Politechnika Łódzka

e-matura

R. Kusztelak, J. Stańdo, K. Szumigaj

Zestawy maturalne w kontekście e-matury

MATEMATYKA PODSTAWOWA

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

CZŁOWIEK - NAJLEPSZA INWESTYCJA

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt jest współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Projekt jest współfinansowany przez
Unię Europejską w ramach
Europejskiego Funduszu Społecznego

Książka jest dystrybuowana bezpłatnie

Recenzenci:
T. Ratusiński
J. Guncaga

Autorzy:
R. Kusztelak
J. Stańdo
K. Szumigaj

Opracowanie graficzne:
Niceday

Książka przygotowana w ramach projektu „E-matura", współfinansowanego przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego, Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki, Priorytet III Wysoka jakość systemu oświaty, Działanie 3.3 Poprawa jakości kształcenia, Poddziałanie 3.3.4 Modernizacja treści i metod kształcenia – projekty konkursowe.

Książka współfinansowana przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

ISBN: 978-83-937551-3-4

Politechnika Łódzka

Politechnika Łódzka, Biuro Projektu
Wydział Elektrotechniki, Elektroniki, Informatyki i Automatyki,
Instytut Mechatroniki i Systemów Informatycznych
ul. Stefanowskiego 18/22, pokój 122, 90-924 Łódź, budynek A12
tel. (42) 631 25 69, www.e-matura.p.lodz.pl

Autorzy:
R. Kusztelak
J. Stańdo
K. Szumigaj

Zestawy maturalne z matematyki
– poziom podstawowy

Recenzenci:
T. Ratusiński
J. Guncaga

1 Spis treści

2 ZESTAW A

Zadania zamknięte

Zadanie 1. (1 pkt.)

Wyznacz 11% z liczby 11.

a) 11,11 b) 1,1 c) 1,21 d) 12,1

Zadanie 2. (1 pkt.)

Oblicz ile procent liczby 12 stanowi liczba 1,8.

a) 6,(6)% b) 21,6% c) 10% d) 15%

Zadanie 3. (1 pkt.)

Oblicz $\log_{\frac{1}{3}}9 - \log_{3}9$.

a)-4 b) 0 c) 4 d) 1

Zadanie 4. (1 pkt.)

Podaj przybliżenie liczby $\frac{11}{30}$ z dokładnością do 3 miejsc po przecinku.

a) $0,666$ b) $0,366$ c) $0,3667$ d) $0,367$

Zadanie 5. (1 pkt.)

Równanie $|x+4| = 0$

a) nie ma rozwiązań.
b) ma dokładnie jedno rozwiązanie.
c) ma dokładnie dwa rozwiązania.
d) ma więcej niż dwa rozwiązania.

Zadanie 6. (1 pkt.)

Wskaż równanie prostej prostopadłej do prostej o równaniu $y = -x - 2$.

a) $y = -2x + 1$ b) $y = 2x + 3$ c) $y = -x + 2$ d) $y = x - 2$

Zadanie 7. (1 pkt.)

Wyznacz odległość punktów $A(1,4)$, $B(0,2)$.

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{3}$ c) 5 d) 9

Zadanie 8. (1 pkt.)

W trójkącie kąty wewnętrzne mają odpowiednie miary : α, $2\alpha + 30^0$, $\alpha + 30^0$. Wtedy

$a)$ $\alpha = 45^0$ b) $\alpha = 30^0$ c) $\alpha = 105^0$ d) $\alpha = 15^0$

Zadanie 9. (1 pkt.)

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n), gdzie $a_{234} = 128, a_{236} = 256$. Wtedy

a) $\mathrm{r} = 2$ b) $\mathrm{r} = 128$ c) $\mathrm{r} = 32$ d) $\mathrm{r} = 64$

Zadanie 10. (1 pkt.)

Dany jest ciąg geometryczny (a_n), gdzie $a_1 = -1$, $a_{112} = 1$. Wtedy

a) $q = 1$ b) $q = -1$ c) $q = 0$ d) $q = \frac{1}{55}$

Zadanie 11. (1 pkt.)

Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = 2x^2 + 4x + 1$. Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli.

a) $W(-1,-1)$ b) $W(-1,-5)$ c) $W(-2,1)$ d) $W(-2,-1)$

Zadanie 12. (1 pkt.)

Wyrażenie $\frac{\mathrm{x}}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}$ dla $x \neq 1$ i $x \neq -1$ można zapisać w postaci:

a) $\frac{-\mathrm{x}+1}{x^2-1}$ b) $\frac{3x+2}{x^2-1}$ c) $\frac{3x-1}{x^2-1}$ d) $\frac{x+1}{\mathrm{x}-1}$

Zadanie 13. (1 pkt.)

Środek okręgu o równaniu $(x+2)^2+(y-1)^2=16$ jest w punkcie o współrzędnych

a) $(-2,1)$ b) $(1,-2)$ c) $(2,1)$ d) $(-2,1)$

Zadanie 14. (1 pkt.)

Środek odcinka $\overline{AB}$ leży w punkcie $S(0,4)$. Punkt B ma współrzędne $B=(2,8)$. Wtedy

a) $A=(2,4)$ b) $A=(-2,0)$ c) $A=(2,0)$ d) $A=(-4,0)$

Zadanie 15. (1 pkt.)

Suma kolejnych trzech liczb naturalnych parzystych wynosi 186. Największa z nich to

a) 62 b) 66 c)60 d) 64

Zadanie 16. (1 pkt.)

Wskaż układ sprzeczny.

a) $\begin{cases} x - \frac{3}{4}y = 1 \\ x + y = \frac{5}{4} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 8x - \frac{3}{4}y = -4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x + 8y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - y = 1 \\ \frac{5}{8}x + \frac{3}{8}y = 4 \end{cases}$

Zadanie 17. (1 pkt.)

W 2003 roku mama Ani miała 27 lat. Ania urodziła się w 1999. O ile lat Ania jest młodsza od mamy?

a) 25 lat b) 23 lata c) 22 lata d) 24 lata

Zadanie 18. (1 pkt.)

W 2003 roku mama Ani miała 27 lat. Ania urodziła się w 1999. Ile lat miała mama Ani w 1990 roku?

a) 15 lat b) 14 lat c) 13 lat d) 12 lat

Zadanie 19. (1 pkt.)

Stosunek długości promienia okręgu opisanego na kwadracie do długości promienia okręgu wpisanego w ten kwadrat wynosi

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Zadanie 20. (1 pkt.)

Stosunek długości boków prostokąta jest równy $4:3$. Wtedy stosunek długości obwodu do długości przekątnej jest równy

a) $\frac{5}{7}$ b) $\frac{7}{5}$ c) $\frac{14}{5}$ d) $\frac{5}{14}$

Zadanie 21. (1 pkt.)

Wiadomo, że w trójkącie prostokątnym $\sin(\alpha) = \frac{5}{13}$. Wtedy

a) $\sin(90^0 - \alpha) = \frac{5}{13}$ b) $\sin(90^0 - \alpha) = \frac{7}{13}$ c) $\sin(90^0 - \alpha) = \frac{5}{12}$ d) $\sin(90^0 - \alpha) = \frac{12}{13}$

Zadanie 22. (1 pkt.)

Objętość walca, którego przekrojem osiowym jest kwadrat o boku długości 4 jest równa

a) 64π b) 32π c) 16π d) $\frac{16}{3}\pi$

Zadanie 23. (1 pkt.)

Średnia arytmetyczna z liczb: -32456, -45798, 20, 32457, 45797 jest

a) większa niż 4.
b) równa 4.
c) mniejsza niż 4 i większa od zera.
d) ujemna.

Zadanie 24. (1 pkt.)

Rzucamy trzy razy monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że co najmniej raz otrzymamy orła.

a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{7}{8}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{3}{4}$

Zadanie 25. (1 pkt.)

Dany jest zbiór cyfr {1, 2, 4, 9}. Ile można utworzyć różnych trzycyfrowych liczb nieparzystych? {Cyfry mogą się powtarzać}

a) 32 b) 6 c) 9 d) 27

Zadanie 26. (2 pkt.)

Napisz wzór funkcji kwadratowej, której miejscami zerowymi są liczby $-3, 2$ oraz wykres funkcji przecina oś *OY* w punkcie $(0, -12)$.

Zadanie 27. (3 pkt.)

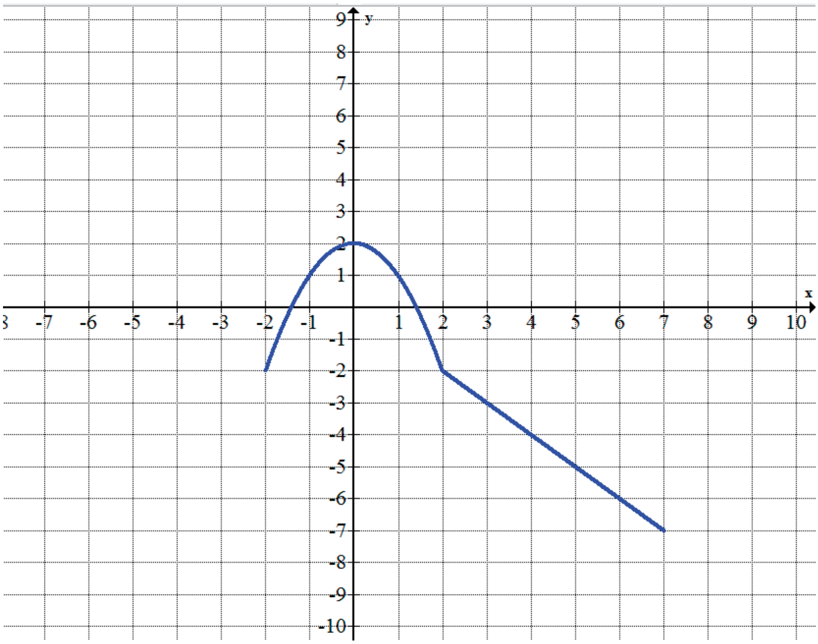
Dla jakiej wartości x ciąg postaci $(2x + 6, 2x + 1, x^2 - 2x)$ jest ciągiem arytmetycznym. Wyznacz wzór na n-ty wyraz tego ciągu.

Zadanie 28. (3 pkt.)

Rzucamy jeden raz dwiema kostkami sześciennymi. Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma uzyskanych oczek będzie większa od ich iloczynu.

Zadanie 29. (5 pkt.)

Dany jest wykres funkcji:



a) Wyznacz zbiór wartości funkcji f ....

b) Największą wartość funkcja f przyjmuje dla $x =$....

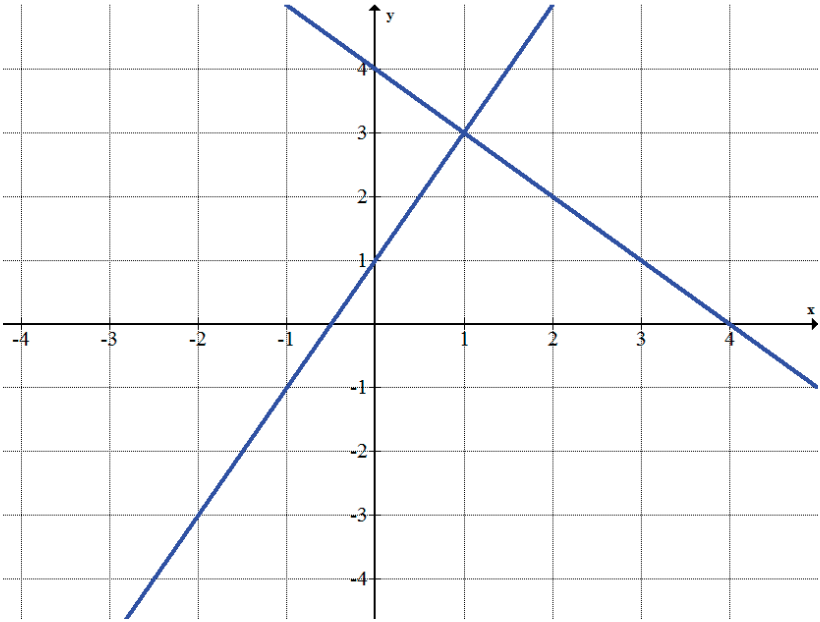
c) Argument dla którego funkcja f przyjmuje wartość -2 jest równy......

d) Funkcja f jest rosnąca w przedziale ....

e) Uzupełnij $f(-1) = f(\ldots\ldots)$.

Zadanie 30. (2 pkt.)

Zapisz układ równań liniowych, którego interpretację geometryczną przedstawiono na poniższym wykresie.



Zadanie 31. (2 pkt.)

Uzasadnij, że jeśli ciąg (a_n) jest arytmetyczny, to suma n-początkowych wyrazów tego ciągu nie może wyrażać się wzorem $S_n = n^2 + 2$.

Zadanie 32. (2 pkt.)

Uzasadnij, jeśli funkcja f jest rosnąca i $f(3) + f(8) = 10$, to $f(0) + f(7) < 10$.

Zadanie 33. (5 pkt.)

Pole powierzchni podstawy stożka wynosi 300π. Tworząca stożka jest nachylona do podstawy pod kątem 30^0. Wyznacz objętość stożka.

3 ZESTAW B

Zadania zamknięte

Zadanie 1. (1 pkt.)

Wyznacz 9% z liczby 9.

a) 8,1 b) 0,01 c) 0,1 d) 0,81

Zadanie 2. (1 pkt.)

Oblicz ile procent liczby 15 stanowi liczba 3,3.

a) 0,(45)% b) 33% c)4,95 % d)22%

Zadanie 3. (1 pkt.)

Oblicz $\log_4 \frac{1}{16} - \log_2 16$.

a)-6 b) -2 c) 2 d) 1

Zadanie 4. (1 pkt.)

Podaj przybliżenie liczby $\frac{17}{18}$ z dokładnością do 3 miejsc po przecinku.

a) $0{,}944$ b) $0{,}945$ c) $0{,}9444$ d) $0{,}444$

Zadanie 5. (1 pkt.)

Równanie $|x - 3| = -3$

a) nie ma rozwiązań.

b) ma dokładnie jedno rozwiązanie.

c) ma dokładnie dwa rozwiązania.

d) ma więcej niż dwa rozwiązania.

Zadanie 6. (1 pkt.)

Wskaż równanie prostej prostopadłej do prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x - 3$.

a) $y = -x - 2$ b) $y = 2x + 3$ c) $y = -2x + 1$ d) $y = x + 2$

Zadanie 7. (1 pkt.)

Wyznacz odległość punktów $A(2, 1)$, $B(0, 2)$.

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{2}$ c) 5 d) 1

Zadanie 8. (1 pkt.)

W trójkącie kąty wewnętrzne mają odpowiednio miary : $2\alpha, \alpha + 15^0, 2\alpha + 15^0$. Wtedy

$a)$ $\alpha = 45^0$ b) $\alpha = 30^0$ c) $\alpha = 105^0$ d) $\alpha = 15^0$

Zadanie 9. (1 pkt.)

Dany jest ciągu arytmetyczny (a_n) , gdzie $a_{136} = 340, a_{139} = 400$. Wtedy

a) $\mathrm{r} = 3$ b) $\mathrm{r} = 20$ c) $\mathrm{r} = 10$ d) $\mathrm{r} = 360$

Zadanie 10. (1 pkt.)

Dany jest ciąg geometryczny (a_n), gdzie $a_1 = -1, a_{102} = 1$. Wtedy

a) $\mathrm{q} = -1$ b) $\mathrm{q} = 1$ c) $\mathrm{q} = 0$ d) $\mathrm{q} = 50$

Zadanie 11. (1 pkt.)

Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = 2x^2 - 12x + 21$. Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli.

a) $W(-6, 6)$ b) $W(-6, 24)$ c) $W(-3, -3)$ d) $W(3, 3)$

Zadanie 12. (1 pkt.)

Wyrażenie $\frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x-1}$ dla $x \neq 1$ i $x \neq -1$ można zapisać w postaci:

a) $\frac{x+1}{x^2-1}$ b) $\frac{3x-1}{x^2-1}$ c) $\frac{-3x+1}{x^2-1}$ d) $\frac{-3x-1}{x^2-1}$

Zadanie 13. (1 pkt.)

Środek okręgu o równaniu $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 16$ jest w punkcie o współrzędnych

a) $(2,\ 1)$ b) $(-1, -2)$ c) $(2, -1)$ d) $(-1,\ 2)$

Zadanie 14. (1 pkt.)

Środek odcinka $\overline{AB}$ leży w punkcie $S(4,6)$. Punkt B ma współrzędne $B(0,2)$. Wtedy

a) $A(2,4)$ b) $A(8,10)$ c) $A(-2,-2)$ d) $A(2,3)$

Zadanie 15. (1 pkt.)

Suma kolejnych trzech liczb naturalnych nieparzystych wynosi 111. Największa z nich to

a) 41 b) 33 c) 39 d) 43

Zadanie 16. (1 pkt.)

Wskaż układ sprzeczny.

a) $\begin{cases} 2x - \frac{7}{4}y = 1 \\ x + y = \frac{5}{4} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 7x - \frac{7}{4}y = -4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 4x - 4y = 12 \end{cases}$

Zadanie 17. (1 pkt.)

W 2001 roku mama Ani miała 28 lat. Ania urodziła się w 1995. O ile lat Ania jest młodsza od mamy?

a) 23 lata b) 22 lata c) 21 lat d) 24 lata

Zadanie 18. (1 pkt.)

W 2001 roku mama Ani miała 28 lat. Ania urodziła się w 1995. Ile lat miała mama Ani w 1990 roku?

a) 14 lat b) 15 lat c) 17 lat d) 16 lat

Zadanie 19. (1 pkt.)

Stosunek długości promienia okręgu wpisanego w kwadrat do długości promienia okręgu opisanego na tym kwadracie wynosi

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

Zadanie 20. (1 pkt.)

Stosunek długości boków prostokąta jest równy $3:4$. Wtedy stosunek długości obwodu do długości przekątnej jest równy

a) $\frac{5}{7}$ b) $\frac{7}{5}$ c) $\frac{14}{5}$ d) $\frac{5}{14}$

Zadanie 21. (1 pkt.)

Wiadomo, że w trójkącie prostokątnym $\sin(\alpha) = \frac{12}{13}$. Wtedy

a) $\sin(90^0 - \alpha) = \frac{5}{13}$ b) $\sin(90^0 - \alpha) = \frac{7}{13}$ c) $\sin(90^0 - \alpha) = \frac{5}{12}$ d) $\sin(90^0 - \alpha) = \frac{12}{13}$

Zadanie 22. (1 pkt.)

Objętość walca, którego przekrojem osiowym jest kwadrat o boku 8 jest równa

a) 512π b) 128π c) 8π d) $\frac{128}{3}\pi$

Zadanie 23. (1 pkt.)

Średnia arytmetyczna z liczb: $-45796, -34348, 40, 34347, 45797$ jest

a) większa niż 8.
b) równa 8.
c) mniejsza niż 8 i większa od zera.
d)ujemna.

Zadanie 24. (1 pkt.)

Rzucamy trzy razy monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że co najmniej dwa razy otrzymamy reszkę.

a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{7}{8}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{4}$

Zadanie 25. (1 pkt.)

Dany jest zbiór cyfr $\{1, 8, 4, 7, 9\}$. Ile można utworzyć różnych czterocyfrowych liczb parzystych? {Cyfry mogą się powtarzać}

a) 48 b) 250 c) 125 d) 240

Zadanie 26. (2 pkt.)

Napisz wzór funkcji kwadratowej, której miejscami zerowymi są liczby $1, -4$ oraz wykres funkcji przecina oś OY w punkcie $(0, -8)$.

Zadanie 27. (3 pkt.)

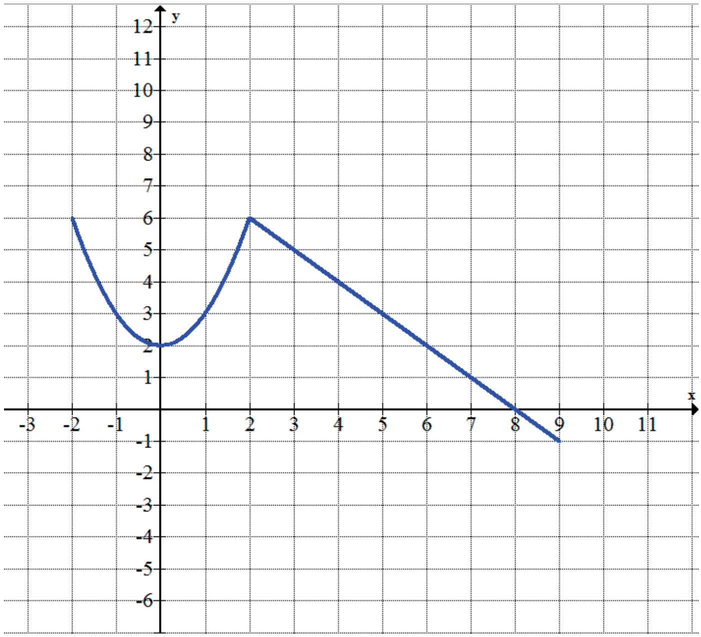
Dla jakiej wartości x ciąg postaci $(2x + 2, 2x + 3, x^2 + 1)$ jest ciągiem arytmetycznym. Wyznacz wzór na n-ty wyraz tego ciągu.

Zadanie 28. (3 pkt.)

Rzucamy jeden raz dwiema kostkami sześciennymi. Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma uzyskanych oczek będzie mniejsza od ich iloczynu.

Zadanie 29. (5 pkt.)

Dany jest wykres funkcji:



a) Wyznacz zbiór wartości funkcji f ....

b) Najmniejszą wartość funkcja f przyjmuje dla $x =$...

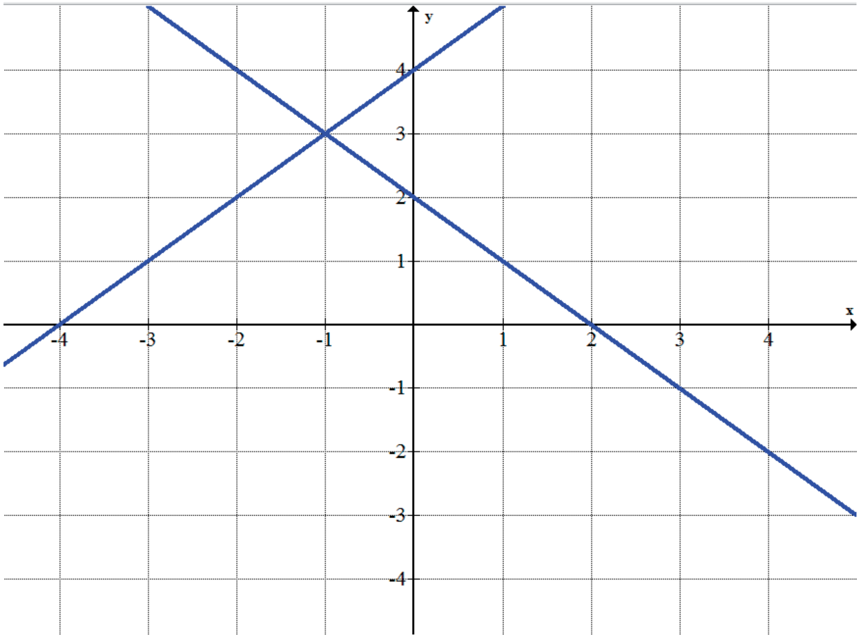
c) Argument dla którego funkcja f przyjmuje wartość 1 jest równy......

d) Funkcja f jest rosnąca w przedziale ....

e) Uzupełnij $f(0) = f(\ldots..)$

Zadanie 30. (2 pkt.)

Zapisz układ równań liniowych, którego interpretację geometryczną przedstawiono na poniższym wykresie.



Zadanie 31. (2 pkt.)

Uzasadnij, że jeśli ciąg (a_n) jest geometryczny, to suma n-początkowych wyrazów tego ciągu nie może wyrażać się wzorem $S_n = n^2 + 8$.

Zadanie 32. (2 pkt.)

Uzasadnij że, jeśli funkcja f jest malejąca i $f(2) + f(6) = 6$, to $f(3) + f(10) < 6$.

Zadanie 33. (5 pkt.)

Pole powierzchni podstawy stożka wynosi 150π. Tworząca stożka jest nachylona do podstawy pod kątem 60^0. Wyznacz objętość stożka.

4 Schemat punktowania -Zestaw A

Zadania zamknięte.

Numer Zadania	**Liczba punktów**	**Prawidłowa odpowiedź**
1	1	C
2	1	D
3	1	A
4	1	D
5	1	B
6	1	D
7	1	A
8	1	B
9	1	D
10	1	B
11	1	A
12	1	C
13	1	A
14	1	B
15	1	D
16	1	C
17	1	B
18	1	B
19	1	B
20	1	C
21	1	D
22	1	C
23	1	B
24	1	B
25	1	A

Zadania otwarte.

Zadanie 26. (2 pkt.)

Zapisanie układu równań: $\begin{cases} 9a - 3b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 0. \\ c = -12 \end{cases}$ .... 1 pkt.

Wyznaczenie wzoru funkcji $f(x) = 2x^2 + 2x - 12$, lub $f(x) = 2 \cdot (x+3)(x-2)$..... 1 pkt.

Zadanie 27. (3 pkt.)

Zapisanie własności: $2x+1=\frac{(2x+6)+(x^2-2x)}{2}$ .... 1 pkt.

Wyznaczenie x: $x=2$ .... 1 pkt.

Podanie wzoru ciągu: $a_n=15-5n$ .... 1 pkt.

Zadanie 28. (3 pkt.)

Wyznaczenie mocy zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega|=36$........................ 1 pkt.

Wyznaczenie zdarzeń sprzyjających i jej mocy A=
$\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1)\}$, $|A|=11$ .... 1 pkt.

Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A: $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{11}{36}$ .... 1 pkt.

Zadanie 29. (5 pkt.)

Wyznaczenie zbioru wartości funkcji f: $<-7;2>$ .... 1 pkt.

Wyznaczenie największej wartości funkcji f: $x=0$ .... 1 pkt.

Wyznaczenie argumentu dla którego funkcja f przyjmuje wartość (-2): (-2) lub 2 .... 1 pkt.

Wyznaczenie funkcji f na którym jest ona rosnąca: $<-2;0)$ .... 1 pkt.

Uzupełnienie: $f(-1)=f(1)$ .... 1pkt.

Zadanie 30. (2 pkt.)

Zapisanie układu równań: $\begin{cases} y=-x+4 \\ y=2x+1 \end{cases}$ .... 2pkt.

Zadanie 31. (2 pkt.)

Zapisanie własności: $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+2-(n-1)^2-2=2n-1$ .... 1 pkt.

Uzasadnienie, że ciąg nie jest arytmetyczny, np. nie spełnia własności $a_2=\frac{a_1+a_3}{2}$ .... 1 pkt.

Zadanie 32. (2 pkt.)

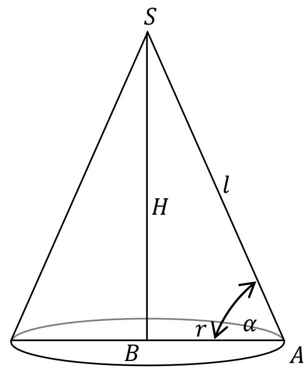
Zapisanie warunków: $3 > 0 \Rightarrow f(3) > f(0),\ 8 > 7 \Rightarrow f(8) > f(7)$ .... 1 pkt.

Uzasadnienie, np. dodając równości stronami otrzymujemy $f(0) + f(7) < 10$ .... 1 pkt.

Zadanie 33. (5 pkt.)

Wyznaczenie r: $r = 10\sqrt{3}$ .... 1 pkt.

Zaznaczenie kąta .... 1pkt.



Metoda wyznaczenia H : $\mathrm{tg}(30°) = \frac{H}{r}, \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{H}{10\sqrt{3}}$ .... 1 pkt.

Wyznaczenie H: $H = 10$ .... 1 pkt.

Obliczenie objętość stożka $V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H = 1000\pi$ .... 1 pkt.

5 Schemat punktowania -Zestaw B

Zadania zamknięte.

Numer Zadania	Liczba punktów	Prawidłowa odpowiedź
1	1	D
2	1	D
3	1	A
4	1	A
5	1	A
6	1	C
7	1	A
8	1	B
9	1	B
10	1	A
11	1	D
12	1	D
13	1	D
14	1	B
15	1	C
16	1	D
17	1	B
18	1	C
19	1	A
20	1	C
21	1	A
22	1	B
23	1	B
24	1	C
25	1	B

Zadania otwarte.

Zadanie 26. (2 pkt.)

Zapisanie układu równań: $\begin{cases} a+b+c=0 \\ 16a-4b+c=0 \\ c=-8 \end{cases}$ .... 1 pkt.

Wyznaczenie wzoru funkcji $f(x)=2x^2+6x-8$, lub $f(x)=2\cdot(x-1)(x+4)$ ....1 pkt.

Zadanie 27. (3 pkt.)

Zapisanie własności: $2x + 3 = \frac{(2x+2)+(x^2+1)}{2}$ .... 1 pkt.

Wyznaczenie x: $x = -1 \vee x = 3$ .... 1 pkt.

Podanie wzoru ciągu: $a_n = n - 1$, $a_n = n + 7$ .... 1 pkt.

Zadanie 28. (3 pkt.)

Wyznaczenie liczby zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 36$........................ 1 pkt.

Wyznaczenie zdarzeń przeciwnych i jej liczby $A' = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1),(2,2)\}$, $|A'| = 12$

.... 1 pkt.

Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A: $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ .... 1 pkt.

Zadanie 29. (5 pkt.)

Wyznaczenie zbioru wartości funkcji f: $< -1; 6 >$ .... 1 pkt.

Wyznaczenie największej wartości funkcji f: $x = 9$ .... 1 pkt.

Wyznaczenie argumentu dla którego funkcja f przyjmuje wartość 1: 7 .... 1 pkt.

Wyznaczenie przedziału funkcji f na którym jest rosnąca: $(0, 2)$.. 1 pkt.

Uzupełnienie: $f(0) = f(6)$ .... 1pkt.

Zadanie 30. (2 pkt.)

Zapisanie układu równań: $\begin{cases} y = x + 4 \\ y = -x + 2 \end{cases}$ 2pkt

Zadanie 31. (2 pkt.)

Zapisanie własności: $a_1 = S_1$, $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + 8 - (n-1)^2 - 8 = 2n + 1$ .... 1 pkt.

Uzasadnienie, że ciąg nie jest geometryczny, np. nie spełnia własności $a_2^2 = a_1 \cdot a_3$ .... 1 pkt.

Zadanie 32. (2 pkt.)

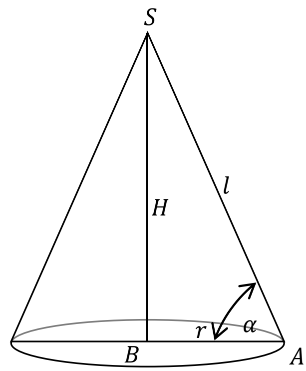
Zapisanie warunków: $3 > 2 \Rightarrow f(3) < f(2), 10 > 6 \Rightarrow f(10) < f(6)$ .... 1 pkt.

Uzasadnienie, np. dodając równości stronami otrzymujemy $f(3) + f(10) < 6$ .... 1 pkt.

Zadanie 33. (5 pkt.)

Wyznaczenie r: $r = 5\sqrt{6}$ .... 1 pkt.

Zaznaczenie kąta .... 1pkt.



Metoda wyznaczenia H : $\mathrm{tg}(60°) = \frac{H}{r}$, $\sqrt{3} = \frac{H}{5\sqrt{6}}$.. 1 pkt.

Wyznaczenie H: $H = 15\sqrt{2}$ .... 1 pkt.

Obliczenie objętość stożka $V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H = 750\pi\sqrt{2}$ .... 1 pkt.

6 Rozwiązania - Zestaw A

Zadania zamknięte

Zadanie 1. (1 pkt.)

Wyznacz 11% z liczby 11.

a) 11,11 b) 1,1 c) 1,21 d) 12,1

Rozwiązanie:

Pierwszy sposób

1% danej liczby to $0,01$ tej liczby, zatem:

$$11\% \cdot 11 = 0,11 \cdot 11 = 1,21$$

Drugi sposób

Korzystamy z własności proporcji:

100% --------- 11

11% --------- x

Zatem

$$x = \frac{11\% \cdot 11}{100\%} = 1,21$$

Zadanie 2. (1 pkt.)

Oblicz ile procent liczby 12 stanowi liczba 1,8.

a) 6,(6)% b) 21,6% c) 10% d) 15%

Rozwiązanie:

$$\frac{1,8}{12} \cdot 100\% = 0,15 \cdot 100\% = 15\%$$

Zadanie 3. (1 pkt.)

Oblicz $\log_{\frac{1}{3}}9 - \log_3 9$.

a) -4 b) 0 c) 4 d) 1

Rozwiązanie

Pierwszy sposób

> Ogólnie: $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b,\ $ gdzie $a, b > 0\ i\ a \neq 1$.

Zatem

$$\log_{\frac{1}{3}} 9 = x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x = 9 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \Rightarrow x = -2$$

$$\log_3 9 = y \Leftrightarrow 3^y = 9 \Leftrightarrow 3^y = 3^2 \Rightarrow y = 2$$

W rezultacie

$\log_{\frac{1}{3}} 9 - \log_3 9 = -2 - 2 = -4$

Drugi sposób

> Przypomnijmy
>
> - Wzór na zmianę podstawy logarytmu: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, gdzie $a, b, c > 0\ i\ a, c \neq 1$.
> - Własność: $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$, gdzie $a, b > 0\ i\ a \neq 1$.

Zatem

$$\log_{\frac{1}{3}} 9 - \log_3 9 = \frac{\log_3 9}{\log_3 \frac{1}{3}} - \log_3 9 = \frac{\log_3 3^2}{\log_3 3^{-1}} - \log_3 3^2 = \frac{2 \cdot \log_3 3}{-1 \cdot \log_3 3} - 2 \cdot \log_3 3 =$$

$$= \frac{2 \cdot 1}{-1 \cdot 1} - 2 \cdot 1 = -2 - 2 = -4$$

Zadanie 4. (1 pkt.)

Podaj przybliżenie liczby $\frac{11}{30}$ z dokładnością do 3 miejsc po przecinku.

a) 0,666 b) 0,366 c) 0,3667 d) 0,367

Rozwiązanie

Dzieląc 11 przez 30 uzyskujemy ułamek dziesiętny o rozwinięciu dziesiętnym nieskończonym okresowym: 0,366666 …

Mamy zaokrąglić ułamek do 3 miejsc po przecinku. Patrzymy zatem na czwartą cyfrę 0,366$\boxed{6}$66 …

Jest większa bądź równa 5, zatem cyfrę na trzecim miejscu po przecinku zwiększamy o jeden, zaś pozostałe cyfry rozwinięcia począwszy od czwartego miejsca po przecinku odrzucamy. Uzyskujemy więc 0,367.

Zadanie 5. (1 pkt.)

Równanie $|x+4| = 0$

a) nie ma rozwiązań.
b) ma dokładnie jedno rozwiązanie.
c) ma dokładnie dwa rozwiązania.
d) ma więcej niż dwa rozwiązania.

Rozwiązanie

Powyższe równanie będzie spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy wyrażenie spod znaku wartości bezwzględnej przyjmie wartość zero.

$$|x+4| = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x}+4=0 \Leftrightarrow \mathrm{x}=-4$$

Zatem równanie to ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Zadanie 6. (1 pkt.)

Wskaż równanie prostej prostopadłej do prostej o równaniu $y=-x-2$.

a) $y=-2x+1$ b) $y=2x+3$ c) $y=-x+2$ d) $y=x-2$

Rozwiązanie

> Ogólnie: Niech dane będą proste k oraz l odpowiednio o równaniach:
>
> $k: y=a_1x+b_1$
>
> $l: y=a_2x+b_2$
>
> $k \perp l \Leftrightarrow a_1 \cdot a_2 = -1$
>
> Czyli:
>
> Proste k oraz l są prostopadłe, gdy iloczyn ich współczynników kierunkowych wynosi (-1).

Zatem do prostej $y=-x-2$ jest prostopadła prosta $y=x-2$.

Zadanie 7. (1 pkt.)

Wyznacz odległość punktów $A(1,4)$, $B(0,2)$.

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{3}$ c) 5 d) 9

Rozwiązanie

> Ogólnie: Niech dane będą punkty $A(x_a, y_a)$ oraz $B(x_b, y_b)$. Odległość między tymi punktami wynosi $|AB| = \sqrt{(x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2}$.

Zatem, w warunkach zadania:

$$|AB| = \sqrt{(0-1)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

Zadanie 8. (1 pkt.)

W trójkącie kąty wewnętrzne mają odpowiednio miary : α , $2\alpha + 30^0, \alpha + 30^0$. Wtedy

$a)$ $\alpha = 45^0$ b) $\alpha = 30^0$ c) $\alpha = 105^0$ d) $\alpha = 15^0$

Rozwiązanie

> Ogólnie: Suma miar kątów wewnętrznych w trójkącie wynosi 180°.

Stosując powyższą własność w warunkach zadania uzyskujemy równanie:

$$\alpha + 2\alpha + 30^0 + \alpha + 30^0 = 180°$$

Rozwiązujemy je względem niewiadomej α

$$4\alpha = 120°$$

Zatem

$$\alpha = 30°$$

Zadanie 9. (1 pkt.)

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n), gdzie $a_{234} = 128, a_{236} = 256.$ Wtedy

a) $\mathrm{r} = 2$ b) $\mathrm{r} = 128$ c) $\mathrm{r} = 32$ d) $\mathrm{r} = 64$

Rozwiązanie

Pierwszy sposób

> Ogólnie: Niech dany będzie ciąg arytmetyczny (a_n), którego pierwszy wyraz wynosi a_1 zaś różnica jest równa r. Wzór na n-ty wyraz tego ciągu ma postać:
>
> $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

Stosując w warunkach zadania powyższy wzór uzyskujemy układ równań

$$\begin{cases} a_{234} = a_1 + (234-1) \cdot r \\ a_{236} = a_1 + (236-1) \cdot r \end{cases}$$

Zatem

$$\begin{cases} a_1 + 233r = 128 \\ a_1 + 235r = 256 \end{cases}$$

Do rozwiązania układu zastosujmy np. metodę przeciwnych współczynników. W tym celu mnożymy pierwsze równanie przez (-1)

$$\begin{cases} -a_1 - 233r = -128 \\ \quad a_1 + 235r = 256 \end{cases}$$

Następnie dodajemy równania stronami

$$2r = 128$$

$$r = 64$$

Do rozwiązania układu brakuje jeszcze wyznaczenia a_1, ale znajomość wartości tej niewiadomej jest zbędna w tym zadaniu.

Drugi sposób

$a_{236} - a_{234} = 2\mathrm{r} = 256 - 128 = 128$, zatem $r = 64$.

Zadanie 10. (1 pkt.)

Dany jest ciągu geometryczny a_n, gdzie $a_1 = -1, a_{112} = 1$. Wtedy

a) $\mathrm{q} = 1$ b) $\mathrm{q} = -1$ c) $\mathrm{q} = 0$ d) $\mathrm{q} = \frac{1}{55}$

Rozwiązanie

> Ogólnie: Niech dany będzie ciąg geometryczny (a_n), którego pierwszy wyraz wynosi a_1 zaś iloraz jest równy q. Wzór na n-ty wyraz tego ciągu ma postać:
>
> $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Stosując w warunkach zadania powyższy wzór uzyskujemy równanie

$$a_{112} = -1 \cdot q^{112-1}$$

Zatem

$$-1 \cdot q^{111} = 1$$

Więc

$$q^{111} = -1$$

Ostatecznie

$$q = -1$$

Zadanie 11. (1 pkt.)

Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = 2x^2 + 4x + 1$. Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli.

a) $W(-1,-1)$ b) $W(-1,-5)$ c) $W(-2,1)$ d) $W(-2,-1)$

Rozwiązanie

> Ogólnie: Niech dana będzie funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$. Parabola będąca wykresem tej funkcji posiada wierzchołek w punkcie $W(x_w, y_w)$, gdzie odpowiednio:
>
> $x_w = \frac{-b}{2a}$
>
> $y_w = \frac{-\Delta}{4a}$
>
> $\Delta = b^2 - 4ac$

W warunkach zadania mamy $a = 2$, $b = 4$, $c = 1$. Zatem

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 8$$

$$x_w = \frac{-4}{2 \cdot 2} = -1$$

$$y_w = \frac{-8}{4 \cdot 2} = -1$$

Czyli wierzchołek paraboli $W(-1,1)$.

Zadanie 12. (1 pkt.)

Wyrażenie $\frac{x}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}$ dla $x \neq 1$ i $x \neq -1$ można zapisać w postaci:

a) $\frac{-x+1}{x^2-1}$ b) $\frac{3x+2}{x^2-1}$ c) $\frac{3x-1}{x^2-1}$ d) $\frac{x+1}{x-1}$

Rozwiązanie

> Ogólnie: Skorzystamy z następujących wzorów skróconego mnożenia
>
> - wzór na różnicę kwadratów: $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
> - wzór na kwadrat różnicy: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Sprowadzamy do wspólnego mianownika

$$\frac{x}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{(x-1)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x(x+1)}{x^2-1} - \frac{(x-1)^2}{x^2-1}$$

Zapisujemy na wspólnej kresce ułamkowej i dokonujemy redukcji wyrazów podobnych w liczniku

$$\frac{x^2+x-(x^2-2x+1)}{x^2-1}=\frac{x^2+x-x^2+2x-1}{x^2-1}=\frac{3x-1}{x^2-1}$$

Zadanie 13. (1 pkt.)

Środek okręgu o równaniu $(x+2)^2+(y-1)^2=16$ jest w punkcie o współrzędnych

a) $(-2,1)$ b) $(1,-2)$ c) $(2,1)$ d) $(-2,1)$

Rozwiązanie

> Ogólnie: Równanie okręgu o środku w punkcie o współrzędnych (a,b) i promieniu $r>0$ ma postać
>
> $(x-a)^2+(x-b)^2=r^2$

Zatem w warunkach zadania $a=-2$, $b=1$.

Czyli środkiem okręgu jest punkt o współrzędnych $(-2,1)$.

Zadanie 14. (1 pkt.)

Środek odcinka $\overline{AB}$ leży w punkcie $S(0,4)$. Punkt B ma odpowiednio współrzędne $B=(2,8)$. Wtedy

a) $A=(2,4)$ b) $A=(-2,0)$ c) $A=(2,0)$ d) $A=(-4,0)$

Rozwiązanie

> Ogólnie: Niech będą dane punkty $A(x_a,y_a)$ oraz $B(x_b,y_b)$. Niech punkt $S(x_s,y_s)$ będzie środkiem odcinka $\overline{AB}$. Wtedy
>
> $x_s=\frac{x_a+x_b}{2}$
>
> $y_s=\frac{y_a+y_b}{2}$

Stosując powyższe wzory w warunkach zadania uzyskujemy

$$0=\frac{x_a+2}{2}$$

$$4=\frac{y_a+8}{2}$$

Powyższe zależności traktujemy jako równania, które rozwiązujemy odpowiednio względem x_a, y_a. Uzyskujemy wówczas: $x_a=-2$, $y_a=0$

Szukany punkt $A(-2,0)$.

Zadanie 15. (1 pkt.)

Suma trzech kolejnych liczb naturalnych parzystych wynosi 186. Największa z nich to

a) 62 b) 66 c)60 d) 64

Rozwiązanie

Kolejne trzy liczby parzyste naturalne to: $2n,\ 2n+2,\ 2n+4$. Zatem $2n+2n+2+2n+4=186$. Stąd $6n=180$, więc $n=30$. Największa liczba to, $60+4=64$.

Zadanie 16. (1 pkt.)

Wskaż układ sprzeczny.

a) $\begin{cases} x-\frac{3}{4}y=1 \\ x+y=\frac{5}{4} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=4 \\ 8x-\frac{3}{4}y=-4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x+8y=1 \\ x+2y=3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-y=1 \\ \frac{5}{8}x+\frac{3}{8}y=4 \end{cases}$

Rozwiązanie

> Ogólnie: Z geometrycznego punktu widzenia układ dwóch równań z dwoma niewiadomymi jest sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy wchodzące w jego skład równania przedstawiają proste równoległe (o tym samym współczynniku kierunkowym) NIE pokrywające się (posiadające różne wyrazy wolne).

Rozważmy punkt a) po przekształceniu równań do postaci kierunkowej

$$\begin{cases} y=\frac{4}{3}x-\frac{4}{3} \\ y=-x+\frac{5}{4} \end{cases}$$

Współczynniki kierunkowe wynoszą odpowiednio: $\frac{4}{3}$ oraz (-1). Proste nie są więc równoległe – przecinają się. Powyższy układ równań jest zatem oznaczony (posiada dokładnie jedno rozwiązanie). Jedyne rozwiązanie układu (x,y) interpretujemy jako współrzędne punktu przecięcia powyższych prostych.

Analogiczną sytuację mamy w punktach b) oraz d). Wyjątek stanowi punkt c)

$$\begin{cases} 8y=-4x+1 \\ 2y=-x+3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8} \\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \end{cases}$$

Współczynniki kierunkowe są równe $(-\frac{1}{2})$ zaś wyrazy wolne różne (odpowiednio: $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{2}$). Zatem równania przedstawiają proste równoległe NIE pokrywające się. Układ jest sprzeczny.

Zadanie 17. (1 pkt.)

W 2003 roku mama Ani miała 27 lat. Ania urodziła się w 1999. O ile lat Ania jest młodsza od mamy?

a) 25 lat b) 23 lata c) 22 lata d) 24 lata

Rozwiązanie

Postawione w zadaniu pytanie równie dobrze można sformułować następująco: Ile lat miała mama w momencie urodzenia Ani? Oznaczmy szukaną wielkość przez x.

1999 – urodziny Ani (wiek Ani: 0 lat), wiek mamy: x lat.

2003 – wiek Ani: 4, wiek mamy: 27 lat.

$$x = 27 - 4 = 23$$

Zadanie 18. (1 pkt.)

W 2003 roku mama Ani miała 27 lat. Ania urodziła się w 1999. Ile lat miała mama Ania w 1990 roku?

a) 15 lat b) 14 lat c) 13 lat d) 12 lat

Rozwiązanie

x – wiek mamy Ani w 1990 roku

$$x = 27 - (2003 - 1990) = 27 - 13 = 14$$

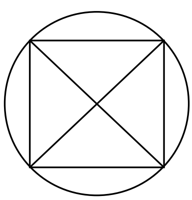
Zadanie 19. (1 pkt.)

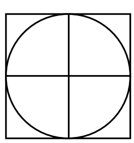
Stosunek długości promienia okręgu opisanego na kwadracie do długości promienia okręgu wpisanego w kwadrat wynosi

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Rozwiązanie

> Ogólnie: Długość przekątnej kwadratu o boku długości a wynosi $d = a\sqrt{2}$.





Zauważmy, że długość promienia okręgu opisanego na kwadracie jest równa połowie długości przekątnej tego kwadratu

$$R = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Zauważmy również, że długość promienia okręgu wpisanego w kwadrat jest równa połowie długości boku tego kwadratu

$$r = \frac{a}{2}$$

Zatem

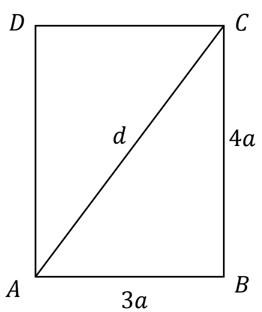
$$\frac{R}{r} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$$

Zadanie 20. (1 pkt.)

Stosunek długości boków prostokąta jest równy $4:3$. Wtedy stosunek długości obwodu do długości przekątnej jest równy

a) $\frac{5}{7}$ b) $\frac{7}{5}$ c) $\frac{14}{5}$ d) $\frac{5}{14}$

Rozwiązanie



Niech Ob oznacza obwód prostokąta, zaś d - długość przekątnej prostokąta. Wobec związku miarowego danego w zadaniu obwód wynosi

$$Ob = 2 \cdot 3a + 2 \cdot 4a = 14a$$

Stosując twierdzenie Pitagorasa uzyskujemy wzór na przekątną

$$d = \sqrt{(3a)^2 + (4a)^2} = \sqrt{25a^2} = 5a$$

Zatem

$$\frac{Ob}{d} = \frac{14a}{5a} = \frac{14}{5}$$

Zadanie 21. (1 pkt.)

Wiadomo, że w trójkącie prostokątnym $\sin(\alpha) = \frac{5}{13}$. Wtedy

a) $\sin(90^0 - \alpha) = \frac{5}{13}$ b) $\sin(90^0 - \alpha) = \frac{7}{13}$ c) $\sin(90^0 - \alpha) = \frac{5}{12}$ d) $\sin(90^0 - \alpha) = \frac{12}{13}$

Rozwiązanie

> Ogólnie:
>
> - Wzór redukcyjny
>
> $\sin(90^0 - \alpha) = \cos(\alpha)$
>
> - „Jedynka” trygonometryczna
>
> $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

Zatem w warunkach zadania

$$\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \cos^2(\alpha) = 1$$
$$\cos^2(\alpha) = 1 - \frac{25}{169}$$
$$\cos^2(\alpha) = \frac{144}{169}$$

α jest kątem ostrym w trójkącie prostokątnym, zatem jego kosinus będzie liczbą dodatnią. Stąd

$$\cos(\alpha) = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$$

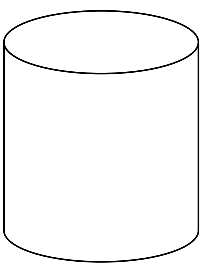
$$\sin(90^0 - \alpha) = \frac{12}{13}$$

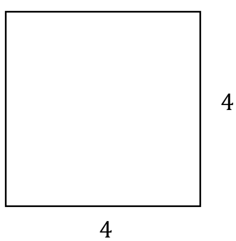
Zadanie 22. (1 pkt.)

Objętość walca, którego przekrojem osiowym jest kwadrat o boku długości 4 jest równa

a) 64π b) 32π c) 16π d) $\frac{16}{3}\pi$

Rozwiązanie





> Ogólnie: Objętość walca wyraża się wzorem
>
> $V = \pi r^2 H$
>
> gdzie r - promień podstawy, H - wysokość walca

Z treści zadania wynika, że $r = \frac{4}{2} = 2$, zaś $H = 4$. Zatem

$$V = \pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 16\pi$$

Zadanie 23. (1 pkt.)

Średnia arytmetyczna z liczb: -32456, -45798, 20, 32457, 45797 jest

a) większa niż 4.
b) równa 4.
c) mniejsza niż 4 i większa od zera.
d) ujemna.

Rozwiązanie

> Ogólnie: Średnia arytmetyczna z liczb $a_1,\ a_2, \dots, a_n$ wyraża się wzorem
>
> $S = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$

W warunkach zadania mamy

$$S = \frac{(-32456) + (-45798) + 20 + 32457 + 45797}{5}$$

Zwróćmy uwagę, że składniki pierwszy i czwarty oraz drugi i piąty niewiele różnią się co do wartości bezwzględnej, ale mają znaki przeciwne. Stąd warto je pogrupować

$$S = \frac{(32457 - 32456) + (45797 - 45798) + 20}{5}$$

$$S = \frac{1 + (-1) + 20}{5} = 4$$

Zadanie 24. (1 pkt.)

Rzucamy trzy razy monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że co najmniej raz otrzymamy orła.

a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{7}{8}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{3}{4}$

Rozwiązanie

Pierwszy sposób

> Ogólnie:
>
> - Klasyczna definicja prawdopodobieństwa
>
> $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$
>
> gdzie: $|A|$ - liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia A, $|\Omega|$ - liczba wszystkich zdarzeń elementarnych
>
> - Prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego: Niech A oznacza zdarzenie losowe (krótko: zdarzenie). Oznaczmy przez A' zdarzenie przeciwne do zdarzenia A.
>
> $P(A) = 1 - P(A')$

W warunkach zadania przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω możemy opisać jako zbiór

$$\Omega = \{OOO, ROO, ORO, OOR, RRO, ROR, ORR, RRR\}$$

gdzie np. ciąg ROO oznacza, że w pierwszym rzucie uzyskaliśmy reszkę (R), a w drugim i trzecim - orła (O).

Wszystkich zdarzeń elementarnych (elementarnych wyników naszego doświadczenia) jest zatem 8

$$|\Omega| = 8$$

Niech A - zdarzenie polegające na wyrzuceniu co najmniej raz orła (czyli jeden, dwa bądź trzy razy).

Zatem A' - zdarzenie polegające na wyrzuceniu samych reszek (zdarzenie przeciwne do A).

$$A' = \{RRR\}$$

Zdarzeniu A' sprzyja zatem tylko jedno zdarzenie elementarne.

$$|A'| = 1$$

$$P(A') = \frac{|A'|}{|\Omega|} = \frac{1}{8}$$

Zatem

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

Drugi sposób

> Ogólnie
>
> - Klasyczna definicja prawdopodobieństwa
>
> $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$
>
> gdzie: $|A|$ - liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia A, $|\Omega|$ - liczba wszystkich zdarzeń elementarnych
>
> - Prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego: Niech A oznacza zdarzenie losowo (krótko: zdarzenie). Oznaczmy przez A' zdarzenie przeciwne do zdarzenia A.
>
> $P(A) = 1 - P(A')$
>
> - Niezależność zdarzeń
>
> A, B - zdarzenia niezależne $\overset{def.}{\Longleftrightarrow} P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Niech A - zdarzenie polegające na wyrzuceniu co najmniej raz orła (czyli jeden, dwa bądź trzy razy).

Zatem A' - zdarzenie polegające na wyrzuceniu samych reszek (zdarzenie przeciwne do A).

$$A' = \{RRR\}$$

Wynik żadnego z rzutów nie ma wpływu na prawdopodobieństwo kolejnego wyniku, więc powiemy, że kolejne próby (kolejne rzuty) są niezależne. Prawdopodobieństwo wyrzucenia reszki w pojedynczej próbie wynosi oczywiście $\frac{1}{2}$. Zatem

$$P(A') = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

W rezultacie

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

Zadanie 25. (1 pkt.)

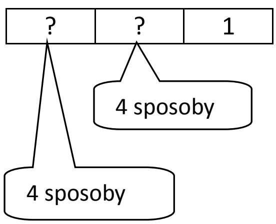
Dany jest zbiór cyfr {1, 2, 4, 9}. Ile można utworzyć różnych trzycyfrowych liczb nieparzystych? {Cyfry mogą się powtarzać}

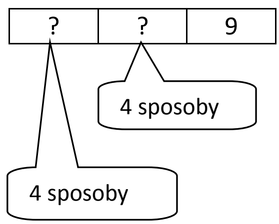
a) 32 b) 6 c) 9 d) 27

Rozwiązanie

Tworzymy liczby 3-cyfrowe z podanych cyfr, przy czym cyfry mogą się powtarzać. Liczby utworzone zgodnie ze schematem podanym w zadaniu to np. 999, 121, 411, itd.

Liczba jest nieparzysta wtedy i tylko wtedy, gdy jej cyfra jedności jest nieparzysta. W warunkach zadania oznacza to, że mamy dwa przypadki: cyfra jedności równa się 1 albo 9. Cyfry mogą się powtarzać, więc na pozostałych miejscach możemy umieścić dowolną z dostępnych cyfr. Za każdym razem mamy więc 4 możliwości





Niech N - liczba liczb 3-cyfrowych nieparzystych jakie można utworzyć w warunkach zadania. Wobec powyższych rozważań mamy zatem

$$N = 4 \cdot 4 \cdot 1 + 4 \cdot 4 \cdot 1 = 32$$

Zadanie 26. (2 pkt.)

Napisz wzór funkcji kwadratowej, której miejscami zerowymi są liczby $-3, 2$ oraz wykres funkcji przecina oś OY w punkcie $(0, -12)$.

Rozwiązanie

Pierwszy sposób

> Ogólnie:
>
> - Funkcja kwadratowa to funkcja opisana wzorem
>
> $f(x) = ax^2 + bx + c,$
>
> gdzie $a \neq 0$.
>
> - Miejscem zerowym funkcji $f(x)$ nazywamy każdy argument x_0, że
>
> $f(x_0) = 0$

W warunkach zadania, miejsca zerowe to $x = -3$, $x = 2$

$$\begin{cases} a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + c = 0 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 0 \end{cases}$$

Dodatkowo wykres ma przechodzić przez punkt o współrzędnych $(0, -12)$, zatem otrzymujemy jeszcze jedno równanie

$$a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = -12$$

W rezultacie uzyskujemy układ trzech równań z trzema niewiadomymi

$$\begin{cases} a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + c = 0 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 0 \\ a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = -12 \end{cases}$$

Po przekształceniach mamy

$$\begin{cases} 9a - 3b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 0 \\ c = -12 \end{cases}$$

Wstawiając do pierwszego i drugiego równania $c = -12$ rozwiązujemy dalej układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi

$$\begin{cases} 9a - 3b = 12 \\ 4a + 2b = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a - b = 4 \\ 2a + b = 6 \end{cases}$$

Zastosujmy metodę przeciwnych współczynników. Po dodaniu równań stronami mamy zatem:

$$5a = 10$$

$$a = 2$$

Wstawiając obliczone $a = 2$ do drugiego równania obliczamy b

$$2 \cdot 2 + b = 6$$

$$b = 2$$

Układ równań ma jedno rozwiązanie

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \\ c = -12 \end{cases}$$

Funkcja spełniająca warunki zadania opisana jest więc wzorem

$$f(x) = 2x^2 + 2x - 12$$

Drugi sposób

Wzór jednej z funkcji kwadratowych, której miejsca zerowe to $x = -3$, $x = 2$ ma postać

$$f(x) = (x + 3)(x - 2)$$

Zauważmy, że takie same miejsca zerowe będzie miała każda z funkcji postaci

$$f(x) = a(x + 3)(x - 2)$$

gdzie $a \neq 0$. Z treści zadania wynika, że parabola ma przecinać oś OY w punkcie $(0, -12)$. Zatem

$$f(0) = 12$$

Czyli

$$a \cdot (0 + 3) \cdot (0 - 2) = -12$$

$$-6a = -12$$

$$a = 2$$

Zatem funkcja kwadratowa spełniająca warunki zadania jest dana wzorem

$$f(x) = 2 \cdot (x + 3)(x - 2)$$

Co możemy zapisać

$$f(x) = 2x^2 + 2x - 12$$

Zadanie 27. (3 pkt.)

Dla jakiej wartości x ciąg postaci $(2x + 6, 2x + 1, x^2 - 2x)$ jest ciągiem arytmetycznym. Wyznacz wzór na n-ty wyraz tego ciągu.

Rozwiązanie

> Ogólnie: Niech dany będzie ciąg arytmetyczny (a_n), którego pierwszy wyraz wynosi a_1 zaś różnica jest równa r. Wtedy
>
> - dla każdego wyrazu a_k (oprócz pierwszego i ostatniego w ciągu) zachodzi związek
>
> $a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$
>
> tzn. wyraz środkowy jest średnią arytmetyczną wyrazów: poprzedniego i następnego.

- Wzór na n-ty wyraz tego ciągu ma postać:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

Stosując w warunkach zadania pierwszą z wymienionych własności mamy

$$2x + 1 = \frac{(2x + 6) + (x^2 - 2x)}{2}$$

Mnożąc stronami przez 2 uzyskujemy

$$4x + 2 = (2x + 6) + (x^2 - 2x)$$

Po uporządkowaniu równanie przyjmuje postać

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

Korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy mamy

$$(x - 2)^2 = 0$$

W rezultacie

$$x = 2$$

Czyli dla $x = 2$ ciąg podany w zadaniu jest ciągiem arytmetycznym. Przyjmuje on wówczas postać

$$(2 \cdot 2 + 6, 2 \cdot 2 + 1, 2^2 - 2 \cdot 2)$$

Zatem

$$(10, 5, 0)$$

Jest to więc ciąg arytmetyczny 3-wyrazowy o pierwszym wyrazie $a_1 = 10$ i różnicy $r = -5$.

$$a_n = 10 + (n - 1) \cdot (-5)$$

Czyli wzór na n-ty wyraz tego ciągu ma postać

$$a_n = 15 - 5n$$

gdzie $n = 1, 2, 3$.

Zadanie 28. (3 pkt.)

Rzucamy jeden raz dwiema kostkami sześciennymi. Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma uzyskanych oczek będzie większa od ich iloczynu.

Rozwiązanie

> Ogólnie:
>
> - Klasyczna definicja prawdopodobieństwa
>
> $$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$
>
> gdzie:
> $|A|$ - liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia A,
> $|\Omega|$ - liczba wszystkich zdarzeń elementarnych

W przypadku doświadczenia opisanego w zadaniu zdarzenie elementarne to np. $(3,5)$, gdzie: 3 – liczba oczek na pierwszej kostce, 5 – liczba oczek na drugiej kostce.

Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych Ω ma więc postać:

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ &(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ &(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ &(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ &(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ &(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}\end{aligned}$$

Składa się on z 36 elementów

$$|\Omega| = 36$$

Niech A - zdarzenie polegające na tym, że suma uzyskanych oczek będzie większa od ich iloczynu. Zauważmy, że ma to miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej na jednej kostce wypadła jedynka. Zdarzeniu A sprzyjają zatem następujące zdarzenia elementarne

$$A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1)\}$$

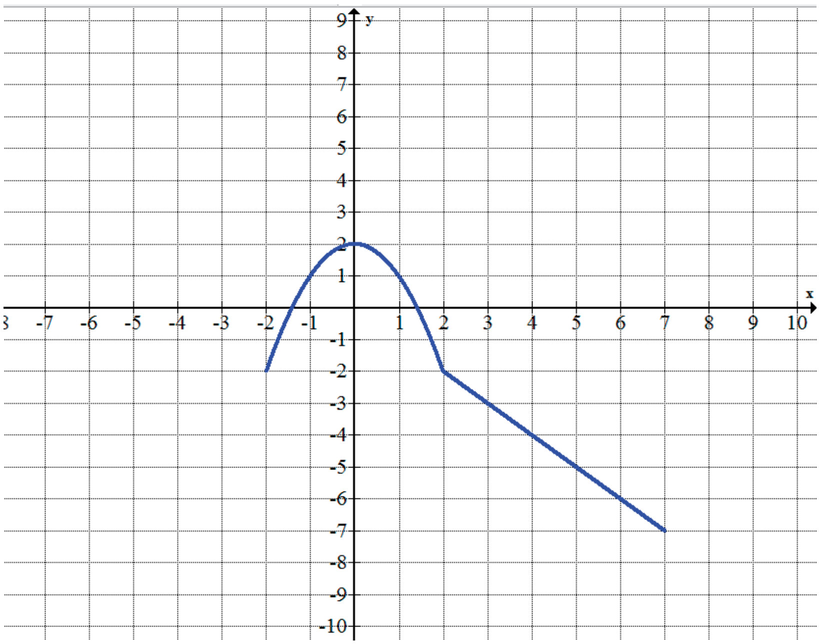
$$|A| = 11$$

Na podstawie klasycznej definicji prawdopodobieństwa mamy

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{11}{36}$$

Zadanie 29. (5 pkt.)

Dany jest wykres funkcji:



a) Wyznacz zbiór wartości funkcji $f: < -7; 2 >$

b) Największą wartość funkcja f przyjmuje dla $x = 0$.

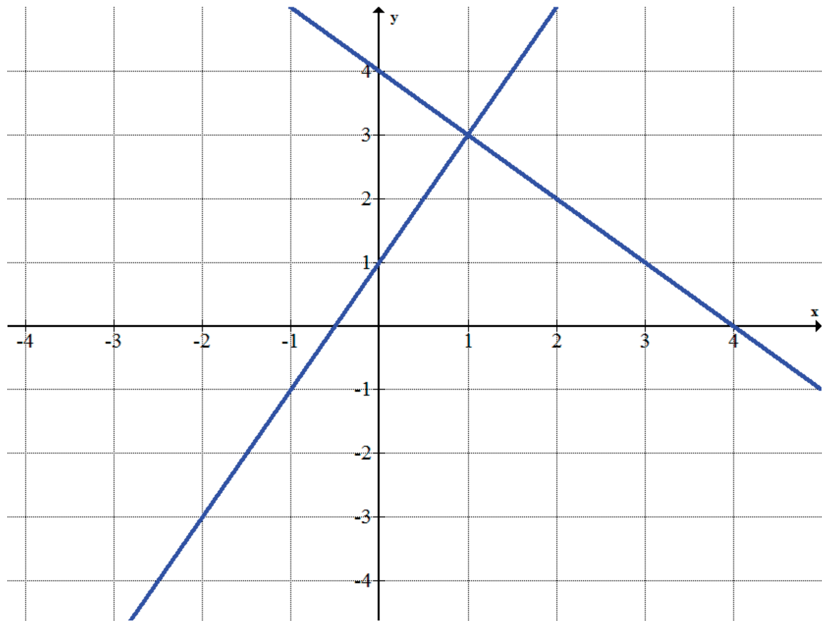
c) Argument dla którego funkcja f przyjmuje wartość (-2) jest równy (-2) lub 2.

d) Funkcja f jest rosnąca w przedziale $< -2; 0)$.

e) Uzupełnij $f(-1) = f(1)$.

Zadanie 30. (2 pkt.)

Zapisz układ równań liniowych, którego interpretację geometryczną przedstawiono na poniższym wykresie.



Rozwiązanie

Pierwszy sposób

> Ogólnie:
>
> - Równanie kierunkowe prostej l ma postać
>
> $l: y = ax + b$
>
> - Jeśli prosta l przechodzi przez punkt (x_0, y_0), to jego współrzędne spełniają równanie prostej l
>
> $y_0 = ax_0 + b$

W warunkach zadania mamy, że prosta l_1 przechodzi między innymi przez punkty $(0,\ 4)$, $(4, 0)$. Zatem

$$\begin{cases} 4 = a \cdot 0 + b \\ 0 = 4a + b \end{cases}$$

Rozwiązując powstały układ równań uzyskujemy

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \end{cases}$$

Czyli

$$l_1 \colon y = -x + 4$$

Analogicznie wyznaczamy równanie prostej l_2. Przechodzi ona między innymi przez punkty $(0, 1)$ oraz $(-1, -1)$. Uzyskujemy więc układ równań

$$\begin{cases} 1 = a \cdot 0 + b \\ -1 = -1 \cdot a + b \end{cases}$$

Rozwiązując powstały układ równań uzyskujemy

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

Czyli

$$l_2 \colon y = 2x + 1$$

Zatem powyższy rysunek przedstawia interpretację geometryczną układu równań złożonego z równań prostych l_1 oraz l_2

$$\begin{cases} y = -x + 4 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

Zauważmy ponadto, że układ równań zbudowany z równań tych prostych ma dokładnie jedno rozwiązanie, bo proste przecinają się. Z wykresu możemy odczytać rozwiązanie układu (współrzędne punktu przecięcia)

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

<u>Drugi sposób</u>

> Ogólnie
>
> - Równanie kierunkowe prostej l przechodzącej przez punkty $A(x_a, y_a)$ oraz $B(x_b, y_b)$ ma postać
>
> $$y - y_a = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \cdot (x - x_a)$$

W warunkach zadania mamy, że prosta l_1 przechodzi między innymi przez punkty $A(0,\ 4)$, $B(4, 0)$. Zatem

$$y - 4 = \frac{0 - 4}{4 - 0} \cdot (x - 0)$$

Czyli

$$l_1 \colon y = -x + 4$$

Analogicznie wyznaczamy równanie prostej l_2. Przechodzi ona między innymi przez punkty $A(0, 1)$ oraz $B(-1, -1)$. Zatem

$$y - 1 = \frac{-1 - 1}{-1 - 0} \cdot (x - 0)$$

Czyli

$$l_2 \colon y = 2x + 1$$

Zatem powyższy rysunek przedstawia interpretację geometryczną układu równań złożonego z równań prostych l_1 oraz l_2

$$\begin{cases} y = -x + 4 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

Zauważmy ponadto, że układ równań zbudowany z równań tych prostych ma dokładnie jedno rozwiązanie, bo proste przecinają się. Z wykresu możemy odczytać rozwiązanie układu (współrzędne punktu przecięcia)

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

Zadanie 31. (2 pkt.)

Uzasadnij, że jeśli ciąg (a_n) jest arytmetyczny, to suma n-początkowych wyrazów tego ciągu nie może wyrażać się wzorem $S_n = n^2 + 2$.

Rozwiązanie

Pierwszy sposób

> Ogólnie: Niech (a_n) będzie ciągiem arytmetycznym o różnicy r i pierwszym wyrazie a_1. Wtedy
>
> - suma n-początkowych wyrazów tego ciągu wyraża się wzorem
>
> $$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$
>
> - wzór na n-ty wyraz tego ciągu ma postać
>
> $$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Zatem

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1) \cdot r}{2} \cdot n$$

Czyli

$$S_n = \frac{r \cdot n + 2a_1 - r}{2} \cdot n$$

$$S_n = \left(\frac{r}{2} \cdot n + \frac{2a_1 - r}{2}\right) \cdot n$$

Zauważmy, że gdy (a_n) jest dowolnym ustalonym ciągiem arytmetycznym, to r oraz a_1 są stałe. $\frac{r}{2}$ oraz $\frac{2a_1-r}{2}$ są zatem także stałe. Oznaczmy je odpowiednio

$$c = \frac{r}{2}$$

$$d = \frac{2a_1 - r}{2}$$

Wzór na S_n przyjmuje wówczas postać

$$S_n = (c \cdot n + d) \cdot n$$

Po wymożeniu

$$S_n = c \cdot n^2 + d \cdot n$$

Widzimy, że w ogólnej postaci wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego brak wyrazu wolnego. Wynika stąd, że S_n NIE może wyrażać się wzorem $S_n = n^2 + 2$.

Drugi sposób

> Ogólnie: Niech (a_n) będzie ciągiem, a S_n sumą n-początkowych wyrazów tego ciągu . Wtedy
>
> $a_1 = S_1 , a_n = S_n - S_{n-1}$ dla n > 1

Wyznaczmy wzór ciągu:

$a_1 = S_1$, $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + 2 - (n-1)^2 - 2 = 2n - 1$, dla $n > 1$.

Wtedy $a_1 = 3, a_2 = 3, a_3 = 5$. Liczby te nie tworza ciągu arytmetycznego, ponieważ nie spełniają własności $a_2 = \frac{a_1+a_3}{2}$.

Zadanie 32. (2 pkt.)

Uzasadnij, jeśli funkcja f jest rosnąca i $f(3)+f(8)=10$, to $f(0)+f(7)<10$.

Rozwiązanie

Ogólnie:

Niech $D \subset \mathbb{R}$ i funkcja $f\colon D \to \mathbb{R}$.

f – rosnąca $\overset{def.}{\Longleftrightarrow} \bigwedge_{x_1, x_2 \in D} x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$

Czyli funkcja jest rosnąca wtedy i tylko wtedy na podstawie definicji, gdy wraz ze wzrostem argumentu wartości funkcji rosną.

W warunkach zadania, wobec faktu, że f jest funkcją rosnącą mamy zatem

$$3>0 \Rightarrow f(3)>f(0)$$

oraz

$$8>7 \Rightarrow f(8)>f(7)$$

Dodając uzyskane nierówności stronami otrzymujemy

$$f(3)+f(8)>f(0)+f(7)$$

Skoro

$$f(3)+f(8)=10$$

Więc

$$f(0)+f(7)<10$$

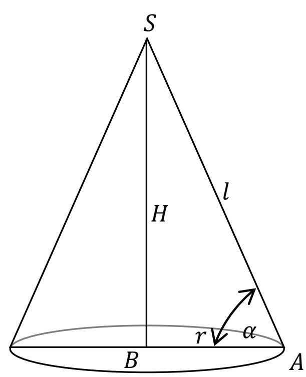
Zadanie 33. (5 pkt.)

Pole powierzchni podstawy stożka wynosi 300π. Tworząca stożka jest nachylona do podstawy pod kątem 30^0. Wyznacz objętość stożka.

Rozwiązanie

Ogólnie:

- Objętość stożka $V=\frac{1}{3}\cdot P_p \cdot H$
- Pole koła $P_p=\pi \cdot r^2$



Zauważmy, że w warunkach zadania, zgodnie z oznaczeniami na rysunku obok, trójkąt ABS jest prostokątny. Długość przyprostokątnej AB tego trójkąta jest równa długości promienia podstawy stożka

$$|AB| = r$$

Z drugiej strony znamy pole podstawy. Wobec wzoru na pole koła uzyskujemy

$$300 \cdot \pi = \pi \cdot r^2$$

Czyli

$$r = 10\sqrt{3} \lor r = -10\sqrt{3}$$

Wobec interpretacji geometrycznej odrzucamy rozwiązanie ujemne. Zatem

$$|AB| = r = 10\sqrt{3}$$

Aby obliczyć objętość potrzebujemy znaleźć długość wysokości stożka H.

Zwróćmy uwagę, że w trójkącie ABC znamy długość przyprostokątnej $|AB| = 10\sqrt{3}$ oraz miarę kąta przy wierzchołku A

$$\alpha = 30°$$

Dla wyznaczenia wysokości stożka, której długość równa się długości przyprostokątnej BS skorzystamy z funkcji tangens kąta α

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{|BS|}{|AB|}$$

Wstawiając znane wielkości uzyskujemy

$$\mathrm{tg}(30°) = \frac{H}{r}$$

Czyli

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{H}{10\sqrt{3}}$$

Wyznaczamy niewiadome H

$$H = \frac{\sqrt{3} \cdot 10 \cdot \sqrt{3}}{3} = 10$$

W rezultacie objętość stożka

$$V = \tfrac{1}{3} \cdot P_p \cdot H = \tfrac{1}{3} \cdot 300\pi \cdot 10 = 1000\pi$$

7 Rozwiązania - Zestaw B

Zadania zamknięte

Zadanie 1. (1 pkt.)

Wyznacz 9% z liczby 9.

a) 8,1 b) 0,01 c) 0,1 d) 0,81

Rozwiązanie:

Pierwszy sposób

1% danej liczby to $0{,}01$ tej liczby, zatem:

$$9\% \cdot 9 = 0{,}09 \cdot 9 = 0{,}81$$

Drugi sposób

Korzystamy z własności proporcji:

100% --------- 9

9% --------- x

Zatem

$$x = \frac{9\% \ \cdot 9}{100\%} = 0{,}81$$

Zadanie 2. (1 pkt.)

Oblicz ile procent liczby 15 stanowi liczba 3,3.

a) 0,(45)% b) 33% c)4,95 % d)22%

Rozwiązanie:

$$\frac{3{,}3}{15} \cdot 100\% = \ 0{,}22 \cdot 100\% = 22\%$$

Zadanie 3. (1 pkt.)

Oblicz $\log_4 \frac{1}{16} - \log_2 16.$

a)-6 b) -2 c) 2 d) 1

Rozwiązanie

Pierwszy sposób

> Ogólnie: $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$, gdzie $a, b > 0$ o $a \neq 1$

Zatem

$$\log_4 \frac{1}{16} = x \Leftrightarrow 4^x = \frac{1}{16} \Leftrightarrow 4^x = 4^{-2} \Rightarrow x = -2$$

$$\log_2 16 = y \Leftrightarrow 2^y = 16 \Leftrightarrow 2^y = 2^4 \Rightarrow y = 4$$

W rezultacie

$$\log_4 \frac{1}{16} - \log_2 16 = -2 - 4 = -6$$

Drugi sposób

> Przypomnijmy
>
> - Wzór na zmianę podstawy logarytmu: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, gdzie $a, b, c > 0$ i $a, c \neq 1$
> - Własność: $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$, gdzie a,b>0 i a$\neq$ 1

Zatem

$$\log_4 \frac{1}{16} - \log_2 16 = \frac{\log_2 \frac{1}{16}}{\log_2 4} - \log_2 16 = \frac{\log_2 2^{-4}}{\log_2 2^2} - \log_2 2^4 = \frac{-4 \cdot \log_2 2}{2 \cdot \log_2 2} - 4 \cdot \log_2 2 =$$

$$= \frac{-4 \cdot 1}{2 \cdot 1} - 4 \cdot 1 = -2 - 4 = -6$$

Zadanie 4. (1 pkt.)

Podaj przybliżenie liczby $\frac{17}{18}$ z dokładnością do 3 miejsc po przecinku.

a) 0,944 b) 0,945 c) 0,9444 d) 0,444

Rozwiązanie

Dzieląc 17 przez 18 uzyskujemy ułamek dziesiętny o rozwinęciu dziesiętnym nieskończonym okresowym: 0,944444 ...

Mamy zaokrąglić ułamek do 3 miejsc po przecinku. Patrzymy zatem na czwartą cyfrę 0,944$\boxed{4}$44...

Jest mniejsza od 5, zatem cyfrę na trzecim miejscu po przecinku pozostawiamy bez zmian, zaś pozostałe cyfry rozwinięcia począwszy od czwartego miejsca po przecinku odrzucamy. Uzyskujemy więc 0,944.

Zadanie 5. (1 pkt.)

Równanie $|x-3|=-3$

a) nie ma rozwiązań.
b) ma dokładnie jedno rozwiązanie.
c) ma dokładnie dwa rozwiązania.
d) ma więcej niż dwa rozwiązania.

Rozwiązanie

> Ogólnie: Definicja wartości bezwzględnej
>
> $$|a| = \begin{cases} -a, & a < 0 \\ a, & a \geq 0 \end{cases}$$
>
> Zatem moduł z danej liczby jest liczbą nieujemną.

Równanie dane w zadaniu ma postać

$$|x-3|=-3$$

Szukamy więc takich x, dla których $|x-3|$ jest ujemny. Oczywiście jest to sprzeczne z definicją wartości bezwzględnej. Zatem takie x nie istnieją.

Zadanie 6. (1 pkt.)

Wskaż równanie prostej prostopadłej do prostej o równaniu $y=\frac{1}{2}x-3$.

a) $y=-x-2$ b) $y=2x+3$ c) $y=-2x+1$ d) $y=x+2$

Rozwiązanie

> Ogólnie: Niech dane będą proste k oraz l odpowiednio o równaniach:
>
> $k: y=a_1x+b_1$
>
> $l: y=a_2x+b_2$
>
> $k \perp l \Leftrightarrow a_1 \cdot a_2 = -1$
>
> Czyli:
> Proste k oraz l są prostopadłe, gdy iloczyn ich współczynników kierunkowych wynosi (-1).

Zatem do prostej $y=\frac{1}{2}x-3$ jest prostopadła prosta $y=-2x+1$.

Zadanie 7. (1 pkt.)

Wyznacz odległość punktów $A(2,1)$, $B(0,2)$.

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{2}$ c) 5 d) 1

Rozwiązanie

> Ogólnie: Niech dane będą punkty $A(x_a, y_a)$ oraz $B(x_b, y_b)$. Odległość między tymi punktami wynosi $|AB| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$.

Zatem, w warunkach zadania:

$$|AB| = \sqrt{(0-2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

Zadanie 8. (1 pkt.)

W trójkącie kąty wewnętrzne mają odpowiednio miary : $2\alpha, \alpha + 15^0$, $2\alpha + 15^0$. Wtedy

a) $\alpha = 45^0$ b) $\alpha = 30^0$ c) $\alpha = 105^0$ d) $\alpha = 15^0$

Rozwiązanie

> Ogólnie: Suma miar kątów wewnętrznych w trójkącie wynosi $180°$.

Stosując powyższą własność w warunkach zadania uzyskujemy równanie:

$$2\alpha + \alpha + 15^0 + 2\alpha + 15^0 = 180°$$

Rozwiązujemy je względem niewiadomej α

$$5\alpha = 150°$$

Zatem

$$\alpha = 30°$$

Zadanie 9. (1 pkt.)

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n), gdzie $a_{136} = 340, a_{139} = 400$. Wtedy

a) $\mathrm{r} = 3$ b) $\mathrm{r} = 20$ c) $\mathrm{r} = 10$ d) $\mathrm{r} = 360$

Rozwiązanie

Pierwszy sposób

> Ogólnie: Niech dany będzie ciąg arytmetyczny (a_n), którego pierwszy wyraz wynosi a_1 zaś różnica jest równa r. Wzór na n-ty wyraz tego ciągu ma postać:
>
> $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

Stosując w warunkach zadania powyższy wzór uzyskujemy układ równań

$$\begin{cases} a_{136} = a_1 + (136-1)\cdot r \\ a_{139} = a_1 + (139-1)\cdot r \end{cases}$$

Zatem

$$\begin{cases} a_1 + 135r = 340 \\ a_1 + 138r = 400 \end{cases}$$

Do rozwiązania układu zastosujmy np. metodę przeciwnych współczynników. W tym celu mnożymy pierwsze równanie przez (-1)

$$\begin{cases} -a_1 - 135r = -340 \\ \quad a_1 + 138r = 400 \end{cases}$$

Następnie dodajemy równania stronami

$$3r = 60$$

$$r = 20$$

Do rozwiązania układu brakuje jeszcze wyznaczenia a_1, ale znajomość wartości tej niewiadomej jest zbędna w tym zadaniu.

Drugi sposób

$a_{139} - a_{136} = 3\mathrm{r} = 400 - 340 = 60$, zatem $r = 20$.

Zadanie 10. (1 pkt.)

Dany jest ciąg geometryczny (a_n) , gdzie $a_1 = -1, a_{102} = 1$. Wtedy

a) $\mathrm{q} = -1$ b) $\mathrm{q} = 1$ c) $\mathrm{q} = 0$ d) $\mathrm{q} = 50$

Rozwiązanie

> Ogólnie: Niech dany będzie ciąg geometryczny (a_n), którego pierwszy wyraz wynosi a_1 zaś iloraz jest równy q. Wzór na n-ty wyraz tego ciągu ma postać:
>
> $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Stosując w warunkach zadania powyższy wzór uzyskujemy równanie

$$a_{102} = -1 \cdot q^{102-1}$$

Zatem

$$-1 \cdot q^{101} = 1$$

Więc

$$q^{101} = -1$$

Ostatecznie

$$q = -1$$

Zadanie 11. (1 pkt.)

Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = 2x^2 - 12x + 21$. Wyznacz wierzchołek paraboli.

a) $W(-6, 6)$ b) $W(-6, 24)$ c) $W(-3, -3)$ d) $W(3, 3)$

Rozwiązanie

> Ogólnie: Niech dana będzie funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$. Parabola będąca wykresem tej funkcji posiada wierzchołek w punkcie $W(x_w, y_w)$, gdzie odpowiednio:
>
> $x_w = \frac{-b}{2a}$
>
> $y_w = \frac{-\Delta}{4a}$
>
> $\Delta = b^2 - 4ac$

W warunkach zadania mamy $a = 2$, $b = -12$, $c = 21$. Zatem

$$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 21 = -24$$

$$x_w = \frac{12}{2 \cdot 2} = 3$$

$$y_w = \frac{24}{4 \cdot 2} = 3$$

Czyli wierzchołek paraboli $W(3, 3)$.

Zadanie 12. (1 pkt.)

Wyznacz $\frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x-1}$ dla $x \neq 1$ i $x \neq -1$.

a) $\frac{x+1}{x^2-1}$ b) $\frac{3x-1}{x^2-1}$ c) $\frac{-3x+1}{x^2-1}$ d) $\frac{-3x-1}{x^2-1}$

Rozwiązanie

> Ogólnie: Skorzystamy z następujących wzorów skróconego mnożenia
>
> - wzór na różnicę kwadratów: $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$
> - wzór na kwadrat sumy: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Sprowadzamy do wspólnego mianownika

$$\frac{x}{x+1}-\frac{x+1}{x-1}=\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}-\frac{(x+1)(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x(x-1)}{x^2-1}-\frac{(x+1)^2}{x^2-1}$$

Zapisujemy na wspólnej kresce ułamkowej i dokonujemy redukcji wyrazów podobnych w liczniku

$$\frac{x^2-x-(x^2+2x+1)}{x^2-1}=\frac{x^2-x-x^2-2x-1}{x^2-1}=\frac{-3x-1}{x^2-1}$$

Zadanie 13. (1 pkt.)

Środek okręgu o równaniu $(x+1)^2+(y-2)^2=16$ jest w punkcie o współrzędnych

a) $(2,1)$ b) $(-1,-2)$ c) $(2,-1)$ d) $(-1,2)$

Rozwiązanie

> Ogólnie: Równanie okręgu o środku w punkcie o współrzędnych (a,b) i promieniu $r>0$ ma postać
>
> $(x-a)^2+(x-b)^2=r^2$

Zatem w warunkach zadania $a=-1, b=2$.

Czyli środkiem okręgu jest punkt o współrzędnych $(-1,2)$.

Zadanie 14. (1 pkt.)

Środek odcinka $\overline{AB}$ leży w punkcie $S(4,6)$. Punkt B ma współrzędne $B(0,2)$. Wtedy

a) $A(2,4)$ b) $A(8,10)$ c) $A(-2,-2)$ d) $A(2,3)$

Rozwiązanie

> Ogólnie: Niech będą dane punkty $A(x_a,y_a)$ oraz $B(x_b,y_b)$. Niech punkt $S(x_s,y_s)$ będzie środkiem odcinka $\overline{AB}$. Wtedy
>
> $x_s=\frac{x_a+x_b}{2}$
>
> $y_s=\frac{y_a+y_b}{2}$

Stosując powyższe wzory w warunkach zadania uzyskujemy

$$4=\frac{x_a+0}{2}$$

$$6 = \frac{y_a + 2}{2}$$

Powyższe zależności traktujemy jako równania, które rozwiązujemy odpowiednio względem x_a, y_a. Uzyskujemy wówczas

$$x_a = 8$$

$$y_a = 10$$

Szukany punkt $A(8, 10)$.

Zadanie 15. (1 pkt.)

Suma kolejnych trzech liczb naturalnych nieparzystych wynosi 111. Największa z nich to

a) 41 b) 33 c) 39 d) 43

Rozwiązanie

Kolejne trzy liczby nieparzyste naturalne to: $2n+1, 2n+3, 2n+5$. Zatem $2n+1+2n+3+2n+5=111$. Stąd $6n=102$, więc $n=17$. Największa liczba to, $34+5=39$.

Zadanie 16. (1 pkt.)

Wskaż układ sprzeczny.

a) $\begin{cases} 2x - \frac{7}{4}y = 1 \\ x + y = \frac{5}{4} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 7x - \frac{7}{4}y = -4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 4x - 4y = 12 \end{cases}$

Rozwiązanie

> Ogólnie: Układ dwóch równań liniowych z dwoma niewiadomymi jest sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy wchodzące w jego skład równania przedstawiają proste równoległe (o tym samym współczynniku kierunkowym) NIE pokrywające się (posiadające różne wyrazy wolne).

Rozważmy punkt c) po przekształceniu równań do postaci kierunkowej

$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ y = x - 3 \end{cases}$$

Współczynniki kierunkowe wynoszą odpowiednio: (-1) oraz 1. Proste nie są więc równoległe – przecinają się. Powyższy układ równań jest zatem oznaczony (posiada dokładnie jedno rozwiązanie).

Jedyne rozwiązanie układu (x, y) interpretujemy jako współrzędne punktu przecięcia powyższych prostych.

Analogiczną sytuację mamy w punktach a) oraz b). Wyjątek stanowi punkt d)

$$\begin{cases} -y = -x + 1 \\ -4y = -4x + 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = x - 3 \end{cases}$$

Współczynniki kierunkowe są równe 1 zaś wyrazy wolne różne (odpowiednio: -1, -3). Zatem równania przedstawiają proste równoległe NIE pokrywające się. Układ jest sprzeczny.

Zadanie 17. (1 pkt.)

W 2001 roku mama Ani miała 28 lat. Ania urodziła się w 1995. O ile lat Ania jest młodsza od mamy?

a) 23 lata b) 22 lata c) 21 lat d) 24 lata

Rozwiązanie

Postawione w zadaniu pytanie równie dobrze można sformułować następująco: Ile lat miała mama w momencie urodzenia Ani? Oznaczmy szukaną wielkość przez x.

1995 rok – urodziny Ani (wiek Ani: 0 lat), wiek mamy: x lat.

2001 rok – wiek Ani: 6, wiek mamy: 28 lat.

$$x = 28 - 6 = 22$$

Zadanie 18. (1 pkt.)

W 2001 roku mama Ani miała 28 lat. Ania urodziła się w 1995. Ile lat miała mama Ani w 1990 roku?

a) 14 lat b) 15 lat c) 17 lat d) 16 lat

Rozwiązanie

x – wiek mamy Ani w 1990 roku

$$x = 28 - (2001 - 1990) = 28 - 11 = 17$$

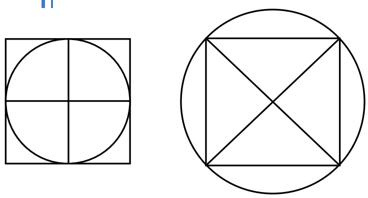
Zadanie 19. (1 pkt.)

Stosunek długości promienia okręgu wpisanego w kwadrat do długości promienia okręgu opisanego na kwadracie wynosi

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

Rozwiązanie

> Ogólnie: Długość przekątnej kwadratu o boku długości a wynosi $d = a\sqrt{2}$.



Zauważmy, że długość promienia okręgu opisanego na kwadracie jest równa połowie długości przekątnej tego kwadratu

$$R = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Zauważmy również, że długość promienia okręgu wpisanego w kwadrat jest równa połowie długości boku tego kwadratu

$$r = \frac{a}{2}$$

Zatem

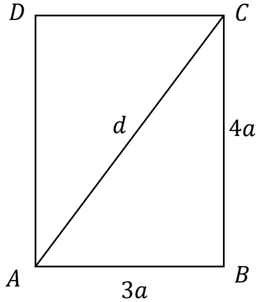
$$\frac{r}{R} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Zadanie 20. (1 pkt.)

Stosunek długości boków prostokąta jest równy $3:4$. Wtedy stosunek długości obwodu do długości przekątnej jest równy

a) $\frac{5}{7}$ b) $\frac{7}{5}$ c) $\frac{14}{5}$ d) $\frac{5}{14}$

Rozwiązanie



Niech Ob oznacza obwód prostokąta, zaś d - długość przekątnej prostokąta. Wobec związku miarowego danego w zadaniu obwód wynosi

$$Ob = 2 \cdot 3a + 2 \cdot 4a = 14a$$

Stosując twierdzenie Pitagorasa uzyskujemy wzór na przekątną

$$d = \sqrt{(3a)^2 + (4a)^2} = \sqrt{25a^2} = 5a$$

Zatem

$$\frac{Ob}{d} = \frac{14a}{5a} = \frac{14}{5}$$

Zadanie 21. (1 pkt.)

Wiadomo, że w trójkącie prostokątnym $\sin(\alpha) = \frac{12}{13}$. Wtedy

a) $\sin(90^0 - \alpha) = \frac{5}{13}$ b) $\sin(90^0 - \alpha) = \frac{7}{13}$ c) $\sin(90^0 - \alpha) = \frac{5}{12}$ d) $\sin(90^0 - \alpha) = \frac{12}{13}$

Rozwiązanie

> Ogólnie:
>
> - Wzór redukcyjny
>
> $\sin(90^0 - \alpha) = \cos(\alpha)$
>
> - „Jedynka" trygonometryczna
>
> $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

Zatem w warunkach zadania

$$\left(\frac{12}{13}\right)^2 + \cos^2(\alpha) = 1$$
$$\cos^2(\alpha) = 1 - \frac{144}{169}$$
$$\cos^2(\alpha) = \frac{25}{169}$$

α jest kątem ostrym w trójkącie prostokątnym, zatem jego kosinus będzie liczbą dodatnią. Stąd

$$\cos(\alpha) = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$$

Zatem

$$\sin(90^0 - \alpha) = \frac{5}{13}$$

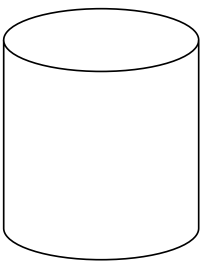
<u>Zadanie 22. (1 pkt.)</u>

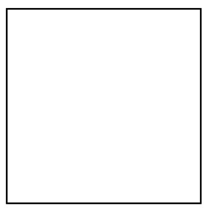
Objętość walca, którego przekrojem osiowym jest kwadrat o boku 8 jest równa

a) 512π b) 128π c) 8π d) $\frac{128}{3}\pi$

<u>Rozwiązanie</u>

> Ogólnie: Objętość walca wyraża się wzorem
>
> $V = \pi r^2 H$
>
> gdzie r - promień podstawy, H - wysokość walca





8

8

Z treści zadania wynika, że $r = \frac{8}{2} = 4$, zaś $H = 8$. Zatem

$$V = \pi \cdot 4^2 \cdot 8 = 128\pi$$

<u>Zadanie 23. (1 pkt.)</u>

Średnia arytmetyczna z liczb: $-45796, -34348, 40, 34347, 45797$ jest

a) większa niż 8.
b) równa 8.
c) mniejsza niż 8 i większa od zera.
d)ujemna.

Rozwiązanie

> Ogólnie: Średnia arytmetyczna z liczb $a_1,\ a_2, \dots, a_n$ wyraża się wzorem
>
> $S = \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$

W warunkach zadania mamy

$$S = \frac{(-45796) + (-34348) + 40 + 34347 + 45797}{5}$$

Zwróćmy uwagę, że składniki pierwszy i piąty oraz drugi i czwarty niewiele różnią się co do wartości bezwzględnej, ale mają znaki przeciwne. Stąd warto je pogrupować

$$S = \frac{(45797 - 45796) + (34347 - 34348) + 40}{5}$$

$$S = \frac{1 + (-1) + 40}{5} = 8$$

Zadanie 24. (1 pkt.)

Rzucamy trzy razy monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że co najmniej dwa razy otrzymamy reszkę.

a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{7}{8}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{4}$

Rozwiązanie

Pierwszy sposób

> Ogólnie:
>
> Klasyczna definicja prawdopodobieństwa
>
> $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$
>
> gdzie:
> $|A|$ - liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia A,
> $|\Omega|$ - liczba wszystkich zdarzeń elementarnych

W warunkach zadania przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω możemy opisać jako zbiór

$$\Omega = \{OOO, ROO, ORO, OOR, RRO, ROR, ORR, RRR\}$$

gdzie np. ciąg ROO oznacza, że za pierwszym rzutem uzyskaliśmy reszkę (R), a za drugim i trzecim - orła (O).

Wszystkich zdarzeń elementarnych (elementarnych wyników naszego doświadczenia) jest zatem 8

$$|\Omega| = 8$$

Niech A - zdarzenie polegające na wyrzuceniu co najmniej dwa razy reszki (czyli dwa bądź trzy razy).

$$A = \{RRO, ROR, ORR, RRR\}$$

Zdarzeniu A sprzyjają zatem cztery zdarzenia elementarne.

$$|A| = 4$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

<u>Drugi sposób</u>

> Ogólnie
>
> - Niezależność zdarzeń
>
> $$A, B \text{ - zdarzenia niezależne} \overset{def.}{\iff} P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$
>
> - Zdarzenia wykluczające się
>
> $$A, B \text{ - zdarzenia wykluczające się} \overset{def.}{\iff} A \cap B = \emptyset$$
>
> - Prawdopodobieństwo sumy zdarzeń wykluczających się
>
> $$A, B \text{ - zdarzenia wykluczające się} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Niech A - zdarzenie polegające na wyrzuceniu co najmniej dwa razy reszki (czyli dwa bądź trzy razy).

$$A = \{RRO, ROR, ORR, RRR\}$$

Wynik żadnego z rzutów nie ma wpływu na prawdopodobieństwo kolejnego wyniku, więc powiemy, że kolejne próby (kolejne rzuty) są niezależne. Prawdopodobieństwo wyrzucenia reszki w pojedynczej próbie wynosi oczywiście $\frac{1}{2}$. Takie samo jest prawdopodobieństwo wyrzucenia orła w pojedynczej próbie. Każdy z wymienionych wyników doświadczenia wyklucza pozostałe trzy możliwości (np. jeśli uzyskaliśmy ciąg RRO, to jednocześnie nie mogliśmy otrzymać ROR). Zatem

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

<u>Zadanie 25. (1 pkt.)</u>

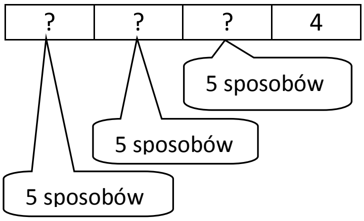
Dany jest zbiór cyfr $\{1,8,4,7,9\}$. Ile można utworzyć różnych czterocyfrowych liczb parzystych? {Cyfry mogą się powtarzać}

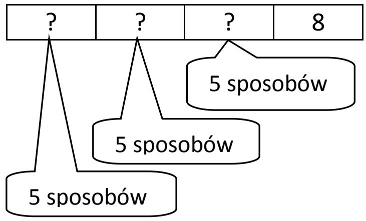
a) 48 b) 250 c) 125 d) 240

Rozwiązanie

Tworzymy liczby 4-cyfrowe z podanych z cyfr, przy czym cyfry mogą się powtarzać. Liczby utworzone zgodnie ze schematem podanym w zadaniu to np. 8888, 9414, 8714, itd.

Liczba jest parzysta wtedy i tylko wtedy, gdy jej cyfra jedności jest parzysta. W warunkach zadania oznacza to, że mamy dwa przypadki: cyfra jedności równa się 4 albo 8. Cyfry mogą się powtarzać, więc na pozostałych miejscach możemy umieścić dowolną z dostępnych cyfr. Za każdym razem mamy więc 5 możliwości.





Niech N - liczba liczb 4-cyfrowych parzystych jakie można utworzyć w warunkach zadania. Wobec powyższych rozważań mamy zatem

$$N = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 + 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 = 250$$

Zadanie 26. (2 pkt.)

Napisz wzór funkcji kwadratowej, której miejscami zerowymi są liczby $1, -4$ oraz wykres funkcji przecina oś OY w punkcie $(0, -8)$.

Rozwiązanie

Pierwszy sposób

> Ogólnie:
>
> - Funkcja kwadratowa to funkcja opisana wzorem
>
> $f(x) = ax^2 + bx + c$
>
> gdzie $a \neq 0$
>
> - Miejscem zerowym funkcji $f(x)$ nazywamy każdy taki argument x_0, że
>
> $f(x_0) = 0$

W warunkach zadania, miejsca zerowe to $x = 1$, $x = -4$

$$\begin{cases} a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 0 \\ a \cdot (-4)^2 + b \cdot (-4) + c = 0 \end{cases}$$

Dodatkowo wykres ma przechodzić przez punkt o współrzędnych $(0,-8)$, zatem otrzymujemy jeszcze jedno równanie

$$a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = -8$$

W rezultacie uzyskujemy układ trzech równań z trzema niewiadomymi

$$\begin{cases} a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 0 \\ a \cdot (-4)^2 + b \cdot (-4) + c = 0 \\ a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = -8 \end{cases}$$

Po przekształceniach mamy

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 16a - 4b + c = 0 \\ c = -8 \end{cases}$$

Wstawiając do pierwszego i drugiego równania $c = -8$ rozwiązujemy dalej układ dwóch równań z dwoma niewiadomymi

$$\begin{cases} a + b = 8 \\ 16a - 4b = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = 8 \\ 4a - b = 2 \end{cases}$$

Zastosujmy metodę przeciwnych współczynników. Po dodaniu równań stronami mamy zatem:

$$5a = 10$$

$$a = 2$$

Wstawiając obliczone $a = 2$ do pierwszego równania obliczamy b

$$2 + b = 8$$

$$b = 6$$

Układ równań ma jedno rozwiązanie

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 6 \\ c = -8 \end{cases}$$

Funkcja spełniająca warunki zadania opisana jest więc wzorem

$$f(x) = 2x^2 + 6x - 8$$

<u>Drugi sposób</u>

Wzór jednej z funkcji kwadratowych, której miejsca zerowe to $x = 1$, $x = 4$ ma postać

$$f(x) = (x-1)(x+4)$$

Zauważmy, że takie same miejsca zerowe będzie miała każda z funkcji postaci

$$f(x) = a(x-1)(x+4)$$

Dla $a \neq 0$. Z treści zadania wynika, że parabola ma przecinać oś OY w punkcie $(0,-8)$. Zatem

$$f(0) = -8$$

Czyli

$$a \cdot (0-1) \cdot (0+4) = -8$$

$$-4a = -8$$

$$a = 2$$

Zatem funkcja kwadratowa spełniająca warunki zadania jest dana wzorem

$$f(x) = 2 \cdot (x-1)(x+4)$$

Co możemy zapisać

$$f(x) = 2x^2 + 6x - 8$$

Zadanie 27. (3 pkt.)

Dla jakiej wartości x ciąg postaci $(2x+8, 2x+3, x^2+1)$ jest ciągiem arytmetycznym. Wyznacz wzór na n-ty wyraz tego ciągu.

Rozwiązanie

> Ogólnie: Niech dany będzie ciąg arytmetyczny (a_n), którego pierwszy wyraz wynosi a_1 zaś różnica jest równa r. Wtedy
>
> - dla każdego wyrazu a_k (oprócz pierwszego i ostatniego w ciągu) zachodzi związek
>
> $a_k = \frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$
>
> tzn. wyraz środkowy jest średnią arytmetyczną wyrazów: poprzedniego i następnego.
>
> - Wzór na n-ty wyraz tego ciągu ma postać:
>
> $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

Stosując w warunkach zadania pierwszą z wymienionych własności mamy

$$2x + 3 = \frac{(2x+2)+(x^2+1)}{2}$$

Mnożąc stronami przez 2 uzyskujemy

$$4x + 6 = (2x + 2) + (x^2 + 1)$$

Po uporządkowaniu równanie przyjmuje postać

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Stosując wzory na wyróżnik i pierwiastki równania kwadratowego otrzymujemy

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$$

$$\sqrt{\Delta} = 4$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \lor x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{2 - 4}{2 \cdot 1} \lor x = \frac{2 + 4}{2 \cdot 1}$$

W rezultacie

$$x = -1 \lor x = 3$$

Czyli mamy 2 ciągi arytmetyczne spełniające warunki zadania:

- dla $x = -1$ ciąg podany w zadaniu przyjmuje postać

$$(2 \cdot (-1) + 2, 2 \cdot (-1) + 3, (-1)^2 + 1)$$

zatem mamy

$$(0, 1, 2)$$

Jest to więc ciąg arytmetyczny 3-wyrazowy o pierwszym wyrazie $a_1 = 0$ i różnicy $r = 1$.

$$a_n = 0 + (n - 1) \cdot 1$$

Czyli wzór na n-ty wyraz tego ciągu ma postać

$$a_n = n - 1$$

gdzie $n = 1, 2, 3$.

- dla $x = 3$ ciąg podany w zadaniu przyjmuje postać

$$(2 \cdot 3 + 2, 2 \cdot 3 + 3, 3^2 + 1)$$

zatem mamy

$$(8, 9, 10)$$

Jest to więc ciąg arytmetyczny 3-wyrazowy o pierwszym wyrazie $a_1 = 8$ i różnicy $r = 1$.

$$a_n = 8 + (n - 1) \cdot 1$$

Czyli wzór na n-ty wyraz tego ciągu ma postać

$$a_n = n + 7$$

gdzie $n = 1, 2, 3$.

Zadanie 28. (3 pkt.)

Rzucamy jeden raz dwiema kostkami sześciennymi. Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma uzyskanych oczek będzie mniejsza od ich iloczynu.

Rozwiązanie

> Ogólnie:
>
> - Klasyczna definicja prawdopodobieństwa
>
> $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$
>
> gdzie:
> $|A|$ - liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia A,
> $|\Omega|$ - liczba wszystkich zdarzeń elementarnych.
>
> - Prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego: Niech A oznacza zdarzenie losowo (krótko: zdarzenie). Oznaczmy przez A' zdarzenie przeciwne do zdarzenia A.
>
> $P(A) = 1 - P(A')$

W przypadku doświadczenia opisanego w zadaniu zdarzenie elementarne to np. $(3, 5)$, gdzie:

3 - wynik rzutu na pierwszej kostce, 5 - wynik rzutu na drugiej kostce.

Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych Ω ma więc postać:

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

Składa się on z 36 elementów

$$|\Omega| = 36$$

Niech A - zdarzenie polegające na tym, że suma uzyskanych oczek będzie mniejsza od ich iloczynu. Zwróćmy uwagę, że ma to miejsce w większości przypadków. Dlatego warto rozważyć zdarzenie przeciwne A'.

A' - zdarzenie polegające na tym, że suma uzyskanych oczek będzie większa bądź równa ich iloczynowi.

Zauważmy, że w opisanym doświadczeniu suma uzyskanych oczek jest większa od ich iloczynu wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej na jednej kostce wypadła jedynka. Równość sumy oraz iloczynu zachodzi w przypadku uzyskania dwójek na obu kostkach. Zdarzeniu A' sprzyjają zatem następujące zdarzenia elementarne

$$A' = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1),(2,2)\}$$

$$|A'| = 12$$

Na podstawie klasycznej definicji prawdopodobieństwa mamy

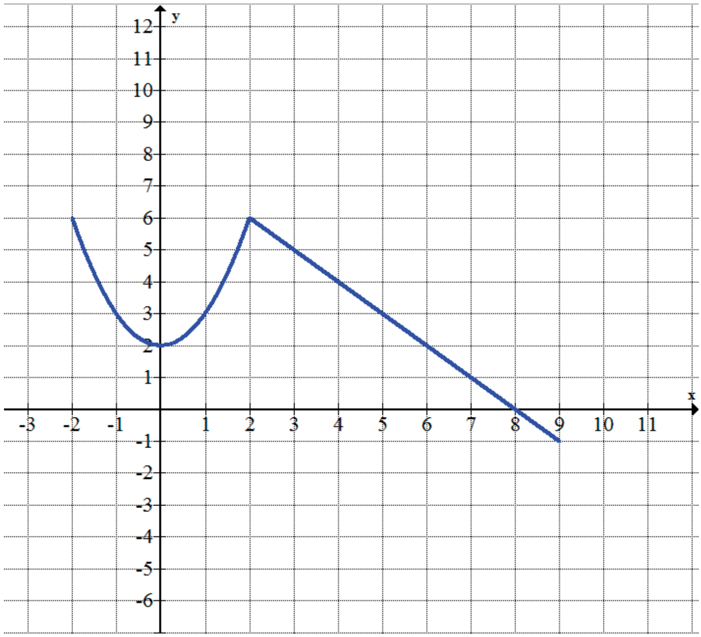
$$P(A') = \frac{|A'|}{|\Omega|} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

Zatem

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Zadanie 29. (5 pkt.)

Dany jest wykres funkcji:



a) Wyznacz zbiór wartości funkcji f: $< -1,\ 6 >$

b) Najmniejszą wartość funkcja f przyjmuje dla $x = 9$.

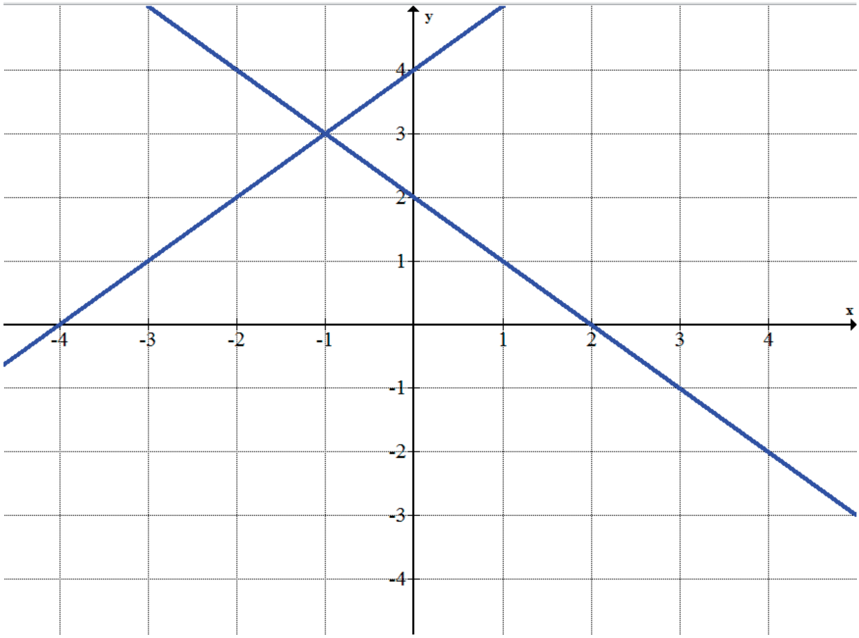
c) Argument dla którego funkcja f przyjmuje wartość 1 jest równy 7.

d) Funkcja f jest rosnąca na przedziale $(0, 2)$.

e) Uzupełnij $f(0) = f(6)$.

Zadanie 30. (2 pkt.)

Zapisz układ równań liniowych, którego interpretację geometryczną przedstawiono na wykresie.



Rozwiązanie

Pierwszy sposób

> Ogólnie:
>
> - Równanie kierunkowe prostej l ma postać
>
> $l: y = ax + b$
>
> - Jeśli prosta l przechodzi przez punkt (x_0, y_0), to jego współrzędne spełniają równanie prostej l
>
> $y_0 = ax_0 + b$

W warunkach zadania mamy, że prosta l_1 przechodzi między innymi przez punkty $(0,\ 4)$, $(-4, 0)$. Zatem

$$\begin{cases} 4 = a \cdot 0 + b \\ 0 = -4a + b \end{cases}$$

Rozwiązując powstały układ równań uzyskujemy

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases}$$

Czyli

$$l_1 \colon y = x + 4$$

Analogicznie wyznaczamy równanie prostej l_2. Przechodzi ona między innymi przez punkty $(0,2)$ oraz $(2,0)$. Uzyskujemy więc układ równań

$$\begin{cases} 2 = a \cdot 0 + b \\ 0 = 2 \cdot a + b \end{cases}$$

Rozwiązując powstały układ równań uzyskujemy

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Czyli

$$l_2 \colon y = -x + 2$$

Zatem powyższy rysunek przedstawia interpretację geometryczną układu równań złożonego z równań prostych l_1 oraz l_2

$$\begin{cases} y = x + 4 \\ y = -x + 2 \end{cases}$$

Zauważmy ponadto, że układ równań zbudowany z równań tych prostych ma dokładnie jedno rozwiązanie, bo proste przecinają się. Z wykresu możemy odczytać rozwiązanie układu (współrzędne punktu przecięcia)

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$$

<u>Drugi sposób</u>

> Ogólnie
>
> - Równanie kierunkowe prostej l przechodzącej przez różne punkty $A(x_a, y_a)$ oraz $B(x_b, y_b)$ ma postać
>
> $y - y_a = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \cdot (x - x_a)$

W warunkach zadania mamy, że prosta l_1 przechodzi między innymi przez punkty $(0,4)$, $(-4,0)$. Zatem

$$y - 4 = \frac{0 - 4}{-4 - 0} \cdot (x - 0)$$

Czyli

$$l_1 \colon y = x + 4$$

Analogicznie wyznaczamy równanie prostej l_2. Przechodzi ona między innymi przez punkty $(0,2)$ oraz $(2,0)$. Zatem

$$y-2=\frac{0-2}{2-0}\cdot(x-0)$$

Czyli

$$l_2: y=-x+2$$

Zatem powyższy rysunek przedstawia interpretację geometryczną układu równań złożonego z równań prostych l_1 oraz l_2

$$\begin{cases} y=x+4 \\ y=-x+2 \end{cases}$$

Zauważmy ponadto, że układ równań zbudowany z równań tych prostych ma dokładnie jedno rozwiązanie, bo proste przecinają się. Z wykresu możemy odczytać rozwiązanie układu (współrzędne punktu przecięcia)

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$$

<u>Zadanie 31. (2 pkt.)</u>

Uzasadnij, że jeśli ciąg (a_n) jest geometryczny, to jego suma n-początkowych wyrazów tego ciągu nie może wyrażać się wzorem $S_n=n^2+8$.

<u>Rozwiązanie</u>

<u>Pierwszy sposób</u>

> Ogólnie: Niech (a_n) będzie ciągiem geometrycznym o ilorazie q i pierwszym wyrazie a_1. Wtedy
>
> - suma n-początkowych wyrazów tego ciągu wyraża się wzorem
>
> $S_n=a_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$
>
> - wzór na n-ty wyraz tego ciągu ma postać
>
> $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$

Zatem

$$S_n=a_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$$

Widzimy, że w ogólnej postaci wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego n nie występuje jako podstawa postęgi (występuje tylko w wykładniku). Wynika stąd, że S_n NIE może wyrażać się wzorem $S_n=n^2+8$.

Drugi sposób

> Ogólnie: Niech (a_n) będzie ciągiem, a S_n sumą n-początkowych wyrazów tego ciągu . Wtedy
>
> $a_1 = S_1 \, , a_n = S_n - S_{n-1}$ dla $n > 1$

Wyznaczmy wzór ciągu:

$a_1 = S_1 = 9, \ a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + 8 - (n-1)^2 - 8 = 2n - 1$ dla $n > 1$.

Wtedy $a_1 = 9, a_2 = 3, a_3 = 5$. Liczby te NIE tworzą ciągu geometrycznego, ponieważ nie spełniają własności $a_2^2 = a_1 \cdot a_3$.

Zadanie 32. (2 pkt.)

Uzasadnij, jeśli funkcja f jest malejąca i $f(2) + f(6) = 6$, to $f(3) + f(10) < 6$.

Rozwiązanie

> Ogólnie:
>
> Niech $D \subset \mathbb{R}$ i funkcja $f: D \to \mathbb{R}$.
>
> f – malejąca $\overset{def.}{\iff} \bigwedge_{x_1, x_2 \in D} x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$
>
> Czyli funkcja jest rosnąca wtedy i tylko wtedy na podstawie definicji, gdy wraz ze wzrostem argumentu wartości funkcji maleją.

W warunkach zadania, wobec faktu, że f jest funkcją mamy zatem

$$3 > 2 \Rightarrow f(3) < f(2)$$

oraz

$$10 > 6 \Rightarrow f(10) < f(6)$$

Dodając uzyskane nierówności stronami otrzymujemy

$$f(3) + f(10) < f(2) + f(6)$$

Skoro

$$f(2) + f(6) = 6$$

Więc

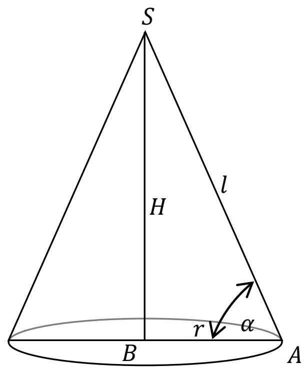
$$f(3) + f(10) < 6$$

Zadanie 33. (5 pkt.)

Pole powierzchni podstawy stożka wynosi 150π. Tworząca stożka jest nachylona do podstawy pod kątem 60^0. Wyznacz objętość stożka.

Rozwiązanie

> Ogólnie:
>
> - Objętość stożka $V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H$
> - Pole koła $P_p = \pi \cdot r^2$



Zauważmy, że w warunkach zadania, zgodnie z oznaczeniami na rysunku obok, trójkąt ABS jest prostokątny. Długość przyprostokątnej AB tego trójkąta jest równa długości promienia podstawy stożka

$$|AB| = r$$

Z drugiej strony znamy pole podstawy. Ze wzoru na pole koła uzyskujemy

$$150 \cdot \pi = \pi \cdot r^2$$

Czyli

$$r = 5\sqrt{6} \vee r = -5\sqrt{6}$$

Z interpretacji geometrycznej odrzucamy rozwiązanie ujemne. Zatem

$$|AB| = r = 5\sqrt{6}$$

Aby obliczyć objętość potrzebujemy znaleźć długość wysokości stożka H.

Zwróćmy uwagę, że w trójkącie ABC znamy długość przyprostokątnej $|AB| = 5\sqrt{6}$ oraz kąt przy wierzchołku A

$$\alpha = 60°$$

Dla wyznaczenia wysokości stożka, której długość równa się długości przyprostokątnej BS skorzystamy z funkcji tangens kąta α

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{|BS|}{|AB|}$$

Wstawiając znane wielkości uzyskujemy

$$\mathrm{tg}(60°) = \frac{H}{r}$$

Czyli

$$\sqrt{3} = \frac{H}{5\sqrt{6}}$$

Wyznaczamy niewiadome H

$$H = 5 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} = 5 \cdot \sqrt{18} = 5 \cdot \sqrt{9 \cdot 2} = 15\sqrt{2}$$

W rezultacie objętość stożka

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 150\pi \cdot 15 \cdot \sqrt{2} = 750\pi\sqrt{2}$$

8 Przykładowe zadania -„e-matura”

Dane jest równanie kwadratowe
$ax^2 + ax + c = 0$, które ma dwa różne pierwiastki i a>0. Wtedy

A. Średnia arytmetyczna pierwiastków równania jest równa ____.

B. a ____ ____ $\cdot c$

[Źródło-Próbna „e-matura” – kwiecień 2012 – zadanie 32]

Dany jest trójkąt równoramienny, którego podstawa ma długość x (x>0). Funkcja wartości pola powierzchni trójkąta wyraża się wzorem $f(x) = \frac{x^2}{3}$. Wtedy

A. Funkcja wartości wysokości trójkąta w zależności od długości podstawy trójkąta x wyraża się wzorem:

$g(x) =$ ____ $\cdot \frac{x}{3}$

B. Funkcja wartości obwodu trójkąta w zależności od długości podstawy x wyraża się wzorem:

$h(x) =$ ____ $\cdot \frac{x}{3}$

[Źródło-Próbna „e-matura”– kwiecień 2012 – zadanie 33]

Rozważmy trójkąt ABC, którego długości boków są kolejnymi liczbami naturalnymi.

A. Wtedy $k >$ [▾] , gdzie k oznacza długość najkrótszego boku.

B. [▾]

o własności podanej w zadaniu.

- Istnieje dokładnie jeden trójkąt prostokątny
- Istnieją dokładnie dwa trójkąty prostokątne
- Istnieją dokładnie trzy trójkąty prostokątne
- Istnieje nieskończenie wiele trójkątów prostokątnych
- Nie istnieje trójkąt prostokątny

[Źródło-Próbna „e-matura”– kwiecień 2012 – zadanie 34]

Podstawą ostrosłupa jest kwadrat, którego długość boku jest równa $2\sqrt{2}$. Krawędź boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 45^0 . Wtedy

A. Długość wysokości ostrosłupa jest równa: [ ]

B. Objętość ostrosłupa wynosi: [ ] $\cdot 3^{-1}$

C. $\cos^2 \alpha =$ [ ] , gdzie α jest kątem nachylenia krawędzi bocznej do krawędzi podstawy.

[Źródło-Próbna „e-matura”– marzec 2012 – zadanie 29]

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n), dla którego

$S_n = n^2 + 7n$ oraz $a_2 = 10$.

Wtedy

A. $a_1 =$ ☐

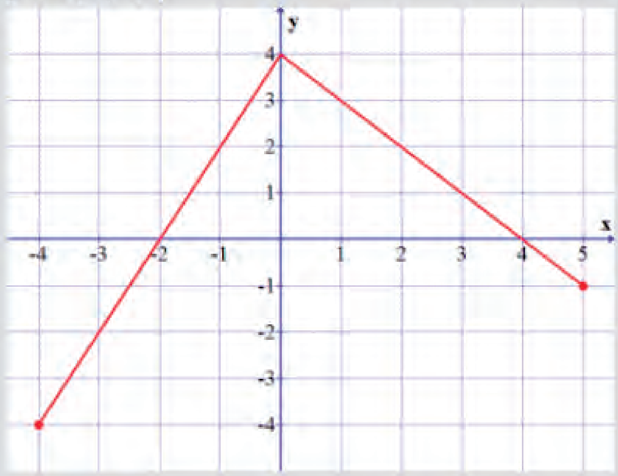
B. $a_n =$ ☐ $n+$ ☐

C. Suma wyrazów od jedenastego do dwudziestego jest równa: ☐

[Źródło-Próbna „e-matura”– – marzec 2012 – zadanie 32]

Na poniższym rysunku dany jest wykres funkcji

$y = f(x)$.



Wtedy

A) Zbiór wszystkich wartości

funkcji f to przedział $< -4,$ ☐ $>$

B) Funkcja f ☐

- nie posiada miejsc zerowych
- posiada jedno miejsce zerowe
- posiada dwa miejsca zerowe
- posiada trzy miejsca zerowe
- posiada więcej niż trzy miejsca zerowe

C) $f($ ☐ $) = -2$

D) $f(1) =$ ☐

E) Funkcja f osiąga największa warto

równą ☐.

[Źródło-Próbna „e-matura”– marzec 2012 – zadanie 33]

Uzupełnij treść i dowód twierdzenia.

Dany jest wielomian $W(x) = (2x-1)^{20} + 3$.
Wtedy suma wszystkich współczynników wielomianu jest równa $\boxed{}$.

Dowód.
Zauważmy, że

$W(\boxed{}) = \boxed{}$.

Stąd suma współczynników jest równa $\boxed{}$.

[Źródło-Próbna „e-matura”– marzec 2012 – zadanie 34]

Rozwiązaniem równania $\frac{x^2-3x+2}{x-1} = -3$ jest:

A) Zbiór pusty

B) Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych

C) Jest jeden pierwiastek: x_1 =

D) Są dwa pierwiastki: x_1 = i x_2 =

[Źródło-Próbna „e-matura”– grudzień 2011 – zadanie 29]

Dany jest kwadrat ABCD. $A(3,2)$, $B(6,6)$, $C(10,3)$.

Na rysunku zaznacz punkt D

Wyznacz współrzędne punktu P, będącego przecięciem się przekątnych kwadratu:

$P = (\_\_\_ / 2, \_\_\_ / 2)$

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty B i C:

$y = (\_\_\_ / 4)x + 10 \frac{\_\_\_}{2}$

Oblicz długość odcinka $|AB| =$ ___

[Źródło-Próbna „e-matura”– grudzień 2011 – zadanie 31]

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n), a różnica tego ciągu wynosi r. Niech $b_n = a_{2n} + 3$. Wtedy ciąg (b_n):

jest { ○ arytmetyczny, ○ geometryczny }

jego { ○ różnica, ○ iloraz } wynosi ___ r

$b_1 = a_{\_\_\_} + \_\_\_$

[Źródło-Próbna „e-matura”– – grudzień 2011 – zadanie 33]

9 Projekt -„e-matura”

9.1 Wstęp

Ponad 10 lat temu w Polsce wprowadzono system egzaminów zewnętrznych. Do dnia dzisiejszego egzaminy sprawdzane są metodą tradycyjną. Uczniowie piszą egzaminy na przygotowanych arkuszach, następnie egzaminy sprawdzane są przez egzaminatorów. Obecnie Centralna Komisja Egzaminacyjna rozpoczęła próby wdrażania tzw. e-oceniania. System e-oceniania, to taki system, który umożliwia sprawdzanie prac egzaminacyjnych przez egzaminatora nie poprzez przeglądanie papierowych dokumentów, lecz na ekranie monitora. System taki należy rozumieć, jako aplikację webową zapewniającą autoryzowany dostęp przez Internet. Dzięki takiemu rozwiązaniu możliwe jest sprawne organizowanie pracy dla egzaminatorów. E-ocenianie umożliwia przejście od punktowania przez egzaminatorów całych prac obejmujących od kilku do kilkudziesięciu zadań do specjalizacji w ocenianiu poszczególnych zadań. System e-oceniania został już na dużą skalę wprowadzony między innymi w Wielkiej Brytanii czy Stanach Zjednoczonych. Doświadczenia, jakie zdobyły w tym obszarze cztery duże komisje egzaminacyjne w tych krajach (AQA, OCR i EDEXCEL – Wielka Brytania; ETS – Stany Zjednoczone) pozwalają stwierdzić, że przejście od oceniania tradycyjnego do e-oceniania wiąże się nie tylko ze zmianą organizacji procesu przygotowania prac do oceniania, ale również poprawia jego jakość.

Projekt E-matura jest kolejnym krokiem rozwoju egzaminów zewnętrznych w stosunku do e-oceniania. Takie rozwiązania do tej pory nie funkcjonują ani w Europie, ani na Świecie na taką skalę. Przez realizację tego projektu chcemy pokazać, że pierwsze próby wdrożenia mogą funkcjonować w Polsce już za cztery lata. Decyzja będzie należała do MEN. Pierwszy krok wdrożenia e-matury jest możliwy w tzw. dodatkowym terminie matury – tzw. Próbna matura, w którym w Polsce zdaje około 2 tysięcy uczniów (rok 2011) ze wszystkich przedmiotów (około 150 z matematyki).

9.2 Czym jest e-matura?

Projekt e-matura stanowi nowoczesny i innowacyjny system egzaminacyjny w skali kraju, który pozwala rozwiązywać dotychczasowe problemy, jakie występowały podczas przeprowadzania egzaminów, w nowy sposób. System pozwala na przeprowadzanie egzaminów maturalnych z matematyki z wykorzystaniem komputerów podłączonych do Internetu. Przebieg egzaminu jest bardzo zbliżony do zwykłego egzaminu maturalnego, w którym uczniowie zasiadają o ustalonej godzinie przed komputerami i przystępują jednocześnie do pisania egzaminu. Po wystartowaniu egzaminu przez ucznia uzyskuje on dostęp do pytań egzaminacyjnych zaprezentowanych w nowoczesnej multimedialnej formie. W przypadku, gdy uczeń nie do końca rozumie, w jaki sposób dany typ zadania ma zostać rozwiązany może skorzystać z kontekstowej pomocy przypisanej do każdego pytania.

Użytkownikami systemu e-matura będą docelowo uczniowie klas maturalnych, którzy będą mogli wykorzystać umieszczane w systemie materiały i egzaminy do podnoszenia wiedzy i lepszego przygotowania do egzaminu urzędowego. System został przygotowany w taki sposób, aby mogli z niego korzystać uczniowie również z miejscowości, gdzie dostęp do Internetu jest na słabszym poziomie (częste przerwania połączenia, słaba przepustowość łączy) – poprzez wykorzystanie aplikacji typu „grupy klient". Dzięki temu każdy ze zdających egzamin na platformie e-matura ma jednakowe szanse i zdaje na takich samych zasadach bez względu, z jakiej miejscowości przystępuje do udziału w projekcie. Ponadto system zakłada wsparcie dla osób niepełnosprawnych poprzez dostosowanie interfejsu użytkownika do osób niedowidzących.

Zadania egzaminacyjne można sklasyfikować, jako tzw. zamknięte i otwarte. Zadanie zamknięte składa się z dystraktorów (wzorców błędnych odpowiedzi) i jednego lub kilku werstraktorów (wzorców prawidłowych odpowiedzi). W zadaniach otwartych samodzielnie formułuje się i zapisuje odpowiedzi. Stosowanie zadań zamkniętych jest wygodne pod kątem tworzenia systemu automatycznego oceniania, zarówno w przypadku skanowania formularzy z rozwiązaniami jak i systemów egzaminów online.

Projekt e-matura jest budowany w sposób na tyle uniwersalny, że jest w stanie obsłużyć egzaminy również z innych przedmiotów takich jak fizyka czy geografia. System może służyć również do bieżącej nauki wspierając nauczycieli i uczniów podczas całego procesu dydaktycznego. Ponieważ e-matura jest systemem informatycznym, który wykorzystując zaawansowane algorytmy sprawdzania pytań może mocno uprościć i wspomóc pracę nauczyciela, dzięki czemu uczniowie będą mogli rozwiązywać samodzielnie większą ilość zadań i na bieżąco sprawdzać swoje możliwości bez potrzeby sprawdzania wszystkich prac przez nauczyciela.

Nauczyciel ma również dostęp do raportów tworzonych automatycznie w systemie e-matura, dzięki czemu może przez cały czas śledzić postępy danego ucznia i sprawdzać, w jakich dziedzinach uczeń ma problemy i musi się jeszcze poprawić. Aplikacja umożliwia bardzo rozbudowany system raportowania. Oprócz standardowego wyniku logowane są również takie dane jak ilość wejść ucznia w dane pytanie, czas rozwiązywania danego pytania, jak często uczeń korzystał z pomocy kontekstowej podczas rozwiązywania danego pytania. Dzięki takim informacjom zarówno nauczyciele jak i osoby przygotowujące egzaminy maturalne mogą jeszcze lepiej dostosowywać układane pytania, aby zostały jak najlepiej zrozumiane przez zdających egzamin.

Projekt e-matura jest innowacyjnym podejściem do tematu egzaminowania uczniów na dużą skalę z wykorzystaniem systemu opartego o sieć Internet. Zastosowanie projektu do przeprowadzenia egzaminu maturalnego niesie za sobą pewne wymagania dotyczące daty i godziny, w której taki egzamin się odbywa. Aby zapewnić równość i jednolite zasady zdawania dla wszystkich uczestników projektu system musi umożliwiać jednoczesne przystąpienie do egzaminu przez bardzo dużą liczbę użytkowników. Aby sprostać takim wymaganiom system został zaprojektowany z wykorzystaniem rozproszonej infrastruktury zarówno od strony bazy danych jak i aplikacji udostępnianej użytkownikom.

Baza danych jest kluczowym elementem projektu, który zapewnia dostęp do tajnych aż do chwili startu egzaminu pytań oraz miejsca, w którym są odkładane udzielone przez użytkowników odpowiedzi. Baza danych została zbudowana z wykorzystaniem silnika bazy danych Microsoft SQL Server 2008 R2. Aby zapewnić odpowiednią szybkość działania został do tego celu zbudowany klaster złożony z dwóch fizycznych serwerów bazodanowych podłączonych poprzez sieć SAN do współdzielonej macierzy opartej na twardych dyskach z interfejsem SAS. Serwery bazodanowe zostały odseparowane fizycznie od sieci Internet i są dostępne tylko za pośrednictwem aplikacji udostępnianej przez serwery aplikacyjne. Zastosowanie technologii klastrowej zapewnia dużą wydajność oraz bezpieczeństwo – w przypadku fizycznej awarii jednego z serwerów drugi z powodzeniem przejmuje jego rolę i serwuje dalej usługi tak, aby użytkownik końcowy nawet się nie zorientował, że wystąpiły jakieś problemy techniczne. Ponieważ w bazie danych odkładane są wszelkie informacje o aktywności użytkownika podczas egzaminu (odpowiedzi – nawet jeśli użytkownik zmieni odpowiedź, każda udzielona przez niego odpowiedź jest oddzielnie zapisywana do późniejszej analizy, czas udzielania odpowiedzi, ilość wejść w dane pytanie, informacje o korzystaniu z kontekstowej pomocy technicznej itd.) wymagana jest duża wydajność działania silnika bazodanowego. Podczas testów projektu przeprowadzonych w kwietniu 2011, w których wzięło udział 2349 uczniów ze szkół z woj. łódzkiego udało się zmierzyć obciążenie bazy danych na poziomie około 10-15% wykorzystania sprzętu, który został zakupiony na potrzeby projektu. Na podstawie testów syntetycznych przeprowadzonych z użyciem serwerów, które przeprowadzały kontrolowane ataki DDOS na serwery bazodanowe projektu e-matura wynika, że zakupiony sprzęt powinien sprostać liczbie około 25 do 30 tysięcy (dla porównania liczba maturzystów podchodzących pierwszy raz do matury w woj. łódzkim z 2011 wynosiła 22315)[1] jednoczesnych użytkowników odwołujących się do bazy danych przez aplikację e-matura. Biorąc pod uwagę wyniki testów syntetycznych oraz wprowadzane cały czas optymalizacje w systemie zakupiony na potrzeby projektu sprzęt powinien sprostać wymaganiom przeprowadzenia egzaminu maturalnego dla wszystkich maturzystów z województwa łódzkiego. Zwiększanie liczby użytkowników będzie wymagało inwestycji w rozbudowę sprzętu.

Aplikacja e-matura jest interfejsem użytkownika, przez który uczniowie komunikują się z bazą danych pobierając pytania oraz udzielając na nie odpowiedzi. Aplikacja została zbudowane w oparciu o model tzw. grubego klienta z wykorzystaniem technologii Silverlight 4.0. Zastosowanie takiego modelu umożliwiło zbudowanie dużo bezpieczniejszej aplikacji, a także znaczące zwiększenie wygody korzystania z aplikacji przez zdających egzamin uczniów. Aplikacja jest uruchamiana z poziomu przeglądarki WWW i z punktu widzenia użytkownika cały czas działa jak strona sieci web. Jest to jednak aplikacja w modelu grubego klienta, co oznacza, że cała aplikacja jest pobierana na lokalny komputer użytkownika i działa całkowicie autonomicznie. Interfejs użytkownika jest tak samo responsywny dla użytkowników podłączonych do Internetu łączem o dużej przepustowości jak i dla tych, którzy mają dużo słabsze łącza, czego nie dałoby się osiągnąć przy wykorzystaniu standardowej strony WWW, gdyż użytkownicy ze słaby podłączeniem do Internetu dużo dłużej musieliby czekać na przeładowywanie się stron z kolejnymi pytaniami. Aplikacja e-matura niweluje ten problem, przez co znacząco zwiększa równość szans przy zdawaniu egzaminu przez wszystkich użytkowników. Aplikacja już na samym początku pobiera wszystkie pytania i odwołuje się do serwera tylko w przypadku udzielania odpowiedzi na dane pytanie. Jeśli nawet łączność z Internetem zostanie przerwana na chwilę odpowiedzi użytkownika są zapisywane w pamięci podręcznej aplikacji i gdy tylko łączność z serwerem zostaje odzyskana aplikacja wysyła wszystkie dane w tle, nie wpływając w żaden sposób na pracę użytkownika.

[1] Dane z OKE Łódź

Środowisko fizyczne, które jest wykorzystywane do serwowania aplikacji e-matura zostało stworzone w oparciu o 4 serwery wykorzystujące system operacyjny Microsoft Windows 2008 R2. Serwerem, który serwuje aplikację dla użytkowników końcowych oraz pośredniczy w komunikacji pomiędzy aplikacją, a serwerem bazy danych jest IIS w wersji 7.5. Ponadto jest jeszcze jeden serwer pełniący rolę tzw. „load balancer'a", do którego kierowana są wszystkie odwołania użytkowników, którzy uruchamiają aplikację. Serwer ten kieruje zapytania użytkowników do serwerów udostępniających aplikację w taki sposób, aby jak najlepiej rozłożyć obciążenie pomiędzy 4 serwery aplikacyjne zapewniając w ten sposób maksymalną wydajność serwowania danych. Wykorzystanie infrastruktury rozproszonej zwiększa ponadto bezpieczeństwo korzystania z aplikacji poprzez zabezpieczenie przed awarią sprzętową. W przypadku awarii jednego z serwerów zapytania, które były do niego kierowane są przekierowywane do pozostałych serwerów, które automatycznie przejmują jego rolę.

Projekt e-matura został zbudowany w sposób innowacyjny, aby jak najlepiej spełnić wymagania stawiane przed egzaminami maturalnymi z matematyki i nie tylko. Projekt jest budowany w taki sposób, aby był jak najbardziej uniwersalny i mógł być wykorzystywany po wprowadzeniu pewnych przeróbek również w zastosowaniu do innych przedmiotów.

E-Matura jest systemem egzaminacyjnym czasu rzeczywistego pozwalająca na przeprowadzenie wybranego egzaminu dla dużej próbki uczniów w jednym czasie. Dzięki zastosowaniu nowoczesnych rozwiązań z dziedziny informatyki system pozwala na przeprowadzenie interaktywnego egzaminu dla kilkudziesięciu tysięcy osób. System został stworzony na potrzeby przeprowadzenia egzaminu maturalnego z matematyki jednak jest elastyczna architektura pozwala na dostosowanie go do każdej innej dziedziny nauki czy sztuki.

9.3 Cele projektu

Zakłada się, że celem głównym projektu jest dostarczenie innowacyjnego narzędzia służącego do dokonania zmian w metodach nauczania i uczenia się, będącego jednocześnie narzędziem pozwalającym na weryfikację zdobytej wiedzy, dzięki zastosowaniu możliwości sprawdzania poziomu zdobytej wiedzy za pośrednictwem interaktywnej platformy i zgromadzonego tam materiału jak, również statystycznej analizy zbieranych wyników.

Przy założeniu celu głównego sprecyzowane zostały następujące cele szczegółowe projektu:

- *Dostarczenie odbiorcom możliwości na wyrównania lub podniesienia poziomu posiadanej wiedzy w zakresie matematyki, jak również zweryfikowanie jej i ocenienie*

Wskaźnikiem osiągnięcia celu będzie odsetek uczniów, którzy podnieśli swój poziom posiadanej wiedzy z matematyki.

Źródłem danych będzie przeprowadzenie badań podłużnych wśród użytkowników platformy. Te same osoby podchodzić będą do egzaminu z matematyki za pośrednictwem platformy e-matura, co najmniej dwa razy. Pozwoli to porównać osiągane przez nie wyniki i stwierdzić, w jakim stopniu podniosły one swój poziom wiedzy i umiejętności z zakresu matematyki.

Wartość docelowa: Cel zostanie osiągnięty, jeżeli zostanie stwierdzone, że co najmniej 960 uczniów podniesie swój poziom wiedzy z matematyki.

- *Dostarczenie użytkownikom możliwości wykorzystania innowacyjnego narzędzia celem podniesienia atrakcyjności prowadzonych form nauczania, a tym samym przełamywania istniejących w tym zakresie stereotypów.*

Wskaźnikiem osiągniecia celu będzie stopień wykorzystania platformy e-matura zarówno przez nauczycieli jak i uczniów.

Źródłem danych będzie analiza wyników badań ankietowych przeprowadzonych w etapie testowania projektu.

Wartość docelowa: cel zostanie osiągnięty, jeżeli co najmniej 32 placówki i 64 nauczycieli zdeklaruje, że uzyskała innowacyjne możliwości wykorzystania platformy e-matura.

- *Dostarczenie użytkownikom instytucjonalnym, przy zachowaniu poufności, możliwości zbierania i analizowania danych*

Wskaźnikiem osiągnięcia celu będzie odsetek dyrektorów/nauczycieli, którzy będą wykorzystywać gromadzone po każdym egzaminie dane dotyczące osiąganych przez uczniów wyników.

Źródłem danych będzie analiza wyników badań ankietowych przeprowadzonych w gronie dyrektorów i nauczycieli ze szkół uczestniczących w projekcie.

Wartość docelowa: cel zostanie osiągnięty, jeżeli co najmniej 64 dyrektorów/nauczycieli z 32 placówek zadeklaruje chęć wykorzystywania zgromadzonego dzięki platformie materiału.

- *Otwarcie się szkół ponadgimnazjalnych na działania innowacyjne doprowadzające do udostępniania gromadzonej na uczelniach wyższych wiedzy*

Wskaźnikiem osiągnięcia celu będzie odsetek szkół zainteresowanych udziałem w projekcie.

Źródłem danych będzie analiza wyników badań ankietowych przeprowadzonych zarówno wśród szkół biorących udział w etapie testowania jak również szkół losowo wybranych, które nie wzięły udziału w tym etapie.

Wartość docelowa: cel zostanie osiągnięty, jeżeli co najmniej 32 placówki zadeklarują chęć wzięcia udziału w projekcie.

- *Zwiększenie zainteresowania uczniów szkół ponadgimnazjalnych kontynuacją kształcenia na kierunkach o kluczowym znaczeniu dla gospodarki opartej na wiedzy*

Wskaźnikiem osiągnięcia celu będzie odsetek uczniów biorących udział w badaniu ankietowym, który uzna, że wprowadzanie i używanie narzędzi typu platforma e-matura korzystnie wpływa na popularyzację przedmiotów ścisłych i tym samym na zwiększenie liczby uczniów zainteresowanych kontynuacją nauki na kierunkach o kluczowym znaczeniu dla gospodarki opartej na wiedzy.

Źródłem danych będzie analiza wyników badań ankietowych przeprowadzonych w gronie użytkowników platformy e-matura. Badania te przeprowadzone będą dla każdego uczestnika dwukrotnie: najpierw podczas badania w klasie przedmaturalnej a później w klasie maturalnej, dlatego można będzie porównać odpowiedzi przed korzystaniem z platformy jak i po e-egzaminie.

Wartość docelowa: Cel zostanie osiągnięty, jeśli 20% biorących udział w ankiecie uzna, że wprowadzanie i używanie narzędzi typu platforma e-matura korzystnie wpływa na popularyzację przedmiotów ścisłych i tym samym na zwiększenie liczby uczniów zainteresowanych kontynuacją kształcenia na kierunkach o kluczowym znaczeniu dla gospodarki opartej na wiedzy.

9.4 W jaki sposób nasz projekt może pomóc?

Elektroniczna forma przeprowadzania egzaminów rozwiązuje wiele problemów.

1. Przede wszystkim **zmniejszone zostaną koszty przeprowadzenia egzaminu** gdyż poza jednorazowym wydatkiem na sprzęt, oprogramowanie i jego utrzymanie następne egzaminy mogą się już odbywać **przy minimalnych kosztach eksploatacyjnych**. Ponadto znikają też koszty, jakie należy ponieść na opłacenie nauczycieli sprawdzających prace egzaminacyjne,
2. **Dostarczenie pytań do jednostek egzaminujących jest w pełni bezpieczne i poufne** automatyczne i działa na zasadzie szyfrowania kluczem asymetrycznym pochodzącym z certyfikatów wystawionych przez autoryzowane jednostki certyfikujące. Dzięki takiemu podejściu pytania docierają bezpiecznie do odbiorcy bez możliwości ich „wycieku". Serwery z danymi są włączane do sieci dopiero w momencie uruchomienia e-matury. Co eliminuje wcześniejsze włamania hakerów.
3. Elektroniczna matura pozwala uzyskać **natychmiastowy wynik,** ponieważ system według zadanych parametrów dokona analizy i sprawdzenia prac dostarczając do ucznia wynik zaraz po zakończonym egzaminie dając egzaminowanej osobie o wiele większy komfort psychiczny.
4. Elektroniczna matura **znacząco ogranicza możliwość „ściągania"**.
5. Kolejnym elementem, na jaki pozwala elektroniczne egzaminowanie jest **zbieranie danych statystycznych o czasie trwania i liczbie powtórzeń poszczególnych czynności** w trakcie rozwiązywania egzaminu. Co umożliwia doskonalenie zadań ulepszanie dydaktyki, gdyż każdy nauczyciel otrzyma **dane, wskazujące w jakim obszarze uczeń ma największe braki, aby można było je jeszcze odpowiednio wcześnie skorygować**. Uzyskanie takich informacji z matur tradycyjnych nie jest możliwe. W systemie gromadzone będą wyniki umożliwiające prowadzenie badań statystycznych przez użytkowników produktu, a odbiorcom wskażą obszary, w których występują braki wiedzy potrzebnej do zdania egzaminu maturalnego z matematyki. Przeprowadzenie egzaminu maturalnego w wersji elektronicznej z wykorzystaniem budowanego systemu informatycznego daje dodatkowe możliwości zbierania i analizy danych. w przeprowadzonej w kwietniu 2011 próbnej e-maturze system egzaminacyjny zapisywał m. in. następujące informacje:
   1) Liczbę prób rozwiązania danego zadania;
   2) Sumaryczny czas spędzony przez ucznia nad danym zadaniem (razem we wszystkich próbach);
   3) Oczywiście liczba punktów uzyskanych za zadanie. w przypadku braku punktów za zadanie system rozróżniał sytuacje:

   a) uczeń próbował rozwiązywać i uzyskał 0 punktów,

   b) uczeń nie podjął próby podania odpowiedzi.

Czas spędzony przez ucznia nad danym zadaniem jak i liczbę prób rozwiązania danego zadania można traktować, obok liczby punktów uzyskanych za zadanie, jako swoiste miary trudności zadania. Patrzenie na uzyskaną przez uczniów punktację z uwzględnieniem w/w danych oraz np. informacji na temat liczby uczniów, którzy nie podjęli próby rozwiązania zadania pozwala wyciągnąć o wiele więcej wniosków niż byłoby to możliwe tylko w oparciu samą punktację.

Informacje te są cenne zarówno dla egzaminatorów jak i nauczycieli oraz uczniów.

Na podstawie przeprowadzonej krótkiej analizy nasuwają się nam następujące wnioski:

- skumulowana informacja o punktacji, czasie rozwiązania i liczbie powrotów do danego zadania mogą stanowić cenne wskazówki dla nauczyciela i ucznia. Nawet zadowalająca punktacja za zadanie przy dużej liczbie powrotów do zadania i długim czasie rozwiązania mogą świadczyć o zbyt słabym wyćwiczeniu i ugruntowaniu danej partii materiału;

- fakt braku podejmowania próby rozwiązania danego zadania np. na egzaminie maturalnym mimo zgodności treści zadania z podstawą programową powinien być sugestią dla egzaminatorów , aby być może zmienić formę zadania;
- informacje o średnim czasie rozwiązania danego zadania (szerzej – zadania danego typu) pomogą lepiej dopasować czas egzaminu do rzeczywistego poziomu trudności zadań (tzn. poziomu trudności z punktu widzenia ucznia).[2]

6. **wykorzystanie infrastruktury informatycznej szkół**
7. **ułatwienie dostępu osób niepełnosprawnych do egzaminów**

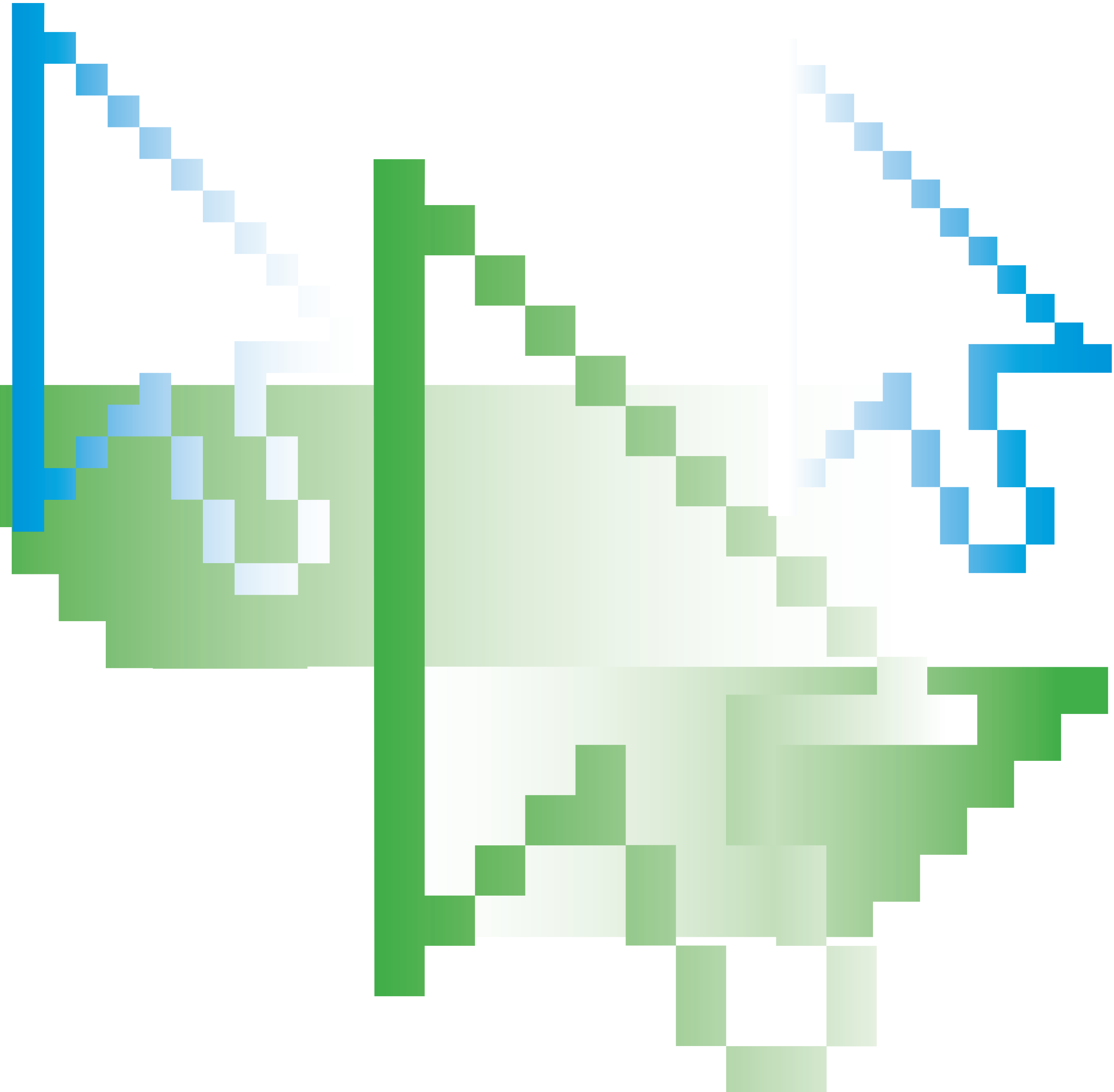
9.5 Grupy, które mogą korzystać ze wsparcia

Założenia projektu wskazują, iż finalnie z wypracowanej, przetestowanej i udostępnionej platformy będą korzystali uczniowie klas maturalnych z terenu województwa łódzkiego przystępujący do egzaminu maturalnego z matematyki. Jak zostało wspomniane wcześniej na etapie testowania do grupy docelowej zostaną włączeni także uczniowie klas przedostatnich (drugich w przypadku liceum, trzecich w przypadku technikum)

Platforma zostanie udostępniona również uczniom z niepełnosprawnościami. Grupa docelowa to również wszyscy uczniowie szkół ponadgimnazjalnych, którzy wobec braku możliwości korzystania z zajęć dodatkowych lub też chcący na bieżąco weryfikować posiadaną wiedzę dzięki oferowanemu, innowacyjnemu wsparciu będą mogli przeciwdziałać dysproporcjom występującym w poziomie przekazywanej w szkole wiedzy jak również w nierównym dostępie do zajęć pozalekcyjnych.

[2] Badania własne, raport w załączeniu (załącznik 4)

Książka przygotowana w ramach projektu „E-matura", współfinansowanego przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego, Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki, Priorytet III Wysoka jakość systemu oświaty, Działanie 3.3 Poprawa jakości kształcenia, Poddziałanie 3.3.4 Modernizacja treści i metod kształcenia – projekty konkursowe.



ISBN 978-83-937551-3-4

Książka jest dystrybuowana bezpłatnie