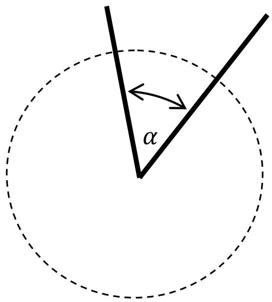
Rozwiązanie.



5.1.2 Kąt środkowy i wpisany

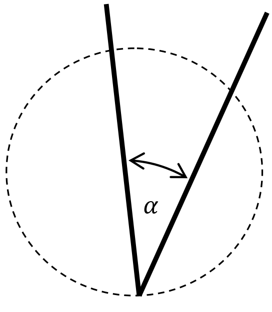
DEFINICJA

Kąt środkowy to kąt, którego wierzchołek leży w środku okręgu, a ramiona są półprostymi wychodzącymi ze środka okręgu, które zawierają promienie.



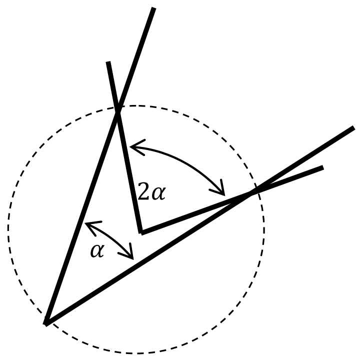
DEFINICJA

Kąt wpisany to kąt, którego wierzchołek leży na okręgu, a ramiona są półprostymi wychodzącymi z wierzchołka, które zawierają cięciwy.



TWIERDZENIE (o kącie środkowym i kącie wpisanym opartych na tym samym łuku)

Miara kąta wpisanego jest dwa razy mniejsza od miary kąta środkowego opartego na tym samym łuku.



FLESZ

Miara kąta środkowego jest równa 30^0. Wyznacz miarę kąta wpisanego opartego na tym samym łuku.

Rozwiązanie.

Korzystając z twierdzenia o kącie środkowym i kącie wpisanym opartych na tym samym łuku mamy:

$2 \cdot 30^0$=60^0

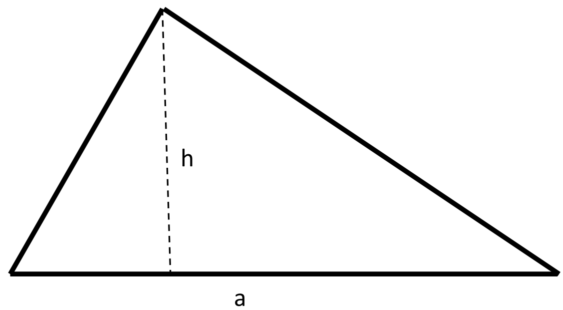
Kat wpisany ma miarę 60^0.

5.1.3 Przydatne zależności i wzory dotyczące figur płaskich

TWIERDZENIE

Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości jednego z jego boków i wysokości opuszczonej na ten bok.

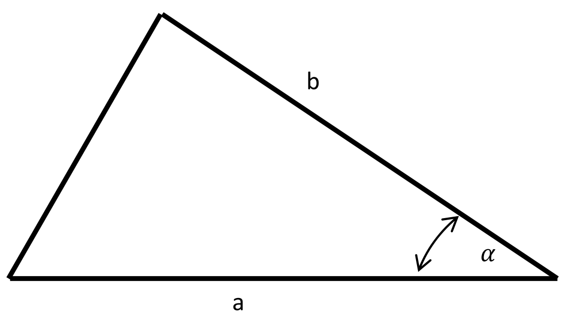
$$P = \frac{1}{2}ah.$$



TWIERDZENIE

Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości dwóch jego boków i sinusa kąta zawartego między nimi

$$P = \frac{1}{2}ab\sin\alpha.$$



TWIERDZENIE

Pole trójkąta równobocznego o boku długości a wynosi

$$P = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

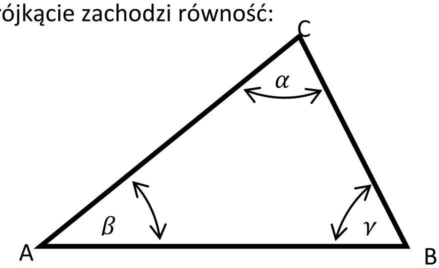
TWIERDZENIE

Niech p oznacza połowę obwodu trójkąta o długościach boków a, b, c, czyli $p = \frac{a+b+c}{2}$. Pole trójkąta wynosi

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

TWIERDZENIE

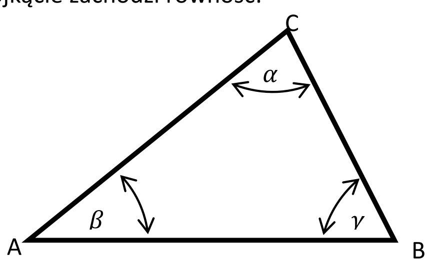
W dowolnym trójkącie zachodzi równość:



$$|BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2 - 2|AC| \cdot |AB| \cdot \cos\beta$$

TWIERDZENIE

W dowolnym trójkącie zachodzi równość:



$$\frac{|AB|}{\sin\alpha} = \frac{|AC|}{\sin\gamma} = \frac{|BC|}{\sin\beta}$$

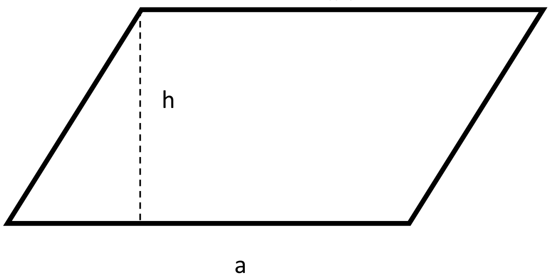
DEFINICJA

Równoległobokiem jest czworokąt mający dwie pary równoległych boków.

TWIERDZENIE

Pole powierzchni równoległoboku jest równe iloczynowi długości jednego z boków i wysokości opuszczonej na ten bok

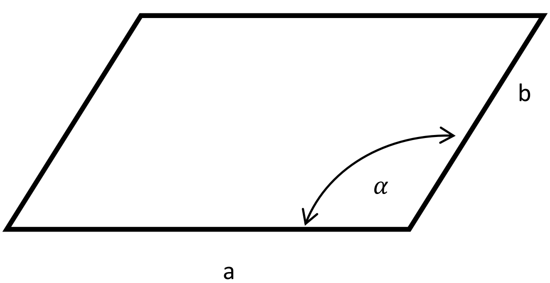
$$P = ah.$$



TWIERDZENIE

Pole powierzchni równoległoboku jest równe iloczynowi długości jego dwóch sąsiednich boków i sinusa kąta zawartego między nimi

$$P = ab\sin\alpha.$$



TWIERDZENIE

Przekątne równoległoboku przecinają się, dzieląc się na połowy.

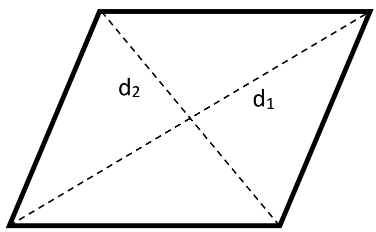
DEFINICJA

Rombem nazywamy czworokąt mający wszystkie boki równe.

TWIERDZENIE

Pole rombu jest równe połowie iloczynu długości jego przekątnych

$$P = \frac{1}{2} d_1 d_2.$$



Możemy wykorzystać w tym przypadku również wzór na pole równoległoboku. Pole powierzchni rombu jest równe iloczynowi długości jednego z boków i wysokości opuszczonej na ten bok

$$P = ah.$$

TWIERDZENIE

Przekątne w rombie przecinają się pod kątem prostym, dzieląc się na połowy.

DEFINICJA

Prostokątem nazywamy czworokąt mający przeciwległe boki równej długości i równoległe oraz wszystkie kąty proste.

TWIERDZENIE

Pole powierzchni prostokąta o długościach boków a, b wynosi

$$P = ab.$$

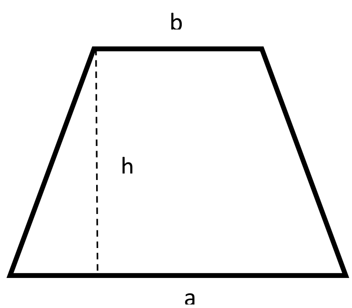
DEFINICJA

Trapezem nazywamy czworokąt mający co najmniej jedną parę boków równoległych.

TWIERDZENIE

Pole trapezu o podstawach długości a oraz b i wysokości h wynosi

$$P = \frac{a+b}{2}h.$$



DEFINICJA

Deltoid to czworokąt, który ma oś symetrii zawierającą jedną z przekątnych.

TWIERDZENIE

Pole powierzchni deltoidu jest równe połowie iloczynu długości jego przekątnych

$$P = \frac{1}{2}d_1 d_2.$$

TWIERDZENIE

Okrąg można opisać na czworokącie wtedy i tylko wtedy, gdy sumę miar przeciwległych kątów są równe.

TWIERDZENIE

Okrąg można wpisać w czworokąt wtedy i tylko wtedy, gdy sumy przeciwległych boków są równe.

DEFINICJA

Okręgiem nazywamy zbiór wszystkich punktów leżących w tej samej odległości od danego punktu zwanego środkiem okręgu.

DEFINICJA

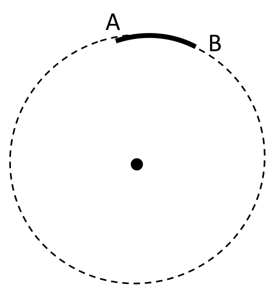
Koło to część płaszczyzny ograniczona okręgiem wraz z tym okręgiem.

DEFINICJA

Odcinek, który łączy dowolny punkt okręgu ze środkiem okręgu (koła), to promień okręgu (koła).

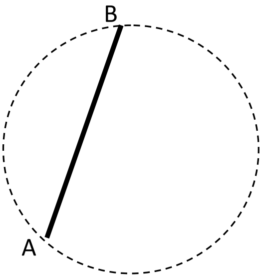
DEFINICJA

Łuk okręgu to jedna z dwóch części okręgu wyznaczona przez dwa różne punkty tego okręgu.



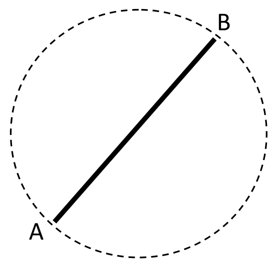
DEFINICJA

Cięciwa okręgu (koła) to odcinek łączący dwa różne punkty okręgu.



DEFINICJA

Średnica okręgu (koła) - to najdłuższa z jego cięciw, która przechodzi przez środek okręgu (koła).



WŁASNOŚĆ

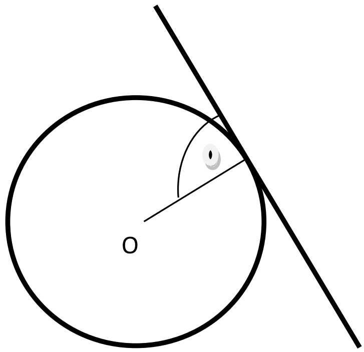
Obserwując wzajemne położenie prostej i okręgu możemy zauważyć, że prosta może nie mieć punktów wspólnych z okręgiem, może mieć z nim jeden punkt wspólny lub może go przecinać w dwóch różnych punktach.

DEFINICJA

Sieczna to prosta mająca z okręgiem dokładnie dwa punkty wspólne, prostą mającą dokładnie jeden punkt wspólny nazywamy styczną do okręgu.

WŁASNOŚĆ

Styczna do okręgu jest prostopadła do promienia poprowadzonego ze środka okręgu do punktu styczności.



TWIERDZENIE

Pole powierzchni koła o promieniu r wynosi

$$P = \pi r^2.$$

TWIERDZENIE

Długość okręgu (obwód koła) o promieniu r wynosi

$$Ob = 2\pi r.$$

TWIERDZENIE

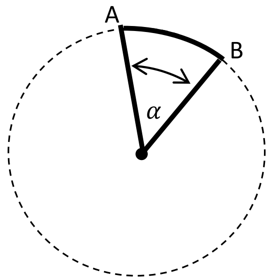
Pole powierzchni wycinka koła o promieniu r oraz kącie środkowym α wynosi

$$P = \pi r^2 \frac{\alpha}{360^0}.$$

TWIERDZENIE

Długość łuku AB okręgu o promieniu r wyznaczonego przez kąt o mierze α wynosi

$$AB = 2\pi r \frac{\alpha}{360^0}.$$



5.1.4 Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej

DEFINICJA

Rozważymy punkty $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$ w prostokątnym układzie współrzędnych. Odległość punktów A oraz B jest równa długości odcinka AB i oznaczać ją będziemy $|AB|$.

TWIERDZENIE

Odległość punktów $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$ wyraża się wzorem

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

FLESZ

Oblicz odległość punktów $A = (1,5)$ oraz $B = (2,1)$

Rozwiązanie.

$|AB| = \sqrt{(2-1)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{17}.$

TWIERDZENIE

Współrzędne środka odcinka AB, gdzie $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ wyrażają się wzorem

$$S = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

FLESZ

Wyznacz współrzędne środka odcinka AB, gdzie $A = (2, 4)$ i $B = (4, -2)$.

Rozwiązanie.

Korzystając ze wzoru mamy: $S = \left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right) = (3, 1)$.

TWIERDZENIE

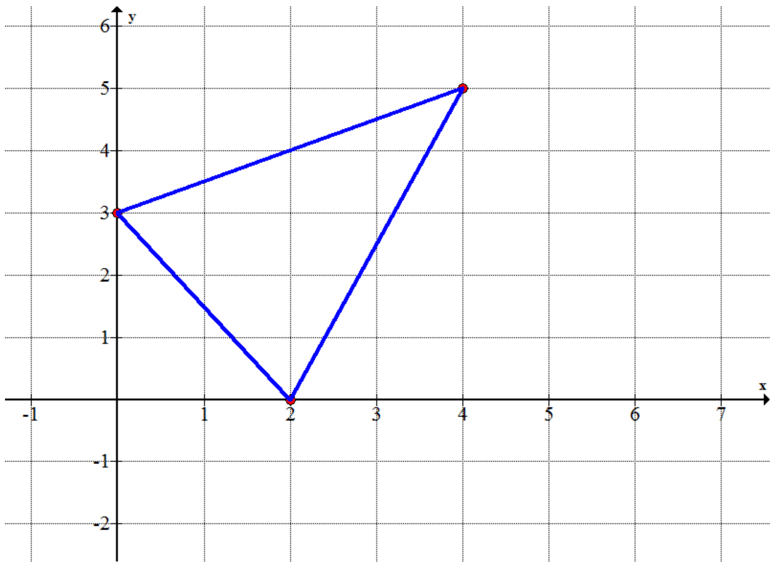
Pole powierzchni trójkąta ABC, gdy dane są współrzędne jego wierzchołków $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$ wyraża się wzorem

$$P = \frac{|(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)|}{2}.$$

FLESZ

Oblicz pole powierzchni trójkąta ABC, jeśli $A(2,0)$, $B(0,3)$, $C(4,5)$.

Rozwiązanie.



$$P=\frac{|(x_B-x_A)(y_C-y_A)-(y_B-y_A)(x_C-x_A)|}{2}=\frac{|(-2)\cdot 5-3\cdot 2|}{2}=8$$

DEFINICJA

Również okrąg możemy rozważać jako figurę na płaszczyźnie kartezjańskiej, czyli zbiór punktów płaszczyzny, których odległość od środka w punkcie $Ś(x_0,y_0)$ jest równa promieniowi długości r $(r>0)$.

TWIERDZENIE

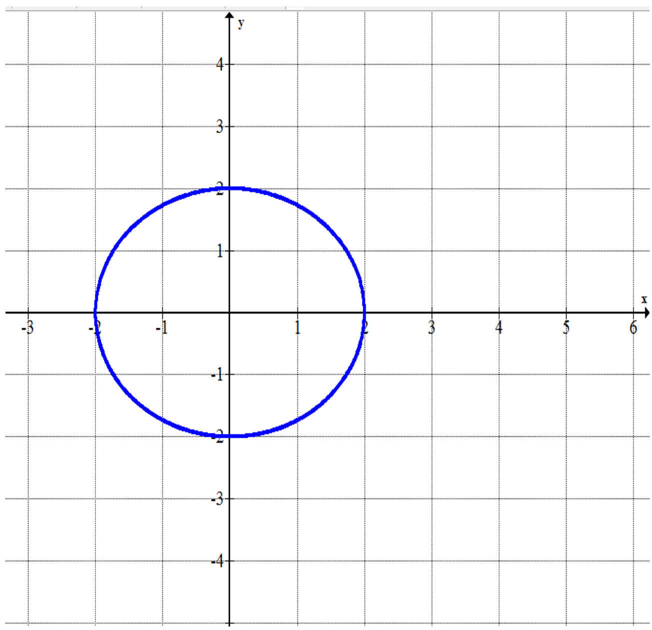
Jeżeli okrąg ma środek w początku układu współrzędnych, to jego równanie ma postać

$$x^2+y^2=r^2.$$

FLESZ

Narysuj okrąg o równaniu $x^2 + y^2 = 4$.

Rozwiązanie.



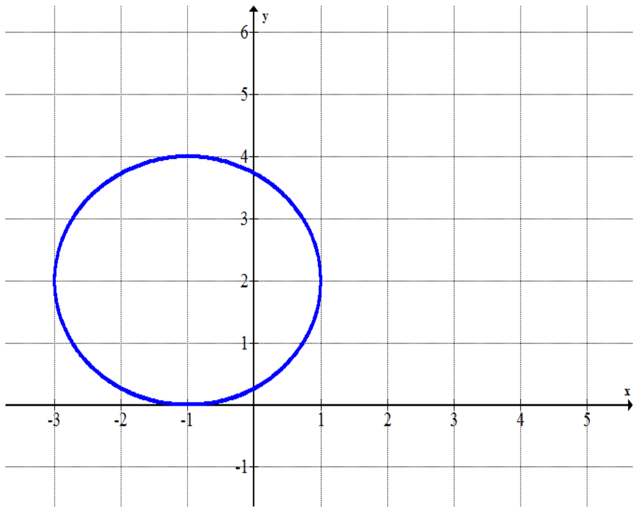
TWIERDZENIE

Równanie okręgu o środku w punkcie $Ś(x_0, y_0)$ i promieniu długości r ($r > 0$) ma postać

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

FLESZ

Narysuj okrąg o równaniu $(x+1)^2+(y-2)^2=4$.



FLESZ

Napisz równanie okręgu o środku w punkcie $S=(3,-2)$ i promieniu $r=4$.

Rozwiązanie.

$(x-3)^2+(y+2)^2=16.$

DEFINICJA

Równanie postaci $y=ax+b$ nazywamy równaniem kierunkowym prostej.

DEFINICJA

Równanie postaci $Ax+By+C=0$, gdzie $A\neq 0$ lub $B\neq 0$ nazywamy równaniem ogólnym prostej.

FLESZ

Zamień równanie prostej danej w postaci ogólnej $3x + y + 4 = 0$ na postać kierunkową.

Rozwiązanie.

$y = -3x - 4.$

FLESZ

Zamień równanie prostej danej w postaci kierunkowej $y = 2x + 1$ na postać ogólną.

Rozwiązanie.

$-2x + y - 1 = 0.$

TWIERDZENIE

Odległość punktu $P = (x_0, y_0)$ od prostej $Ax + By + C = 0$ wyraża się wzorem: $d = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

FLESZ

Oblicz odległość punktu $P = (1, 3)$ od prostej $3x + 4y + 1 = 0$.

Rozwiązanie.

$d = \frac{|3\cdot 1+4\cdot 3+1|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{8}{5}$.

TWIERDZENIE

Jeżeli prosta $y = ax + b$ przechodzi przez dwa różne punkty (x_1, y_1) oraz (x_2, y_2), to współczynnik kierunkowy a tej prostej jest równy

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

FLESZ

Wyznacz współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez dwa punkty: $(2,4)$ oraz $(6,8)$.

Rozwiązanie.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-4}{6-2} = 1.$$

TWIERDZENIE

Równanie prostej o współczynniku kierunkowym a przechodzącej przez punkt (x_1, y_1) ma postać

$$y - y_1 = a(x - x_1).$$

FLESZ

Napisz równanie prostej o współczynniku kierunkowym $a = 3$ przechodzącej przez punkt $(2,4)$.

Rozwiązanie. $y - 4 = 3(x - 2)$.

Stąd

$$y = 3x - 2.$$

TWIERDZENIE

Rozważmy dwie proste o równaniach $y = a_1x + b_1$ oraz $y = a_2x + b_2$.

a) Proste te będą równoległe, gdy mają takie same współczynniki kierunkowe, to znaczy

$$a_1 = a_2.$$

b) Proste te będą prostopadłe (dla $a_1, a_2 \neq 0$), gdy

$$a_1 = -\frac{1}{a_2}.$$

FLESZ

Napisz równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $y = 4x + 2$ i przechodzącej przez punkt o współrzędnych $(0, 2)$.

Rozwiązanie.

Równanie prostej równoległej ma postać: $y = 4x + b$. Ponieważ prosta ma przechodzić przez punkt o współrzędnych $(0, 2)$. Zatem $y = 4x + 2$.

FLESZ

Napisz równanie prostej prostopadłej do prostej o równaniu $y = 2x + 3$ i przechodzącej przez punkt o współrzędnych $(0, 5)$.

Rozwiązanie.

Równanie prostej prostopadłej ma postać: $y = -\frac{1}{2}x + b$. Ponieważ prosta ma przechodzić przez punkt o współrzędnych $(0, 5)$. Zatem $y = -\frac{1}{2}x + 5$.

WŁASNOŚCI

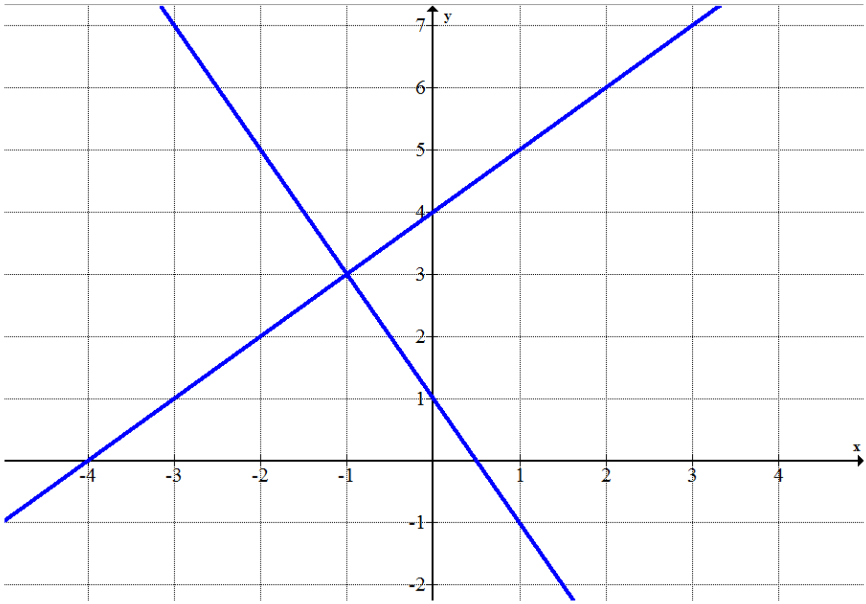
Proste o równaniach $y = a_1x + b_1$ oraz $y = a_2x + b_2$.

a) mają dokładnie jeden punkt wspólny wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 \neq a_2$,
b) są równoległe i nie pokrywają się wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2$ i $b_1 \neq b_2$,
c) pokrywają się wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2$ i $b_1 = b_2$.

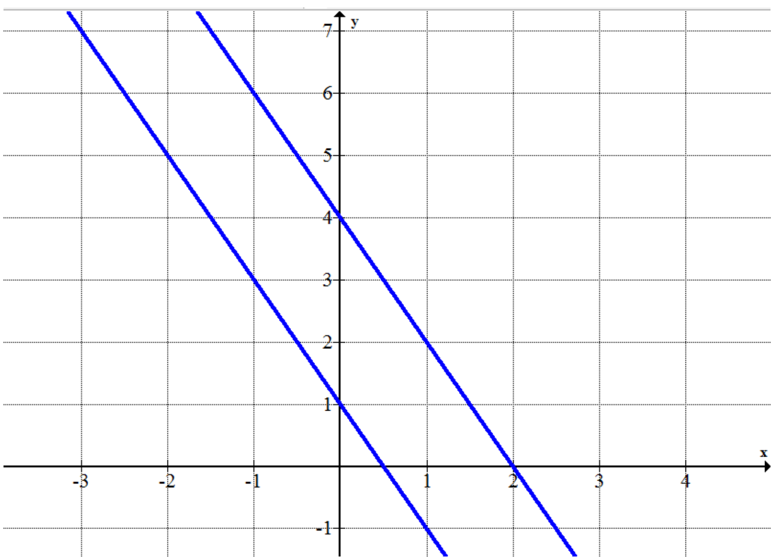
FLESZ

Przedstaw interpretację geometryczną układów równań liniowych.

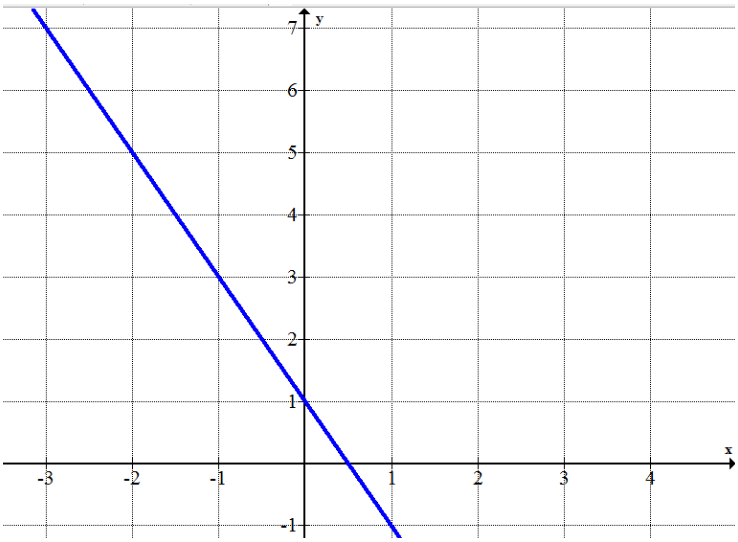
a) $\begin{cases} y = x + 4 \\ y = -2x + 1 \end{cases}$



b) $\begin{cases} y = -2x + 4 \\ y = -2x + 1 \end{cases}$

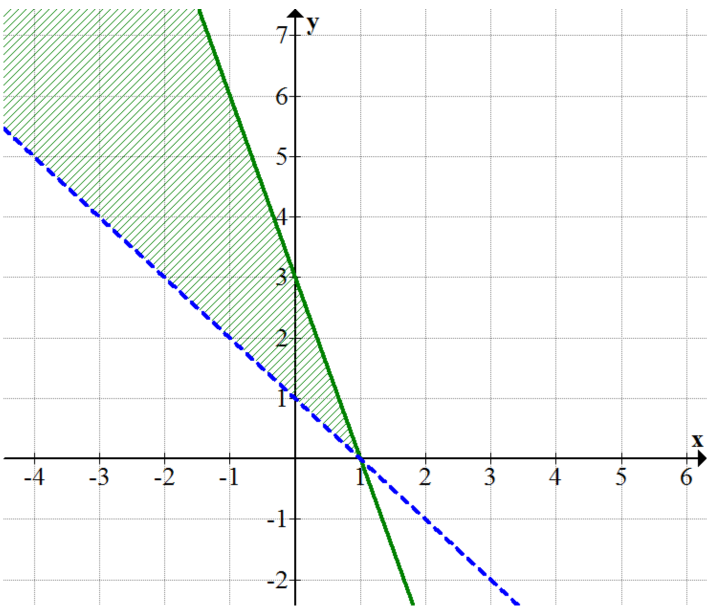


c) $\begin{cases} y = -2x + 1 \\ y = -2x + 1 \end{cases}$



FLESZ

Przedstaw interpretację geometryczną układów nierówności liniowych: $\begin{cases} 3x + y \leq 3 \\ x + y > 1 \end{cases}$.



FLESZ

Znajdź punkty przecięcia się okręgu i prostej:

$$\begin{cases} x^2-2x+y^2-2y=3 \\ x+y=1 \end{cases}$$

Rozwiązanie.

$$\begin{cases} x^2-2x+y^2-2y=3 \\ y=1-x \end{cases}$$

$$x^2-2x+(1-x)^2-2(1-x)=3$$

$$x^2-x-2=0$$

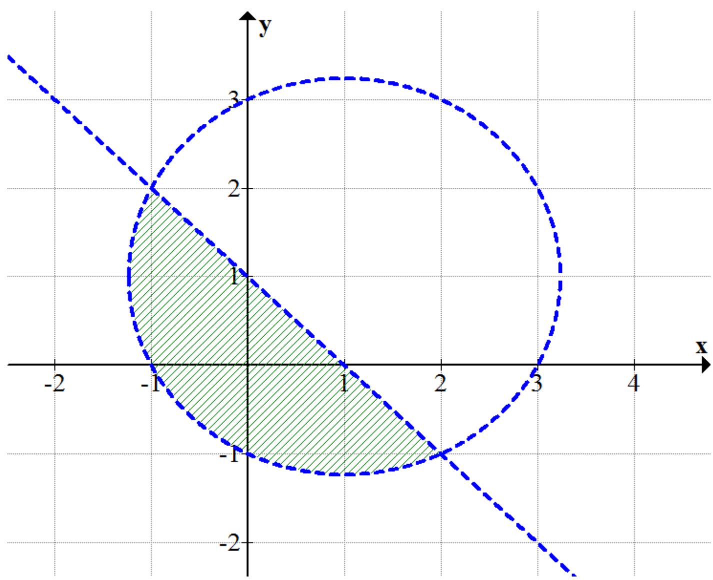
Zatem $(-1,2)$, $(2,-1)$.

FLESZ

Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór spełniający układ nierówności:

$$\begin{cases} x^2-2x+y^2-2y<3 \\ x+y<1 \end{cases}$$

Rozwiązanie.



5.1.5 Wektory na płaszczyźnie

Wektory będziemy traktowali jak skierowane odcinki, tj. takie w których wyróżniono początek i koniec, np. symbol $\overrightarrow{AB}$ oznacza wektor o początku w punkcie *A* i końcu w punkcie *B*. Aby nie pomylić wektora z odcinkiem używamy strzałki.

Wektorem zaczepionym nazywamy uporządkowaną parę punktów. Na płaszczyźnie kartezjańskiej wektory mają dwie współrzędne. Dla odróżnienia ich od punktów, współrzędne wektorów zapisujemy w nawiasach kwadratowych.

Aby jednoznacznie opisać wektor, należy podać jego:

kierunek - wyznacza go prosta, na której znajduje się wektor,

zwrot - wyznacza go grot strzałki,

wartość - czyli długość wektora.

TWIERDZENIE

Jeżeli punkt $A(x_A, y_A)$ jest początkiem wektora i punkt $B(x_B, y_B)$ jest końcem tego wektora, to współrzędne wektora są równe:

$$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$$

DEFINICJA Wektor przeciwny

Dwa wektory są przeciwne, jeżeli ich współrzędne są liczbami przeciwnymi, czyli mają taki sam kierunek i wartość ale przeciwne zwroty.

FLESZ

Mając dane punkty $A(2,1)$, $B(-1,4)$ wyznacz współrzędne wektorów $\overrightarrow{AB}$ oraz $\overrightarrow{BA}$.

Rozwiązanie. $\overrightarrow{AB} = [-1-2, 4-1] = [-3,3]$, $\overrightarrow{BA} = [2-(-1), 1-4] = [3,-3]$. Otrzymaliśmy wektory przeciwne:

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$$

TWIERDZENIE

Niech

$$\vec{w} = [a, b].$$

Wtedy długość wektora $\vec{w}$ oznaczamy jako $|\vec{w}|$ i obliczamy korzystając ze wzoru

$$|\vec{w}| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

FLESZ

Oblicz długość wektora: $\vec{w} = [3,4]$.

Rozwiązanie. $|\vec{w}| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$.

DEFINICJA

Dwa wektory są równe, jeżeli mają takie same współrzędne. Czyli mają taki sam kierunek, zwrot i wartość.

FLESZ

Dobierz parametry k, l tak, aby wektory $\vec{a} = [3, 1]$, $\vec{b} = [k + 1, 3 - l]$ były równe.

Rozwiązanie.

$3 = k + 1, 1 = 3 - l$, stąd $k = 2, l = 2$.

DEFINICJA

W zbiorze wszystkich wektorów na płaszczyźnie są określone podstawowe operacje: dodawanie (i odejmowanie) wektorów oraz mnożenie wektora przez skalar (czyli liczbę).

Niech $\vec{a} = [x_A, y_A]$, $\vec{b} = [x_B, y_B]$ oraz $s \in R$. Wtedy

$$\vec{a} + \vec{b} = [x_A + x_B, y_A + y_B]$$

$$\vec{a} - \vec{b} = [x_A - x_B, y_A - y_B]$$

$$s \cdot \vec{a} = [s \cdot x_A, s \cdot y_A]$$

WŁASNOŚCI

Niech $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ będą wektorami oraz $s, t \in R$. Wtedy

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
3. $s \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = s \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$
4. $(s + t)\vec{a} = s\vec{a} + t\vec{a}$
5. $s(t\vec{a}\,) = (st)\vec{a}$

FLESZ

Mając dane wektory $\vec{a} = [2, 1]$, $\vec{b} = [-1, 3]$, $\vec{c} = [3, -2]$ oblicz

a) $\vec{a} + \vec{b}$
b) $\vec{b} - \vec{c}$
c) $-2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}$

Rozwiązanie

a) $\vec{a} + \vec{b} = [2, 1] + [-1, 3] = [2 - 1, 1 + 3] = [1, 4]$

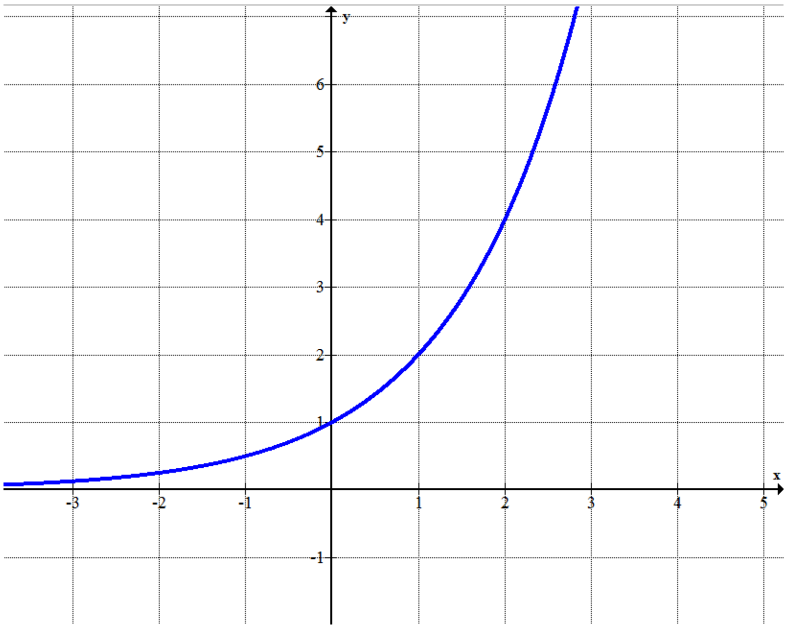
b) $\vec{b} - \vec{c} = [-1, 3] - [3, -2] = [-1 - 3, 3 - (-2)] = [-4, 5]$

c) $-2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c} = -2[2, 1] + 3[-1, 3] + [3, -2] = [-4, -2] + [-3,9] + [3, -2] =$
$[-4 - 3 + 3, -2 + 9 - 2] = [-4, 5]$

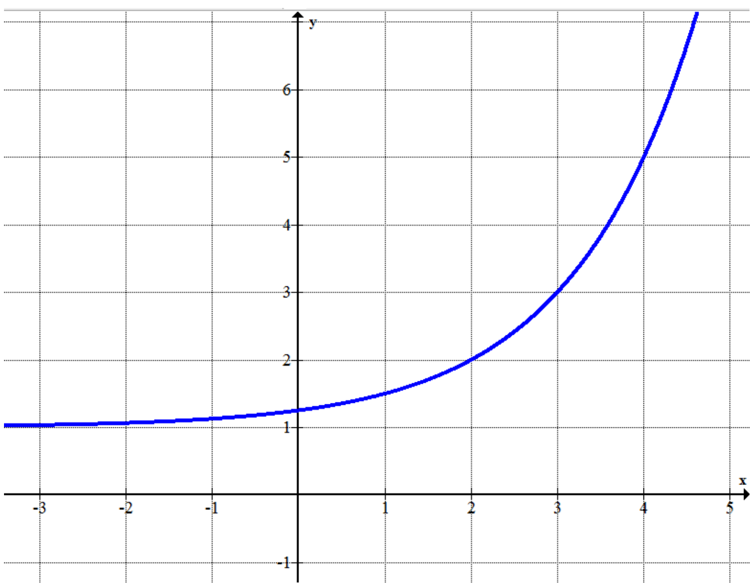
FLESZ

Narysuj wykres funkcji

a) $y = 2^x$ po przesunięciu o wektor $[2, 1]$



Wykres funkcji $y = 2^x$



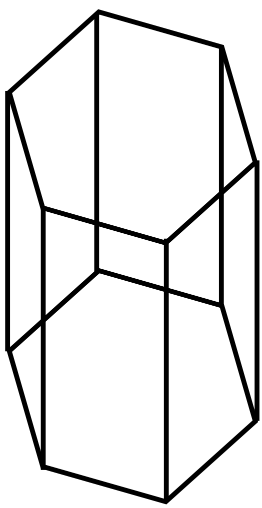
Wykres funkcji $y = 2^x$ po przesunięciu o wektor [2,1], $y = 2^{x-2} + 1$

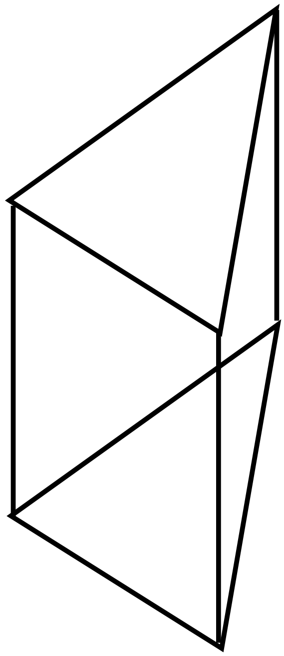
5.2 Stereometria

5.2.1 Graniastosłup, sześcian i prostopadłościan

DEFINICJA

Graniastosłup to wielościan, którego dwie ściany (zwane podstawami), są przystającymi wielokątami zawartymi w płaszczyznach równoległych, a pozostałe ściany (zwane ścianami bocznymi), są równoległobokami o wierzchołkach należących do podstaw.





DEFINICJA

Dowolny odcinek łączący płaszczyzny zawierające podstawy graniastosłupa i do nich prostopadły nazywamy wysokością graniastosłupa.

DEFINICJA

Powierzchnią boczną graniastosłupa nazywamy powierzchnię, którą stanowią jego ściany boczne.

DEFINICJA

Jeżeli krawędzie boczne podstawy graniastosłupa są prostopadłe do podstawy, to graniastosłup nazywamy prostym. W takim przypadku ściany boczne graniastosłupa są prostokątami. Jeżeli krawędzie boczne podstawy graniastosłupa nie są prostopadłe do podstawy, to graniastosłup nazywamy pochyłym.

DEFINICJA

W zależności od tego, jakimi wielokątami są podstawy graniastosłupa, to mówimy o graniastosłupie trójkątnym, czworokątnym, pięciokątnym.

DEFINICJA

Jeżeli podstawą graniastosłupa prostego jest wielokąt foremny, to taki graniastosłup nazywamy prawidłowym.

WŁASNOŚCI

Jeżeli pole powierzchni podstawy graniastosłupa wynosi P, a jego wysokość H, to objętość tego graniastosłupa wyraża się wzorem

$$V = P \cdot H.$$

FLESZ

Oblicz całkowite pole i objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, którego krawędź podstawy ma długość 5, a wysokość ma długość 4.

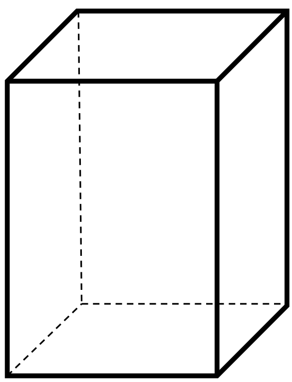
Rozwiązanie.

$$P = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot a \cdot H = \frac{25}{2}\sqrt{3} + 60.$$

$$V = P \cdot H = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{25\sqrt{3}}{4} \cdot 4 = 25\sqrt{3}.$$

DEFINICJA

Graniastosłup prosty, którego podstawą jest prostokąt nazywamy prostopadłościanem.



WŁASNOŚCI

a) Jeżeli prostopadłościan ma krawędzie o długościach a, b, c, to jego objętość wynosi

$$V = a \cdot b \cdot c.$$

b) Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu jest równa

$$P = 2ab + 2ac + 2bc.$$

FLESZ

Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość prostopadłościanu, którego krawędzie mają odpowiednio długości: $2, 4, 5$.

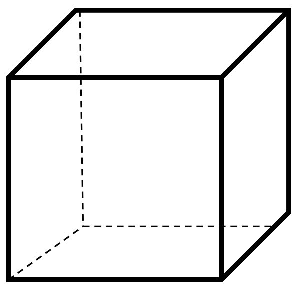
Rozwiązanie.

$$V = a \cdot b \cdot c = 2 \cdot 4 \cdot 5 = 40.$$

$$P = 2ab + 2ac + 2bc = 2 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 5 = 76.$$

DEFINICJA

Prostopadłościan, który ma wszystkie krawędzie równej długości nazywamy sześcianem.



WŁASNOŚCI

a) Jeżeli długość krawędzi sześcianu wynosi a, to jego objętość jest równa

$$V = a^3.$$

b) Pole powierzchni całkowitej to wyraża się wzorem

$$P = 6a^2.$$

c) Długość przekątnej sześcianu wynosi

$$d = a\sqrt{3}.$$

FLESZ

Długość krawędzi sześcianu jest równa 4. Oblicz pole powierzchni całkowitej, objętość, długość przekątnej sześcianu.

Rozwiązanie.

$$V = a^3 = 4^3 = 64.$$

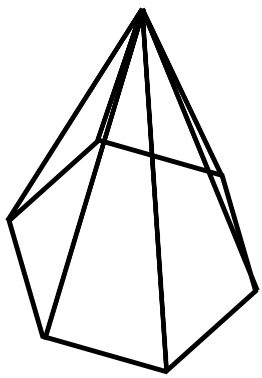
$$P = 6a^2 = 6 \cdot 4^2 = 96.$$

$$d = a\sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$$

5.2.2 Ostrosłup

DEFINICJA

Ostrosłup to wielościan, którego ściana zwana podstawą, jest dowolnym wielościanem, a pozostałe ściany, zwane ścianami bocznymi, są trójkątami o wspólnym wierzchołku (zwanym wierzchołkiem ostrosłupa).



DEFINICJA

Wysokością ostrosłupa nazywamy odcinek łączący wierzchołek ostrosłupa z jego rzutem prostokątnym na płaszczyznę podstawy.

DEFINICJA

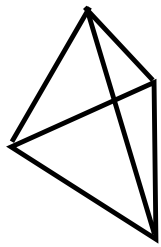
Jeżeli wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa mają taką samą długość, to nazywamy go prostym.

DEFINICJA

Jeżeli podstawą ostrosłupa prostego jest wielokąt foremny, to nazywamy go prawidłowym.

DEFINICJA

Ostrosłup prawidłowy trójkątny, którego wszystkie ściany są trójkątami równobocznymi, nazywamy czworościanem foremnym.



WŁASNOŚCI

a) Jeżeli pole powierzchni podstawy ostrosłupa wynosi P, a jego wysokość H, to objętość ostrosłupa wyraża się wzorem

$$V = \frac{1}{3} \cdot P \cdot H.$$

b) Jeżeli czworościan foremny ma krawędź długości a, to jego objętość wynosi

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

c) Pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego, czyli podstawy i ścian bocznych wyraża się wzorem

$$P = a^2\sqrt{3}.$$

FLESZ

Oblicz pole całkowitej powierzchni i objętość czworościanu foremnego o krawędzi długości $a = 2$.

Odpowiedź.

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{2}{3}\sqrt{2}.$$

$$P = a^2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

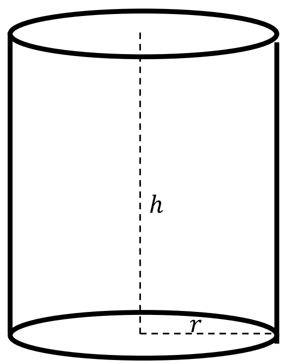
5.2.3 Walec i stożek

DEFINICJA

Walec to bryła obrotowa otrzymana przez obrót prostokąta wokół prostej, zwanej osią walca, zawierającej jego bok. Dwa koła otrzymane w wyniku tego obrotu nazywamy podstawami walca.

DEFINICJA

Dowolny odcinek łączący podstawy walca i będący do nich prostopadły, nazywamy wysokością walca.



WŁASNOŚCI

a) Jeżeli podstawa walca ma promień $r > 0$, a jego wysokość wynosi $h > 0$, to jego objętość wyraża się wzorem

$$V = \pi r^2 h\,.$$

b) Pole powierzchni bocznej walca wyraża się wzorem

$$P = 2\pi r h\,.$$

c) Pole powierzchni całkowitej (podstaw i powierzchni bocznej) wynosi

$$P = 2\pi r(r + h).$$

FLESZ

Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość walca, jeśli promień podstawy ma długość $r = 3$ i wysokość walca wynosi $h = 4$.

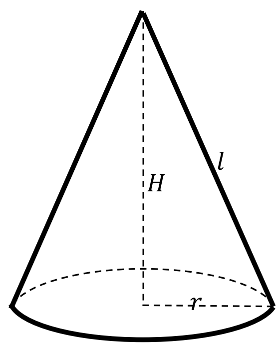
Rozwiązanie.

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 36\pi.$$

$$P = 2\pi r(r + h) = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot (3 + 4) = 42\pi.$$

DEFINICJA

Stożek to bryła obrotowa otrzymana prze obrót trójkąta prostokątnego wokół prostej, zwanej osią stożka, zawierającej jedną z przyprostokątnych tego trójkąta.



DEFINICJA

Koło powstałe w wyniku obrotu trójkąta nazywamy podstawą stożka, a wierzchołek trójkąta nienależący do podstawy nazywamy wierzchołkiem stożka.

DEFINICJA

Odcinek łączący wierzchołek stożka ze środkiem jego podstawy nazywamy wysokością stożka, a dowolny odcinek łączący wierzchołek stożka z brzegiem podstawy tworzącą stożka.

WŁASNOŚCI

a) Jeżeli długość promień podstawy stożka wynosi $r > 0$, a wysokość tego stożka ma długość $h > 0$, to objętość wyraża się wzorem

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h\,.$$

b) Zauważmy, że jeżeli rozwiniemy powierzchnię boczną stożka, to otrzymamy wycinek koła o promieniu równym tworzącej stożka. Pole powierzchni całkowitej stożka (podstawy i powierzchni bocznej), gdy promień podstawy wynosi $r > 0$, tworząca ma długość $l > 0$, wynosi

$$P = \pi r(r + l).$$

FLESZ

Oblicz pole całkowite i objętość stożka, jeśli promień podstawy ma długość $r = 3$ i wysokość walca wynosi $h = 4$.

Rozwiązanie.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi.$$

Wyznaczmy tworzącą stożka.

Z twierdzenia Pitagorasa mamy:

$$r^2 + h^2 = l^2$$

$$3^2 + 4^2 = l^2$$

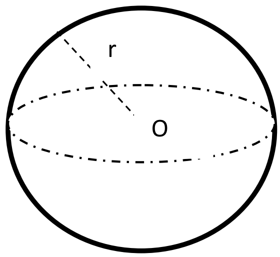
Zatem $l = 5$.

$$P = \pi r(r + l) = \pi \cdot 3 \cdot (3 + 5) = 24\pi.$$

5.2.4 Kula i sfera

DEFINICJA

Kulą o środku w punkcie O i promieniu r $(r > 0)$ nazywamy zbiór wszystkich punktów przestrzeni, których odległość od punktu O jest mniejsza lub równa r. Zbiór wszystkich punktów przestrzeni, których odległość od punktu O jest równa r nazywamy sferą. Kulę otrzymujemy przez obrót koła wokół prostej zawierającej jego średnicę.



WŁASNOŚCI

a) Objętość kuli o promieniu $r > 0$ wyraża się wzorem: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$,
b) Pole powierzchni sfery o promieniu $r > 0$ wyraża się wzorem: $P = 4\pi r^2$.

FLESZ

Oblicz objętość kuli o promieniu 2.

Rozwiązanie.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 8 = \frac{32}{3}\pi.$$

FLESZ

Oblicz pole powierzchni sfery o promieniu 2.

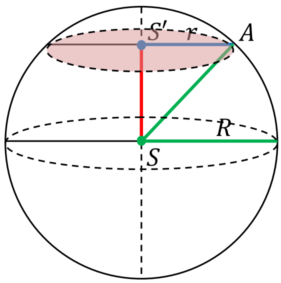
Rozwiązanie.

$$P = 4\pi r^2 = 16\pi.$$

5.2.5 Przekroje

FLESZ

Pole przekroju sfery o środku S, które zaznaczono na rysunku, wynosi $P = 25\pi$. Oblicz objętość kuli o środku w punkcie S, jeśli długość odcinka SS' jest równa 12.



Rozwiązanie.

$P = 25\pi = \pi \cdot r^2, r = 5.$

Ponieważ, długość $|SS'| = 12$,

zatem z twierdzenia Pitagorasa

$$R = |SA| = \sqrt{|SS'|^2 + |S'A|^2}$$

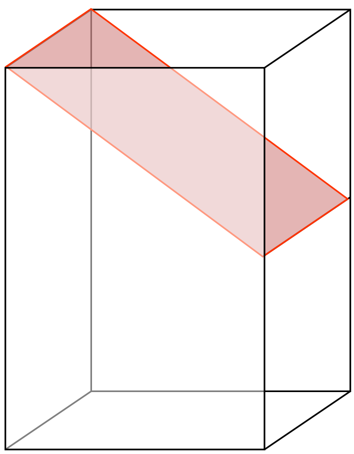
$$R = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$$

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 13^3 = \frac{8788}{3}\pi$$

FLESZ

Prostopadłościan, który w podstawie ma kwadrat o boku długości 6 przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i środki przeciwległych krawędzi bocznych. Oblicz wysokość prostopadłościanu, jeśli pole przekroju wynosi 60.

Rozwiązanie.



$P = a \cdot b = 6 \cdot b = 60,\ b = 10.$

Zauważmy, że

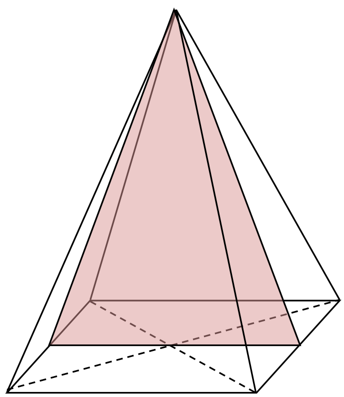
$$10 = \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + 6^2}$$

$$h = 16$$

FLESZ

Pole przekroju ostrosłupa prawidłowego czworokątnego przeciętego płaszczyzną przechodzącą przez wysokość ściany bocznej i przez wysokość ostrosłupa jest trójkątem równobocznym o polu równym $25\sqrt{3}$. Oblicz objętość ostrosłupa.

Rozwiązanie.



$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3},\ a = 10.$$

$$H = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

$$V = \frac{1}{3}P_pH$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 5\sqrt{3} = \frac{500\sqrt{3}}{3}$$

6 Statystyka, rachunek prawdopodobieństwa

6.1 Dane statystyczne i ich parametry

DEFINICJA

Średnią arytmetyczną liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ nazywamy liczbę

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Średnią ważoną liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ z odpowiadającymi im wagami $n_1, n_2, \dots, n_n$ będącymi liczbami dodatnimi, nazywamy liczbę

$$\bar{a}_w = \frac{n_1 a_1 + n_2 a_2 + \dots + n_n a_n}{n_1 + n_2 + \dots + n_n}.$$

FLESZ

Oblicz średnią arytmetyczna dla liczb $7, 12, 3, 8$.

Rozwiązanie. $\bar{a} = \frac{7+12+3+8}{4} = 7\frac{1}{2}$.

FLESZ

Oblicz średnią ważoną liczb $12, 4, 10, 6$ z odpowiadającymi im wagami $1, 3, 2, 4$

Rozwiązanie. $\bar{a}_w = \frac{1\cdot 12+3\cdot 4+2\cdot 10+4\cdot 6}{1+3+2+4} = \frac{68}{10} = 6{,}8$.

FLESZ

Zwróćmy uwagę na różnicę pomiędzy którymi dwoma parametrami. Rozważmy przykład, w którym nauczyciel chce określić zasady wystawienia oceny końcowej z przedmiotu dla dwóch osób. Dysponuje ich dwiema ocenami – z klasówki i z odpowiedzi ustnej:

	Ocena z klasówki	Ocena z odpowiedzi ustnej
Jan	6	2
Kamila	3	5

Średnia arytmetyczna ocen tych osób jest taka sama. To znaczy:

a) średnia arytmetyczna ocen Jana wynosi $\frac{6+2}{2} = 4$,

b) średnia arytmetyczna ocen Kamili wynosi $\frac{3+5}{2} = 4$.

Czyli ocena wynikająca ze średniej arytmetycznej wynosiłaby 4. Tymczasem, jeśli nauczyciel zwiększy wagę oceny z klasówki – na przykład do 3, pozostawiając wagę odpowiedzi ustnej równą 1, wtedy ocena końcowa każdej z osób będzie inna:

c) średnia ważona ocen Jana wynosi $\frac{3 \cdot 6+2}{3+1} = 5$,

d) średnia ważona ocen Kamili wynosi $\frac{3 \cdot 3+5}{3+1} = 3{,}5$.

DEFINICJA

Medianą uporządkowanego w kolejności niemalejącego zbioru n danych liczbowych $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ jest:

a) w przypadku nieparzystej liczby danych wartość środkowa,
b) w przypadku parzystej liczby danych średnia arytmetyczna dwóch sąsiednich wartości środkowych.

FLESZ

Rozważmy dla przykładu dwa zbiory uporządkowanych od najmniejszej do największej wartości danych:

a) $-1, 3, 3, 4, 5, 5, 9$ – liczba danych jest nieparzysta, więc medianą jest w tym przypadku liczba 4,
b) $-2, -2, 3, 8, 10, 15$ – liczba danych jest parzysta, więc medianą jest w tym przypadku liczba $\frac{3+8}{2} = 5{,}5$.

DEFINICJA

Modą (dominantą) zbioru danych nazywamy wartość, która w tym zbiorze występuje najczęściej. Takich wartości może być więcej niż jedna.

FLESZ

W rozważmy zbiór liczb $-1, 3, 3, 4, 5, 5, 9$. Moda jest równa 3 oraz 5 – liczby te występują najczęściej.

DEFINICJA

Wariancją liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ o średniej arytmetycznej $\bar{a}$ nazywamy liczbę

$$\sigma^2 = \frac{(a_1 - \bar{a})^2 + (a_2 - \bar{a})^2 + \ldots + (a_n - \bar{a})^2}{n}.$$

DEFINICJA

Odchyleniem standardowym liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ o średniej arytmetycznej $\bar{a}$ nazywamy liczbę

$$\sigma = \sqrt{\frac{(a_1 - \bar{a})^2 + (a_2 - \bar{a})^2 + \ldots + (a_n - \bar{a})^2}{n}}.$$

FLESZ

Dla liczb $4, 8, 6$ wyznacz wariancję i odchylenie standardowe.

Rozwiązanie.

Wyznaczam średnią: $\bar{a} = \frac{4+8+6}{3} = 6$.

Wyznaczam wariancję: $\sigma^2 = \frac{(a_1-\bar{a})^2+(a_2-\bar{a})^2+(a_3-\bar{a})^2}{3} = \frac{4+4+0}{3} = \frac{8}{3}$.

Odchylenie standardowe: $\sigma = \sqrt{\frac{8}{3}}$.

FLESZ

Dla liczb $4, 4, 4$ wyznacz wariancję i odchylenie standardowe.

Rozwiązanie.

Wyznaczam średnią: $\bar{a} = \frac{4+4+4}{3} = 4$.

Wyznaczam wariancję: $\sigma^2 = \frac{(a_1 - \bar{a})^2 + (a_2 - \bar{a})^2 + (a_3 - \bar{a})^2}{3}$=0.

Odchylenie standardowe: $\sigma = 0$.

6.2 Elementy rachunku prawdopodobieństwa

Podstawowe pojęcie rachunku prawdopodobieństwa – zdarzenie losowe – łączymy zazwyczaj z wynikiem pewnej obserwacji lub doświadczenia. Wynik ten może być jakościowy (np. wylosowanie asa z talii kart) lub ilościowy (np. otrzymanie dwa razy ‘czwórki’ podczas rzutów kostką). Zdarzenia, których nie da się rozłożyć na zdarzenia prostsze, nazywamy zdarzeniami elementarnymi. Zdarzenie elementarne jest pojęciem pierwotnym w rachunku prawdopodobieństwa (analogicznie, jak punkt w geometrii), czyli takim którego nie definiuje się.

DEFINICJA

Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych związanych z danym doświadczeniem nazywamy przestrzenią zdarzeń elementarnych. Zdarzeniem losowym będziemy nazywali dowolny podzbiór przestrzeni zdarzeń elementarnych.

Oznaczenia:

Ω – zbiór zdarzeń elementarnych,

$\overline{\overline{\Omega}}$ – liczba elementów w przestrzeni zdarzeń elementarnych,

A, B – zdarzenia losowe, podzbiory zbioru Ω,

$\emptyset$ – zdarzenie niemożliwe,

A' – zdarzenie przeciwne do A, czyli polegające na tym że nie zachodzi zdarzenie A.

FLESZ

Rzucamy kostką do gry. Zdarzenie A polega na wyrzuceniu parzystej liczby oczek, zdarzenie B polega na wyrzuceniu liczby oczek większej niż 4. Wyznacz przestrzeń wszystkich zdarzeń elementarnych, określ zdarzenia A, B oraz $A \cap B$.

Rozwiązanie.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{5, 6\}$,

$A \cap B = \{6\}$.

6.2.1 Zasada mnożenia i zliczanie obiektów

W określaniu liczby zdarzeń w doświadczeniu losowym przydatna jest zasada mnożenia.

Najpierw zapiszmy ją w przypadku dwóch zbiorów o różnej liczbie elementów.

WŁASNOŚCI

a) Jeżeli zbiór A ma m elementów, a zbiór B ma n elementów, to liczba różnych par (a, b), takich że $a \in A$ oraz $b \in B$, jest równa $m \cdot n$.

b) Rozważmy wybór polegający na podjęciu n decyzji. Załóżmy, że pierwszą decyzję możemy podjąć na s_1 sposobów, drugą na s_2 sposobów, … , n -tą na s_n sposobów. W takim przypadku wyboru można dokonać na $s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_n$ sposobów.

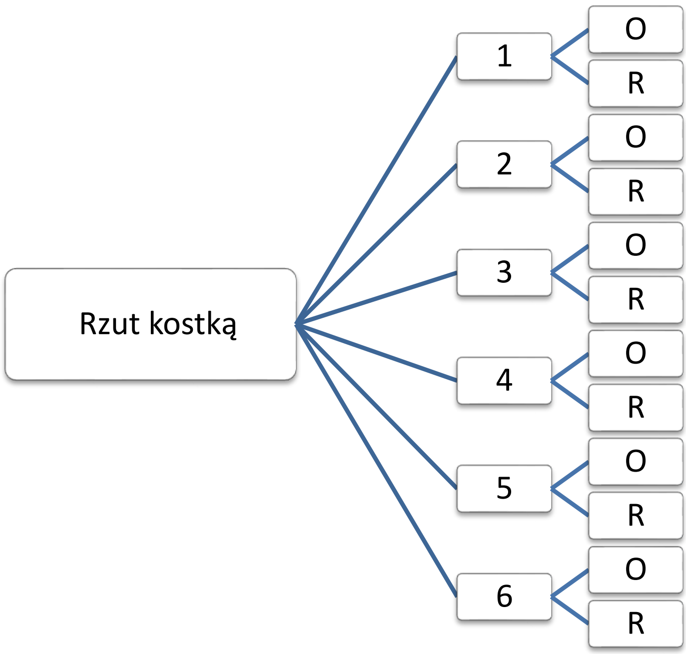
FLESZ

Rozważmy sytuację, gdy chcemy wiedzieć ile różnych tablic rejestracyjnych możemy utworzyć z dwóch liter: G, D oraz zapisanych po nich pięciu cyfr wybranych z liczb: 2,4,6,8. Korzystając z powyższego wzoru mamy gotową odpowiedź – takich tablic będzie $2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4096$.

Możemy wykorzystywać też inne sposoby pozwalające na obliczanie liczby zdarzeń w danym doświadczeniu. W prostych przypadkach możemy do tego wykorzystać drzewka ilustrujące wszystkie możliwe wyniki danego doświadczenia. Opiszmy ten sposób na przykładzie.

Rzucamy jednokrotnie symetryczną kostką sześcienną do gry oraz symetryczną monetą. Zapiszmy wyniki tego doświadczenia w postaci par (k, m), gdzie k jest liczbą wyrzuconych oczek na kostce, a m wynikiem otrzymanym w rzucie monetą (czyli wynikiem może być reszka lub orzeł). Drzewo w tym przypadku będzie miało postać dwóch poziomów – pierwszy odpowiada za możliwe wyniki rzutu kostką, a drugi za wyniki rzutu monetą.

Zatem mamy 12 możliwych wyników.


Rzut kostką
1
2
3
4
5
6
O
R
O
R
O
R
O
R
O
R
O
R

6.2.2 Kombinatoryka

DEFINICJA

Permutacja bez powtórzeń zbioru n-elementowego, składającego się z różnych elementów, nazywamy każdy n-wyrazowy ciąg utworzony ze wszystkich elementów tego zbioru. Kolejność elementów w permutacjach bez powtórzeń jest zatem istotna. Liczba wszystkich takich ciągów wyraża się wzorem

$$P_n = n!$$

Wynika z tego, ze dwie permutacje tego samego zbioru różnią się tylko kolejnością wyrazów.

FLESZ

Ankieta złożona ma być z trzech pytań: A, B i C. Na ile sposobów można ją ułożyć zmieniając tylko kolejność pytań?

Rozwiązanie. Skoro są 3 możliwe pytania, to ankietę można ułożyć na $P_3 = 3! = 6$ sposobów.

FLESZ

Ile jest wszystkich liczb czterocyfrowych o różnych cyfrach utworzonych z cyfr $1, 2, 3, 4$?

Rozwiązanie. Na miejscu tysięcy, setek, dziesiątek i jedności może być każda z cyfr $1, 2, 3, 4$. Każde z ustawień daje inną liczbę. Zatem takich liczb jest $P_4 = 4! = 24$.

FLESZ

Ile jest wszystkich liczb czterocyfrowych o różnych cyfrach utworzonych z cyfr 0, 1, 2, 3?

Rozwiązanie. Na miejscu tysięcy może być jedna z cyfr $1, 2, 3$ a na miejscu setek, dziesiątek i jedności może być każda z cyfr $0, 1, 2, 3$. Każde z takich ustawień daje inną liczbę. Zatem wszystkich liczb czterocyfrowych o różnych cyfrach utworzonych z cyfr $0, 1, 2, 3$ jest $P_4 = 4! = 24$, a liczb trzycyfrowych utworzonych z cyfr $1, 2, 3$ jest $P_3 = 3! = 6$. Czyli wszystkich liczb czterocyfrowych o różnych cyfrach utworzonych z cyfr $0, 1, 2, 3$ jest

$P_4 - P_3 = 4! - 3! = 24 - 6 = 18.$

FLESZ

W wyścigu brało udział 7 kolarzy. Ile jest możliwych rezultatów ukończenia wyścigu, jeżeli wszyscy kolarze ukończyli wyścig osiągając różne rezultaty?

Rozwiązanie. Jest $P_7 = 7! = 5040$ możliwych rezultatów.

DEFINICJA

Kombinacja bez powtórzeń, to każdy podzbiór zbioru skończonego o niepowtarzających się elementach. Czyli k-elementowa kombinacja ze zbioru n –elementowego o różnych elementach nazywamy każdy k-elementowy podzbiór (składający się z różnych elementów, gdzie $k \in \{0,1,\dots,n\}$) tego zbioru. Nie ma tu zatem znaczenia kolejność elementów w utworzonych podzbiorach. Liczba wszystkich takich podzbiorów wyraża się wzorem

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

FLESZ

Na ile sposobów można wybrać spośród 5 osób delegację trzyosobową?

Rozwiązanie. Można to zrobić na $C_5^3 = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{3!\cdot 4\cdot 5}{3!\cdot 2} = 10$ sposobów.

FLESZ

Ile nastąpi powitań, gdy spotka się jednocześnie 8 znajomych osób?

Rozwiązanie. Jednocześnie podają sobie ręce 2 osoby. Zatem nastąpi $C_8^2 = \binom{8}{2} = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{6!\cdot 7\cdot 8}{2\cdot 6!} = 28$ powitań.

DEFINICJA

Wariacja k-wyrazowa bez powtórzeń (rozmieszczeniem bez powtórzeń) ze zbioru n-elementowego (gdzie $k \leq n,\ n \in N$) nazywamy każdy uporządkowany ciąg składający się z k różnych elementów wybranych spośród n różnych elementów. Istotna jest zatem w tym przypadku kolejność elementów. Liczba wszystkich takich wariacji wyraża się wzorem

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

FLESZ

Ile można wykonać różnych trójkolorowych flag z 6 barw (jeżeli barwy rozumiemy jako kolorowe pasy występujące obok siebie)?

Rozwiązanie. Kolejność barw odgrywa role. Skoro flagi mają być trójkolorowe, to barwy nie mogą się powtarzać. Czyli różnych flag może być $V_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{3!\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{3!} = 120.$

FLESZ

W wyścigu brało udział 7 kolarzy. Ile jest możliwości zajęcia 3 pierwszych miejsc, jeżeli wszyscy kolarze ukończyli wyścig osiągając różne rezultaty?

Rozwiązanie. Jest $V_7^3 = \frac{6!}{(7-3)!} = \frac{6!}{4!} = \frac{4!\cdot 5\cdot 6}{4!} = 30$ możliwości zajęcia 3 pierwszych miejsc.

DEFINICJA

Każdy ciąg k-wyrazowy, którego wyrazy należą do zbioru n-elementowego, i wyrazy te nie musza być różne, nazywamy wariacja z powtórzeniami (rozmieszczeniem z powtórzeniami) z n-elementowego zbioru po k elementów (gdzie $k \in N$ nie musi być zależne od n). Liczba wszystkich takich wariacji z powtórzeniami wyraża się wzorem

$$\overline{V_n^k} = n^k.$$

FLESZ

Ile jest wszystkich liczb 3-cyfrowych złożonych z cyfr $1, 2, 3, 4, 5$ w których cyfry mogą się powtarzać?

Rozwiązanie. Każdą z cyfr na każdym z trzech miejsc (liczby są trzycyfrowe) można wybrać na pięć sposobów (ponieważ mamy do wyboru piec cyfr: $1, 2, 3, 4, 5$). Kolejność cyfr w liczbie jest oczywiście istotna. Zatem

$$\overline{V_5^3} = 5^3 = 125.$$

6.2.3 Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

DEFINICJA

Jeżeli Ω jest zbiorem skończonym i niepustym, to prawdopodobieństwo zdarzenia $A \subset \Omega$ nazywamy liczbę: $P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$.

WŁASNOŚCI

a) $0 \leq P(A) \leq 1$,
b) $P(\Omega) = 1$,
c) $P(\emptyset) = 0$,
d) $P(A') = 1 - P(A)$,
e) dla dowolnych zdarzeń A i B mamy $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,
f) dla zdarzeń wykluczających się (czyli $A \cap B = \emptyset$) mamy $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

FLESZ

Z cyfr $1, 3, 7, 2$ losowo tworzymy liczby trzycyfrowe (cyfry mogą się powtarzać). Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania liczby nieparzystej.

Rozwiązanie. $\overline{\overline{\Omega}} = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$. Niech A —oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu liczby parzystej. Wtedy $\overline{\overline{A}} = 4 \cdot 4 = 16$, zatem $P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{16}{64} = \frac{3}{4}$.

FLESZ

Niech $A, B \subset \Omega -$ niepusta przestrzeń zdarzeń elementarnych. Wiadomo, że $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{6}$. Uzasadnij, że $P(A \cup B) \leq \frac{1}{2}$.

Rozwiązanie. Dla zdarzeń A i B mamy $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - P(A \cap B) \leq \frac{1}{2}$, ponieważ $P(A \cap B) \geq 0$.

FLESZ

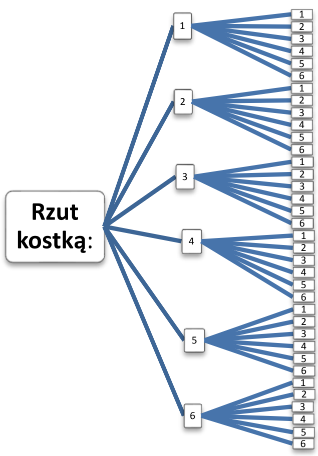
W przypadku nieskomplikowanych jednoetapowych doświadczeń na ogół korzysta się z klasycznej definicji prawdopodobieństwa. W przypadku doświadczeń kilkuetapowych dogodnie jest wykorzystać drzewa.

Aby zilustrować taką sytuację rozważmy dwa przykłady. Niech doświadczenie losowe polega na rzucie dwiema kostkami do gry. W pierwszym przypadku interesuje nas prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na wyrzuceniu tej same liczby oczek na obu kostkach. W drugim prawdopodobieństwo zdarzenia B polegającego na wyrzuceniu takiej liczby oczek na obu kostkach, aby ich suma była większa od 10.

Zauważmy, że w pierwszym i drugim przypadku zbiór zdarzeń elementarnych składa się z 36 zdarzeń (na każdej z dwóch kostek może być 6 różnych liczb, zatem $6 \cdot 6 = 36$).

W pierwszym przypadku liczba zdarzeń sprzyjających zajściu zdarzenia, że na obu kostkach będzie ta sama liczba oczek, jest równa 6: $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$. Zatem $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

W drugim przypadku posłużmy się drzewem. Zauważmy, że wyrzucenie określonej liczby oczek na jednej kostce (na przykład 4 oczek) wynosi $\frac{1}{6}$.



Zatem z drzewka odczytujemy, że suma oczek na obu kostkach będzie większa od 10 w trzech przypadkach, czyli $P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot 3 = \frac{1}{12}$.

6.2.4 Prawdopodobieństwo warunkowe i całkowite

W wielu przypadkach, informacja o zajściu zdarzenia B ma pewien wpływ na prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A. Zdarzenie polegające na zajściu zdarzenia A przy założeniu, ze zaszło zdarzenie B, oznaczamy symbolem $A|B$.

DEFINICJA

Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A pod warunkiem zajścia zdarzenia B (oznaczane przez $P(A|B)$) definiujemy następująco

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

o ile $P(B) > 0$. Liczbę $P(A|B)$ nazywamy prawdopodobieństwem warunkowym.

TWIERDZENIE

Niech Ω będzie przestrzenią zdarzeń elementarnych oraz jej podzbiory A_1, A_2 spełniają warunek

$$A_1 \cup A_2 = \Omega, A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

oraz

$$P(A_1) > 0, P(A_2) > 0,$$

to dla dowolnego zdarzenia $A \subset \Omega$ zachodzi wzór

$$P(A) = P(A|A_1)P(A_1) + P(A|A_2)P(A_2).$$

TWIERDZENIE (uogólnienie)

Niech Ω będzie przestrzenią zdarzeń elementarnych oraz jej podzbiory $A_1, A_2, \dots, A_n$ spełniają warunek

$$A_1 \cup A_2 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega \text{ oraz } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ dla dowolnego } i \neq j$$

oraz

$$P(A_i) > 0$$

dla dowolnych $i, j \in N$, to dla dowolnego zdarzenia $A \subset \Omega$ zachodzi wzór

$$P(A) = P(A|A_1)P(A_1) + P(A|A_2)P(A_2) + \dots + P(A|A_n)P(A_n).$$

Powyższy wzór nazywamy wzorem na prawdopodobieństwo całkowite i pozwala on nam na obliczanie prawdopodobieństw wielu zdarzeń nie tylko w doświadczeniach dwuetapowych. W doświadczeniach o większej liczbie etapów stosujemy ten wzór wielokrotnie. Zdarzenie A nazywamy skutkiem, a zdarzenia A_i nazywamy przyczynami lub hipotezami.

Jeżeli skutek A może zajść w wyniku jednej z n przyczyn $A_1, A_2, \dots, A_n$ jedynie możliwych i wzajemnie wykluczających się, to prawdopodobieństwo zajścia skutku A wyraża się wzorem na prawdopodobieństwo całkowite.

FLESZ

Wiadomo, że $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$, $P(A') = \frac{1}{3}$, gdzie A' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia A. Oblicz $P(A|B)$ oraz $P(B|A)$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ oraz, że

$$\frac{3}{4} = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} + P(B) - \frac{1}{2}.$$

Zatem $P(B) = \frac{7}{12}$. Stąd

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{12}} = \frac{6}{7}, P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}.$$

FLESZ

Rzuciliśmy jednokrotnie sześcienną kostką do gry i wpadła liczba oczek mniejsza niż 6. Jakie jest prawdopodobieństwo, że była to parzysta liczba oczek?

Rozwiązanie. Mamy zdarzenia:

A – wypadłą parzysta liczba oczek,

B - wypadła liczba oczek mniejsza niż 6.

Wszystkich możliwych rezultatów w rzucie sześcienną kostką do gry jest 6 $(1, 2, 3, 4, 5, 6$ oczek). Skoro $P(A \cap B) = \frac{2}{6}$ (ponieważ jeżeli wypadła parzysta liczba oczek mniejsza niż 6, oznacza to że wypadły 2 oczka lub 4 oczka) oraz $P(B) = \frac{5}{6}$ (ponieważ jeżeli wypadła liczba oczek mniejsza niż 6, oznacza to wypadło $1, 2, 3, 4, 5$ oczek). Zatem szukane prawdopodobieństwo wynosi

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{5}{6}} = \frac{2}{5}.$$

7 Rachunek różniczkowy

7.1 Granica i ciągłość funkcji

DEFINICJA

Mówimy, że funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_0 granicę g wtedy, gdy dla każdego ciągu *(x_n)* zbieżnego do x_0, którego wyrazami są argumenty funkcji f różne od x_0, ciąg (f(x_n)) odpowiadających im wartości tej funkcji jest zbieżny do *g.*

Czyli dla $x_n \neq x_0$ jeżeli

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \text{, to } \lim_{n \to \infty} f(x_n) = g.$$

Mówimy wtedy, że istnieje granica właściwa funkcji. Granica funkcji może być również niewłaściwa (czyli dążyć do $-\infty$ lub ∞).

DEFINICJA

Funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_0 granicę lewostronną równą g, gdy dla każdego ciągu argumentów (x_n) należących do dziedziny funkcji takich, że $x_n < x_0$, jeżeli

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \text{, to } \lim_{n \to \infty} f(x_n) = g.$$

Zapisujemy to symbolicznie:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = g.$$

Analogicznie definiujemy granicę prawostronną funkcji $f(x)$ w punkcie x_0, którą zapisujemy to symbolicznie:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = g.$$

WŁASNOŚĆ

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = g.$$

Jeśli granice jednostronne funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 są różne, to mówimy, że funkcja nie ma granicy w tym punkcie.

FLESZ

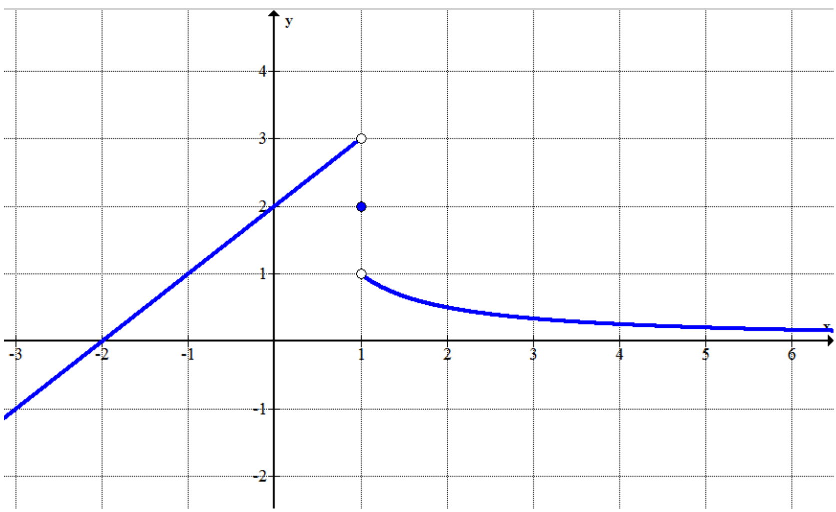
Zauważmy, że dla funkcji stałej $f(x) = c$ mamy

$$\lim_{x\to x_0} c = c$$

w każdym punkcie $x_0 \in R$

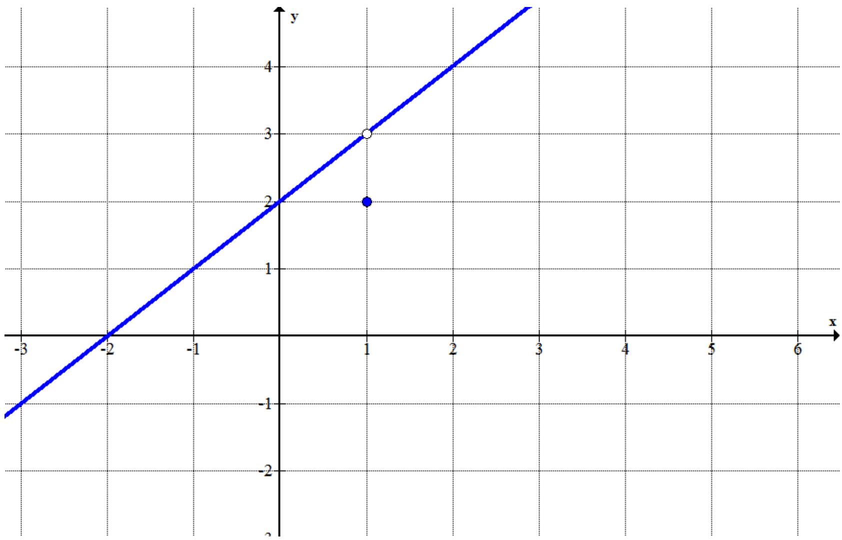
FLESZ

Narysuj wykres przykładowej funkcji, która spełnia warunki: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$, $f(1) = 2$.



FLESZ

Narysuj wykres przykładowej funkcji, która spełnia warunki $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$, $f(1) = 2$.



WŁASNOŚCI

Jeżeli

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x) = g_1 \; oraz \; \lim_{x\to x_0} f_2(x) = g_2,$$

to

1) $\lim_{x\to x_0} \big(f_1(x) + f_2(x)\big) = g_1 + g_2,$

2) $\lim_{x\to x_0} \big(f_1(x) - f_2(x)\big) = g_1 - g_2,$

3) $\lim_{x\to x_0} \big(f_1(x) \cdot f_2(x)\big) = g_1 \cdot g_2,$

4) $\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{g_1}{g_2},$ jeśli $f_2(x) \neq 0$ oraz $g_2 \neq 0$.

FLESZ

Wyznacz granicę

a) $\lim\limits_{x \to 0}(2x - 1)$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

Rozwiązanie.

a) $\lim\limits_{x \to 0}(2x - 1) = 2 \cdot 0 - 1 = -1$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1}(x + 1) = 2$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

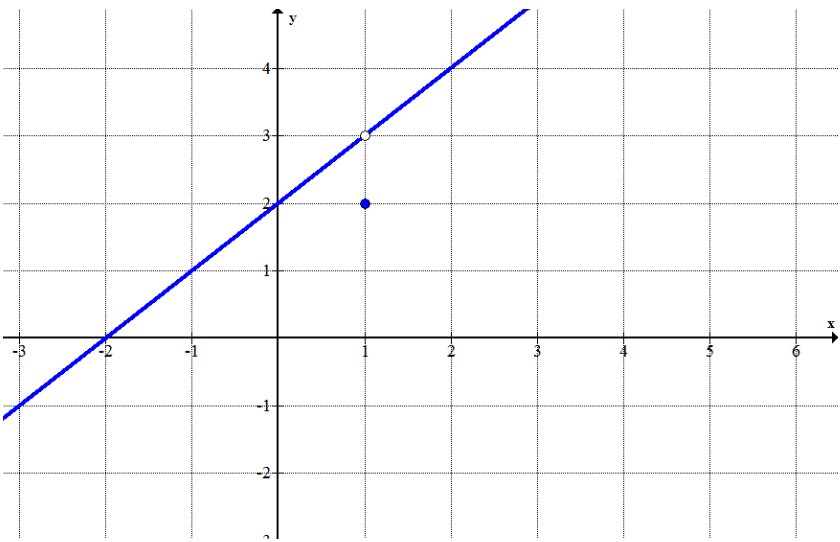
DEFINICJA

Funkcję $f(x)$ określoną w otoczeniu punktu x_0 nazywamy ciągłą w punkcie x_0, jeżeli istnieje granica funkcji w tym punkcie oraz zachodzi równość:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

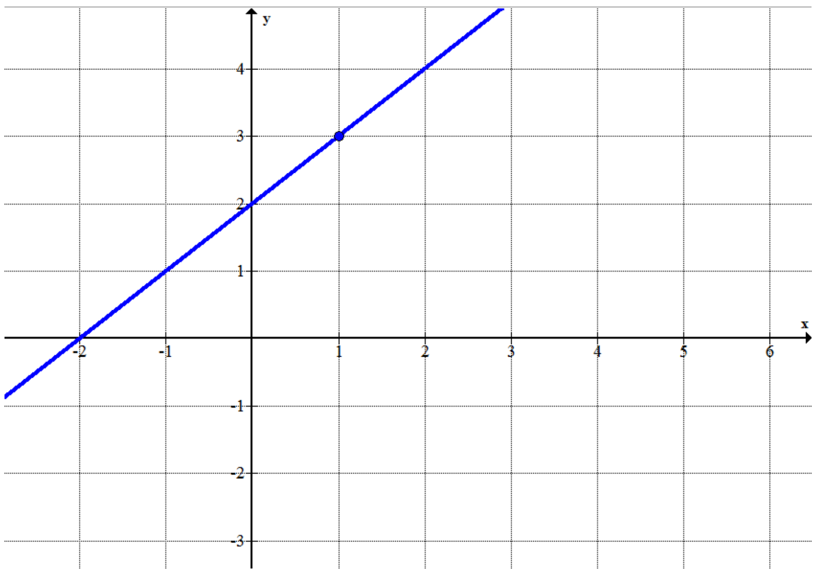
FLESZ

Narysuj przykład funkcji, która nie jest ciągła w punkcie $x = 1$.



FLESZ

Narysuj przykład funkcji, która jest ciągła w punkcie $x = 1$.



7.2 Pochodna funkcji

Niech funkcja f będzie określona w otoczeniu punktu x_0.

Przy badaniu funkcji bardzo ważny jest stosunek przyrostu wartości funkcji Δf do przyrostu argumentu Δx tej funkcji $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$. Stosunek ten nazywamy ilorazem różnicowym funkcji f odpowiadającym przyrostowi argumentu funkcji w punkcie x_0 o wartości Δx.

DEFINICJA

Pochodną funkcji w punkcie x_0 nazywamy granicę ilorazu różnicowego, gdy przyrost zmiennej niezależnej dąży do zera:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Analogicznie jak w przypadku granic funkcji można tez mówić o pochodnych niewłaściwych (nieskończonych) funkcji f w punkcie x_0, jak również o pochodnych jednostronnych w punkcie x_0.

TWIERDZENIE

Jeżeli funkcja ma pochodną właściwą w punkcie, to jest ciągła w tym punkcie.

PODSTAWOWE WZORY

Niech funkcje $f(x)$ i $g(x)$ będą różniczkowalne w punkcie x_0 oraz $c \in R$. Wtedy

$$\big(f(x_0) + g(x_0)\big)' = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$$

$$\big(f(x_0) \cdot g(x_0)\big)' = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

$$\left(\frac{c}{g(x_0)}\right)' = \frac{-cg'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

$$\left(\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)' = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

$$\Big(f\big(g(x_0)\big)\Big)' = f'\big(g(x_0)\big) \cdot g'(x_0)$$

POCHODNE FUNKCJI POTĘGOWYCH I TRYGONOMETRYCZNYCH

Niech $c \in R$ oraz $n \in N$.

- Funkcje stałe, liniowe i potęgowe

$$(c)' = 0, \qquad (cx)' = c, \qquad (x^n)' = nx^{n-1}$$

- Funkcje trygonometryczne

$$(\sin x)' = \cos x\,, \qquad (\cos x)' = -\sin x\,, \qquad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

FLESZ

Wyznacz pochodną funkcji

a) $y = 5x^4$
b) $y = 3x^5 + 4x - 5$
c) $y = x^4 \sin x$
d) $y = \frac{x^2}{x^3+7}$

Rozwiązanie.

a) $y' = 5 \cdot 4x^3 = 20x^3$
b) $y' = 15x^4 + 4$
c) $y' = 4x^3 \sin x + x^4 \cos x$
d) $y' = \frac{2x(x^3+7) - x^2 \cdot 3 \cdot x^2}{(x^3+7)^2}$

7.3 Ekstrema i monotoniczność funkcji i jej zastosowania

TWIERDZENIE (warunki wystarczające monotoniczności funkcji)

Niech A oznacza dowolny przedział. Jeżeli dla każdego $x \in A$ funkcja f spełnia warunek

1. $f\,'(x) = 0$, to jest stała na A;

2. $f\,'(x) > 0$, to jest rosnaca na A;

3. $f\,'(x) < 0$, to jest malejąca na A.

FLESZ

Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Rozwiązanie. Dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych. Pochodna tej funkcji, określona dla wszystkich liczb rzeczywistych, wynosi

$$f'(x) = 3x^2 - 3.$$

Zatem

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 > 0$$

oraz

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 < 0.$$

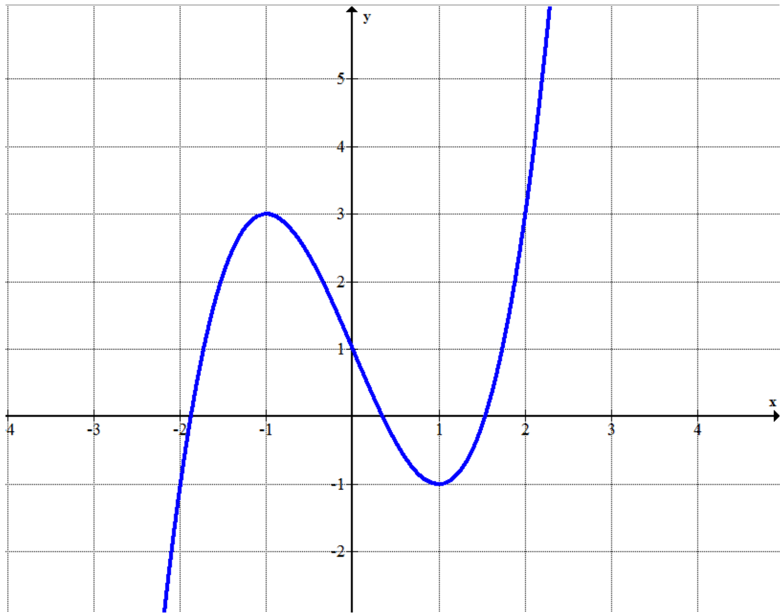
Rozwiążmy nierówność $3x^2 - 3 > 0$:

$$x^2 - 1 > 0$$

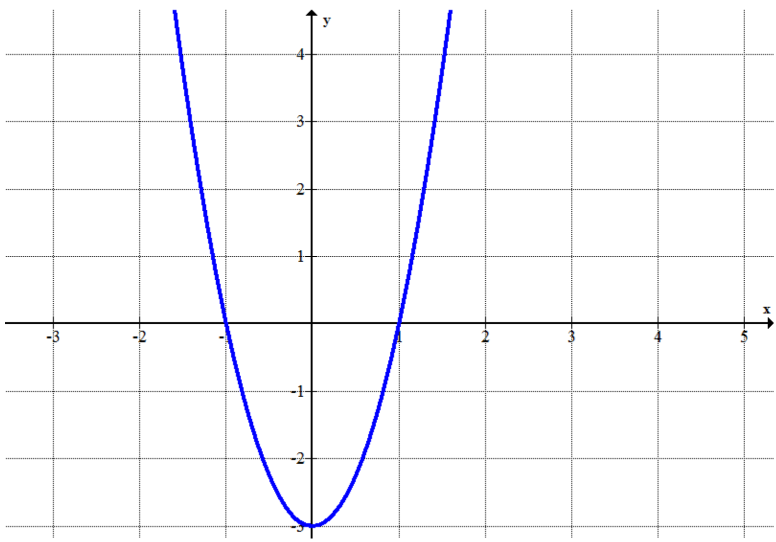
$$(x-1)(x+1) > 0$$

$$x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

Czyli funkcja jest rosnąca wewnątrz przedziałów $(-\infty, -1), (1, \infty)$, a malejąca na przedziale $(-1,1)$.



Wykres funkcji $f(x) = x^3 - 3x + 1$



Wykres pochodnej funkcji $f'(x) = 3x^2 - 3$

EKSTREMA LOKALNE FUNKCJI (minimum i maksimum lokalne)

Niech funkcja f będzie określona w otoczeniu punktu x_0.

Minimum lokalne właściwe istnieje, jeżeli w pewnym otoczeniu otwartym U, punktu x_0, funkcja przyjmuje wszędzie, z wyjątkiem tego punktu, wartości większe od $f(x_0)$:

$$x = x_0 \text{ lub } f(x) < f(x_0)$$

dla każdego $x \in U$.

Maksimum lokalne właściwe istnieje, jeżeli w pewnym otoczeniu otwartym U, punktu x_0, funkcja przyjmuje wszędzie, z wyjątkiem tego punktu, wartości mniejsze od $f(x_0)$:

$$x = x_0 \text{ lub } f(x) > f(x_0)$$

dla każdego $x \in U$.

TWIERDZENIE

W przypadku wielomianów i funkcji wymiernych ekstrema lokalne mogą istnieć tylko w punktach należących do dziedziny, w których pochodna funkcji równa się zero.

TWIERDZENIE (Fermata, warunek konieczny istnienia ekstremum)

Jeżeli funkcja f ma

1. ekstremum lokalne w punkcie x_0;

2. pochodną $f'(x_0)$;

to $f'(x_0) = 0$.

TWIERDZENIE (warunek wystarczający istnienia maksimum)

Jeżeli funkcja f spełnia warunki

1. $f'(x_0) = 0$,

2. istnieje sąsiedztwo punktu $x_0$takie, że dla każdego x z tego sąsiedztwa

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \text{ gdy } x < x_0 \\ f'(x) < 0 \text{ gdy } x > x_0 \end{cases}$$

to w punkcie x_0 ma maksimum lokalne właściwe.

TWIERDZENIE (warunek wystarczający istnienia minimum)

Jeżeli funkcja f spełnia warunki

1. $f'(x_0) = 0$,

2. istnieje sąsiedztwo punktu $x_0$takie, że dla każdego x z tego sąsiedztwa

$$\begin{cases} f'(x) < 0 \text{ gdy } x < x_0 \\ f'(x) > 0 \text{ gdy } x > x_0 \end{cases}$$

to w punkcie x_0 ma minimum lokalne właściwe.

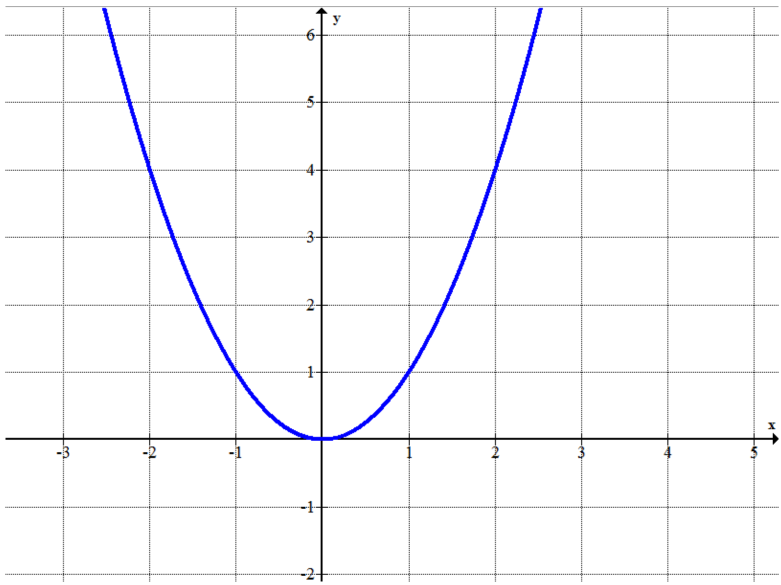
FLESZ

Implikacja odwrotna jest fałszywa.

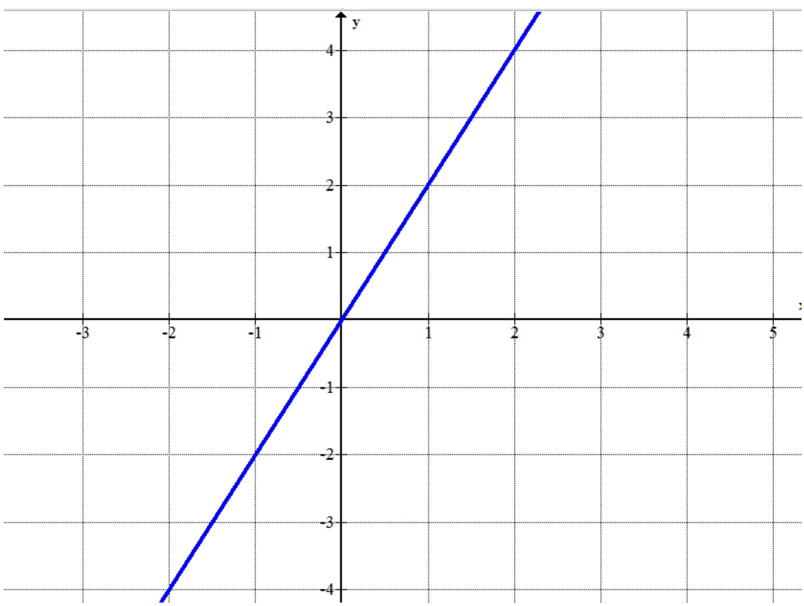
Rozpatrzmy funkcje: $f(x) = x^2$ oraz $g(x) = x^3$ określone na zbirze liczb rzeczywistych. Pochodne tych funkcji na zbiorze R wynoszą odpowiednio

$$f'(x) = 2x, \qquad g'(x) = 3x^2.$$

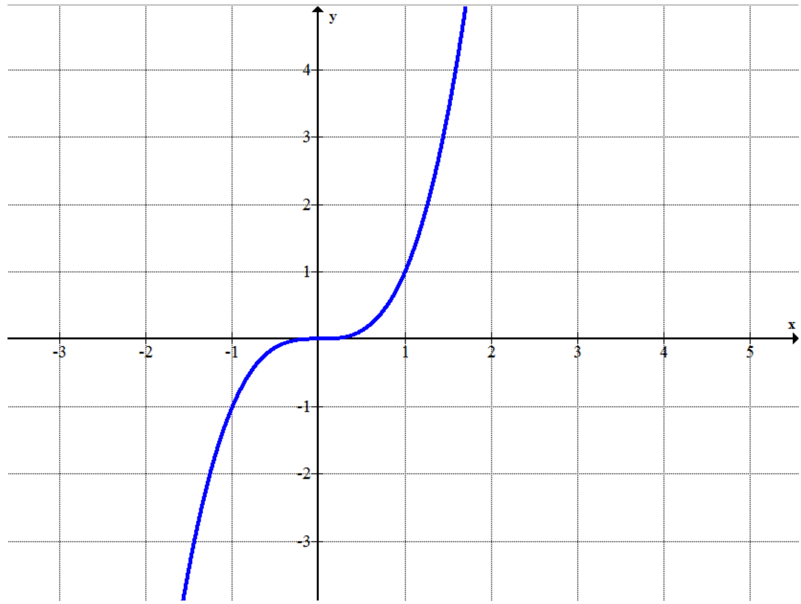
Zatem w obu przypadkach $f'(x) = 0$, $g'(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$. Tymczasem w punkcie $x = 0$ funkcja $f(x) = x^2$ posiada minimum lokalne właściwe, a funkcja $g(x) = x^3$ nie posiada ekstremum lokalnego.



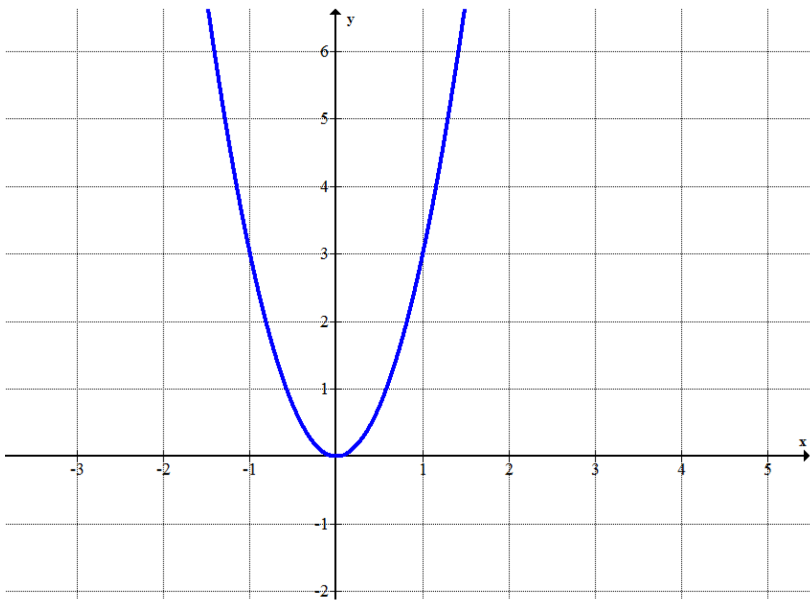
Wykres funkcji $f(x) = x^2$



Wykres pochodnej funkcji $f'(x) = 2x$



Wykres funkcji $g(x) = x^3$



Wykres pochodnej funkcji $g'(x) = x^2$

FLESZ

Suma dwóch liczb wynosi 10. Jak dobrać te liczby aby ich suma kwadratów była najmniejsza.

Rozwiązanie.

Niech x, y będą szukanymi liczbami.

Wtedy

$$x + y = 10$$

Stąd

$$y = 10 - x$$

Rozważmy funkcje $f(x) = x^2 + y^2 = x^2 + (10 - x)^2 = 2x^2 - 20x + 100.$

Zauważmy, że $f'(x) = 4x - 20$. Punkt podejrzany o ekstremum $f'(x) = 0$, zatem $x = 5.$

Funkcja ta posiada w punkcie $x = 5$ minimum- (następuje zmiana znaku z minusa na plus)

Odpowiedź.

$x = 5, y = 5.$

8 Projekt -„e-matura”

8.1 Wstęp

Ponad 10 lat temu w Polsce wprowadzono system egzaminów zewnętrznych. Do dnia dzisiejszego egzaminy sprawdzane są metodą tradycyjną. Uczniowie piszą egzaminy na przygotowanych arkuszach, następnie egzaminy sprawdzane są przez egzaminatorów. Obecnie Centralna Komisja Egzaminacyjna rozpoczęła próby wdrażania tzw. e-oceniania. System e-oceniania, to taki system, który umożliwia sprawdzanie prac egzaminacyjnych przez egzaminatora nie poprzez przeglądanie papierowych dokumentów, lecz na ekranie monitora. System taki należy rozumieć, jako aplikację webową zapewniającą autoryzowany dostęp przez Internet. Dzięki takiemu rozwiązaniu możliwe jest sprawne organizowanie pracy dla egzaminatorów. E-ocenianie umożliwia przejście od punktowania przez egzaminatorów całych prac obejmujących od kilku do kilkudziesięciu zadań do specjalizacji w ocenianiu poszczególnych zadań. System e-oceniania został już na dużą skalę wprowadzony między innymi w Wielkiej Brytanii czy Stanach Zjednoczonych. Doświadczenia, jakie zdobyły w tym obszarze cztery duże komisje egzaminacyjne w tych krajach (AQA, OCR i EDEXCEL – Wielka Brytania; ETS – Stany Zjednoczone) pozwalają stwierdzić, że przejście od oceniania tradycyjnego do e-oceniania wiąże się nie tylko ze zmianą organizacji procesu przygotowania prac do oceniania, ale również poprawia jego jakość.

Projekt E-matura jest kolejnym krokiem rozwoju egzaminów zewnętrznych w stosunku do e-oceniania. Takie rozwiązania do tej pory nie funkcjonują ani w Europie, ani na Świecie na taką skalę. Przez realizację tego projektu chcemy pokazać, że pierwsze próby wdrożenia mogą funkcjonować w Polsce już za cztery lata. Decyzja będzie należała do MEN. Pierwszy krok wdrożenia e-matury jest możliwy w tzw. dodatkowym terminie matury – tzw. Próbna matura, w którym w Polsce zdaje około 2 tysięcy uczniów (rok 2011) ze wszystkich przedmiotów (około 150 z matematyki).

8.2 Czym jest e-matura?

Projekt e-matura stanowi nowoczesny i innowacyjny system egzaminacyjny w skali kraju, który pozwala rozwiązywać dotychczasowe problemy, jakie występowały podczas przeprowadzania egzaminów, w nowy sposób. System pozwala na przeprowadzanie egzaminów maturalnych z matematyki z wykorzystaniem komputerów podłączonych do Internetu. Przebieg egzaminu jest bardzo zbliżony do zwykłego egzaminu maturalnego, w którym uczniowie zasiadają o ustalonej godzinie przed komputerami i przystępują jednocześnie do pisania egzaminu. Po wystartowaniu egzaminu przez ucznia uzyskuje on dostęp do pytań egzaminacyjnych zaprezentowanych w nowoczesnej multimedialnej formie. W przypadku, gdy uczeń nie do końca rozumie, w jaki sposób dany typ zadania ma zostać rozwiązany może skorzystać z kontekstowej pomocy przypisanej do każdego pytania.

Użytkownikami systemu e-matura będą docelowo uczniowie klas maturalnych, którzy będą mogli wykorzystać umieszczane w systemie materiały i egzaminy do podnoszenia wiedzy i lepszego przygotowania do egzaminu urzędowego. System został przygotowany w taki sposób, aby mogli z niego korzystać uczniowie również z miejscowości, gdzie dostęp do Internetu jest na słabszym poziomie (częste przerwania połączenia, słaba przepustowość łączy) – poprzez wykorzystanie aplikacji typu „grupy klient". Dzięki temu każdy ze zdających egzamin na platformie e-matura ma jednakowe szanse i zdaje na takich samych zasadach bez względu, z jakiej miejscowości przystępuje do udziału w projekcie. Ponadto system zakłada wsparcie dla osób niepełnosprawnych poprzez dostosowanie interfejsu użytkownika do osób niedowidzących.

Zadania egzaminacyjne można sklasyfikować, jako tzw. zamknięte i otwarte. Zadanie zamknięte składa się z dystraktorów (wzorców błędnych odpowiedzi) i jednego lub kilku werstraktorów (wzorców prawidłowych odpowiedzi). W zadaniach otwartych samodzielnie formułuje się i zapisuje odpowiedzi. Stosowanie zadań zamkniętych jest wygodne pod kątem tworzenia systemu automatycznego oceniania, zarówno w przypadku skanowania formularzy z rozwiązaniami jak i systemów egzaminów online.

Projekt e-matura jest budowany w sposób na tyle uniwersalny, że jest w stanie obsłużyć egzaminy również z innych przedmiotów takich jak fizyka czy geografia. System może służyć również do bieżącej nauki wspierając nauczycieli i uczniów podczas całego procesu dydaktycznego. Ponieważ e-matura jest systemem informatycznym, który wykorzystując zaawansowane algorytmy sprawdzania pytań może mocno uprościć i wspomóc pracę nauczyciela, dzięki czemu uczniowie będą mogli rozwiązywać samodzielnie większą ilość zadań i na bieżąco sprawdzać swoje możliwości bez potrzeby sprawdzania wszystkich prac przez nauczyciela.

Nauczyciel ma również dostęp do raportów tworzonych automatycznie w systemie e-matura, dzięki czemu może przez cały czas śledzić postępy danego ucznia i sprawdzać, w jakich dziedzinach uczeń ma problemy i musi się jeszcze poprawić. Aplikacja umożliwia bardzo rozbudowany system raportowania. Oprócz standardowego wyniku logowane są również takie dane jak ilość wejść ucznia w dane pytanie, czas rozwiązywania danego pytania, jak często uczeń korzystał z pomocy kontekstowej podczas rozwiązywania danego pytania. Dzięki takim informacjom zarówno nauczyciele jak i osoby przygotowujące egzaminy maturalne mogą jeszcze lepiej dostosowywać układane pytania, aby zostały jak najlepiej zrozumiane przez zdających egzamin.

Projekt e-matura jest innowacyjnym podejściem do tematu egzaminowania uczniów na dużą skalę z wykorzystaniem systemu opartego o sieć Internet. Zastosowanie projektu do przeprowadzenia egzaminu maturalnego niesie za sobą pewne wymagania dotyczące daty i godziny, w której taki egzamin się odbywa. Aby zapewnić równość i jednolite zasady zdawania dla wszystkich uczestników projektu system musi umożliwiać jednoczesne przystąpienie do egzaminu przez bardzo dużą liczbę użytkowników. Aby sprostać takim wymaganiom system został zaprojektowany z wykorzystaniem rozproszonej infrastruktury zarówno od strony bazy danych jak i aplikacji udostępnianej użytkownikom.

Baza danych jest kluczowym elementem projektu, który zapewnia dostęp do tajnych aż do chwili startu egzaminu pytań oraz miejsca, w którym są odkładane udzielone przez użytkowników odpowiedzi. Baza danych została zbudowana z wykorzystaniem silnika bazy danych Microsoft SQL Server 2008 R2. Aby zapewnić odpowiednią szybkość działania został do tego celu zbudowany klaster złożony z dwóch fizycznych serwerów bazodanowych podłączonych poprzez sieć SAN do współdzielonej macierzy opartej na twardych dyskach z interfejsem SAS. Serwery bazodanowe zostały odseparowane fizycznie od sieci Internet i są dostępne tylko za pośrednictwem aplikacji udostępnianej przez serwery aplikacyjne. Zastosowanie technologii klastrowej zapewnia dużą wydajność oraz bezpieczeństwo – w przypadku fizycznej awarii jednego z serwerów drugi z powodzeniem przejmuje jego rolę i serwuje dalej usługi tak, aby użytkownik końcowy nawet się nie zorientował, że wystąpiły jakieś problemy techniczne. Ponieważ w bazie danych odkładane są wszelkie informacje o aktywności użytkownika podczas egzaminu (odpowiedzi – nawet jeśli użytkownik zmieni odpowiedź, każda udzielona przez niego odpowiedź jest oddzielnie zapisywana do późniejszej analizy, czas udzielania odpowiedzi, ilość wejść w dane pytanie, informacje o korzystaniu z kontekstowej pomocy technicznej itd.) wymagana jest duża wydajność działania silnika bazodanowego. Podczas testów projektu przeprowadzonych w kwietniu 2011, w których wzięło udział 2349 uczniów ze szkół z woj. łódzkiego udało się zmierzyć obciążenie bazy danych na poziomie około 10-15% wykorzystania sprzętu, który został zakupiony na potrzeby projektu. Na podstawie testów syntetycznych przeprowadzonych z użyciem serwerów, które przeprowadzały kontrolowane ataki DDOS na serwery bazodanowe projektu e-matura wynika, że zakupiony sprzęt powinien sprostać liczbie około 25 do 30 tysięcy (dla porównania liczba maturzystów podchodzących pierwszy raz do matury w woj. łódzkim z 2011 wynosiła 22315)[1] jednoczesnych użytkowników odwołujących się do bazy danych przez aplikację e-matura. Biorąc pod uwagę wyniki testów syntetycznych oraz wprowadzane cały czas optymalizacje w systemie zakupiony na potrzeby projektu sprzęt powinien sprostać wymaganiom przeprowadzenia egzaminu maturalnego dla wszystkich maturzystów z województwa łódzkiego. Zwiększanie liczby użytkowników będzie wymagało inwestycji w rozbudowę sprzętu.

[1] Dane z OKE Łódź

Aplikacja e-matura jest interfejsem użytkownika, przez który uczniowie komunikują się z bazą danych pobierając pytania oraz udzielając na nie odpowiedzi. Aplikacja została zbudowane w oparciu o model tzw. grubego klienta z wykorzystaniem technologii Silverlight 4.0. Zastosowanie takiego modelu umożliwiło zbudowanie dużo bezpieczniejszej aplikacji, a także znaczące zwiększenie wygody korzystania z aplikacji przez zdających egzamin uczniów. Aplikacja jest uruchamiana z poziomu przeglądarki WWW i z punktu widzenia użytkownika cały czas działa jak strona sieci web. Jest to jednak aplikacja w modelu grubego klienta, co oznacza, że cała aplikacja jest pobierana na lokalny komputer użytkownika i działa całkowicie autonomicznie. Interfejs użytkownika jest tak samo responsywny dla użytkowników podłączonych do Internetu łączem o dużej przepustowości jak i dla tych, którzy mają dużo słabsze łącza, czego nie dałoby się osiągnąć przy wykorzystaniu standardowej strony WWW, gdyż użytkownicy ze słaby podłączeniem do Internetu dużo dłużej musieliby czekać na przeładowywanie się stron z kolejnymi pytaniami. Aplikacja e-matura niweluje ten problem, przez co znacząco zwiększa równość szans przy zdawaniu egzaminu przez wszystkich użytkowników. Aplikacja już na samym początku pobiera wszystkie pytania i odwołuje się do serwera tylko w przypadku udzielania odpowiedzi na dane pytanie. Jeśli nawet łączność z Internetem zostanie przerwana na chwilę odpowiedzi użytkownika są zapisywane w pamięci podręcznej aplikacji i gdy tylko łączność z serwerem zostaje odzyskana aplikacja wysyła wszystkie dane w tle, nie wpływając w żaden sposób na pracę użytkownika.

Środowisko fizyczne, które jest wykorzystywane do serwowania aplikacji e-matura zostało stworzone w oparciu o 4 serwery wykorzystujące system operacyjny Microsoft Windows 2008 R2. Serwerem, który serwuje aplikację dla użytkowników końcowych oraz pośredniczy w komunikacji

pomiędzy aplikacją, a serwerem bazy danych jest IIS w wersji 7.5. Ponadto jest jeszcze jeden serwer pełniący rolę tzw. „load balancer'a", do którego kierowana są wszystkie odwołania użytkowników, którzy uruchamiają aplikację. Serwer ten kieruje zapytania użytkowników do serwerów udostępniających aplikację w taki sposób, aby jak najlepiej rozłożyć obciążenie pomiędzy 4 serwery aplikacyjne zapewniając w ten sposób maksymalną wydajność serwowania danych. Wykorzystanie infrastruktury rozproszonej zwiększa ponadto bezpieczeństwo korzystania z aplikacji poprzez zabezpieczenie przed awarią sprzętową. W przypadku awarii jednego z serwerów zapytania, które były do niego kierowane są przekierowywane do pozostałych serwerów, które automatycznie przejmują jego rolę.

Projekt e-matura został zbudowany w sposób innowacyjny, aby jak najlepiej spełnić wymagania stawiane przed egzaminami maturalnymi z matematyki i nie tylko. Projekt jest budowany w taki sposób, aby był jak najbardziej uniwersalny i mógł być wykorzystywany po wprowadzeniu pewnych przeróbek również w zastosowaniu do innych przedmiotów.

E-Matura jest systemem egzaminacyjnym czasu rzeczywistego pozwalająca na przeprowadzenie wybranego egzaminu dla dużej próbki uczniów w jednym czasie. Dzięki zastosowaniu nowoczesnych rozwiązań z dziedziny informatyki system pozwala na przeprowadzenie interaktywnego egzaminu dla kilkudziesięciu tysięcy osób. System został stworzony na potrzeby przeprowadzenia egzaminu maturalnego z matematyki jednak jest elastyczna architektura pozwala na dostosowanie go do każdej innej dziedziny nauki czy sztuki.

8.3 Cele projektu

Zakłada się, że celem głównym projektu jest dostarczenie innowacyjnego narzędzia służącego do dokonania zmian w metodach nauczania i uczenia się, będącego jednocześnie narzędziem pozwalającym na weryfikację zdobytej wiedzy, dzięki zastosowaniu możliwości sprawdzania poziomu zdobytej wiedzy za pośrednictwem interaktywnej platformy i zgromadzonego tam materiału jak, również statystycznej analizy zbieranych wyników.

Przy założeniu celu głównego sprecyzowane zostały następujące cele szczegółowe projektu:

- *Dostarczenie odbiorcom możliwości na wyrównania lub podniesienia poziomu posiadanej wiedzy w zakresie matematyki, jak również zweryfikowanie jej i ocenienie*

Wskaźnikiem osiągnięcia celu będzie odsetek uczniów, którzy podnieśli swój poziom posiadanej wiedzy z matematyki.

Źródłem danych będzie przeprowadzenie badań podłużnych wśród użytkowników platformy. Te same osoby podchodzić będą do egzaminu z matematyki za pośrednictwem platformy e-matura, co najmniej dwa razy. Pozwoli to porównać osiągane przez nie wyniki i stwierdzić, w jakim stopniu podniosły one swój poziom wiedzy i umiejętności z zakresu matematyki.

Wartość docelowa: Cel zostanie osiągnięty, jeżeli zostanie stwierdzone, że co najmniej 960 uczniów podniesie swój poziom wiedzy z matematyki.

- *Dostarczenie użytkownikom możliwości wykorzystania innowacyjnego narzędzia celem podniesienia atrakcyjności prowadzonych form nauczania, a tym samym przełamywania istniejących w tym zakresie stereotypów.*

Wskaźnikiem osiągnięcia celu będzie stopień wykorzystania platformy e-matura zarówno przez nauczycieli jak i uczniów.

Źródłem danych będzie analiza wyników badań ankietowych przeprowadzonych w etapie testowania projektu.

Wartość docelowa: cel zostanie osiągnięty, jeżeli co najmniej 32 placówki i 64 nauczycieli zdeklaruje, że uzyskała innowacyjne możliwości wykorzystania platformy e-matura.

- *Dostarczenie użytkownikom instytucjonalnym, przy zachowaniu poufności, możliwości zbierania i analizowania danych*

Wskaźnikiem osiągnięcia celu będzie odsetek dyrektorów/nauczycieli, którzy będą wykorzystywać gromadzone po każdym egzaminie dane dotyczące osiąganych przez uczniów wyników.

Źródłem danych będzie analiza wyników badań ankietowych przeprowadzonych w gronie dyrektorów i nauczycieli ze szkół uczestniczących w projekcie.

Wartość docelowa: cel zostanie osiągnięty, jeżeli co najmniej 64 dyrektorów/nauczycieli z 32 placówek zadeklaruje chęć wykorzystywania zgromadzonego dzięki platformie materiału.

- *Otwarcie się szkół ponadgimnazjalnych na działania innowacyjne doprowadzające do udostępniania gromadzonej na uczelniach wyższych wiedzy*

Wskaźnikiem osiągnięcia celu będzie odsetek szkół zainteresowanych udziałem w projekcie.

Źródłem danych będzie analiza wyników badań ankietowych przeprowadzonych zarówno wśród szkół biorących udział w etapie testowania jak również szkół losowo wybranych, które nie wzięły udziału w tym etapie.

Wartość docelowa: cel zostanie osiągnięty, jeżeli co najmniej 32 placówki zadeklarują chęć wzięcia udziału w projekcie.

- *Zwiększenie zainteresowania uczniów szkół ponadgimnazjalnych kontynuacją kształcenia na kierunkach o kluczowym znaczeniu dla gospodarki opartej na wiedzy*

Wskaźnikiem osiągnięcia celu będzie odsetek uczniów biorących udział w badaniu ankietowym, który uzna, że wprowadzanie i używanie narzędzi typu platforma e-matura korzystnie wpływa na popularyzację przedmiotów ścisłych i tym samym na zwiększenie liczby uczniów zainteresowanych kontynuacją nauki na kierunkach o kluczowym znaczeniu dla gospodarki opartej na wiedzy.

Źródłem danych będzie analiza wyników badań ankietowych przeprowadzonych w gronie użytkowników platformy e-matura. Badania te przeprowadzone będą dla każdego uczestnika dwukrotnie: najpierw podczas badania w klasie przedmaturalnej a później w klasie maturalnej, dlatego można będzie porównać odpowiedzi przed korzystaniem z platformy jak i po e-egzaminie.

Wartość docelowa: Cel zostanie osiągnięty, jeśli 20% biorących udział w ankiecie uzna, że wprowadzanie i używanie narzędzi typu platforma e-matura korzystnie wpływa na popularyzację przedmiotów ścisłych i tym samym na zwiększenie liczby uczniów zainteresowanych kontynuacją kształcenia na kierunkach o kluczowym znaczeniu dla gospodarki opartej na wiedzy.

8.4 W jaki sposób nasz projekt może pomóc?

Elektroniczna forma przeprowadzania egzaminów rozwiązuje wiele problemów.

1. Przede wszystkim **zmniejszone zostaną koszty przeprowadzenia egzaminu** gdyż poza jednorazowym wydatkiem na sprzęt, oprogramowanie i jego utrzymanie następne egzaminy mogą się już odbywać **przy minimalnych kosztach eksploatacyjnych**. Ponadto znikają też koszty, jakie należy ponieść na opłacenie nauczycieli sprawdzających prace egzaminacyjne,
2. **Dostarczenie pytań do jednostek egzaminujących jest w pełni bezpieczne i poufne** automatyczne i działa na zasadzie szyfrowania kluczem asymetrycznym pochodzącym z certyfikatów wystawionych przez autoryzowane jednostki certyfikujące. Dzięki takiemu podejściu pytania docierają bezpiecznie do odbiorcy bez możliwości ich „wycieku". Serwery z danymi są włączane do sieci dopiero w momencie uruchomienia e-matury. Co eliminuje wcześniejsze włamania hakerów.
3. Elektroniczna matura pozwala uzyskać **natychmiastowy wynik,** ponieważ system według zadanych parametrów dokona analizy i sprawdzenia prac dostarczając do ucznia wynik zaraz po zakończonym egzaminie dając egzaminowanej osobie o wiele większy komfort psychiczny.
4. Elektroniczna matura **znacząco ogranicza możliwość „ściągania"**.
5. Kolejnym elementem, na jaki pozwala elektroniczne egzaminowanie jest **zbieranie danych statystycznych o czasie trwania i liczbie powtórzeń poszczególnych czynności** w trakcie rozwiązywania egzaminu. Co umożliwia doskonalenie zadań ulepszanie dydaktyki, gdyż każdy nauczyciel otrzyma **dane, wskazujące w jakim obszarze uczeń ma największe braki, aby można było je jeszcze odpowiednio wcześnie skorygować**. Uzyskanie takich informacji z matur tradycyjnych nie jest możliwe. W systemie gromadzone będą wyniki umożliwiające prowadzenie badań statystycznych przez użytkowników produktu, a odbiorcom wskażą obszary, w których występują braki wiedzy potrzebnej do zdania egzaminu maturalnego z matematyki. Przeprowadzenie egzaminu maturalnego w wersji elektronicznej z wykorzystaniem budowanego systemu informatycznego daje dodatkowe możliwości zbierania i analizy danych. w przeprowadzonej w kwietniu 2011 próbnej e-maturze system egzaminacyjny zapisywał m. in. następujące informacje:
   1) Liczbę prób rozwiązania danego zadania;
   2) Sumaryczny czas spędzony przez ucznia nad danym zadaniem (razem we wszystkich próbach);
   3) Oczywiście liczba punktów uzyskanych za zadanie. w przypadku braku punktów za zadanie system rozróżniał sytuacje:

   a) uczeń próbował rozwiązywać i uzyskał 0 punktów,

   b) uczeń nie podjął próby podania odpowiedzi.

Czas spędzony przez ucznia nad danym zadaniem jak i liczbę prób rozwiązania danego zadania można traktować, obok liczby punktów uzyskanych za zadanie, jako swoiste miary trudności zadania. Patrzenie na uzyskaną przez uczniów punktację z uwzględnieniem w/w danych oraz np. informacji na temat liczby uczniów, którzy nie podjęli próby rozwiązania zadania pozwala wyciągnąć o wiele więcej wniosków niż byłoby to możliwe tylko w oparciu samą punktację.

Informacje te są cenne zarówno dla egzaminatorów jak i nauczycieli oraz uczniów.

Na podstawie przeprowadzonej krótkiej analizy nasuwają się nam następujące wnioski:

- skumulowana informacja o punktacji, czasie rozwiązania i liczbie powrotów do danego zadania mogą stanowić cenne wskazówki dla nauczyciela i ucznia. Nawet zadowalająca punktacja za zadanie przy dużej liczbie powrotów do zadania i długim czasie rozwiązania mogą świadczyć o zbyt słabym wyćwiczeniu i ugruntowaniu danej partii materiału;
- fakt braku podejmowania próby rozwiązania danego zadania np. na egzaminie maturalnym mimo zgodności treści zadania z podstawą programową powinien być sugestią dla egzaminatorów , aby być może zmienić formę zadania;
- informacje o średnim czasie rozwiązania danego zadania (szerzej – zadania danego typu) pomogą lepiej dopasować czas egzaminu do rzeczywistego poziomu trudności zadań (tzn. poziomu trudności z punktu widzenia ucznia).[2]

6. <u>wykorzystanie infrastruktury informatycznej szkół</u>

7. <u>ułatwienie dostępu osób niepełnosprawnych do egzaminów</u>

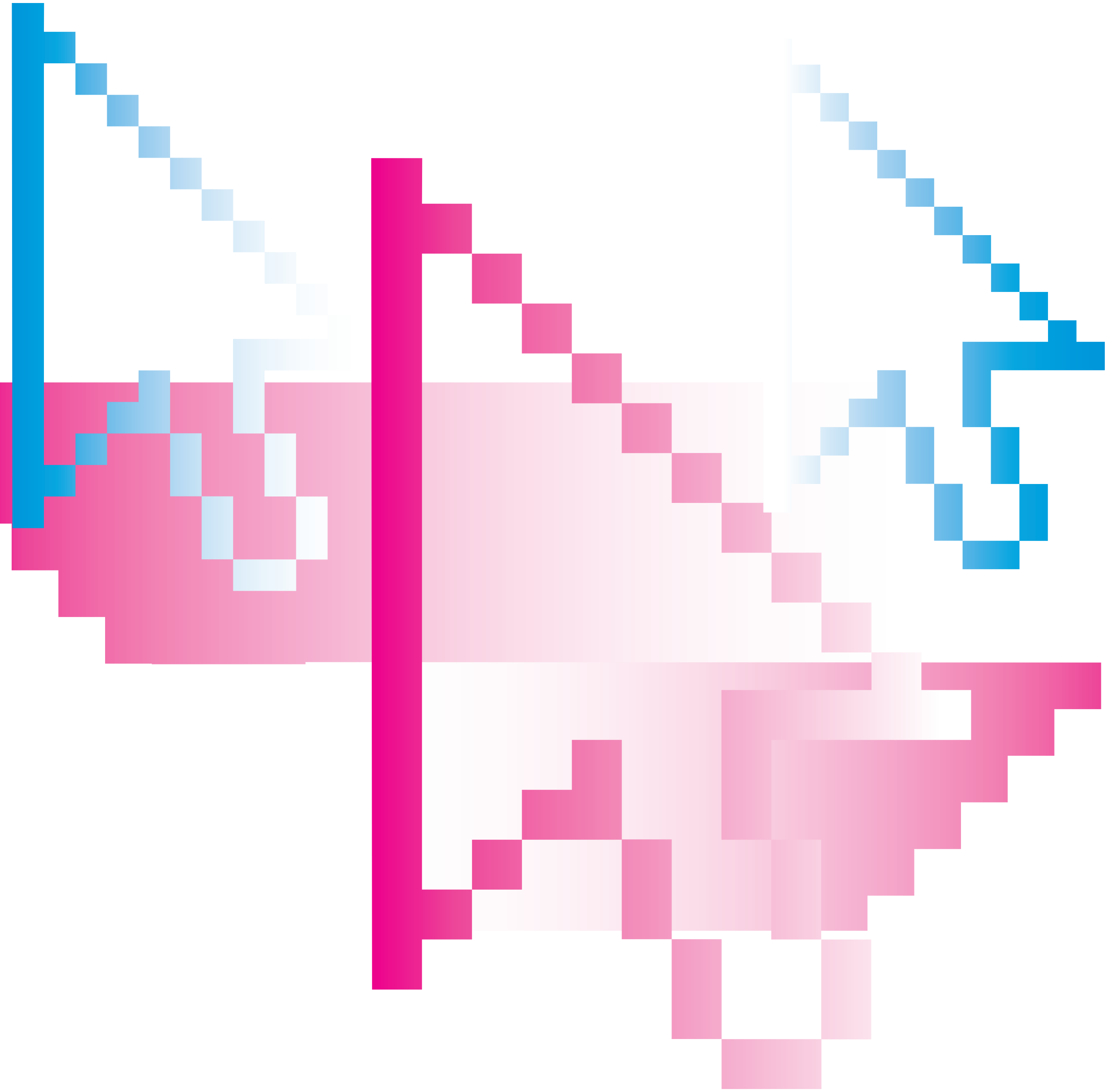
[2] Badania własne

8.5 Grupy, które mogą korzystać ze wsparcia

Założenia projektu wskazują, iż finalnie z wypracowanej, przetestowanej i udostępnionej platformy będą korzystali uczniowie klas maturalnych z terenu województwa łódzkiego przystępujący do egzaminu maturalnego z matematyki. Jak zostało wspomniane wcześniej na etapie testowania do grupy docelowej zostaną włączeni także uczniowie klas przedostatnich (drugich w przypadku liceum, trzecich w przypadku technikum)

Platforma zostanie udostępniona również uczniom z niepełnosprawnościami. Grupa docelowa to również wszyscy uczniowie szkół ponadgimnazjalnych, którzy wobec braku możliwości korzystania z zajęć dodatkowych lub też chcący na bieżąco weryfikować posiadaną wiedzę dzięki oferowanemu, innowacyjnemu wsparciu będą mogli przeciwdziałać dysproporcjom występującym w poziomie przekazywanej w szkole wiedzy jak również w nierównym dostępie do zajęć pozalekcyjnych.

Książka przygotowana w ramach projektu „E-matura", współfinansowanego przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego, Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki, Priorytet III Wysoka jakość systemu oświaty, Działanie 3.3 Poprawa jakości kształcenia, Poddziałanie 3.3.4 Modernizacja treści i metod kształcenia – projekty konkursowe.



ISBN 978-83-937551-5-8

Książka jest dystrybuowana bezpłatnie