MATEMATYKA
scenariusze lekcji
dla szkół ponadgimnazjalnych w zakresie rozszerzonym

część III

„Nauka z WAT jest fascynująca!"

projekt nr WND-POKL.03.03.04-00-110/12

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

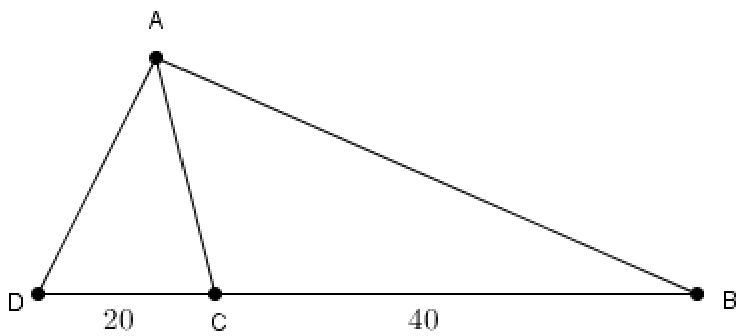
scenariusz lekcji nr 1

1. Przedmiot: **Matematyka**
2. Dział programowy: **Planimetria**
3. Temat: **Taka sama podstawa, taka sama wysokość.**
4. Klasa: **Klasa II**
5. Zgodność z podstawą programową: **Uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto**
   - **uczeń tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność.**
6. Pomoce (środki) dydaktyczne
   - **stanowiska komputerowe (lub komputer nauczyciela z tablicą interaktywną lub rzutnikiem multimedialnym),**
   - **bezpłatne oprogramowanie GeoGebra wspomagające nauczanie matematyki (http://www.geogebra.org/cms/pl/download/)**
7. Cele: Uczeń:
   - stosuje wzory na pole trójkąta,
   - wskazuje wspólną wysokość trójkątów,
   - wskazuje wspólną podstawę trójkątów,
   - wyciąga wnioski na podstawie zrealizowanych przykładów,
   - zapisuje uzyskane wnioski,
   - stosuje uzyskane wiadomości do rozwiązywania zadań.,
   - posługuje się programem GeoGebra (lub arkuszem kalkulacyjnym).
8. Metody nauczania: **Praca z komputerem, elementy wykładu, ćwiczenia**
9. Formy pracy: **Praca indywidualna i w grupach**

Zajęcia rozpoczynamy od przykładów.

Przykład 1.

Dany jest trójkąt *ABD*, w którym $|BC| = 40$ i $|CD| = 20$, jak na rysunku.



Oblicz stosunki: $\frac{[ABC]}{[ACD]}$ i $\frac{[ABC]}{[ABD]}$. ($[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$.)

Rozwiązanie

Wysokość poprowadzona z wierzchołka *A* jest wspólną wysokością trójkątów *ACD* , *ABC* i *ABD*. Oznaczmy jej długość przez *h*. Wówczas

$$[ABC] = \frac{|BC| \cdot h}{2} = \frac{40 \cdot h}{2} = 20h$$

i

$$[ACD]=\frac{|CD|\cdot h}{2}=\frac{20\cdot h}{2}=10h,$$

skąd

$$\frac{[ABC]}{[ACD]}=\frac{20h}{10h}=2.$$

Zauważmy ponadto, że

$$\frac{[ABC]}{[ACD]}=\frac{|BC|}{|CD|}.$$

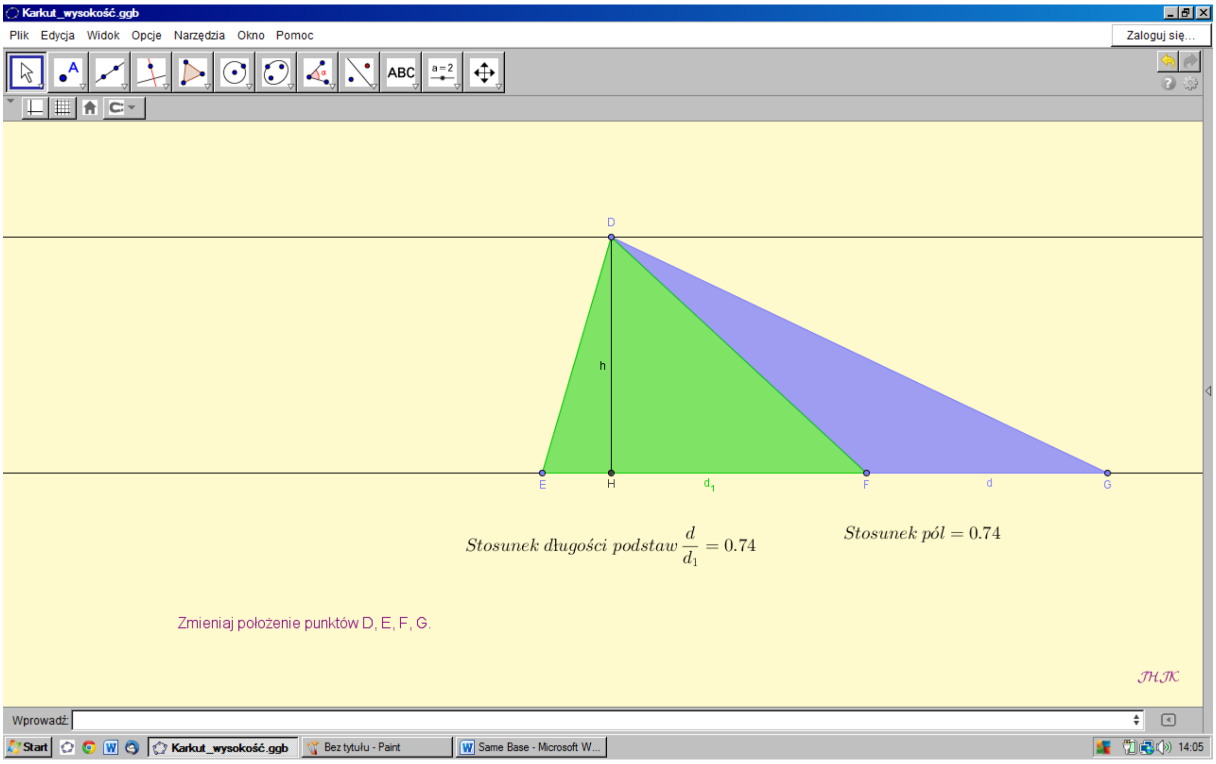
Postępując podobnie, otrzymujemy:

$$\frac{[ABC]}{[ABD]}=\frac{\frac{|BC|\cdot h}{2}}{\frac{|BD|\cdot h}{2}}=\frac{|BC|}{|BD|}=\frac{2}{3}.$$

Uwaga

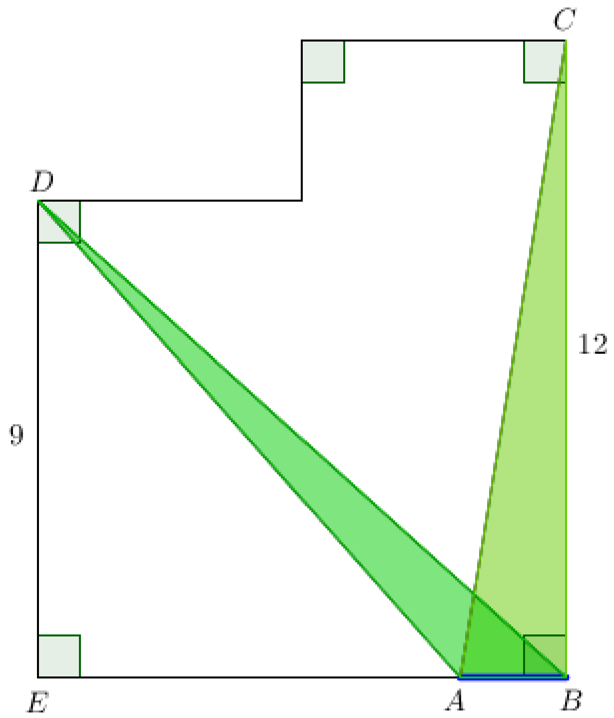
Kluczowym etapem rozwiązania jest zauważenie, że trzy trójkąty mają wspólną wysokość. W każdym przypadku, stosunek pól powierzchni trójkątów jest równy stosunkowi długości podstaw tych trójkątów, na które ta wysokość jest opuszczona.

Poniższy aplet pozwala zobaczyć tę zależność.



Przykład 2.

Załóżmy, że na dziwnie ukształtowanej ścianie trzeba namalować trójkąt o podstawie *AB* (rys.)



Jako trzeci wierzchołek trójkąta możemy wybrać C lub D. Jak przekonać się, że wybierając punkt *D*, pomalujemy mniejszy trójkąt?

Rozwiązanie

Wyznaczmy pola obu trójkątów.

$[ABD] = \frac{|AB| \cdot |DE|}{2}$ i $[ABC] = \frac{|AB| \cdot |BC|}{2}$.

Wyznaczmy też iloraz tych pól.

$\frac{[ABD]}{[ABC]} = \frac{|AB| \cdot |DE|}{2} \cdot \frac{2}{|AB| \cdot |BC|} = \frac{|DE|}{|BC|} = \frac{3}{4}$.

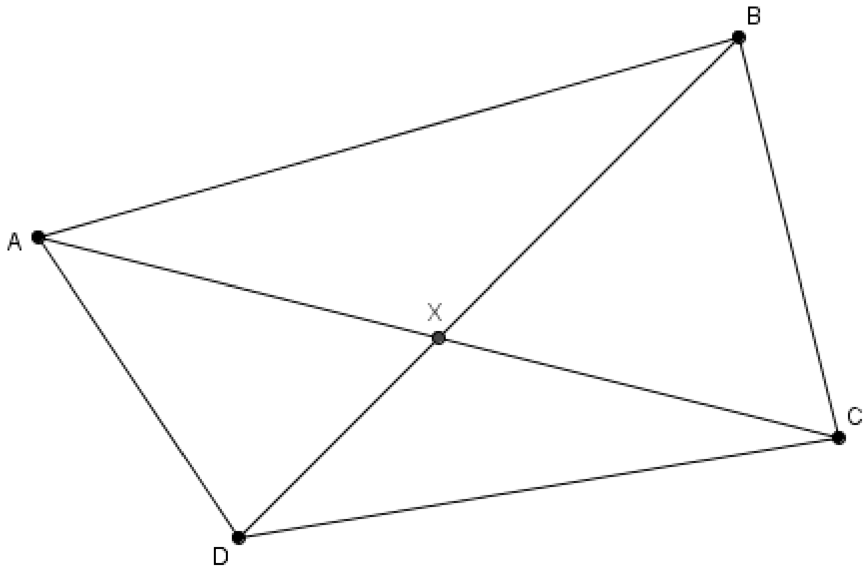
Łącząc obserwacje z obu przykładów, możemy napisać:

1. Jeśli trójkąty mają wspólną wysokość, to stosunek ich pól powierzchni jest równy stosunkowi długości ich podstaw, na które ta wysokość jest opuszczona (lub na prostą, na której te podstawy leżą). Jest to szczególnie użyteczne do problemów, w których dwa trójkąty mają podstawy leżące na tej samej prostej.
2. Jeśli dwa trójkąty mają wspólną podstawę, to stosunek ich pól powierzchni jest równy stosunkowi ich wysokości opuszczonych na tę podstawę(lub na prostą, na której ta podstawa leży).

Przejdźmy do zadań.

Zadanie 1.

Niech *AC* i *BD* przecinają się w punkcie *X*, jak na rysunku.



Wiadomo, że $[ABX] = 24, [BCX] = 15, [CDX] = 10$. Oblicz [*ADX*].

Rozwiązanie

Zauważmy, że trójkąty *ABX* i *BCX* mają wspólną wysokość poprowadzoną z wierzchołka *B* na prostą *AC*, zatem

$$\frac{|AX|}{|CX|} = \frac{[ABX]}{[CBX]} = \frac{24}{15} = \frac{8}{5}.$$

Również trójkąty *ADX* i *CDX* mają wspólną wysokość poprowadzoną z wierzchołka *D* na prostą *AC*, zatem

$$\frac{|AX|}{|CX|} = \frac{[ADX]}{[CDX]} = \frac{[ADX]}{10}.$$

Korzystając z poprzedniego wyniku, mamy:

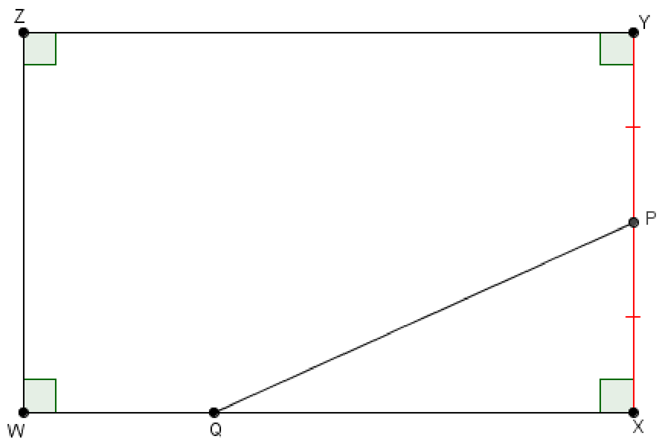
$$\frac{[ADX]}{10} = \frac{8}{5},$$

czyli

$$[ADX] = 16.$$

Zadanie 2.

Oblicz |*QX*| wiedząc, że |*WX*| = 8 i $[PQX] = \frac{[WXYZ]}{6}$



(rys.)

Rozwiązanie

Zauważmy, że $\frac{[WPX]}{[WXYZ]} = \frac{1}{4}$, a stąd $[WPX] = \frac{[WXYZ]}{4}$. Dalej mamy:

$$\frac{[QPX]}{[WPX]} = \frac{[WXYZ]}{6} \cdot \frac{4}{[WXYZ]} = \frac{2}{3}.$$

Rozważając trójkąty o wspólnej podstawie *QPX* i *WPX* stwierdzamy, że

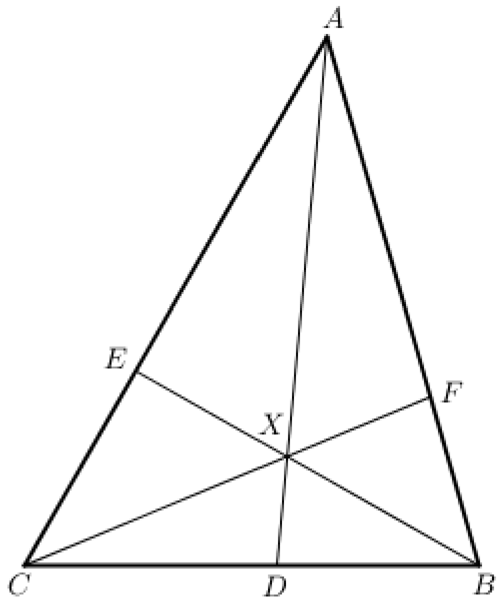
$$\frac{|QX|}{8} = \frac{2}{3},$$

skąd

$$|QX| = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}.$$

Zadanie domowe

Odcinki *AD*, *BE* i *CF* przecinają się w punkcie *X*, jak na rysunku. Wykaż, że $\frac{[AXC]}{[BXC]} = \frac{AF}{FB}$.



Propozycja rozwiązania.

Trójkąty *AXF* i *BXF* mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka *X*, zatem

$$\frac{[AXF]}{[BXF]} = \frac{AF}{FB}.$$

Podobnie

$$\frac{[AFC]}{[BFC]} = \frac{AF}{FB}.$$

W związku z tym, mamy:

$$\frac{[AXC]}{[BXC]} = \frac{[ACF] - [AXF]}{[BCF] - [BXF]} = \frac{\frac{AF}{FB} \cdot [BCF] - \frac{AF}{FB} \cdot [BFX]}{[BCF] - [BXF]} = \frac{AF}{FB} \cdot \left(\frac{[BCF] - [BFX]}{[BCF] - [BXF]}\right) = \frac{AF}{FB},$$

co należało wykazać.

scenariusz lekcji nr 2

1. Przedmiot: **Matematyka**
2. Dział programowy: **8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej, 11. Rachunek różniczkowy**
3. Temat: **Równanie stycznej do hiperboli i paraboli.**
4. Klasa: **Klasa II**
5. Zgodność z podstawą programową: **Uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto**
   - **oblicza pochodne funkcji wymiernych;**
   - **korzysta z geometrycznej interpretacji pochodnej;**
6. Pomoce (środki) dydaktyczne
   - **stanowiska komputerowe (lub komputer nauczyciela z tablicą interaktywną lub rzutnikiem multimedialnym),**
   - **bezpłatne oprogramowanie GeoGebra wspomagające nauczanie matematyki (http://www.geogebra.org/cms/pl/download/)**
7. Cele: Uczeń:
   - wykorzystuje pojęcie ilorazu różnicowego,
   - korzysta z równania stycznej,
   - oblicza współczynnik kierunkowy,
   - wyciąga wnioski na podstawie zrealizowanych przykładów,
   - zapisuje uzyskane wnioski,
   - stosuje uzyskane wiadomości do rozwiązywania zadań.,
   - posługuje się programem GeoGebra (lub arkuszem kalkulacyjnym).
8. Metody nauczania: **Praca z komputerem, elementy wykładu, ćwiczenia**
9. Formy pracy: **Praca indywidualna i w grupach**

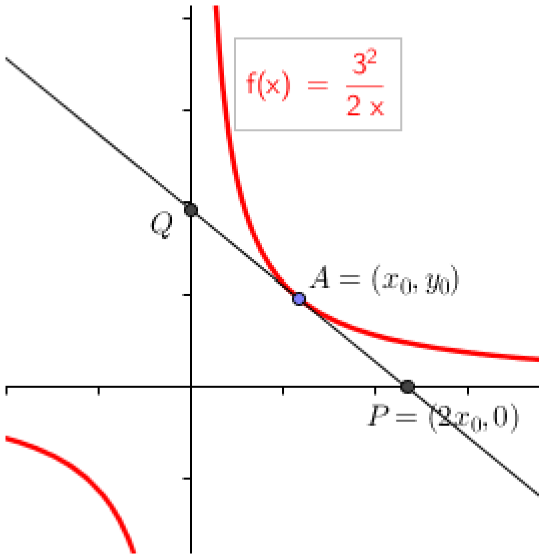
Informując uczniów o przedmiocie zajęć nauczyciel spodziewa się, że uczniowie przypomną:

a) pojęcie ilorazu różnicowego: $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$,

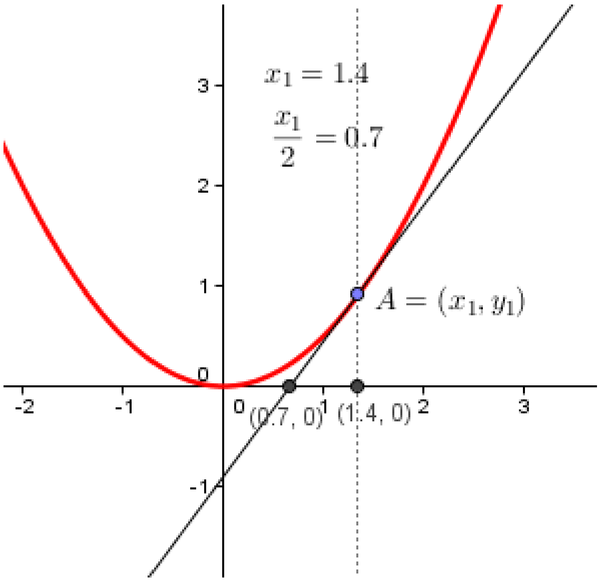
b) równanie stycznej do krzywej: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$,

c) równanie hiperboli w postaci $xy = \frac{a^2}{2}$,

d) równanie paraboli w postaci $y = ax^2$ i $y^2 = 2px$.



Rys. 1



Rys. 2

Powyższe rysunki przedstawiają styczne do hiperboli i paraboli.

Wykonajmy teraz dwa zadanie.

Zadanie 1.

Znaleźć równanie stycznej do hiperboli $xy = \frac{a^2}{2}$ w punkcie $A = (x_0, y_0)$ tej hiperboli (Rys. 1).

Rozwiązanie

Dana hiperbola jest wykresem funkcji $y = \frac{a^2}{2x}$, której pochodną jest $y' = -\frac{a^2}{2x^2}$. Współczynnikiem kierunkowym stycznej w punkcie $A = (x_0, y_0)$ jest liczba $m = -\frac{a^2}{2x_0^2}$, a ponieważ $x_0 y_0 = \frac{a^2}{2}$, więc $m = -\frac{y_0}{x_0}$; styczna ma równanie $y - y_0 = -\frac{y_0}{x_0}(x - x_0)$, które możemy napisać w postaci

$y_0 x + x_0 y = a^2$.

Zauważmy, że gdy do powyższego równania stycznej podstawimy *y* = 0, to $x = \frac{a^2}{y_0} = 2x_0$. Co to oznacza? Oznacza to, że **punkt styczności *A* jest środkiem odcinka *PQ* stycznej zawartego między asymptotami.**

Zadanie 2.

Napisz równanie stycznej do paraboli $y = ax^2$ w punkcie $A = (x_1, y_1)$ i sprawdź, że gdy $x_1 \neq 0$, styczna przecina oś *Ox* w środku odcinka o końcach (0, 0)i (x_1, 0).

Rozwiązanie

Pochodną jest $y' = 2px$. Współczynnikiem kierunkowym stycznej w punkcie $A = (x_1, y_1)$ jest liczba $m = 2px_1$; styczna ma równanie $y - y_1 = 2px_1(x - x_1)$.

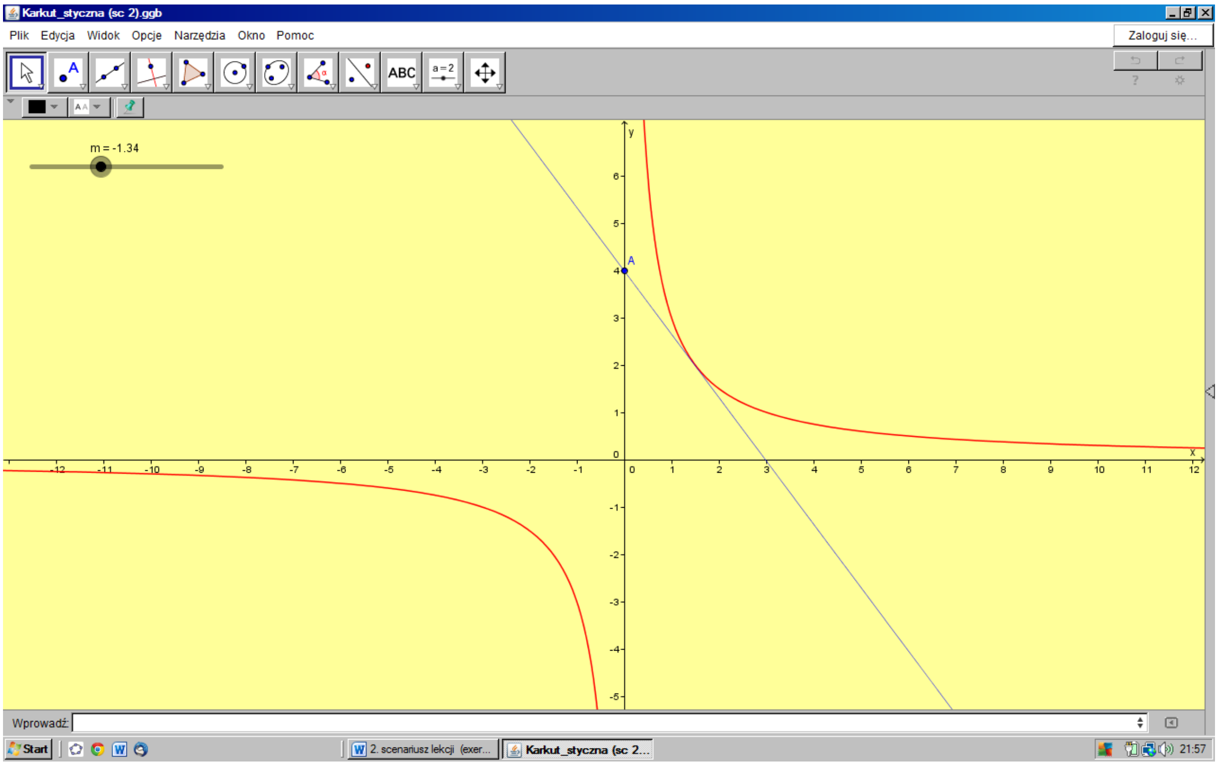
Gdy $x_1 \neq 0$ i $y = 0$ i $y_1 = ax_1^2$, to $2ax_1x = ax_1^2$, to $x = \frac{x_1}{2}$, co oznacza, że **styczna przecina oś *Ox* w środku odcinka o końcach (0, 0) i (x_1, 0).**

Zadanie domowe

1. Wyznacz taką wartość $m \neq 0$, żeby prosta $y = mx + 4$ miała z hiperbolą *xy* = 3 jeden punkt wspólny. Wykonaj odpowiedni wykres (Rys.3).
2. Wykaż, że równanie stycznej do paraboli $y^2 = 2px$ w punkcie (x_1, y_1) można zapisać w postaci $yy_1 = p(x + x_1)$.

Wskazówka

Jeśli uczniowie nie znają pochodnej funkcji złożonej, to mogą pochodną funkcji $y = \pm\sqrt{2px}$ obliczyć z definicji lub wyrazić *x* jako funkcję *y*.

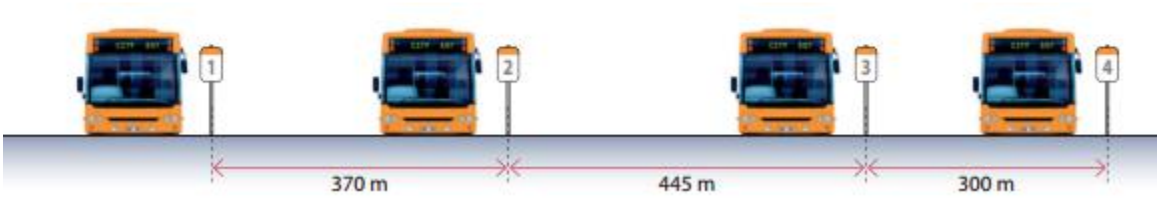


Rys.3

scenariusz lekcji nr 3

1. Przedmiot: **Matematyka**
2. Dział programowy: **Liczby rzeczywiste**, **Funkcje**
3. Temat: **Minimum i maksimum funkcji przedziałami liniowej.**
4. Klasa: **Klasa I**
5. Zgodność z podstawą programową: **Uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:**
   - **szkicuje wykres funkcji określonej w różnych przedziałach różnymi wzorami; odczytuje własności takiej funkcji z wykresu;**
   - **wykorzystuje pojęcie wartości bezwzględnej i jej interpretację geometryczną , zaznacza na osi liczbowej zbiory opisane za pomocą nierówności typu:** $|x-a|=b$, $|x-a<b|$; $|x-a|\geq b$;
6. Pomoce (środki) dydaktyczne
   - **stanowiska komputerowe (lub komputer nauczyciela z tablicą interaktywną lub rzutnikiem multimedialnym),**
   - **bezpłatne oprogramowanie GeoGebra wspomagające nauczanie matematyki (http://www.geogebra.org/cms/pl/download/)**
7. Cele: Uczeń:
   - oblicza wartość funkcji dla zadanego argumentu
   - wyznacza liczbę, dla której funkcja przyjmuje określoną wartość
   - sporządza wykresy najprostszych funkcji liczbowych
   - wyznacza dziedzinę funkcji,
   - rysuje wykresy funkcji na podstawie podanych własności,
   - opisuje za pomocą funkcji zależności w przyrodzie, gospodarce i życiu codziennym,
   - odczytuje i interpretuje informacje z wykresu funkcji oraz wyciąga wnioski dotyczące przebiegu danego zjawiska lub procesu,
   - sporządza wykresy funkcji przedziałami liniowej,
   - znajduje wzór funkcji liniowej o zadanych własnościach,
   - rozwiązuje zadania dotyczące funkcji liniowej i jej zastosowań,
   - stosuje definicję i własności wartości bezwzględnej,
   - korzysta z interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej,
   - oblicza odległość punktów na osi liczbowej,
   - rozwiązuje proste równania i nierówności z wartością bezwzględną,
   - wykazuje się starannością w obliczeniach algebraicznych,
   - rozwiązuje problemy za pomocą narzędzi algebry, wykazuje się przy tym dociekliwością poznawczą,
   - wyciąga wnioski z prowadzonych rozumowań,
   - zapisuje uzyskane wnioski,
   - stosuje uzyskane wiadomości do rozwiązywania zadań,
   - posługuje się programem GeoGebra (lub/i arkuszem kalkulacyjnym).
8. Metody nauczania: **Praca z komputerem, elementy wykładu, ćwiczenia**
9. Formy pracy: **Praca indywidualna i w grupach**

Załóżmy, że na peryferiach pewnego miasta przygotowano cztery przystanki autobusowe przy jednej ulicy, których wzajemne odległości są następujące: 370m, 445m, 300m.W okolicy brakuje punktu sprzedaży biletów, który byłby łatwo dostępny na piechotę z każdego przystanku (zobacz rysunek).



Gdzie należy postawić kiosk *K* sprzedaży biletów na tej ulicy, by suma odległości punktu *K* od czterech przystanków była możliwie najmniejsza?

Rozwiązanie

Możemy umieśćmy cztery przystanki na osi liczbowej następująco:

- przystanek P_1 w punkcie *O*;
- przystanek P_2 w punkcie o odciętej 370;
- przystanek P_3 w punkcie o odciętej 370 + 445 = 815;
- przystanek P_4 w punkcie o odciętej 370 + 445 + 300 = 1115.

Oznaczmy przez *x* odciętą punktu *K*, w którym znajduje się kiosk z biletami; jest jasne, że $0 < x < 1115$.

Należy znaleźć takie *x*, aby suma odległości kiosku od przystanków była możliwie najmniejsza, tzn. należy wyznaczyć minimum funkcji

$$f(x) = d(P_1, K) + d(P_2, K) + d(P_3, K) + (P_4, K),$$

gdzie *d* – odległość.

Biorąc pod uwagę ograniczenia na *x*, mamy:

$$d(P_1, K) = x,\ \ d(P_2, K) = |x - 370|,\ \ d(P_3, K) = |x - 815|,\ \ d(P_4, K) = 1115 - x.$$

Uwzględniając powyższe, otrzymujemy:

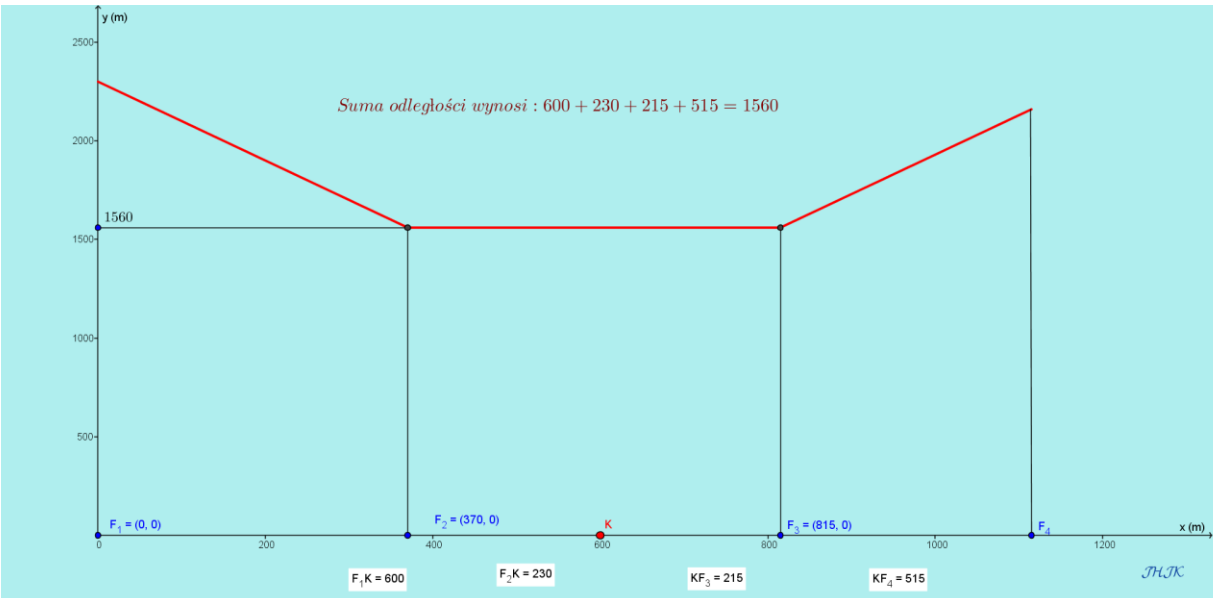
$$f(x) = x + |x - 370| + |x - 815| + 1115 - x = 1115 + |x - 370| + |x - 815|.$$

Uwzględniając definicję wartości bezwzględnej, mamy:

$$f(x) = \begin{cases} 1115 - x + 370 - x + 815 = -2x + 2300 & \text{dla } 0 < x \le 370 \\ 1115 + x - 370 - x + 815 = 1560 & \text{dla } 370 < x \le 815 \\ 1115 + x - 370 + x - 815 = 2x - 70 & \text{dla } 815 < x < 1115 \end{cases}$$

Możemy już wykonać wykres funkcji *f*.

Wykres wykonany jest w GG, więc zmieniając położenie punktu *K* (czerwony) między P_2 i P_3 uzyskujemy taką samą sumę odległości: 1560.



Z wykresu odczytujemy, że funkcja *f* osiąga wartość minimalną dla każdego *x* zawartego między 370 i 815. Oznacza to, że kiosk z biletami należy postawić między przystankami P_2 i P_3.

Zadanie domowe

(Nauczyciel powinien omówić sposób rozwiązania tego zadania.)

Producent obuwia produkuje model butów, ponosząc następujące koszty: stała miesięczna opłata w wysokości 4500 € oraz 85 € za każdą parę, która zwiększa się do 98 € dla każdej pary wytwarzanej ponad 500 sztuk w miesiącu.
Cena sprzedaży wynosi 220 €, ale sprzedaż każdej pary generuje koszt w wysokości 20 € miesięcznie. Miesięczna zdolność produkcyjna firmy wynosi 1000 par butów.

1. Określ wzorem funkcję kosztów produkcji, przychodów i zysku w zależności od wielkości produkcji i wykonaj ich wykresy na płaszczyźnie kartezjańskiej.
2. Znajdź dziedzinę tej funkcji i określ, w jakich przedziałach rośnie, a w jakich maleje.
3. Obliczyć liczbę par butów, które firma musi produkować (i sprzedawać), żeby nie było strat, a zysk był maksymalny.

Oznaczmy przez *x* liczbę par butów produkowanych miesięcznie. Wówczas poszczególne funkcję są następujące:

1^0 Funkcja kosztów produkcji:

$$k(x) = \begin{cases} 4500 + 85x + 20x, & \text{jeżeli } \; 0 \le x \le 500 \\ 4500 + 85 \cdot 500 + 98 \cdot (x - 500) + 20x, & \text{jeżeli } \; 501 \le x \le 1000 \end{cases}$$

czyli

$$k(x) = \begin{cases} 4500 + 105x, & \text{jeżeli } \; 0 \le x \le 500 \\ 118x - 2000, & \text{jeżeli } \; 501 \le x \le 1000 \end{cases}$$

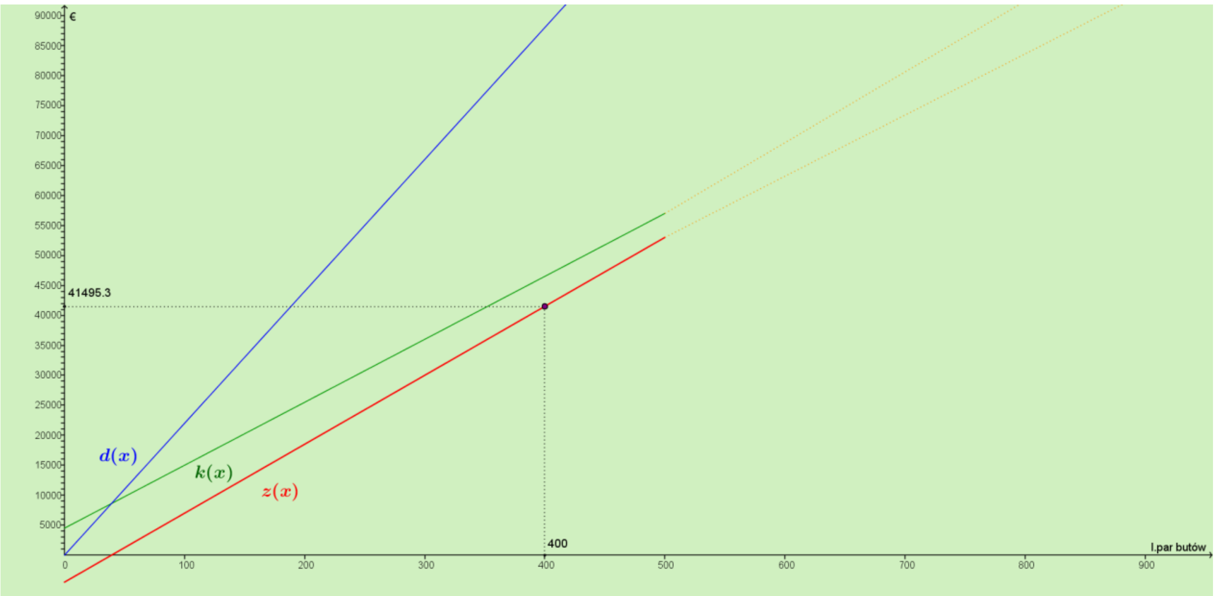
2^0

$$d(x) = 220x.$$

3^0

$$z(x) = d(x) - k(x) = \begin{cases} 115x - 4500, & \text{jeżeli } \; 0 \le x \le 500 \\ 102x + 2000, & \text{jeżeli } \; 501 \le x \le 1000 \end{cases}$$

Wykresy tych funkcji są następujące:



Dziedziną każdej z tych funkcji jest oczywiście przedział $\langle 0,1000\rangle$, a pozostałe odpowiedzi uzyskamy patrząc na następujące rozwiązania (CAS):

1	115x-4500>0 Rozwiąż: $\left\{x > \frac{900}{23}\right\}$
2	{x > 900 / 23} $\approx \{x > 39.13\}$
3	102*1000+2000 $\rightarrow$ **104000**

scenariusz lekcji nr 4

1. Przedmiot: **Matematyka**
2. Dział programowy: **Liczby rzeczywiste**, **Równania i nierówności, Rachunek różniczkowy**
3. Temat: **Gdy zawodzi schemat Hornera - przybliżone rozwiązywanie równań.**
4. Klasa: **Klasa III**
5. Zgodność z podstawą programową: **Uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:**
   - **oblicza pochodne funkcji wymiernych;**
   - **rozwiązuje równania wielomianowe;**
   - **rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne;**
   - **posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych.**
6. Pomoce (środki) dydaktyczne
   - **stanowiska komputerowe (lub komputer nauczyciela z tablicą interaktywną lub rzutnikiem multimedialnym),**
   - **bezpłatne oprogramowanie GeoGebra wspomagające nauczanie matematyki (http://www.geogebra.org/cms/pl/download/)**
7. Cele: Uczeń:
   - oblicza wartości funkcji trygonometrycznych,
   - zna zastosowania pochodnej,
   - stosuje metodę średnich arytmetycznych,
   - wykazuje się starannością w obliczeniach algebraicznych,
   - rozwiązuje problemy za pomocą narzędzi algebry, wykazuje się przy tym dociekliwością poznawczą,
   - wyciąga wnioski z prowadzonych rozumowań,
   - zapisuje uzyskane wnioski,
   - stosuje uzyskane wiadomości do rozwiązywania zadań,
   - posługuje się programem GeoGebra (lub/i arkuszem kalkulacyjnym).
8. Metody nauczania: **Praca z komputerem, elementy wykładu, ćwiczenia**
9. Formy pracy: **Praca indywidualna i w grupach**

I. Uwagi wstępne

Różne zadania i problemy matematyczne prowadzą często do równań, które nie dają się rozwiązać dokładnie, tzn. nie ma wzoru , który by przedstawiał pierwiastek równania jako wynik pewnej skończonej liczby działań na liczbach danych. Często takie rozwiązanie nie jest konieczne; w praktyce wystarcza zwykle, gdy potrafimy znaleźć wartość przybliżoną pierwiastka z dokładnością potrzebną w danym zagadnieniu.

Rozważmy równanie postaci

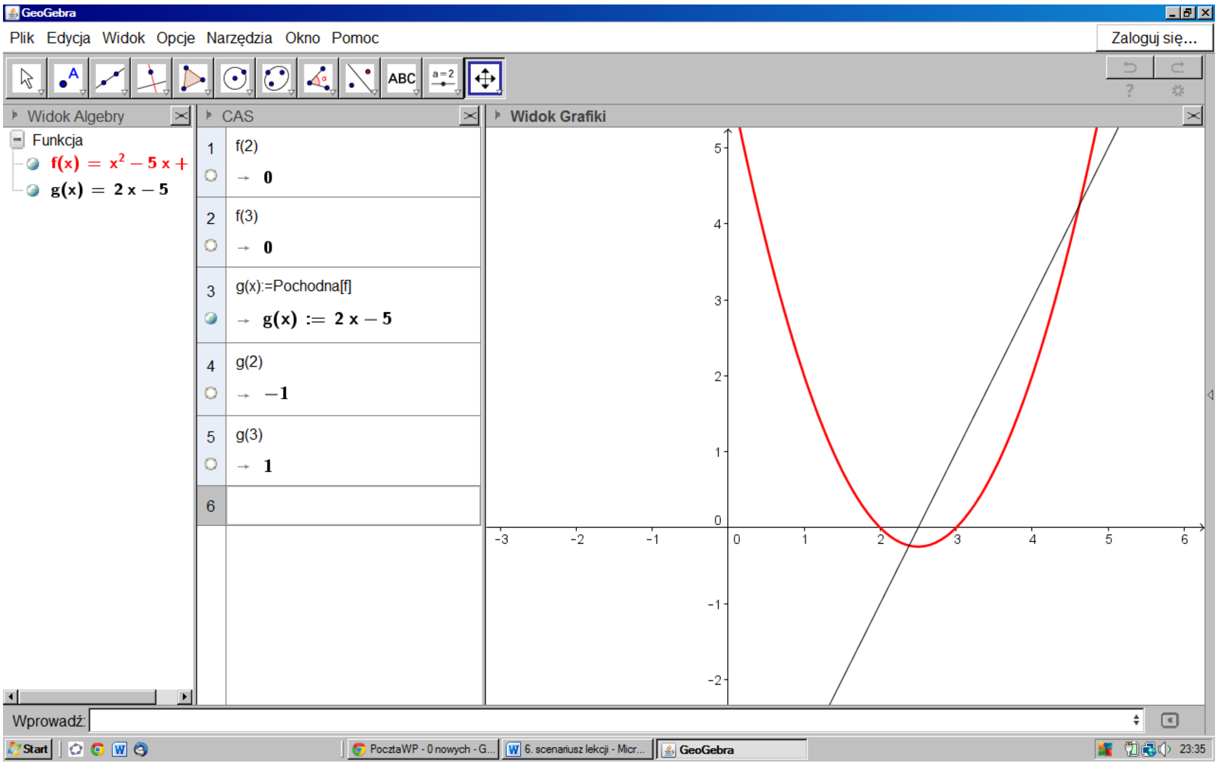
$(*) \quad f(x) = 0,$

gdzie funkcja *f* jest ciągła w pewnym przedziale otwartym i ma w nim pochodną. Przypuśćmy, że liczba x_0 tego przedziału jest pierwiastkiem równania (*) i że w punkcie x_0 pochodna funkcji jest różna od zera, tzn. że

$f(x_0) = 0, \;\; f'(x_0) \neq 0.$

Mówimy wtedy, że x_0 jest pierwiastkiem pojedynczym równania.

Z warunku $f'(x_0) \neq 0$ wynika, że w pewnym otoczeniu punktu x_0 wartości *f*(*x*) mają po różnych stronach x_0 znaki przeciwne. Możemy podać przykład, posługując się następującym apletem:



Odwrotnie, jeśli liczby *f*(*a*) i *f*(*b*) mają znaki przeciwne, a funkcja *f* jest ciągła w $\langle a, b\rangle$, to między *a* i *b* znajduje się jakiś pierwiastek x_0 równania *f*(*x*), funkcja ciągła, przechodząc od wartości dodatniej do ujemnej (lub na odwrót), przybiera w jakimś punkcie wartość 0. Jeżeli ponadto pochodna *f'*(*x*) ma w całym przedziale ten sam znak, to x_0 jest jedynym pierwiastkiem równania w tym przedziale, bo funkcja *f* jest wtedy rosnąca lub malejąca w (*a*, *b*).

II. Wyodrębnienie pierwiastka

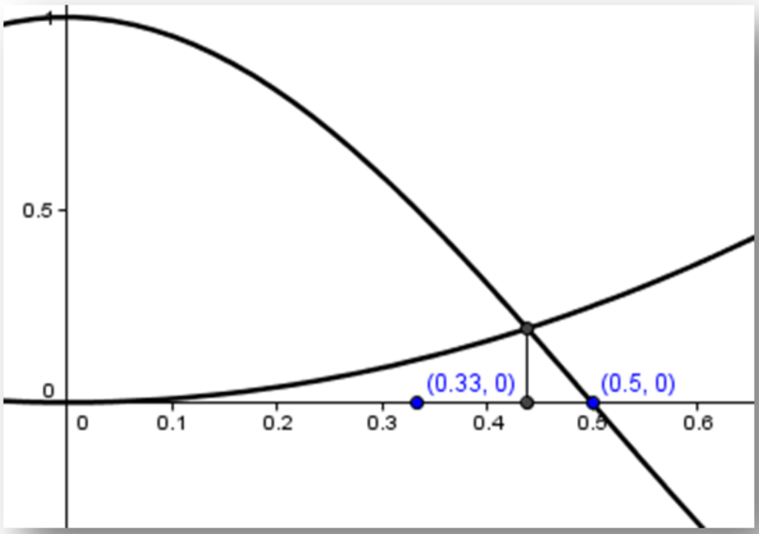
Rozwiązanie danego równania *f*(*x*) = 0 w sposób przybliżony zaczynamy od wyodrębnienia jednego pierwiastka, tzn. od wyznaczenia przedziału, w którym znajduje się jeden i tylko jeden pierwiastek. W tym celu najczęściej szkicujemy wykres funkcji *f*. Jeżeli dane równanie można zapisać w postaci $f_1(x) = f_2(x)$, wówczas należy naszkicować wykresy funkcji f_1 i f_2; punkt przecięcia tych krzywych wskaże nam w przybliżeniu, gdzie leży pierwiastek.

Rozważmy równanie $x^2 - \cos \pi x = 0$. Po narysowaniu łuków paraboli i sinusoidy, widzimy, że równanie ma tylko jeden pierwiastek (dodatni), którego można szukać w przedziale $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$. Istotnie,

$\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{9} - \frac{1}{2} < 0$, a $\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{4} > 0$.

Jeśli wyodrębniliśmy pierwiastek x_0 równania *f*(*x*) = 0 przedziałem $\langle a, b\rangle$, przy czym *f*(*a*) i *f*(*b*) mają przeciwne znaki. Środek tego przedziału, tj. wartość $x = \frac{a+b}{2}$, będzie wówczas przybliżeniem pierwiastka z błędem mniejszym od $\frac{b-a}{2}$.

Postępowanie to pokazuje poniższy rysunek.



III. Metoda średnich arytmetycznych

Niech $x_1 = \frac{a+b}{2}$; obliczmy wartość *f*(x_1) i wybierzmy ten z przedziałów $\langle a, x_1\rangle, \langle x_1, b\rangle$, w końcach którego wartości *f*(*x*) mają znaki przeciwne. Niech będzie to np. przedział $\langle a, x_1\rangle$. Środek $x_2 = \frac{a+x_1}{2}$ tego przedziału da nam przybliżenie pierwiastka x_0 z błędem mniejszym niż $\frac{x_1-a}{2} = \frac{b-a}{4}$. Postępując dalej w ten sposób, możemy obliczyć przybliżoną wartość x_0 z dowolnie dużą dokładnością.

Zastosujmy tę metodę do równania $x^2 - \cos \pi x = 0$. Przebieg rachunku przedstawia tabelka:

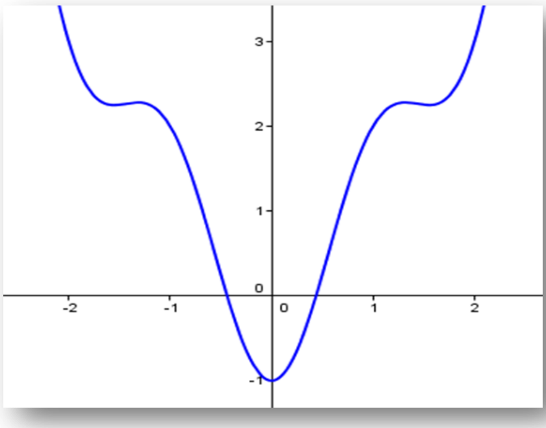
x	x^2	$\cos \pi x = \cos(180x)^\circ$	$x^2 - \cos \pi x$
$a = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{2}$	< 0
$b = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	> 0
$x_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{5}{12}$	$\frac{25}{144}$	0,2588	< 0
$x_2 = \frac{x_1+b}{2} = \frac{11}{24}$	$\frac{121}{576}$	0,1305	> 0
$x_3 = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{21}{48}$	$\frac{441}{2304}$	0,1951	< 0
$x_4 = \frac{x_2+x_3}{2} = \frac{43}{96}$	$\frac{1849}{9216}$	0,1632	> 0

Kolejnym przybliżeniem jest $x_5 = \frac{x_3+x_4}{2} = \frac{85}{192} \approx 0{,}443$ z błędem mniejszym od $\frac{1}{192} \approx 0{,}005$.

W Arkuszu Excel wygląda to następująco:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1				x^3-cos(πx)=0						
2	Warunki początkowe				a_n,f(x)<0	b_n,f(x)>0	m	f(m)	dokładność	0,001
3										
4	a=	0	f(a)	-1	0	1	0,5	0,25	kontynuuj	
5	b=	1	f(b)	2	0	0,5	0,25	-0,64461	kontynuuj	
6					0,25	0,5	0,375	-0,24206	kontynuuj	
7					0,375	0,5	0,4375	-0,00368	kontynuuj	
8					0,4375	0,5	0,46875	0,121709	kontynuuj	
9					0,4375	0,46875	0,453125	0,058592	kontynuuj	
10					0,4375	0,453125	0,445313	0,027341	kontynuuj	
11					0,4375	0,4453125	0,441406	0,0118	kontynuuj	
12					0,4375	0,4414063	0,439453	0,00405	kontynuuj	
13					0,4375	0,4394531	0,438477	0,000181	kontynuuj	
14					0,4375	0,4384766	0,437988	-0,00175	0,438	
15					0,4379883	0,4384766	0,438232	-0,00079	0,438	
16					0,4382324	0,4384766	0,438354	-0,0003	0,438	
17					0,4383545	0,4384766	0,438416	-6E-05	0,438	
18					0,4384155	0,4384766	0,438446	6,04E-05	0,438	
19					0,4384155	0,438446	0,438431	2,63E-08	0,438	
20					0,4384155	0,4384308	0,438423	-3E-05	0,438	
21					0,4384232	0,4384308	0,438427	-1,5E-05	0	
22										
23		Rozwiązaniem z dokładnością do trzeciego miejsca po przecinku jest x=0,438								
24			(0,438)^2-cos(π*0,438)							
25				-0,0017						

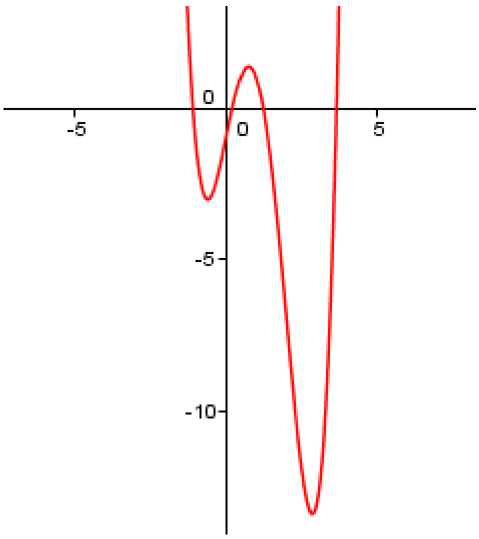
A jak wygląda wykres funkcji $f(x) = x^2 - \cos(\pi x)$? Mniej więcej tak:

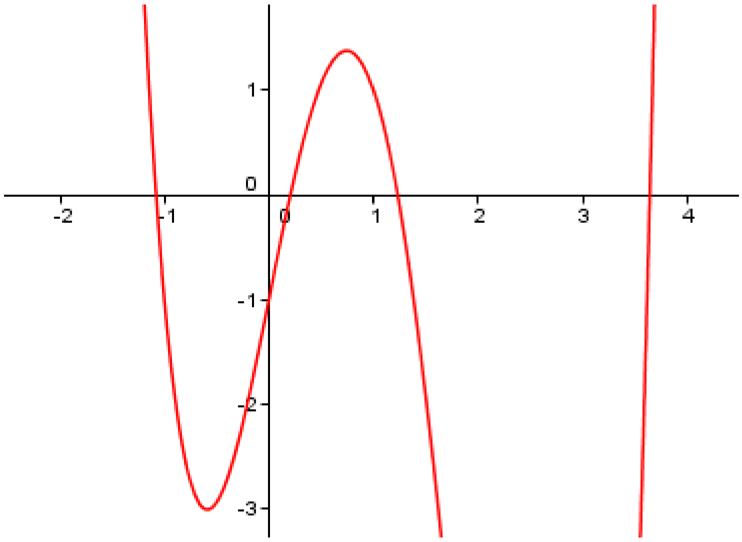


Zadanie domowe

Wyodrębnij, a następnie oblicz metodą średnich arytmetycznych każdy z czterech pierwiastków równania $x^4 - 4x^3 + 5x - 1 = 0$.

Przygotowaniem do rozwiązania zadania może być wykres funkcji $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x - 1$.





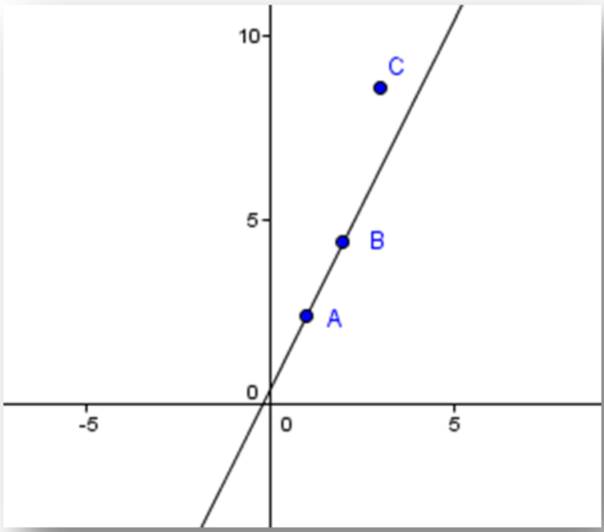
scenariusz lekcji nr 5

1. Przedmiot: **Matematyka**
2. Dział programowy: **Liczby rzeczywiste**, **Wyrażenia algebraiczne**
3. Temat: **Wzór interpolacyjny Lagrange'a.**
4. Klasa: **Klasa II**
5. Zgodność z podstawą programową: **Uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:**
   - **rozkłada wielomian na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia lub wyłączając wspólny czynnik przed nawias;**
   - **dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany;**
   - **wyznacza dziedzinę prostego wyrażenia wymiernego z jedną zmienną ;**
   - **rozwiązuje równania i nierówności.**
6. Pomoce (środki) dydaktyczne
   - **stanowiska komputerowe (lub komputer nauczyciela z tablicą interaktywną lub rzutnikiem multimedialnym),**
   - **bezpłatne oprogramowanie GeoGebra wspomagające nauczanie matematyki (http://www.geogebra.org/cms/pl/download/)**
7. Cele: Uczeń:
   - rozwiązuje układy równań,
   - tworzy wielomian interpolacyjny,
   - tworzy wyrażenia wymierne spełniające określone warunki,
   - korzysta z pojęcia współliniowości punktów,
   - wykazuje się starannością w obliczeniach algebraicznych,
   - rozwiązuje problemy za pomocą narzędzi algebry, wykazuje się przy tym dociekliwością poznawczą,
   - wyciąga wnioski z prowadzonych rozumowań,
   - zapisuje uzyskane wnioski,
   - stosuje uzyskane wiadomości do rozwiązywania zadań,
   - posługuje się programem GeoGebra (lub/i arkuszem kalkulacyjnym).
8. Metody nauczania: **Praca z komputerem, elementy wykładu, ćwiczenia**
9. Formy pracy: **Praca indywidualna i w grupach**

W zagadnieniach praktycznych zdarza się , że znamy wartości jakiejś funkcji *f* w pewnych punktach $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$, a chcemy możliwie dokładnie wyznaczyć jej wartość w pewnym punkcie μ leżącym między dwoma z owych punktów. Aby obliczyć $f(\mu)$ zastosujemy postępowanie, nazywane interpolacją. (Inaczej: mając dany wielomian, łatwo wyznaczamy jego wartość w dowolnym punkcie; teraz mamy kilka punktów, na podstawie których trzeba utworzyć wielomian i obliczyć jego wartość w innym punkcie.)

Przykład

Załóżmy, że dla mamy dane punkty: (1; 2,4), (2; 4,4), (3; 8,6) funkcji $y = f(x)$, a potrzebne są nam wartości $f(1{,}4)$ i $f(2{,}6)$. Zauważmy, ze punkty te nie są współliniowe.

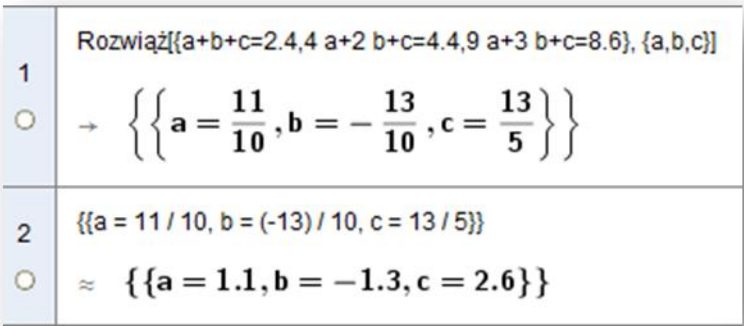


Rozwiązanie graficzne zadania polegałoby na wykreśleniu krzywej przechodzącej przez dane punkty. Krzywych takich jest oczywiście nieskończenie wiele. W praktyce chodzi o to, by dla *f*(*x*) podać jakiś prosty wzór. Często poszukujemy wielomianu możliwie niskiego stopnia, którego wykres przechodziłby przez dane punkty; rozwiązanie jest wtedy całkowicie określone, gdyż taki wielomian istnieje zawsze i jest tylko jeden. Nazywamy go wielomianem interpolacyjnym.

W **Przykładzie** dane punkty nie leżą na prostej, więc wielomian interpolacyjny nie może być stopnia niższego niż 2. Przypuśćmy, że jest nim funkcja $y = ax^2 + bx + c$. Podstawiając dane wartości *x* i *y*, otrzymujemy:

$$\begin{cases} a + b + c = 2{,}4 \\ 4a + 2b + c = 4{,}4 \\ 9a + 3b + c = 8{,}6 \end{cases}$$

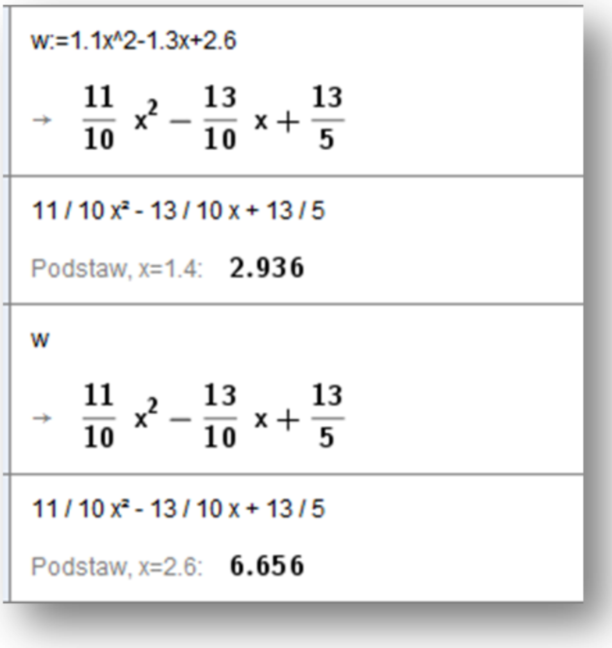
którego rozwiązaniem są wartości



Wielomianem interpolacyjnym jest więc wielomian:

$y = 1{,}1x^2 - 1{,}3x + 2{,}6.$

Wartościami tego wielomianu dla *x* = 1,4 i *x* = 2,6 są: 2,936 i 6,656.



Twierdzenie

Istnieje wielomian *P*(*x*) stopnia nie wyższego niż *n*, który dla danych *n* +1 różnych wartości

$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n+1}$

zmiennej *x* przybiera odpowiednio dane dowolnie wartości

$y_1, y_2, y_3, \cdots, y_{n+1},$

czyli

$P(x_i) = y_i \quad \text{dla} \quad i = 1,2,3,\cdots,n+1.$

Wielomian taki jest tylko jeden.

Przeprowadzimy dowód tego twierdzenia dla *n* = 3 (w przypadku ogólnym dowód przebiega analogicznie).

Znajdziemy najpierw taki wielomian $P_1(x)$ stopnia trzeciego, że $P_1(x_1) = 1$, a $P_1(x_2) = P_1(x_3) = P_1(x_4) = 0$. Nietrudno sprawdzić, że taką własność ma wielomian

$$(1) \quad P_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}.$$

Podobnie

$$P_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)};$$

$$(2) \quad P_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)};$$

$$P_4(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}$$

Są takimi wielomianami stopnia trzeciego, że $P_2(x_2) = P_3(x_3) = P_4(x_4) = 1,$ a $P_k(x_l) = 0, \text{ gdy } k \neq l, \text{ dla } k = 2,3,4; \quad l = 1,2,3,4.$

Tworzymy teraz wielomian y

$$(3) \quad P(x) = y_1P_1(x) + y_2P_2(x) + y_3P_3(x) + y_4P_4(x).$$

Ponieważ $P_1(x_1) = 1$, a $P_1(x_2) = P_1(x_3) = P_1(x_4) = 0$, więc $P(x_1) = y_1$, tak samo $P(x_2) = y_2, P(x_3) = y_3, P(x_4) = y_4$.

P (*x*) jest sumą wielomianów stopnia trzeciego, więc jest to wielomian stopnia co najwyżej trzeciego. Zatem *P*(*x*) jest poszukiwanym wielomianem interpolacyjnym. Innego takiego wielomianu nie ma.

Wzór (3), w którym $P_i(x)$ ma znaczenie podane wzorami (1) i (2), nazywa się **wzorem interpolacyjnym Lagrange'a.**

Przykład

Znajdź wielomian interpolacyjny dla funkcji *y* = *f*(*x*), mając dane:

x	**- 3**	**- 1**	**1**	**3**
y	-14	4	0	22

$$P_1(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{(-2)(-4)(-6)},$$

$$P_2(x) = \frac{(x+3)(x-1)(x-3)}{2\cdot(-2)(-4)},$$

$$P_3(x) = \frac{(x+3)(x+1)(x-3)}{4\cdot 2\cdot(-2)},$$

$$P_4(x) = \frac{(x+3)(x+1)(x-1)}{6\cdot 4\cdot 2}.$$

$$P(x) = (-14)\cdot\frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{(-2)(-4)(-6)} + 4\cdot\frac{(x+3)(x-1)(x-3)}{2\cdot(-2)(-4)} + 0 + 22\cdot\frac{(x+3)(x+1)(x-1)}{6\cdot 4\cdot 2}.$$

Ponieważ powyższy rachunek jest uciążliwy, więc wykorzystajmy GeoGebra CAS:

1	P(x)=(-14)*(x+1)(x-1)(x-3)/((-2)*(-4)*(-6)) +4*(x+3)(x-1)(x-3)/(2*(-2)*(-4))+0+22*(x+3)(x+1)(x-1)/(6*4*2) $\rightarrow\ \mathbf{P(x) = x^3 + \frac{1}{4}\, x^2 - 3\, x + \frac{7}{4}}$

Ostatnie więc mamy:

$$P(x) = x^3 + \frac{1}{4}x^2 - 3x + \frac{7}{4}.$$

Zadanie domowe

Znajdź funkcję kwadratową przybierającą dla wartości $\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}$ argumentu *x* te same wartości co $\sin \pi x$. Oblicz wartości tej funkcji dla $x = \frac{1}{4}$ i $x = \frac{3}{4}$ i porównaj z wartościami $\sin \pi x$.

Narysuj starannie wykresy obu funkcji w przedziale $\langle 0,1 \rangle$ i porównaj, jak dalece różni się jeden od drugiego.

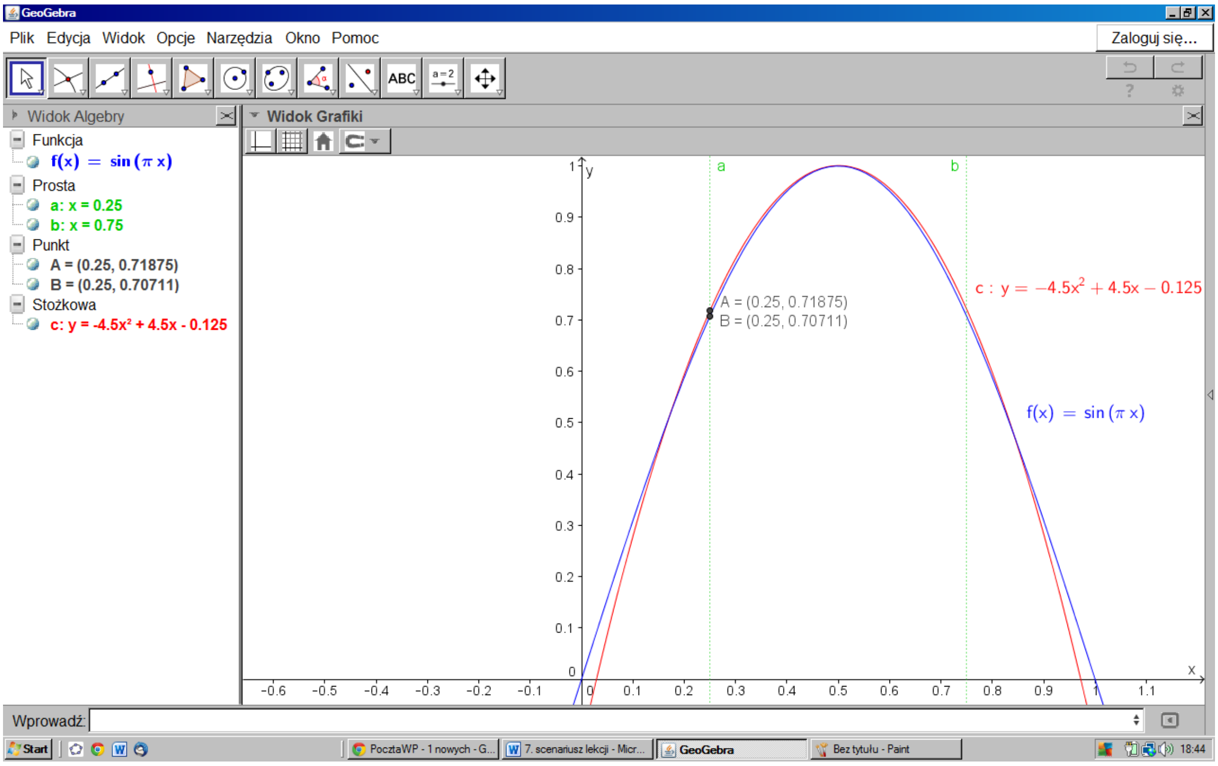
Wskazówki i podpowiedzi

Wielomianem interpolacyjnym jest $-\frac{9}{2}x^2+\frac{9}{2}x-\frac{1}{8}$.

1	(-9/2x^2+9/2x-1/8) $\rightarrow\ -\frac{9}{2}\,x^2+\frac{9}{2}\,x-\frac{1}{8}$
2	(-9) / 2 x² + 9 / 2 x - 1 / 8 Podstaw, x=1/4: **0.71875**
3	((-9) / 2 x² + 9 / 2 x - 1 / 8) $\rightarrow\ -\frac{9}{2}\,x^2+\frac{9}{2}\,x-\frac{1}{8}$
4	(-9) / 2 x² + 9 / 2 x - 1 / 8 Podstaw, x=3/4: **0.71875**

5	sin(π x) $\rightarrow\ \sin(\pi\,x)$
6	sin(π x) Podstaw, x=1/4: **0.70711**
7	sin(π x) $\rightarrow\ \sin(\pi\,x)$
8	sin(π x) Podstaw, x=3/4: **0.70711**

Porównanie wykresów:



scenariusz lekcji nr 6

1. Przedmiot: **Matematyka**
2. Dział programowy: **Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej, Rachunek różniczkowy**
3. Temat: **Pęk prostych.**
4. Klasa: **Klasa III**
5. Zgodność z podstawą programową: **Uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:**
   - **wyznacza równanie prostej;**
   - **oblicza granice funkcji;**
   - **posługuje się równaniem okręgu;**
6. Pomoce (środki) dydaktyczne
   - **stanowiska komputerowe (lub komputer nauczyciela z tablicą interaktywną lub rzutnikiem multimedialnym),**
   - **bezpłatne oprogramowanie GeoGebra wspomagające nauczanie matematyki (http://www.geogebra.org/cms/pl/download/)**
7. Cele: Uczeń:
   - stosuje równanie prostej z parametrem,
   - zna pojęcie pęku właściwego i jego wierzchołka,
   - zna pojęcie pęku niewłaściwego prostych,
   - wykazuje się starannością w obliczeniach algebraicznych,
   - rozwiązuje problemy za pomocą narzędzi algebry, wykazuje się przy tym dociekliwością poznawczą,
   - wyciąga wnioski z prowadzonych rozumowań,
   - zapisuje uzyskane wnioski,
   - stosuje uzyskane wiadomości do rozwiązywania zadań,
   - posługuje się programem GeoGebra (lub/i arkuszem kalkulacyjnym).
8. Metody nauczania: **Praca z komputerem, elementy wykładu, ćwiczenia**
9. Formy pracy: **Praca indywidualna i w grupach**

Pęk prostych to rodzina prostych o wspólnej własności. Jest on wyznaczony przez równanie z parametrem; każdej wartości parametru odpowiada jakaś prosta pęku.
Równanie pęku prostych w postaci ogólnej jest następujące:
$a(k)x + b(k)y + c(k) = 0,$
gdzie współczynniki *a, b, c* mogą zależeć od parametru *k*.
Równanie pęku prostych w postaci kierunkowej jest następujące:
$y = m(k)x + q(k),$
gdzie współczynniki *m, q* mogą zależeć od parametru *k*.
Wyróżniamy dwa rodzaje pęków prostych:
1^0 **Pęk niewłaściwy**; współczynnik kierunkowy równania takiego pęku nie zależy od parametru *k*. W interpretacji graficznej jest to rodzina prostych o tym samym kierunku (równoległych). Prosta tego

pęku uzyskana dla k = 0 przechodzi przez początek układu współrzędnych i nazywana jest **tworzącą** pęku.

Przykład 1

Pęk prostych opisanych równaniem

$y = 2x + k,$

jest niewłaściwym pękiem prostych, dla którego prosta

$y = 2x$

jest prostą tworzącą.

2^0 **Pęk właściwy**; współczynnik kierunkowy zależy od parametru k. W interpretacji graficznej jest to rodzina prostych przechodzących przez wspólny punkt, zwany **wierzchołkiem** pęku. Pęk właściwy ma dwie proste tworzące : jedną z nich otrzymujemy dla $k \to \infty$, a drugą dla k = 0.

Przykład 2

Równanie pęku

$(*)\ \ (\boldsymbol{k}+\mathbf{2})\boldsymbol{x}+(\mathbf{2}\boldsymbol{k}-\mathbf{1})\boldsymbol{y}-\mathbf{5}\boldsymbol{k}=\mathbf{0},$

możemy zapisać w postaci:

$k(x + 2y - 5) + (2x - y) = 0.$

Prostymi tworzącymi są zatem proste:

$x + 2y - 5 = 0 \ \text{ i } \ 2x - y = 0.$

Wierzchołkiem tego pęku jest punkt o współrzędnych (1, 2).

Zauważmy, że podstawiając do (*) k = 0 otrzymujemy prostą $2x - y = 0$, zaś po wyznaczeniu zmiennej y z równania (*) i obliczeniu granicy

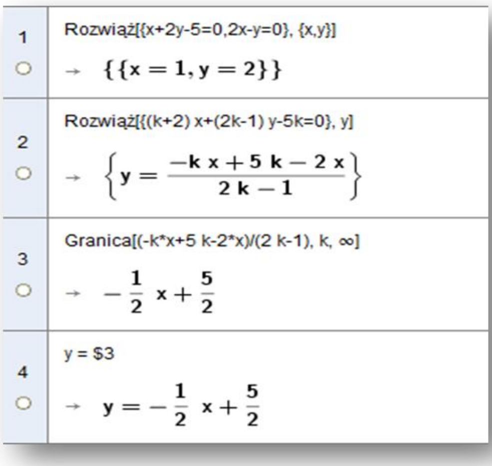
$$\lim_{k\to\infty} \frac{5k - kx - 2x}{2k - 1} = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2},$$

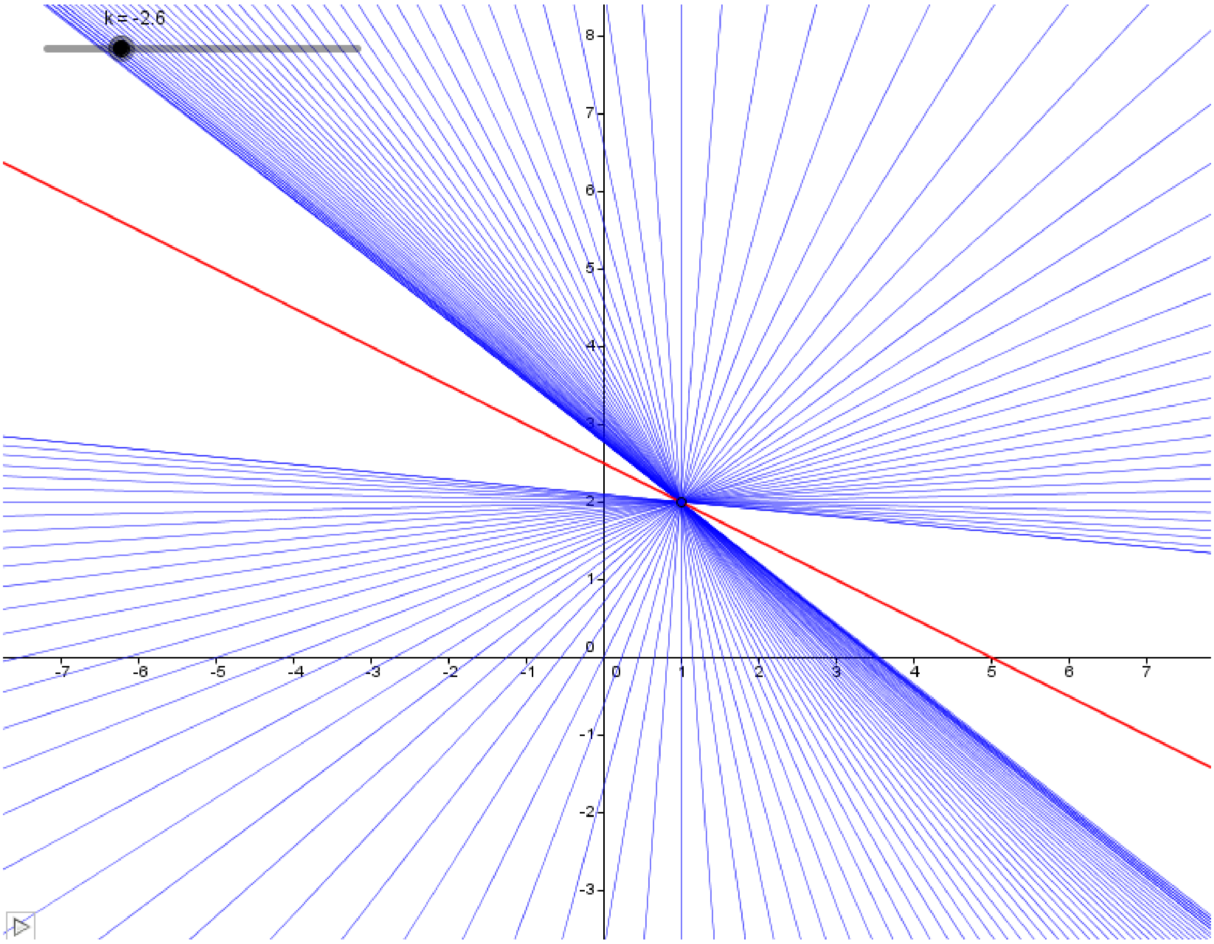
otrzymujemy równanie drugiej prostej $x + 2y - 5 = 0.$

Uwaga

Jeśli w polu **Wprowadź** GeoGebry wpiszemy równanie pęku (*)(po uprzednim wprowadzeniu suwaka k), to pojawi się tylko jedna z tworzących, mianowicie prosta o równaniu $2x - y = 0$ (dla k = 0). Fakt ten jest często wykorzystywany do tworzenia zadań związanych z pojęciem pęku prostych.

Poniżej umieszczone są obliczenia dotyczące przykładu 2. oraz zrzut ekranu pokazujący pęk prostych z nim związanych.





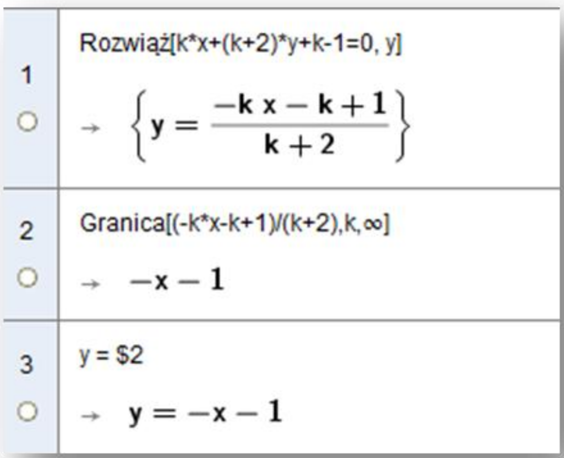
Rozważmy teraz następujące zadanie:

Dany jest pęk prostych $kx + (k+2)y + k - 1 = 0$. Wyznacz wierzchołek tego pęku oraz te wartości parametru *k*, dla których proste pęku mają punkty wspólne z odcinkiem *EF*, gdzie *E* = (1, 4) i *F* = (3, 2).

Rozwiązanie

Znajdźmy najpierw równania prostych tworzących. Jedną z nich otrzymamy, podstawiając *k* = 0: $2y - 1 = 0$.

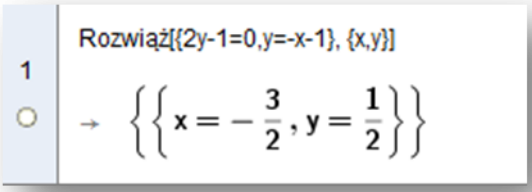
Aby uzyskać równanie drugiej tworzącej, wyznaczymy *y* z równania pęku i obliczymy granicę przy $k \to \infty$. W tym celu posłużymy się GeoGebrą CAS.



Jak widać, drugą tworzącą jest prosta o równaniu $y = -x - 1$.

Wierzchołek pęku znajdziemy, rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} 2y - 1 = 0 \\ y = -x - 1 \end{cases}$$



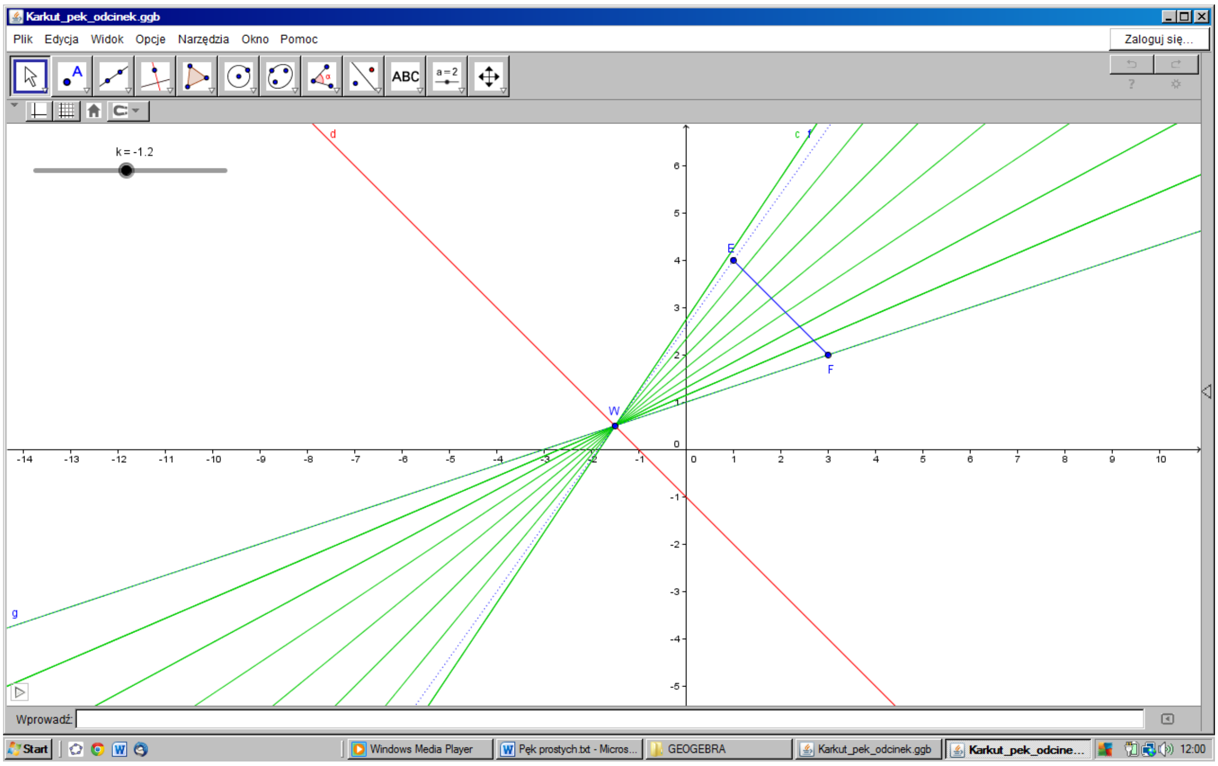
Możemy teraz przejść do rozwiązania drugiej części zadania. Proste przechodzące przez końce odcinka *EF* oraz wierzchołek *W* pęku mają równania:

$3{,}5x - 2{,}5y + 6{,}5 = 0$ i $-1{,}5x + 4{,}5y - 4{,}5 = 0$.

Jakie jest wówczas *k*? Podstawiając za *x* i *y* współrzędne punktów *E* i *F*, otrzymujemy: $k = -\frac{7}{6}$ dla jednej prostej i $k = -\frac{1}{2}$ dla drugiej prostej. Oznacza to, że dla $-\frac{7}{6} \leq k \leq -\frac{1}{2}$ proste pęku mają punkty wspólne z odcinkiem *EF*.

Przewidujemy, że po utworzeniu pęku prostych w GeoGebrze, nie odczytamy dokładnej wartości *k* związanej z prostą przechodzącą przez punkt *E*. Wynika to z faktu, że krok suwaka można dostosować jedynie do skończonych rozwinięć dziesiętnych, a ułamek $\frac{7}{6}$ nie jest ułamkiem dziesiętnym.

Wykonajmy teraz kilka ćwiczeń, posługując się wspomnianym apletem GG.



Widać, że $-1.2 < k \leq -0.5$, co potwierdza naszą wcześniejszą obserwację.

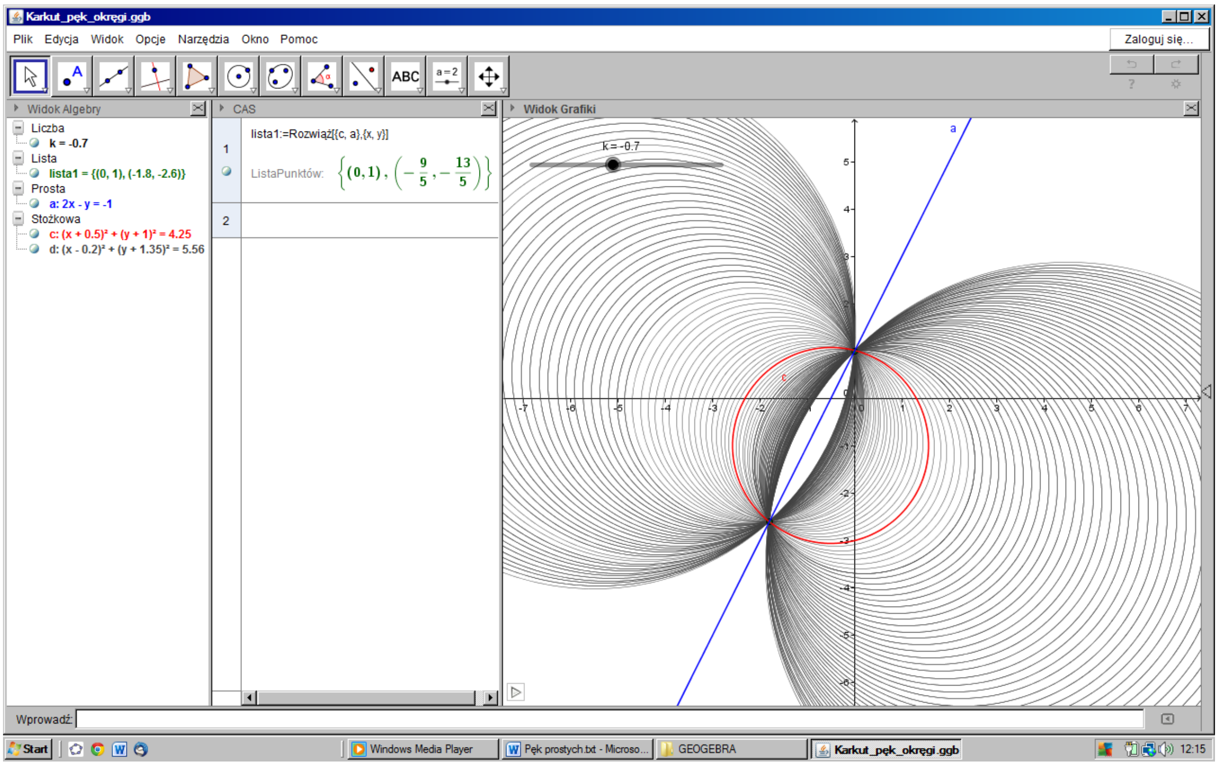
Podobnie jak o pęku prostych możemy mówić np. o pęku okręgów. Rozważmy równanie:

$\boldsymbol{x^2 + y^2 + (2k+1)x + (2-k)y + k - 3 = 0,}$

które można przekształcić do postaci:

$x^2 + y^2 + x + 2y - 3 + k(2x - y + 1) = 0.$

Przykładowy plik GG może być następujący:



Widać, że stałymi punktami przecięcia się okręgów z prostą *a* są punkty (0, 1) i $\left(-\frac{9}{5}, -\frac{13}{5}\right)$, okręgiem tworzącym jest okrąg *c*, zaś prosta *a* to tzw. prosta potęgowa okręgów.

Zadanie domowe

a) Zbadaj pęk prostych $(2k+1)x + (k-1)y + 8k + 7 = 0$ i wyznacz prostą *r* tego pęku, taką, której nie otrzymamy dla żadnej wartości rzeczywistej parametru *k*.

b) Znajdź równanie prostej *s* pęku, która jest równoległa do prostej o równaniu $5x + y = 0$.

c) Znajdź równania t_1 i t_2 prostych pęku, które wraz z osiami układu współrzędnych tworzą w drugiej jego ćwiartce trójkąt o polu 36.

d) Dla jakich wartości parametru *k* proste pęku przecinają odcinek o końcach *P* = (-8,0) i *Q* = (-3,5)?

scenariusz lekcji nr 7

1. Przedmiot: **Matematyka**
2. Dział programowy: **Planimetria**
3. Temat: **Własności cięciw.**
4. Klasa: **Klasa I**
5. Zgodność z podstawą programową: **Uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:**
   - **rozpoznaje figury podobne i jednokładne; wykorzystuje ich własności;**
   - **prowadzi proste rozumowania, składające się z niewielkiej liczby kroków;**
6. Pomoce (środki) dydaktyczne
   - **stanowiska komputerowe (lub komputer nauczyciela z tablicą interaktywną lub rzutnikiem multimedialnym),**
   - **bezpłatne oprogramowanie GeoGebra wspomagające nauczanie matematyki (http://www.geogebra.org/cms/pl/download/)**
7. Cele: Uczeń:
   - stosuje pojęcie cięciwy i średnicy okręgu,
   - stosuje twierdzenia o przystawaniu trójkątów,
   - stosuje pojęcie odległości,
   - zna podstawowe zasady dowodu twierdzenia,
   - wykazuje się starannością w obliczeniach algebraicznych,
   - rozwiązuje problemy za pomocą narzędzi algebry, wykazuje się przy tym dociekliwością poznawczą,
   - wyciąga wnioski z prowadzonych rozumowań,
   - zapisuje uzyskane wnioski,
   - stosuje uzyskane wiadomości do rozwiązywania zadań,
   - posługuje się programem GeoGebra (lub/i arkuszem kalkulacyjnym).
8. Metody nauczania: **Praca z komputerem, elementy wykładu, ćwiczenia**
9. Formy pracy: **Praca indywidualna i w grupach**

Własności cięciw okręgu wyrażają się w kilku twierdzeniach, które poznamy (przypomnimy) wraz z dowodami.

Twierdzenie 1.

W każdym okręgu średnica jest dłuższa od dowolnej jego cięciwy nie przechodzącej przez środek okręgu.

Założenia	Teza
AB jest cięciwą	$CD > AB$
CD jest średnicą	

Dowód

Łącząc końce cięciwy ze środkiem okręgu otrzymujemy trójkąt AOB, w którym suma długości dwóch boków jest większa od długości trzeciego boku:

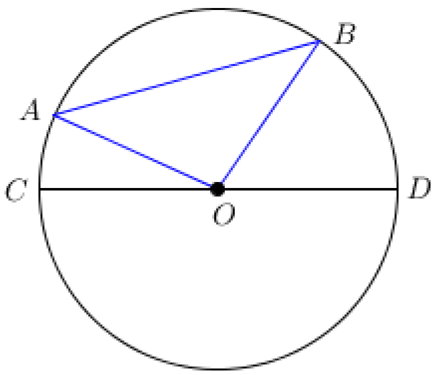
$OA + OB > AB.$

Ponieważ OA i OB są dwoma promieniami okręgu, więc $OA + OB = CD$,

skąd

$CD > AB,$

co należało wykazać.



Twierdzenie 2.

W każdym okręgu średnica okręgu jest prostopadła do cięciwy i dzieli na połowy zarówno cięciwę, łuk okręgu, którego końcami są końce tej cięciwy, oraz kąt środkowy.

Założenie

$CD \perp AB$

Teza

$AH = HB$

$\widehat{AC} = \widehat{CB}$

$|\sphericalangle AOC| = |\sphericalangle COB|$

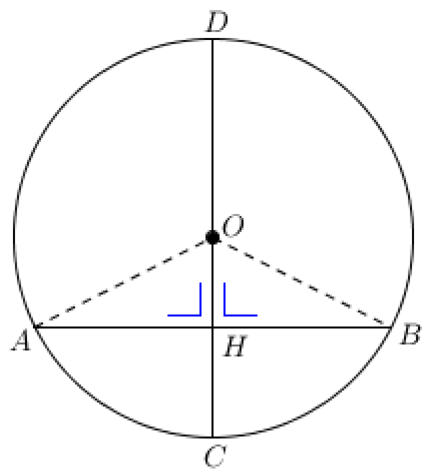
Dowód

Łącząc środek O okręgu z końcami cięciwy, otrzymujemy trójkąt równoramienny AOB, w którym $OA = OB$.

Odcinek OH jest wysokością trójkąta równoramiennego opuszczoną z wierzchołka O na podstawę AB. Jest on więc też środkową tego trójkąta i dwusieczną kąta AOB, czyli

$AH = HB$ i $|\sphericalangle AOC| = |\sphericalangle COB|$.

Ponieważ $|\sphericalangle AOC| = |\sphericalangle COB|$, więc kąty te oparte są na równych łukach, skąd



$\widehat{AC} = \widehat{CB},$

co należało wykazać.

Twierdzenie 3.

W każdym okręgu średnica przecinająca cięciwę w jej środku jest do niej prostopadła.

Założenie	Teza
$AM = MB$	$DC \perp AB$

Dowód

W trójkącie równoramiennym *AOB* odcinek *OM* jest środkową i jednocześnie wysokością, zatem

$DC \perp AB,$

co należało wykazać.

Twierdzenie 4.

W każdym okręgu równe cięciwy mają równe odległości od środka okręgu i odwrotnie, cięciwy, których odległości od środka okręgu są takie same, są równe.

Założenie	Teza
$AB = CD$	$OH = OK$

Dowód

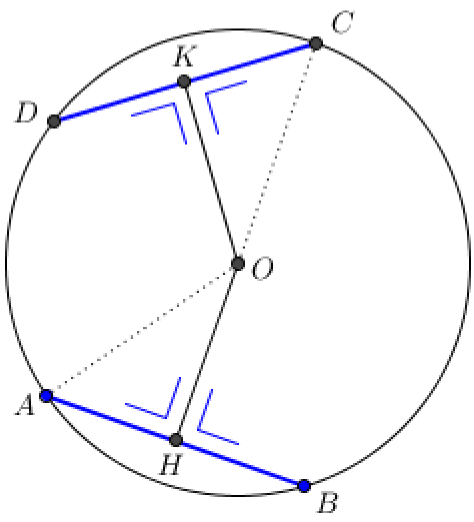
1) Oznaczmy przez *OH* i *OK* odległości cięciw od środka okręgu *O*; odcinki *OH* i *OK* są do tych cięciw prostopadłe i dzielą je na połowy. Ponieważ, z założenia, *AB* = *CD*, więc także *AH* = *CH*.

2) Trójkąty *AOH* i *COK* są prostokątne oraz

$AH = CH$ i $AO = CO,$

co oznacza, że są przystające. W szczególności więc *OH* = *OK*,

co należało wykazać.



Twierdzenie odwrotne

Założenie

$OH = OK$

Teza

$AB = CD$

Trójkąty *AOH* i *COK* są prostokątne oraz *OH* = *OK* (z założenia) i *AO* = *CO* (promienie). Są to więc trójkąty przystające, gdyż mają równą przeciwprostokątne i odpowiednie przyprostokątne. W szczególności: *AH* = *CK*. Ponieważ punkty *H* i *K* są środkami odcinków *AB* i *CD*, więc jeżeli równe są ich połowy, to i całe odcinki są równe, co należało wykazać.

Twierdzenie 5.

W każdym okręgu cięciwy o różnych długościach leżą w różnych odległościach od środka okręgu; dłuższa leży bliżej środka i odwrotnie.

Założenie

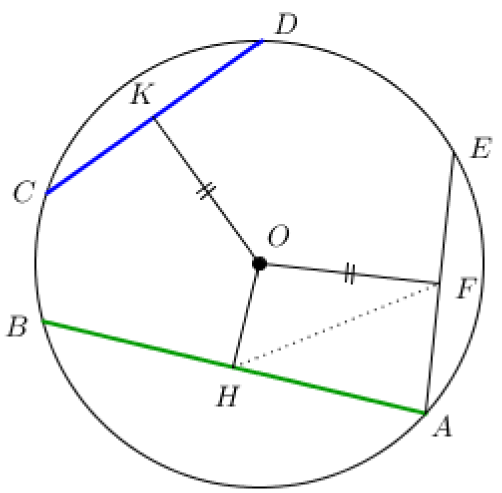
$AB > CD$

Teza

$OH < OK$

Dowód

1) Oznaczmy przez *OH* i *OK* odległości cięciw *AB* i *CD* od środka *O* okręgu. Narysujmy ponadto cięciwę *AE*, równą cięciwie *CD* i oznaczmy jej środek przez *F*. Ponieważ równe cięciwy mają taką samą odległość od środka okręgu, więc *OF* = *OK*.



Z założenia wiadomo, że *AB* > *CD,* więc także *AB* > *AE*, a ponieważ punkty *H* i *F* są środkami odcinków *AB* i *AE,* więc *AH* > *AF*.

2) W trójkącie *AFH* dłuższy bok leży naprzeciw większego kąta, stąd $|\sphericalangle AFH| > |\sphericalangle AHF|$. Oznacza to, że $|\sphericalangle OFH| < |\sphericalangle OHF|$.

3) W trójkącie *OHF* naprzeciw mniejszego kąta leży krótszy bok, więc *OH* < *OF*, a ponieważ *OF* = *OK*, więc *OH* < *OK*, co należało wykazać.

Twierdzenie odwrotne

Założenie

$OH < OK$

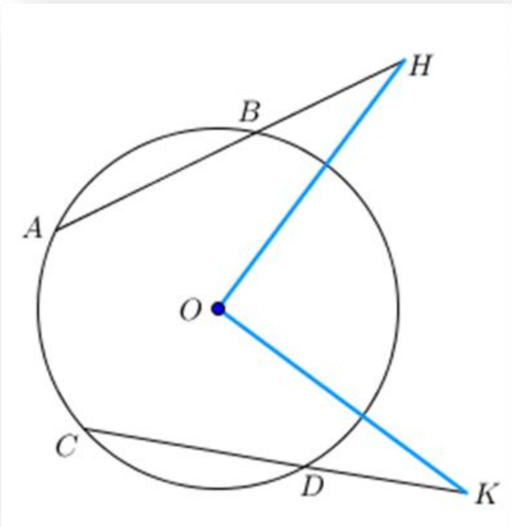
Teza

$AB > CD$

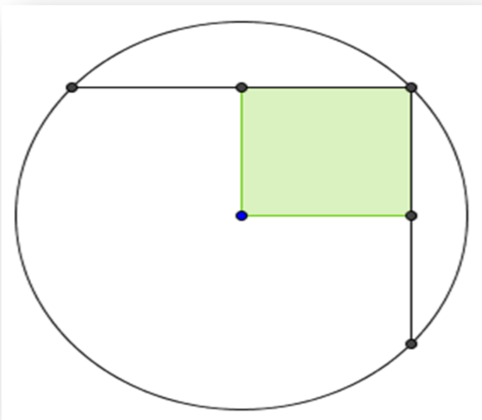
Przeprowadzimy dowód a. a., negując tezę.
Załóżmy, że $AB = CD$ albo $AB < CD$.
Jeśli $AB = CD$, to z twierdzenia prostego wynika, że $AB = CD$, co przeczy tezie.
Jeśli $AB < CD$, to z twierdzenia prostego wynika, że $OH > OK$, co jest sprzeczne z tezą.
W obu przypadkach okazało się, że teza nie jest fałszywa, ale prawdziwa, zatem istotnie $AB > CD$.

Zadanie domowe

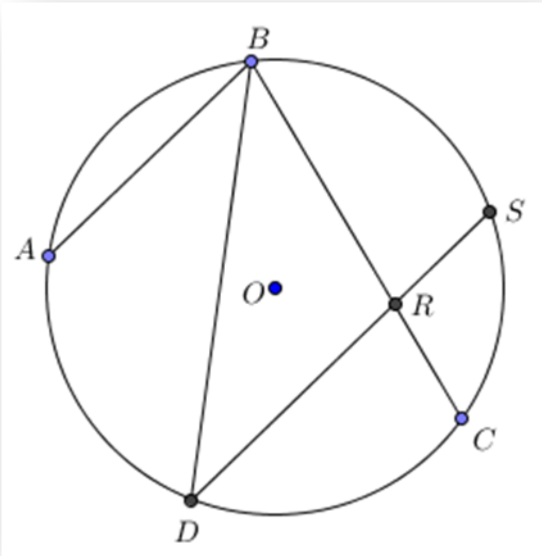
1. W okręgu o środku O poprowadzono dwie cięciwy AB i CD o jednakowej długości. Jedną z nich przedłużono w kierunku AB do punktu H, zaś drugą w kierunku CD do punktu K, tak, że $BH = DK$. Wykaż, że $OH = OK$.



2. W okręgu o środku O poprowadzono dwie prostopadłe cięciwy o jednakowej długości. Wykaż, że czworokąt, którego wierzchołkami są: punkt wspólny cięciw, środki cięciw i środek okręgu, jest kwadratem.



3. W okręgu o środku *O* poprowadzono dwie cięciwy *AB* i *BC* o wspólnym końcu *B* oraz dwusieczną kąta *ABC*. Dwusieczna ta przecina okrąg w punkcie *D*. Wykaż, że cięciwa o końcu *D*, równoległa do cięciwy *AB* i cięciwa *AB* są równe.



scenariusz lekcji nr 8

1. Przedmiot: **Matematyka**
2. Dział programowy: **Wyrażenia algebraiczne**
3. Temat: **Ułamki algebraiczne proste.**
4. Klasa: **Klasa II**
5. Zgodność z podstawą programową: **Uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:**
   - **używa wzorów skróconego mnożenia;**
   - **rozkłada wielomian na czynniki stosując wzory skróconego mnożenia lub wyłączając wspólny czynnik poza nawias;**
   - **wyznacza dziedzinę prostego wyrażenia wymiernego z jedną zmienną, w którym w mianowniku występują tylko wyrażenia dające się łatwo sprowadzić do iloczynu wielomianów liniowych i kwadratowych;**
   - **dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli wyrażenia wymierne; rozszerza i (w łatwych przypadkach) skraca wyrażenia wymierne.**
6. Pomoce (środki) dydaktyczne
   - **stanowiska komputerowe (lub komputer nauczyciela z tablicą interaktywną lub rzutnikiem multimedialnym),**
   - **bezpłatne oprogramowanie GeoGebra wspomagające nauczanie matematyki (http://www.geogebra.org/cms/pl/download/)**
7. Cele: Uczeń:
   - określa dziedzinę wyrażenia wymiernego,
   - wykonuje działania na wyrażeniach wymiernych
   - odróżnia funkcję wymierną od innej funkcji
   - stosuje wzory skróconego mnożenia,
   - rozkłada ułamki algebraiczne na ułamki algebraiczne proste,
   - opracowuje metody szybkiego liczenia i je wykorzystuje,
   - stosuje uzyskane wiadomości do rozwiązywania zadań,
   - posługuje się programem GeoGebra (lub/i arkuszem kalkulacyjnym).
8. Metody nauczania: **Praca z komputerem, elementy wykładu, ćwiczenia**
9. Formy pracy: **Praca indywidualna i w grupach**

Znamy już pojęcie wyrażenia wymiernego:

Wyrażeniem wymiernym zmiennej x nazywamy wyrażenie postaci $\frac{W(x)}{V(x)}$, gdzie $W(x)$ i $V(x)$ są wielomianami i $V(x)$ nie jest wielomianem zerowym (nie jest stałą).

Zasady działań na wyrażeniach wymiernych (ułamkach algebraicznych) są takie same jak na ułamkach arytmetycznych. W szczególności, gdy je dodajemy lub odejmujemy szukamy NWW mianowników i każdy z ułamków wyrażamy za pomocą równoważnego mu ułamka o mianowniku równym właśnie NWW. Wykonajmy np. dodawanie:

$$(1)\frac{3}{x}+\frac{5}{2x-3}=\frac{3(2x-3)+5x}{x(2x-3)}=\frac{6x+9+5x}{2x^2-3x}=\frac{11x+9}{2x^2-3x}.$$

Wykonajmy jeszcze odejmowanie:

(2) $\frac{4}{x-2}-\frac{5}{x+2}=\frac{4(x+2)-5(x-2)}{x^2-4}=\frac{4x+8-5x+10}{x^2-4}=\frac{-x+18}{x^2-4}$.

Zdarzają się też zadania typu:

Jakie liczby należy wstawić w miejsce liter *a* i *b*, aby zachodziła równość

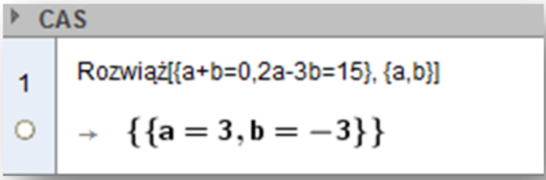
(3) $\frac{a}{x-3}+\frac{b}{x+2}=\frac{15}{(x-3)(x+2)}$?

Doprowadźmy lewą stronę równości do wspólnego mianownika:

$$\frac{a}{x-3}+\frac{b}{x+2}=\frac{a(x+2)+b(x-3)}{(x-3)(x+2)}=\frac{ax+2a+bx-3b}{(x-3)(x+2)}=\frac{(a+b)x+2a-3b}{(x-3)(x+2)}.$$

Porównując liczniki wyrażeń, otrzymujemy

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 2a-3b=15 \end{cases}$$



Jeśli więc *a* = 3 i *b* = -3, to

$$\frac{15}{(x-3)(x+2)}=\frac{3}{x-3}-\frac{3}{x+2}.$$

Wielokrotnie znajdziemy się w takiej sytuacji, w której będziemy musieli odwrócić ten proces, tzn. mając na przykład ułamek taki jak $\frac{15}{x^2-x-6}$ będziemy musieli ponownie wyrazić go w postaci sumy albo różnicy kilku ułamków prostych, którymi w tym przypadku są ułamki $\frac{3}{x-3}$ i $\frac{-3}{x+2}$.

Rozważać będziemy tylko takie ułamki algebraiczne, których mianowniki nie maja powtarzających się czynników liniowych. Dla takich ułamków możemy szybko podać odpowiednią metodę rozkładu, która jest nieco lepsza od metody polegającej na odwróceniu rachunków jak w przykładach (1) i (2). Metoda ta zaprezentowana jest w przykładzie (3). Powtórzmy ją w następującym przykładzie:

Przedstaw ułamek $\frac{7x+5}{x^2+x-2}$ w postaci ułamków prostych.

Najpierw rozkładamy na czynniki mianownik: $\frac{7x+5}{x^2+x-2}=\frac{7x+5}{(x-1)(x+2)}$. Teraz musimy znaleźć takie liczby wymierne *A* i *B*, żeby

$$\frac{7x+5}{(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}.$$

Dodając wyrażenia po prawej stronie tej tożsamości, otrzymujemy

$$\frac{7x+5}{(x-1)(x+2)}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)},$$

co jest równoważne

$(*) 7x+5=A(x+2)+B(x-1)=Ax+2A+Bx-B=(A+B)x+2A-B.$

Aby znaleźć *A* i *B* należy przyrównać współczynniki przy odpowiednich potęgach *x* po obu stronach tożsamości (*); na tej podstawie otrzymujemy

$$\begin{cases} A+B=7 \\ 2A-B=5 \end{cases}$$

co po rozwiązaniu daje nam *A* = 4, *B* = 3.

Uwaga

Współczynniki *A* i *B* możemy znaleźć inaczej. Ponieważ obie strony tożsamości (*)muszą mieć takie same wartości dla wszystkich *x*, możemy za *x* podstawić dowolną liczbę. Wygodnie jest wybrać takie wartości *x*, dla których *x* – 1 oraz x + 2 są równe zeru. Podstawiając *x* = 1 otrzymujemy $12 = 3A \Rightarrow A = 4$, podstawiając *x* = -2, otrzymujemy $-9 = -3B \Rightarrow B = 3$.

Rozważmy jeszcze następujący przykład:

Przedstaw ułamek $\frac{4x-5}{(x+1)(x-2)}$ w postaci ułamków prostych.

Poznamy też metodę, która pozwoli nam znajdować odpowiednie ułamki proste wykonując w tym celu jedynie pewne działania w pamięci.

Mamy znaleźć takie liczby *A* i *B*, dla których

$$\frac{4x-5}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}.$$

Powyższa tożsamość oznacza, że

$$\frac{4x-5}{x-2} = A + \frac{B(x+1)}{x-2}.$$

Podstawiając teraz za *x* dowolną (z wyjątkiem *x* = 2) liczbę, musimy otrzymać dokładnie takie same liczby po prawej i po lewej stronie. Wybieramy podstawienie *x* = -1 (nieprzypadkowo!), skąd otrzymujemy

$$\frac{-9}{-3} = A, \ \text{czyli} \ \ A = 3.$$

Podobnie

$$\frac{4x-5}{x+1} = \frac{A(x-2)}{x+1} + B.$$

Podstawiając *x* = 2, otrzymujemy

$$\frac{3}{3} = B, \ \text{czyli} \ \ B = 1.$$

Zasada jest więc następująca: zakryj w podanym ułamku wyrażenie *x* – 1 , a następnie w ułamku, który widać , za *x* podstaw -1. W ten sposób otrzymujemy licznik ułamka prostego o mianowniku *x* -1 („wystarczy zakryć”).

Stosując tę metodę do ułamka

$$\frac{4x^2-11x-18}{x(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3}$$

otrzymujemy kolejno:

- zakrywając *x* i podstawiając *x* = 0: $\frac{-18}{-6} = 3$, skąd *A* = 3;
- zakrywając *x* + 2 i podstawiając *x* =- 2: $\frac{16+22-18}{10} = \frac{20}{10} = 2$, skąd *B* = 2;
- zakrywając *x* – 3 i podstawiając *x* = 3: $\frac{36-33-18}{15} = -\frac{15}{15} = -1$, skąd *C* = -1.

Końcowy rozkład na ułamki proste jest więc następujący:

$$\frac{4x^2-11x-18}{x(x+2)(x-3)} = \frac{3}{x} + \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-3}.$$

Zadanie domowe

1. Stosując zasadę „wystarczy zakryć” rozłóż podane ułamki algebraiczne na sumę ułamków prostych:

a) $\frac{10}{x(3x+2)(x-1)}$;

b) $\frac{3x}{(x-1)(x+2)(2x-1)}$.

2. Niech $\frac{2x-11}{x^2-5x-14} = \frac{B}{x-7} + \frac{C}{x+2}$ będzie tożsamością. Oblicz $B + C$.

3. Dla jakiego k wyrażenie $\frac{2a^2+2ka-a-k}{a^2+a-2}$ przyjmuje postać $\frac{2a-1}{a-1}$?

scenariusz lekcji nr 9

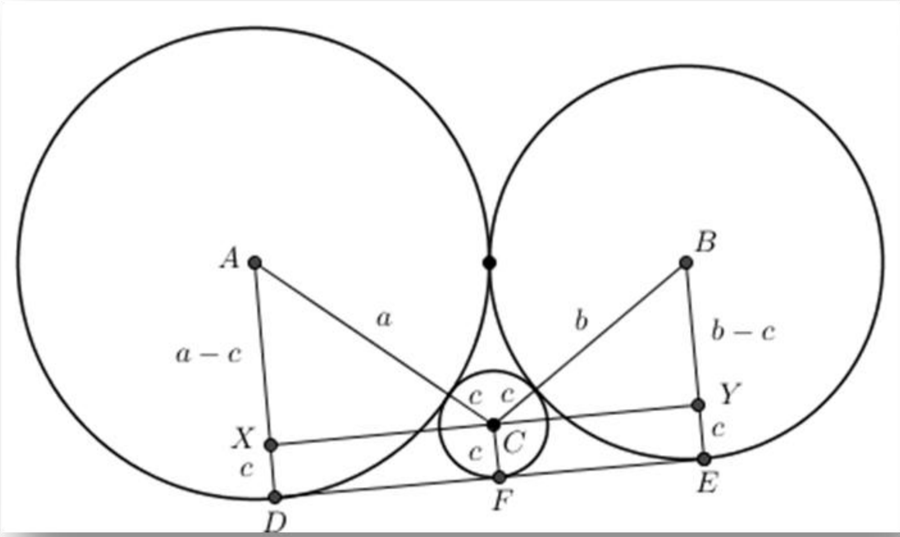
1. Przedmiot: **Matematyka**
2. Dział programowy: **Planimetria. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej.**
3. Temat: **Styczne do okręgów.**
4. Klasa: **Klasa II**
5. Zgodność z podstawą programową: **Uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:**
   - **wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do danej prostej w postaci ogólnej i przechodzi przez dany punkt;**
   - **oblicza odległość punktu od prostej;**
   - **posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ oraz opisuje koła za pomocą nierówności;**
   - **rozpoznaje figury podobne i jednokładne; wykorzystuje ich własności;**
6. Pomoce (środki) dydaktyczne
   - **stanowiska komputerowe (lub komputer nauczyciela z tablicą interaktywną lub rzutnikiem multimedialnym),**
   - **bezpłatne oprogramowanie GeoGebra wspomagające nauczanie matematyki (http://www.geogebra.org/cms/pl/download/)**
7. Cele: Uczeń:
   - przekształca wyrażenia niewymierne,
   - przekształca ogólne równanie okręgu do postaci środkowej i na odwrót,
   - wykorzystuje podobieństwo trójkątów,
   - korzysta z stycznej do okręgu,
   - oblicza odległość punktu od prostej,
   - rozwiązuje problemy za pomocą narzędzi algebry, wykazuje się przy tym dociekliwością poznawczą,
   - wyciąga wnioski z prowadzonych rozumowań,
   - zapisuje uzyskane wnioski,
   - stosuje uzyskane wiadomości do rozwiązywania zadań,
   - posługuje się programem GeoGebra (lub/i arkuszem kalkulacyjnym).
8. Metody nauczania: **Praca z komputerem, elementy wykładu, ćwiczenia**
9. Formy pracy: **Praca indywidualna i w grupach**

Zacznijmy od postawienia pierwszego problemu.

Problem 1.

Niech okręgi o środkach *A* i *B* będą dwoma okręgami stycznymi zewnętrznie, zaś punkty *D* i *E* takimi punktami tych okręgów, że prosta *DE* jest prostą styczną do obu tych okręgów. Niech ponadto okrąg o środku C będzie styczny do danych okręgów oraz do prostej *DE* (zobacz rysunek). Wykaż, że jeśli promienie tych okręgów są równe odpowiednio *a*, *b*, *c*, to

$$\frac{1}{\sqrt{c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}.$$

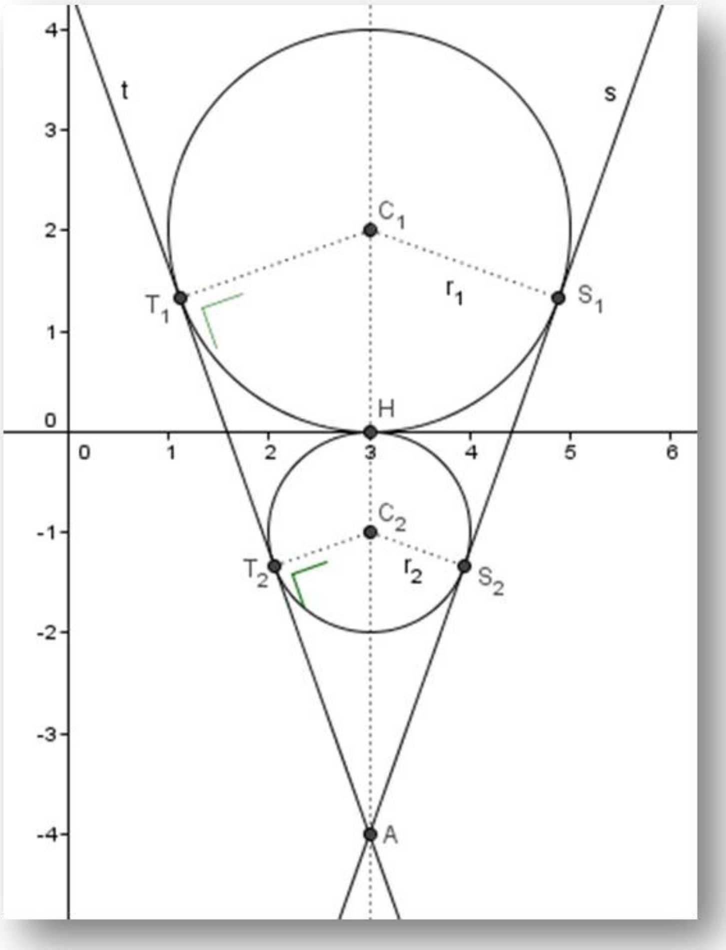


Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku powyżej.
Stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta prostokątnego *AXC*, otrzymujemy:
$|XC|^2 = |XA|^2 - |AX|^2$,
$|XC| = \sqrt{(a+c)^2 - (a-c)^2} = \sqrt{4ac} = 2\sqrt{ac}$.
Ponieważ wielokąt *XDFC* jest prostokątem, więc $|DF| = |XC| = 2\sqrt{ac}$. Podobnie:
$|FE| = |YC| = 2\sqrt{bc}$ i $|DE| = 2\sqrt{ab}$.
Ponieważ
$|DE| = |DF| + |FE|$,
więc
$2\sqrt{ab} = 2\sqrt{bc} + 2\sqrt{ac}$.
Dzieląc powyższą równość przez $2\sqrt{abc}$, otrzymujemy tezę.

Przy okazji warto zauważyć, że długość odcinka stycznej, łączącego punkty styczności, dwóch okręgów stycznych zewnętrznie, o promieniach długości *a* i *b*, jest równa podwojonej średniej geometrycznej długości tych promieni, czyli $2\sqrt{ab}$.
Postawmy jeszcze pytanie: Jaki będzie promień *c* okręgu o środku *C*, jeżeli *a* = 9 i *b* = 4?
Problem 2.
Znaleźć równania wspólnych stycznych do okręgów o równaniach
$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$
i
$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0$.

Przekształćmy powyższe równania do postaci $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Otrzymujemy:
$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$
i
$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 1$.
Dane równania przedstawiają więc dwa okręgi o środkach $C_1 = (3,2)$, $C_2 = (3,-1)$ i promieniach równych odpowiednio 2 i 1. Ponieważ suma długości promieni wynosi 3, odległość środków też

równa jest 3, zatem są to okręgi styczne zewnętrznie, a ponadto punktem styczności jest punkt osi *Ox.*
Wykonajmy teraz stosowny rysunek i wprowadźmy na nim oznaczenia.



Punkt H = (3, 0) jest punktem styczności okręgów, zatem obie styczne przecinają się w punkcie A o odciętej x = 3. Niech T_1 i T_2 będą punktami styczności okręgów i prostej t. Trójkąty AC_1T_1 i AC_2T_2 są podobne, zatem

$AC_2 : C_2T_2 = AC_1 : C_1T_1$,

czyli

$(-1 - y_A) : 1 = (2 - y_A) : 2$,

skąd

$y_A = -4$.

Proste styczne t i s należą wiec do pęku prostych o wierzchołku A = (3, -4) o równaniu $y = m(x-3) - 4$ i można je wyznaczyć, wiedząc, że odległość punktu C_1 = (3, 2) od tych prostych wynosi r_1 = 2. Skorzystajmy tu ze wzoru na odległość punktu (x_0, y_0) od prostej $y = kx + q$:

$$d = \frac{|kx_0 + q - y_0|}{\sqrt{1+k^2}}.$$

Otrzymujemy:

$$\frac{|3m - 3m - 4 - 2|}{\sqrt{1+m^2}} = 2 \Rightarrow \frac{6}{\sqrt{1+m^2}} = 2 \Rightarrow \sqrt{1+m^2} = 3 \Rightarrow m = \pm 2\sqrt{2}.$$

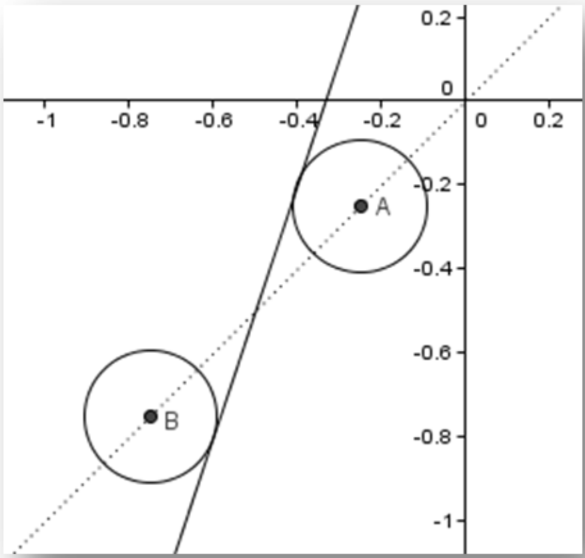
Szukane proste mając więc równania:

$t: y = -2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2} - 4$ i $s: y = 2\sqrt{2}x - 6\sqrt{2} - 4.$

Problem 3.

Wyznaczyć równania dwóch okręgów o promieniu $\frac{\sqrt{10}}{20}$, których środki leżą na dwusiecznej pierwszej i trzeciej ćwiartki układu współrzędnych i są styczne do prostej o równaniu $y = 3x + 1$.

Zacznijmy od rysunku.



Środki okręgów o promieniu $\frac{\sqrt{10}}{20}$ leżą na prostej o równaniu $y = x$ i mają współrzędne $C = (k, k)$. Ich równania są następujące:

$(x - k)^2 + (y - k)^2 = \frac{1}{40}$.

Okręgi te są styczne do prostej o równaniu $y = 3x + 1$, więc odległość punktów *C* = (*k*, *k*) od tej prostej musi być równa $\frac{\sqrt{10}}{20}$, tj.

$$\frac{|3k + 1 - k|}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{20} \to 2k + 1 = \pm\frac{1}{2} \to k = -\frac{1}{4} \vee k = -\frac{3}{4}.$$

Szukanymi równaniami okręgów są zatem:

$10x^2 + 10y^2 + 5x + 5y + 1 = 0, \;\; 10x^2 + 10y^2 + 15x + 15y + 11 = 0.$

Zadanie domowe

1. Dane są dwa okręgi styczne zewnętrznie: okrąg *C* o środku (1, 1), przechodzący przez początek układu współrzędnych i okrąg *C'* o środku (3, 3). Wyznaczyć:
- promienie tych okręgów,
- równania wspólnych stycznych do tych okręgów.
2. Wyznaczyć równania wspólnych stycznych do okręgów o równaniach :

$x^2 + y^2 - 6x = 0$ i $x^2 + y^2 + 2x = 0.$

scenariusz lekcji nr 10

1. Przedmiot: **Matematyka**
2. Dział programowy: **Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka.**
3. Temat: **Zasada włączeń i wyłączeń. Diagramy Venna.**
4. Klasa: **Klasa III**
5. Zgodność z podstawą programową: **Uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:**
   - **zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania.**
6. Pomoce (środki) dydaktyczne
   - **stanowiska komputerowe (lub komputer nauczyciela z tablicą interaktywną lub rzutnikiem multimedialnym),**
   - **bezpłatne oprogramowanie GeoGebra wspomagające nauczanie matematyki (http://www.geogebra.org/cms/pl/download/)**
7. Cele: Uczeń:
   - odczytuje informacje z tabel, diagramów słupkowych i kołowych,
   - wyciąga z takich informacji wnioski, wykonując odpowiednie obliczenia,
   - przedstawia dane w postaci tabel i diagramów,
   - opracowuje statystycznie nieskomplikowany problem,
   - stawia prosty problem i opracowuje go statystycznie,
   - wykazuje się starannością podczas obliczeń,
   - z zaangażowaniem rozwiązuje zadania,
   - wyciąga wnioski z prowadzonych rozumowań,
   - zapisuje uzyskane wnioski,
   - stosuje uzyskane wiadomości do rozwiązywania zadań,
   - posługuje się programem GeoGebra (lub/i arkuszem kalkulacyjnym).
8. Metody nauczania: **Praca z komputerem, elementy wykładu, ćwiczenia**
9. Formy pracy: **Praca indywidualna i w grupach**

W celu przypomnienia działań na zbiorach (skończonych) rozwiążmy następujące zadanie:
Dysponując zbiorami: $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{a, c\}$ uzupełnij tabelki:

∩	Ø	A	B	C
Ø				
A				C
B				
C				

∪	Ø	A	B	C
Ø				
A				
B		A		
C				

Przyjmijmy następującą umowę:

Jeśli A jest zbiorem skończonym, to symbolem |A| oznaczać będziemy liczbę elementów zbioru A. Reguła dodawania mówi, że jeśli zbiory A i B są rozłączne, to

$|ACB| = |A| + |B|$.

Jeśli więc mamy dane dwa zbiory A i B takie, że $A \subseteq B$i chcemy np. policzyć, ile elementów ma zbiór A, to możemy postąpić następująco: liczymy wszystkie elementy zbioru B, następnie te elementy zbioru B, które nie należą do zbioru A i tak otrzymane liczby odejmujemy. Możemy to zapisać następującym wzorem:

$|A| = |B| - |B \backslash A|$.

Jeśli np. A = {*a, b, c,*}, zaś B = {*a ,b, c, d*}, to |B| = 4, |B\A|=1 i |A| = 4 – 1 =3.

Z reguły dodawania wynikają dwa ważne wzory, będące szczególnymi przypadkami tzw. zasady włączeń i wyłączeń:

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

oraz

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

Rozważmy przykład na zastosowanie powyższej zasady.

Przykład 1.

W klasie liczącej 28 chłopców, wszyscy mają jakiś środek transportu. W szczególności, 24 chłopców ma skuter, zaś 9 ma rower. Ilu uczniów tej klasy ma zarówno rower, jak i skuter?

Rozwiązanie

Niech S oznacza zbiór uczniów mających skuter, zaś R – zbiór uczniów mających rower. Mamy zatem:

$|S \cup R| = |S| + |R| - |S \cap R|$.

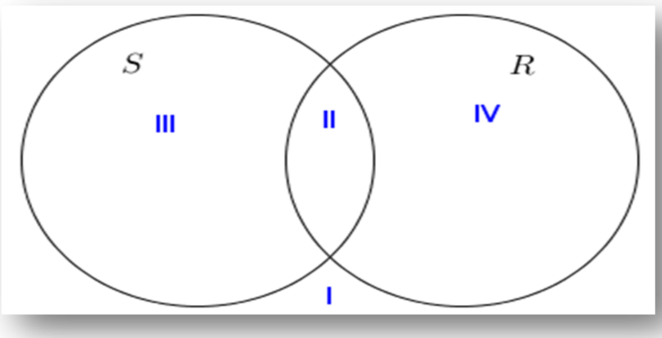
Z założenia wiemy, że $|S \cup R| = 28$, bo każdy chłopiec ma jakiś środek transportu. Ponadto |S| = 24 oraz |R| = 9. Zatem

$28 = 24 + 9 - |S \cap R|$,

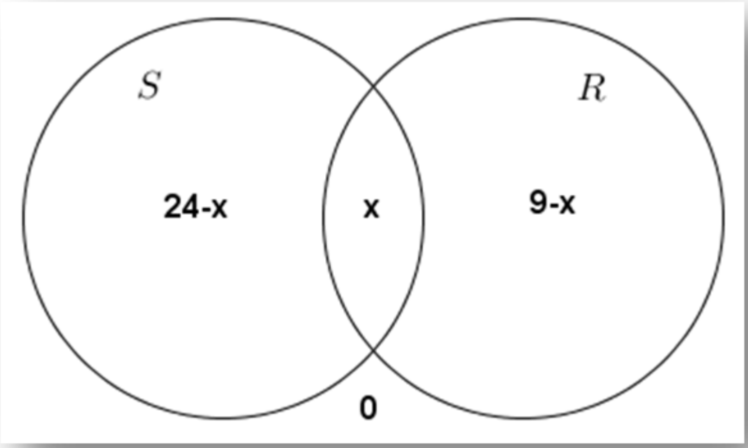
skąd wynika, że $|S \cap R| = 5$. Zatem oba środki transportu ma 5 chłopców.

Powyższe zadanie możemy łatwo rozwiązać graficznie, wykorzystując tzw. diagramy Venna.

Rysujemy dwa przecinające się okręgi przedstawiające zbiory S i R. Dzielą one wtedy płaszczyznę na 4 obszary; nazywamy je składowymi. Na poniższym rysunku są one ponumerowane liczbami rzymskimi I, II, III, IV:



Obszar o numerze I, leżący na zewnątrz obu okręgów, oznacza te elementy, które nie należą do żadnego ze zbiorów S i R, a więc tych chłopców którzy nie mają żadnego środka transportu (w zadaniu 0). Obszar o numerze II, leżący wewnątrz obu okręgów, oznacza te elementy, które należą do obu zbiorów jednocześnie, a więc tych chłopców, którzy mają zarówno skuter jak i rower (w zadaniu *x*). Obszar o numerze III, zawarty wewnątrz lewego okręgu i na zewnątrz prawego, oznacza te elementy, które należą do zbioru S i nie należą do zbioru R (w zadaniu 24 – *x*). obszar o numerze IV, leżący wewnątrz prawego okręgu i na zewnątrz lewego, oznacza te elementy, które należą do zbioru R i nie należą do zbioru S (w zadaniu 9 – *x*).Sytuacja jest więc następująca:



Mamy zatem równanie:

$(24 - x) + (9 - x) + x + 0 = 28,$

skąd

$x = 5.$

Przykład 2.

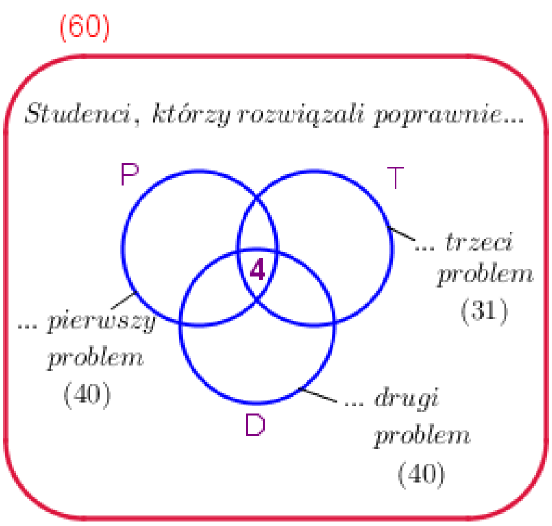
Komisja egzaminuje 60 studentów. Zadanie matematyczne składa się z trzech problemów. W tabeli przedstawiono liczby studentów, którzy rozwiązali poprawnie poszczególne problemy:

pierwszy problem	**40**
drugi problem	40
trzeci problem	31
pierwszy i drugi problem	25
pierwszy i trzeci problem	15
drugi i trzeci problem	17
wszystkie problemy	4

Czy na podstawie tych informacji możemy odpowiedzieć na następujące pytania?

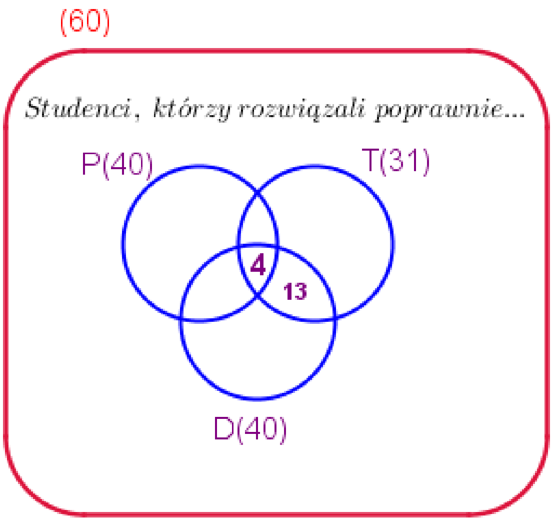
a) Ilu studentów rozwiązało poprawnie drugi i trzeci problem, ale nie pierwszy?
b) Ilu studentów rozwiązało poprawnie tylko drugi problem?
c) Ilu studentów nie rozwiązało poprawnie żadnego problemu?

Wykonajmy stosowny diagram Venna.



Wykorzystując dane, stwierdzamy, że

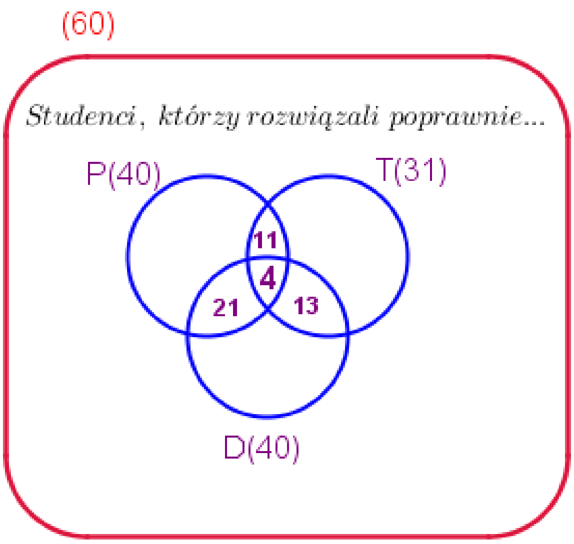
$|P \cap D \cap T| = 4.$



Ponieważ $|D \cap T| = 17$, więc

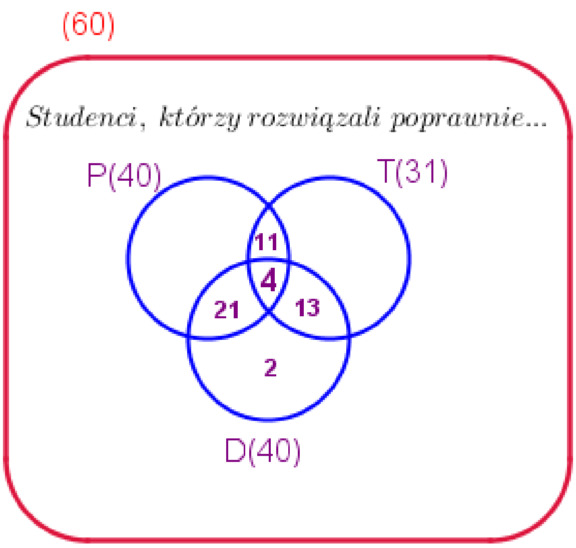
$|D \cap T| - |P \cap D \cap T| = 13.$

(Ad. **a**))



Ponieważ $|D \cap P| = 25$, więc

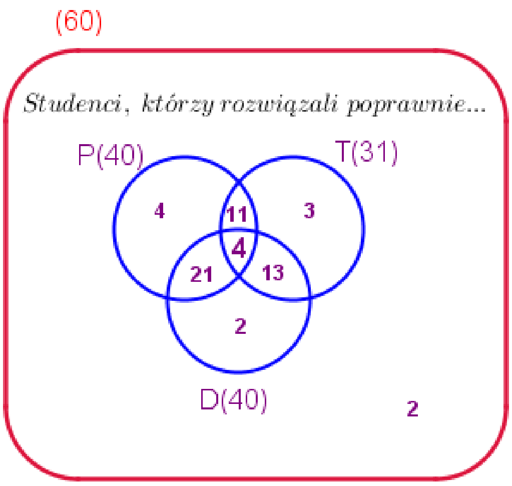
$|D \cap P| - |P \cap D \cap T| = 21,$



Liczba studentów, którzy rozwiązali drugi problem wynosi

$$|P \cap T| - |P \cap D \cap T| = 11. \qquad\qquad 40 - (13 + 4 + 21) = 2.$$

(Ad. **b**))



Liczba studentów, którzy nie rozwiązali żadnego z trzech problemów, wynosi

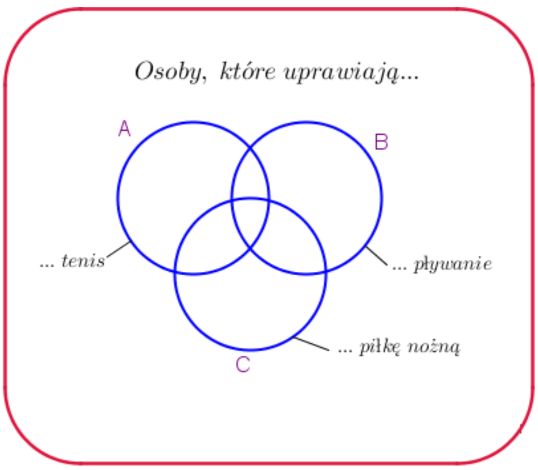
$$60 - (4 + 21 + 2 + 11 + 4 + 13 + 3) = 2.$$

(Ad. **c**))

Zadanie domowe

1. Skopiuj wielokrotnie podany diagram i zaznacz obszary, odpowiadające operacjom na elementach zbiorów A, B, C. Liczby elementów tych zbiorów odpowiadają liczbie osób, które uprawiają tenis, pływanie, piłkę nożną.

a) tenis i pływanie;
b) piłkę nożną i tenis;
c) tenis, ale nie pływanie;
d) piłkę nożną lub tenis, ale nie jednocześnie;
e) żaden ze sportów.



2. Ankieta przeprowadzona w pewnym liceum wykazała, że:
    - 30% uczniów lubi matematykę;
    - 60% uczniów lubi filozofię;
    - 20% uczniów lubi matematykę i filozofię.

   Oblicz, ile procent uczniów nie lubi ani matematyki, ani filozofii.

3. Wyniki badania znajomości języków obcych, przeprowadzonego na pewnej grupie obywateli, są następujące:

LICZBA OSÓB	ZNANE JĘZYKI
76	angielski
56	francuski
21	angielski i francuski
12	ani angielski, ani francuski

a) Ile osób wzięło udział w badaniu?
b) Ile osób zna tylko jeden język obcy?
c) Ile osób zna tylko angielski?
d) Ile osób zna tylko francuski?

[a) 123; b) 90; c) 55; d) 35]

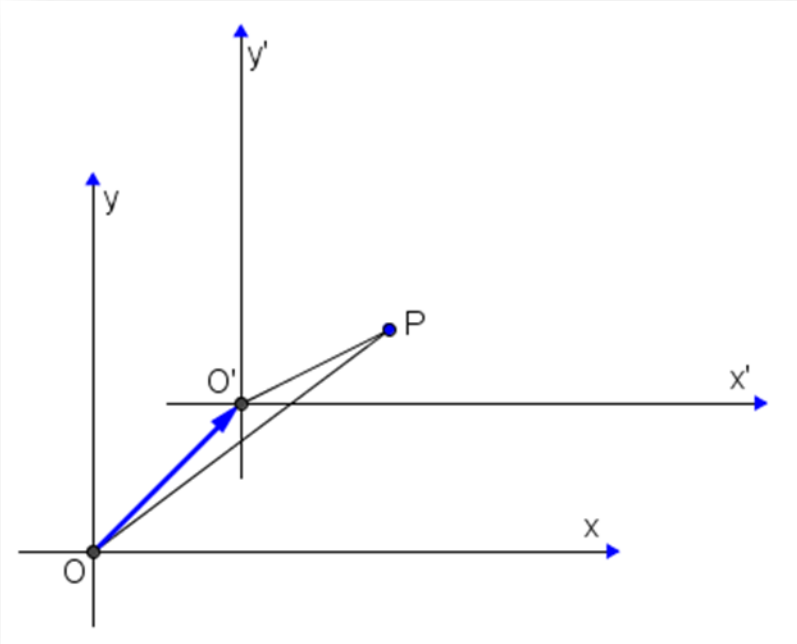
scenariusz lekcji nr 11

1. Przedmiot: **Matematyka**
2. Dział programowy: **Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Trygonometria.**
3. Temat: **Zmiana układu współrzędnych: przesunięcie i obrót.**
4. Klasa: **Klasa II**
5. Zgodność z podstawą programową: **Uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:**
   - **oblicza współrzędne oraz długość wektora; dodaje i odejmuje wektory oraz mnoży je przez liczbę. Interpretuje geometrycznie działania na wektorach;**
   - **stosuje wektory do opisu przesunięcia wykresu funkcji.**
6. Pomoce (środki) dydaktyczne
   - **stanowiska komputerowe (lub komputer nauczyciela z tablicą interaktywną lub rzutnikiem multimedialnym),**
   - **bezpłatne oprogramowanie GeoGebra wspomagające nauczanie matematyki (http://www.geogebra.org/cms/pl/download/)**
7. Cele: Uczeń:
   - znajduje współrzędne narysowanego wektora,
   - rysuje przykład wektora o danych współrzędnych,
   - przesuwa figurę o dany wektor,
   - znajduje współrzędne wektora o danym początku i końcu
   - oblicza współrzędne sumy wektorów i iloczynu wektora przez liczbę,
   - wykorzystuje działania na wektorach do rozwiązywania zadań,
   - wykazuje się starannością przy wykonywaniu i przekształcaniu rysunków,
   - rozwiązuje problemy za pomocą narzędzi algebry, wykazuje się przy tym dociekliwością poznawczą,
   - wyciąga wnioski z prowadzonych rozumowań,
   - zapisuje uzyskane wnioski,
   - stosuje uzyskane wiadomości do rozwiązywania zadań,
   - posługuje się programem GeoGebra (lub/i arkuszem kalkulacyjnym).
8. Metody nauczania: **Praca z komputerem, elementy wykładu, ćwiczenia**
9. Formy pracy: **Praca indywidualna i w grupach**

Badając figury geometryczne metodą współrzędnych dogodnie jest czasem zastąpić pierwotnie obrany układ współrzędnych innym układem, bliżej związanym z rozważaną figurą. Zajmiemy się więc tutaj przejściem od jednego układu do drugiego w przypadku, gdy oba układy są prostokątne i zorientowane dodatnio. Każdy nowy układ można otrzymać z danego układu przez złożenie dwóch przekształceń: takiego **przesunięcia** układu, które jego początek przekształca na początek nowego układu, i **obrotu** dokoła nowego początku o kąt dawnej osi odciętych z nową.

I. PRZESUNNIĘCIE UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH

Niech *x'O'y'* będzie układem współrzędnych otrzymanym przez przesunięcie równoległe danego układu *xOy* o wektor $\overrightarrow{OO'}$ o współrzędnych *a* i *b* (rys.).



Osie *O'x'* i *O'y'* są odpowiednio równoległe do osi *Ox* i *Oy* i zgodnie z nimi skierowane, więc wektory jednostkowe $\overrightarrow{\imath_1'}$ i $\overrightarrow{\imath_2'}$ osi *O'x'* i *O'y'* są odpowiednio równe wektorom jednostkowym osi *Ox* i *Oy*, tj. $\overrightarrow{\imath_1'} = \overrightarrow{\imath_1}$, $\overrightarrow{\imath_2'} = \overrightarrow{\imath_2}$. Związki współrzędnych *x, y* dowolnego punktu *P* w układzie *xOy* ze współrzędnymi *x', y'* tegoż punktu w układzie *x'O'y'* wynikają z równości:

$$(*)\quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}.$$

Ponieważ

$$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{\imath_1} + y\overrightarrow{\imath_2},\quad \overrightarrow{OO'} = a\overrightarrow{\imath_1} + b\overrightarrow{\imath_2},\quad \overrightarrow{O'P'} = x'\,\overrightarrow{\imath_1'} + y'\,\overrightarrow{\imath_2'} = x'\,\overrightarrow{\imath_1} + y'\,\overrightarrow{\imath_2}.$$

Podstawiając do wzoru (*), otrzymujemy

$$x\overrightarrow{\imath_1} + y\overrightarrow{\imath_2} = a\overrightarrow{\imath_1} + b\overrightarrow{\imath_2} + x'\,\overrightarrow{\imath_1} + y'\,\overrightarrow{\imath_2},$$

czyli

$$x\overrightarrow{\imath_1} + y\overrightarrow{\imath_2} = (x' + a)\overrightarrow{\imath_1} + (y' + b)\overrightarrow{\imath_2},$$

a stąd

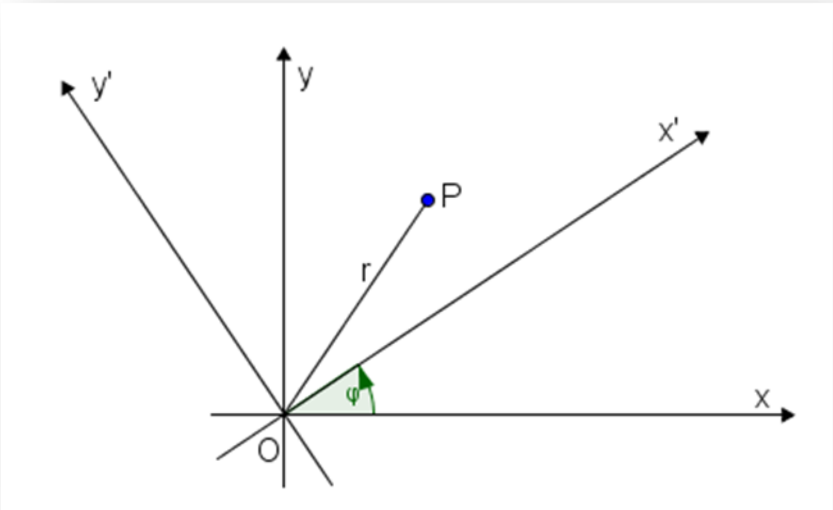
$$\begin{cases} x - x' + a \\ y = y' + b \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases}$$

Współrzędne punktu w układzie przesuniętym otrzymujemy odejmując od dawnych współrzędnych tego punktu współrzędne nowego początku układu.

Uwaga
Przy przesunięciu układu współrzędne wektora nie ulegają zmianie.

II. OBRÓT UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH

Niech *x'Oy'* będzie układem współrzędnych otrzymanym przez obrót układu *xOy* dokoła punktu *O* o kąt φ, czyli takim układem, że $\measuredangle xOx' = \varphi$ (rys.).



Niech *P* = (*x*, *y*) w układzie *xOy* i *P* = (*x'*, *y'*) w układzie *x'Oy'*. Niech ponadto *OP* = *r*, $\measuredangle xOP = \alpha, \measuredangle x'OP = \alpha'$. Jest zatem

w układzie *xOy*: $x = r\cos\alpha\,,\quad y = r\sin\alpha,$

w układzie *x'Oy'*: $x' = r\cos\alpha'\,,\ y' = r\sin\alpha'.$

Ponieważ

$\measuredangle xOP = \measuredangle xOx' + \measuredangle x'OP$, czyli $\alpha = \varphi + \alpha'$,

więc

$$x = r\cos(\varphi + \alpha') = r\cos\varphi\cos\alpha' - r\sin\varphi\sin\alpha' = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi;$$

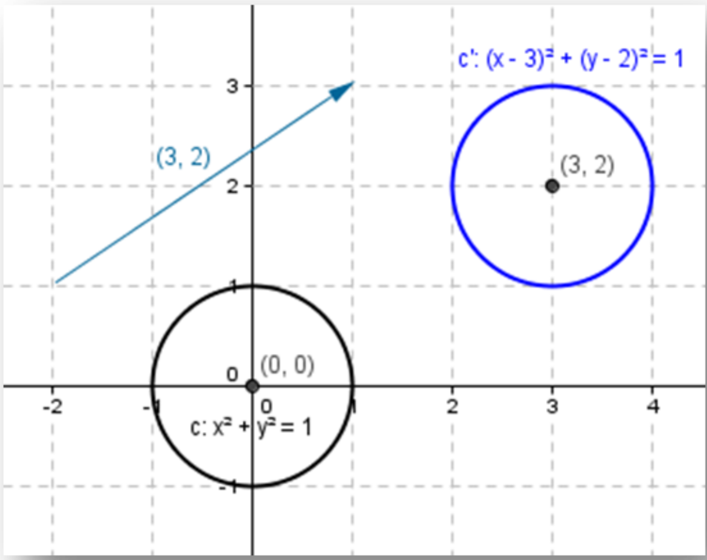
$$y = r\sin(\varphi + \alpha') = r\sin\varphi\cos\alpha' + r\cos\varphi\sin\alpha' = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi\,.$$

Otrzymaliśmy zatem następujące wzory:

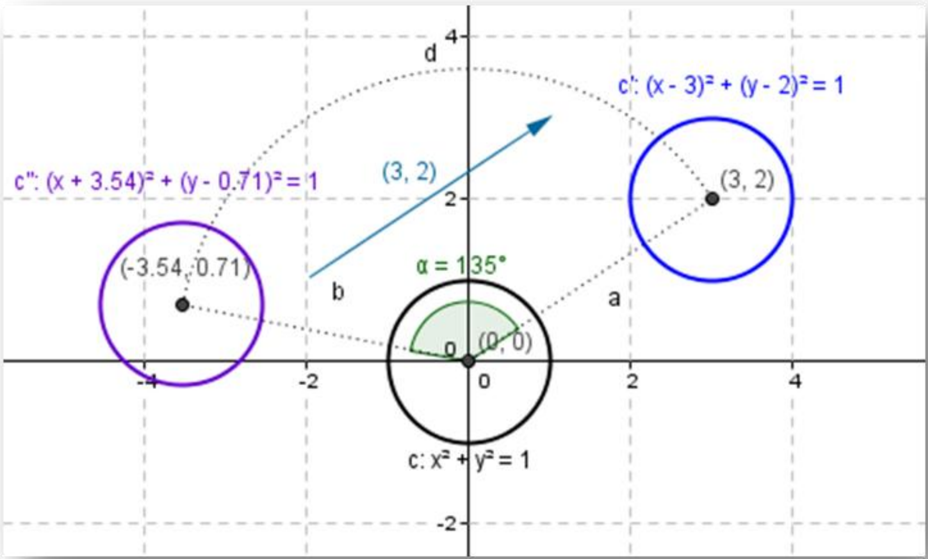
$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{cases} \text{lub} \quad \begin{cases} x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$$

Przykłady

Przesuńmy o wektor [3, 2] okrąg o równaniu $x^2 + y^2 = 1$ (wykonać obliczenia!).



Obróćmy okrąg o równaniu $(x-3)^2+(y-2)^2=1$ 0 kąt $\varphi = 135^0$ (wykonaj obliczenia!).



Zadanie domowe

1. Dane są punkty *A* = (5,3), *B* = (-1, 7), *C* = (2, -1). Znajdź współrzędne tych punktów w układzie przesuniętym, którego początek znajduje się w punkcie przecięcia środkowych trójkąta *ABC*.

2. Dwa kolejne wierzchołki kwadratu leżą w punktach *O*= (0, 0) i *P* = (4, 3). Znajdź pozostałe dwa wierzchołki.

scenariusz lekcji nr 12

1. Przedmiot: **Matematyka**
2. Dział programowy: **Wyrażenia algebraiczne, Równania i nierówności.**
3. Temat: **Nierówności i układy nierówności z jedną zmienną z parametrem.**
4. Klasa: **Klasa I**
5. Zgodność z podstawą programową: **Uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:**
   - **rozkłada wielomian na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia lub wyłączając wspólny czynnik poza nawias;**
   - **rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem;**
   - **rozwiązuje proste nierówności wymierne;**
   - **rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną.**
6. Pomoce (środki) dydaktyczne
   - **stanowiska komputerowe (lub komputer nauczyciela z tablicą interaktywną lub rzutnikiem multimedialnym),**
   - **bezpłatne oprogramowanie GeoGebra wspomagające nauczanie matematyki (http://www.geogebra.org/cms/pl/download/)**
7. Cele: Uczeń:
   - rozwiązuje nierówności liniowe z jedną zmienną z parametrem,
   - rozwiązuje układy nierówności liniowych z jedną zmienną z parametrem,
   - stosuje wzory skróconego mnożenia,
   - określa dziedzinę wyrażenia wymiernego,
   - interpretuje graficznie znak wartości wyrażenia wymiernego,
   - rozważa przypadki w zależności od znaku wartości parametru,
   - wykazuje się starannością w obliczeniach algebraicznych,
   - rozwiązuje problemy za pomocą narzędzi algebry, wykazuje się przy tym dociekliwością poznawczą,
   - wyciąga wnioski z prowadzonych rozumowań,
   - zapisuje uzyskane wnioski,
   - stosuje uzyskane wiadomości do rozwiązywania zadań,
   - posługuje się programem GeoGebra (lub/i arkuszem kalkulacyjnym).
8. Metody nauczania: **Praca z komputerem, elementy wykładu, ćwiczenia**
9. Formy pracy: **Praca indywidualna i w grupach**

Zajmiemy się dzisiaj tematem nieco pomijanym w dostępnych materiałach, a obecnym w podstawie programowej, mianowicie nierównościami liniowymi z parametrem z jedną zmienną oraz układami takich nierówności.

Rozważmy kilka przykładów.

Przykład 1.

Rozwiąż nierówność:

$a(x-a) < 2(x-2).$

W tego typu przykładach staramy się przedstawić nierówność w postaci

$A \cdot x < B.$

Wymaga to kilku przekształceń:
$ax - a^2 < 2x - 4,$
$ax - 2x < a^2 - 4,$
$x(a-2) < (a-2)(a+2).$
W przypadku równania rozważalibyśmy tylko dwa przypadki: $a - 2 \neq 0$ i $a - 2 = 0$. W przypadku nierówności musimy rozważyć trzy przypadki:

$a - 2 > 0$	$a > 2$	$x < a + 2$
$a - 2 < 0$	$\boldsymbol{a < 2}$	$\boldsymbol{x > a + 2}$
$a - 2 = 0$	$\boldsymbol{a = 2}$	$\boldsymbol{x \cdot 0} < 0$

Odpowiedź.

Jeżeli $a > 2$, to $x < a + 2$; jeżeli $a < 2$, to $x > a + 2$; jeżeli $a = 2$, to nierówność jest sprzeczna.

Przykład 2.

Rozwiąż nierówność:

$$(*)\quad \frac{3x + 5a - 2}{3a - 2 - x} < 0.$$

Sprawdźmy najpierw, dla jakich wartości *x* licznik i mianownik tego wyrażenia są dodatnie.

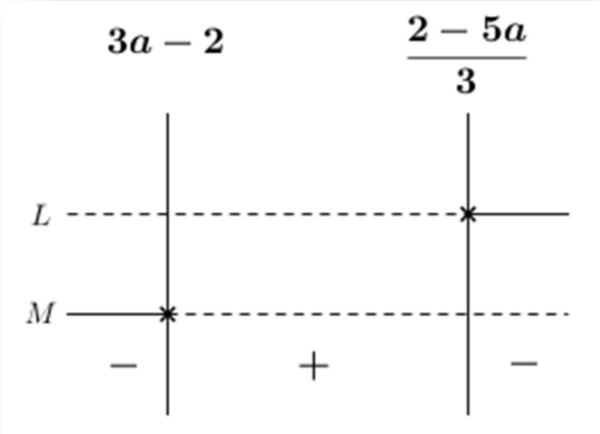
$L > 0{:}\;\; 3x + 5a - 2 > 0,\;\; x > \dfrac{2 - 5a}{3};$

$M > 0{:}\;\; 3a - 2 - x > 0,\;\; x < 3a - 2.$

Załóżmy teraz, że z dwóch liczb: $\frac{2-5a}{3}$ i $3a - 2$

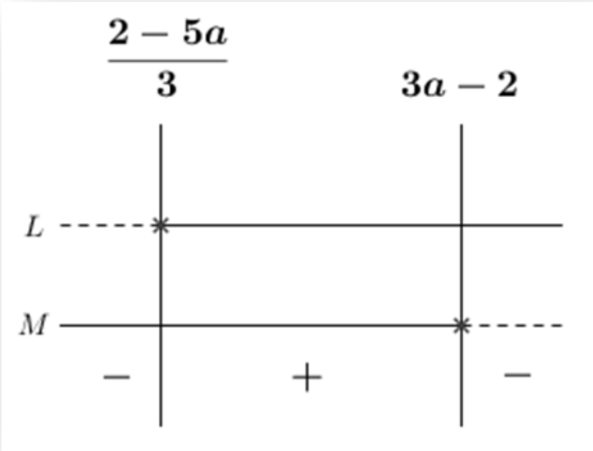
$3a - 2 < \dfrac{2 - 5a}{3}.$

Nierówność tę spełniają wszystkie liczby $a < \frac{4}{7}$. Rozważymy zatem trzy przypadki: $a < \frac{4}{7}, a > \frac{4}{7}$ i $a = \frac{4}{7}$. Jeśli $a < \frac{4}{7}$, to



Z powyższego diagramu odczytujemy, że w tym przypadku nierówność (*) zachodzi dla
$x < 3a - 2 \vee x > \dfrac{2-5a}{3}$.

Niech teraz $a > \frac{4}{7}$. Wówczas $\frac{2-5a}{3} < 3a - 2$ i diagram jest następujący:



W tym przypadku widzimy, że nierówność (*) zachodzi dla
$x < \dfrac{2-5a}{3} \vee x > 3a - 2$.

Jeśli $a = \frac{4}{7}$,to

$$\frac{3x + 5 \cdot \dfrac{4}{7} - 2}{3 \cdot \dfrac{4}{7} - 2 - x} < 0 \to \frac{21x + 6}{-2 - 7x} < 0 \to \frac{3(7x + 2)}{-(7x + 2)} < 0 \to -3 < 0, \text{ jeśli } x \neq -\frac{2}{7}.$$

Odpowiedź.

Jeżeli $a < \frac{4}{7}$, to $x < 3a - 2 \vee x > \frac{2-5a}{3}$; jeżeli $a > \frac{4}{7}$, to $x < \frac{2-5a}{3} \vee x > 3a - 2$; jeżeli $a = \frac{4}{7}$, to dla $x \neq -\frac{2}{7}$ nierówność jest nieoznaczona.

Przykład 3.

Rozważmy układ nierówności:

$$(*)\begin{cases} ax > 3 \\ x > 2 - a \end{cases}$$

a) Dla jakich wartości parametru *a* układ nie ma rozwiązań?

b) Dla jakiej wartości parametru *a* jednym z rozwiązań układu jest *x* = 1?

c) W jakim przypadku wszystkie rozwiązania są większe od 10?

Dla równania pierwszego układu (*) mamy trzy przypadki:

$a < 0$	$x < \frac{3}{a}$
$a > 0$	$x > \frac{3}{a}$
$a = 0$	$0 \cdot x > 3$

W przypadku pierwszym mamy układ:

$$\begin{cases} x < \frac{3}{a} \\ x > 2 - a \end{cases}$$

Dla każdego $a < 0$ wartości wyrażenia $\frac{3}{a}$ są ujemne , a wartości wyrażenia $2 - a$ są dodatnie, zatem układ (*) nie ma rozwiązań dla $\boldsymbol{a \leq 0}$ (włączamy przypadek trzeci).

W przypadku drugim mamy układ:

$$\begin{cases} x > \frac{3}{a} \\ x > 2 - a \end{cases}$$

W tym przypadku wartość wyrażenia $\frac{3}{a}$ jest zawsze dodatnia, natomiast wartość wyrażenia $2 - a$ jest dodatnia dla $0 < a < 2$, zaś ujemna dla $a > 2$, ale jest zawsze $\frac{3}{a} > 2 - a$.

Odpowiedź do punktu b) uzyskamy, rozwiązując nierówność

$$\frac{3}{a} < 1,$$

czyli

$$\boldsymbol{a} > 3,$$

zaś odpowiedź do punktu c) uzyskamy, rozwiązując nierówność

$$\frac{3}{a} > 10,$$

czyli

$$\mathbf{0} < a < \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}}.$$

Zadanie domowe

1. Rozwiąż równania ze zmienną *x*:

a) $ax < x + a - 1;$

b) $ax + 1 \geq a^2 + x;$

c) $ax + 1 < \frac{1+ax}{2}.$

2. Dany jest układ równań

$$\begin{cases} (3a + 2)x \geq 2a - 1 \\ x > 2a \end{cases}$$

a) Dla jakich wartości parametru *a* zbiór rozwiązań jest nieograniczony?

b) Dla jakich wartości parametru *a* $x = 7$ jest rozwiązaniem, zaś $x = 8$ nie jest rozwiązaniem?

c) Czy istnieją takie wartości parametru *a*, dla której układ ma tylko jedno rozwiązanie?

$\left[a)\ a \geq -\frac{2}{3};\quad b)\ -\frac{15}{19} \leq a < -\frac{17}{22};\quad c)\ \text{nie}\right]$

scenariusz lekcji nr 13

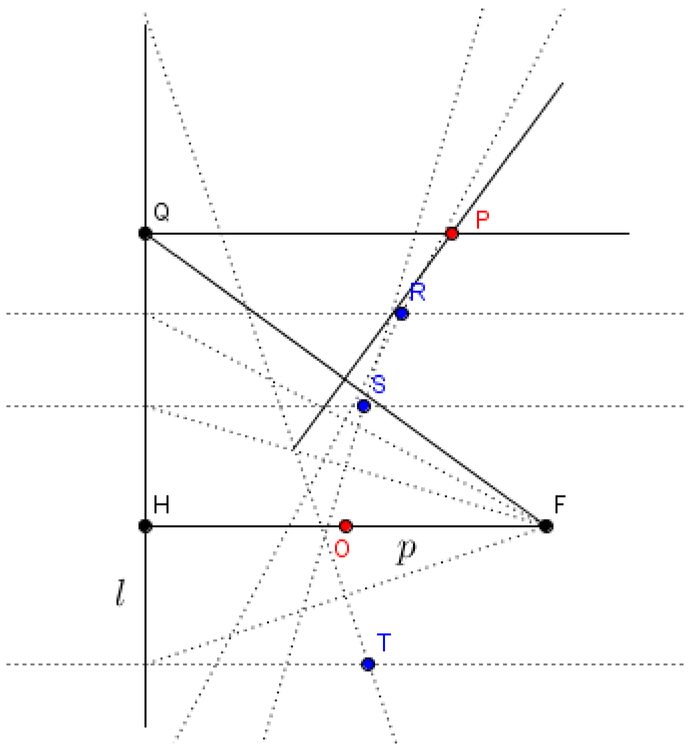
1. Przedmiot: **Matematyka**
2. Dział programowy: 8.**Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej, 11. Rachunek różniczkowy**
3. Temat: **Różne równania paraboli.**
4. Klasa: **Klasa II**
5. Zgodność z podstawą programową: Uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu pod**stawowego, a ponadto**
   - **oblicza współrzędne i długość wektora;**
   - **stosuje wektory do opisu przesunięcia wykresu funkcji;**
   - **rozwiązuje równania z wartością bezwzględną**
6. Pomoce (środki) dydaktyczne
   - **stanowiska komputerowe (lub komputer nauczyciela z tablicą interaktywną lub rzutnikiem multimedialnym),**
   - **bezpłatne oprogramowanie GeoGebra wspomagające nauczanie matematyki (http://www.geogebra.org/cms/pl/download/)**
7. Cele: Uczeń:
   - stosuje wzór na odległość,
   - zna pojęcie miejsca geometrycznego punktów,
   - zna pojęcie ognisko i kierownica paraboli,
   - przekształca równania paraboli,
   - wyciąga wnioski na podstawie zrealizowanych przykładów,
   - zapisuje uzyskane wnioski,
   - stosuje uzyskane wiadomości do rozwiązywania zadań.,
   - posługuje się programem GeoGebra (lub arkuszem kalkulacyjnym).
8. Metody nauczania: **Praca z komputerem, elementy wykładu, ćwiczenia**
9. Formy pracy: **Praca indywidualna i w grupach**

Tym razem opiszemy zbiór punktów zwanych parabolą oraz porównamy otrzymany wynik ze znanym nam równaniem paraboli $y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$.

Zadanie.

Znaleźć zbiór wszystkich punktów równo oddalonych od danej prostej *l* i od danego punktu *F* nie leżącego na *l*.

Wyznaczmy konstrukcyjnie punkty poszukiwanego zbioru. Odpowiednie postępowanie prowadzi do następującego rysunku:



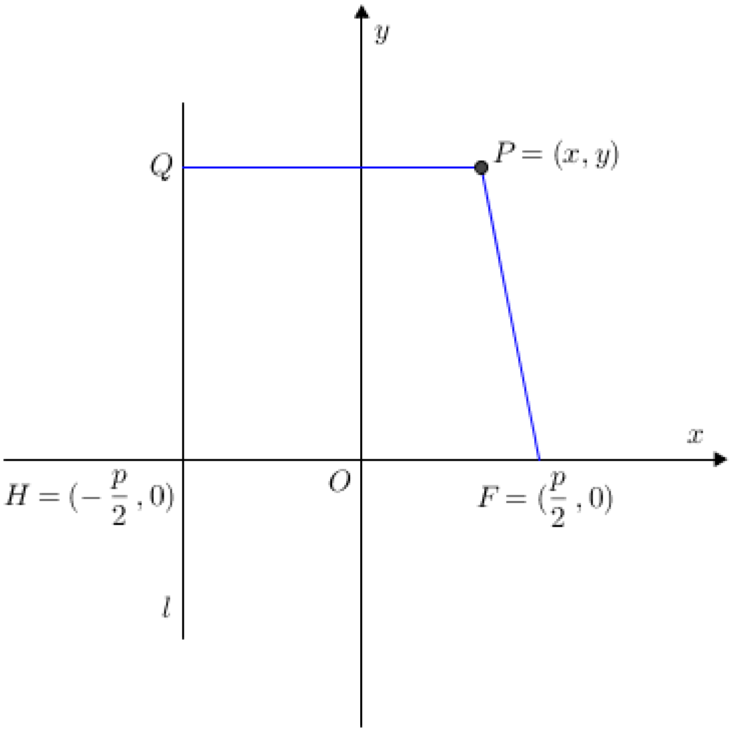
Na powyższym rysunku punkty *O, P, R, S, T* spełniają warunki zadania. Konstruujemy je następująco: niech odległością punktu *F* od prostej *l* będzie *p*. Punkt *O*, będący środkiem odcinka *FH*, spełnia warunki zadania. Jak konstruujemy punkt *P* (*R, S, T*)? W dowolnym punkcie *Q* prostej *l* prowadzimy prostopadłą do *l* oraz symetralną odcinka *FQ*. Punkt przecięcia się tych prostych jest punktem spełniającym warunki zadania, gdyż jako punkt symetralnej odcinka jest równoodległy od jego końców.

Rozwiążmy teraz to zadanie metodami geometrii analitycznej, wprowadzając dogodny układ współrzędnych, co uprości rachunki. Za oś odciętych obierzmy oś symetrii figury *HF*, skierowując ją od *H* do *F*, oś rzędnych poprowadźmy przez środek *O* odcinka *HF* (zobacz rysunek poniżej). Punkt *F* ma wówczas współrzędne $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, prosta *l* ma równanie $x = -\frac{p}{2}$, rzut *Q* punktu *P* na *l* ma współrzędne $\left(-\frac{p}{2}, y\right)$. Punkt $P = (x, y)$ należy do poszukiwanego zbioru punktów wtedy i tylko wtedy, gdy

$|PF| = |PQ|$,

tj. gdy

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + 0^2},$$



co daje warunek

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|.$$

Jest on równoważny warunkowi

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2,$$

który po redukcji otrzymuje postać

$$y^2=2px.$$

Zbiór punktów opisanych powyższym równaniem jest **parabolą**. Inaczej: dla każdej paraboli istnieje układ współrzędnych, w którym parabola jest zbiorem punktów o współrzędnych (*x* ,*y*) spełniających równanie $y^2=2px$, gdzie *p* jest liczbą dodatnią, nazywaną parametrem paraboli. Równanie to nazywa się równaniem wierzchołkowym paraboli. Punkt *F* nazywa się **ogniskiem** paraboli i ma współrzędne $\left(\frac{p}{2},0\right)$, zaś prosta *l* nazywa się **kierownicą** paraboli i ma równanie $x=-\frac{p}{2}$.

Wykonajmy trzy ćwiczenia.

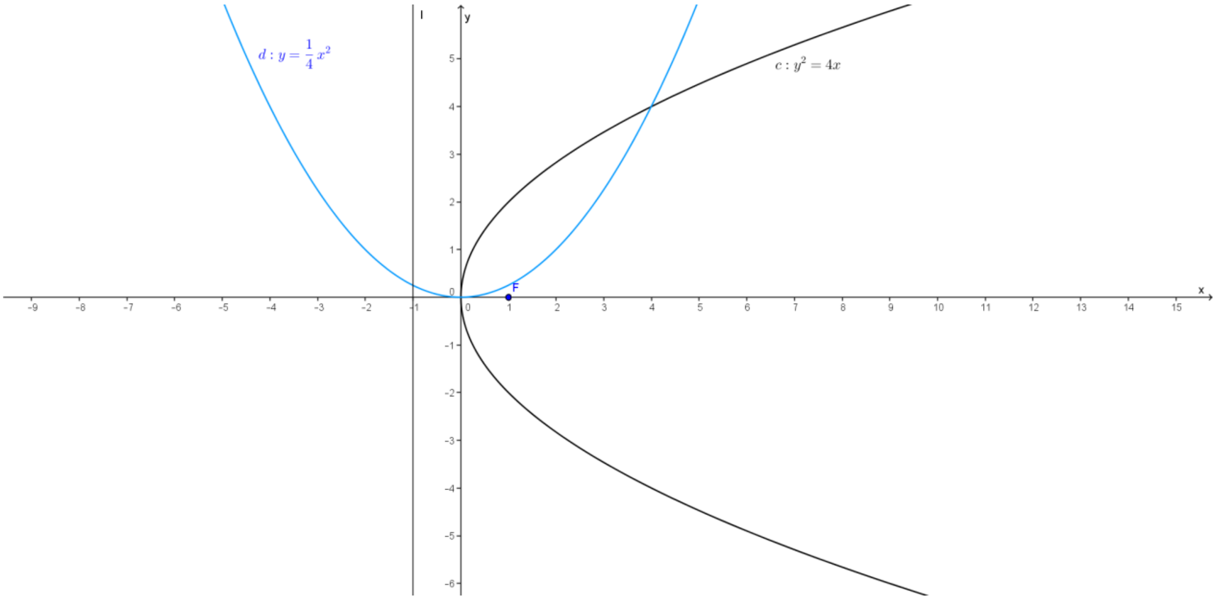
Ćwiczenie1.

Znajdź ognisko i kierownicę paraboli $y^2=4x$.

Rozwiązanie.

Pisząc równanie $y^2 = 4x$ w postaci $y^2 = 2 \cdot 2x$, stwierdzamy, że *p* = 2. Zatem

$$F = \left(\frac{2}{2}, 0\right) = (1{,}0), \quad x = -\frac{2}{2} = -1.$$



Powyższy rysunek jest wykonany przy pomocy GeoGebry. Konstruujemy najpierw prostą *x* = -1 i punkt (1, 0). Następnie wykorzystujemy narzędzie **Parabola** i wybieramy punkt i kierownicę. Zauważmy, że jeśli w równaniu $y^2 = 2px$ zastąpimy *x* przez *y* i na odwrót oraz oznaczymy $\frac{1}{2p} = a$, to otrzymamy równanie $y = ax^2$. W naszym przypadku mamy: $y = \frac{1}{4}x^2$.

Widać, że parabolę *c* uzyskamy obracając parabolę *d* o – 90^0 dokoła punktu *O*.

Ćwiczenie 2.

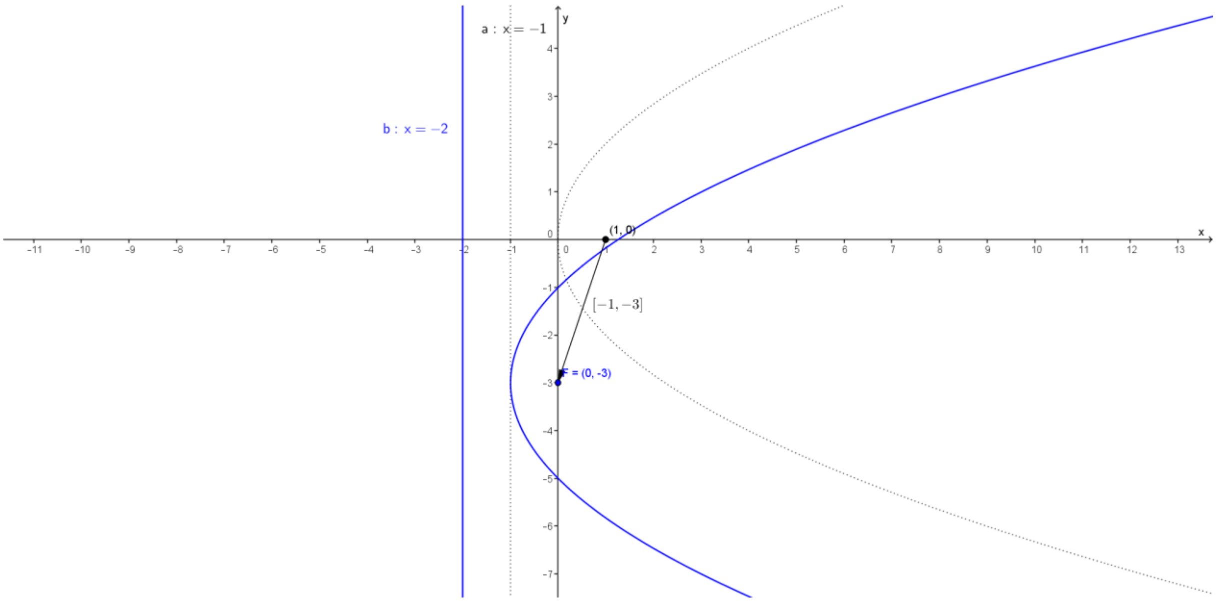
Znajdź ognisko i kierownicę paraboli $y^2 - 4x + 6y + 5 = 0$.

Rozwiązanie.

Równanie $y^2 - 4x + 6y + 5 = 0$ możemy zapisać w postaci:

$(y + 3)^2 = 4(x + 1)$.

Powyższa parabola jest obrazem paraboli $y^2 = 4x$ w przesunięciu o wektor [-1,-3]. Parabola $y^2 = 4x$ ma kierownicę $x = -1$, zaś ognisko $(1{,}0)$, zatem parabola przesunięta ma kierownicę $x = -2$ i ognisko $F = (0, -3)$.



Ćwiczenie 3.

Znajdź ognisko i kierownicę paraboli $y = x^2 + 2x - 2$.

Rozwiązanie.

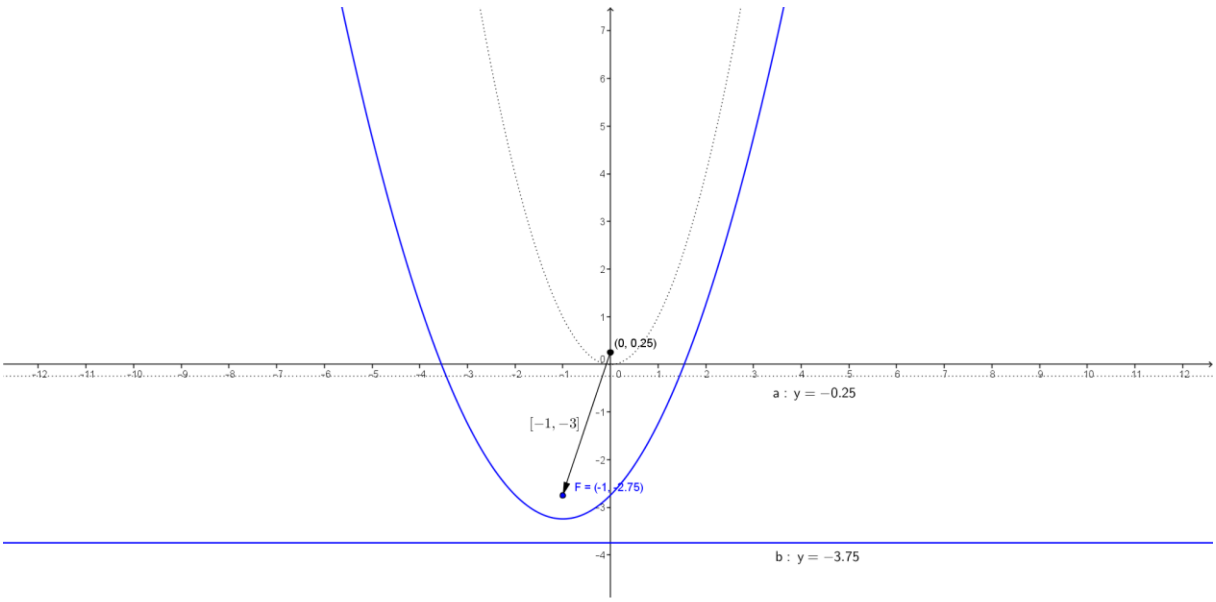
Równanie $y = x^2 + 2x - 2$ możemy zapisać w postaci:

$y = (x + 1)^2 - 3$

lub

$y + 3 = (x + 1)^2$.

Powyższa parabola jest obrazem paraboli $y = x^2$ w przesunięciu o wektor [-1,-3]. Parabola $y = x^2$ ma kierownicę $y = -\frac{1}{4}$, zaś ognisko $\left(0, \frac{1}{4}\right)$, zatem parabola przesunięta ma kierownicę $y = -3\frac{1}{4}$ i ognisko $F = \left(-1, -2\frac{3}{4}\right)$.



scenariusz lekcji nr 14

1. Przedmiot: **Matematyka**
2. Dział programowy: **Planimetria, Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej**
3. Temat: **Miejsce geometryczne punktów.**
4. Klasa: **Klasa II**
5. Zgodność z podstawą programową: **Uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto**
   - **stosuje wiadomości i umiejętności do rozwiązywania nowych problemów.**
6. Pomoce (środki) dydaktyczne
   - **stanowiska komputerowe (lub komputer nauczyciela z tablicą interaktywną lub rzutnikiem multimedialnym),**
   - **bezpłatne oprogramowanie GeoGebra wspomagające nauczanie matematyki (http://www.geogebra.org/cms/pl/download/)**
7. Cele: Uczeń:
   - konstruuje środek okręgu wpisanego w trójkąt,
   - konstruuje półokrąg,
   - konstruuje kwadrat,
   - wyciąga wnioski na podstawie zrealizowanych przykładów,
   - zapisuje uzyskane wnioski,
   - stosuje uzyskane wiadomości do rozwiązywania zadań,
   - posługuje się programem GeoGebra (lub arkuszem kalkulacyjnym).
8. Metody nauczania: **Praca z komputerem, elementy wykładu, ćwiczenia**
9. Formy pracy: **Praca indywidualna i w grupach**

Zacznijmy od określenia:
O linii (lub figurze)mówimy, że jest miejscem geometrycznym punktów, posiadających pewną tę samą własność, jeśli posiada ją każdy punkt tej linii (lub figury) i poza nią nie ma punktów posiadających tę własność.
Tak np. okrąg jest miejscem geometrycznym punktów na płaszczyźnie, położonych w tej samej odległości od jednego punktu, dlatego, że:

- każdy punkt okręgu leży w tej samej odległości od środka

i

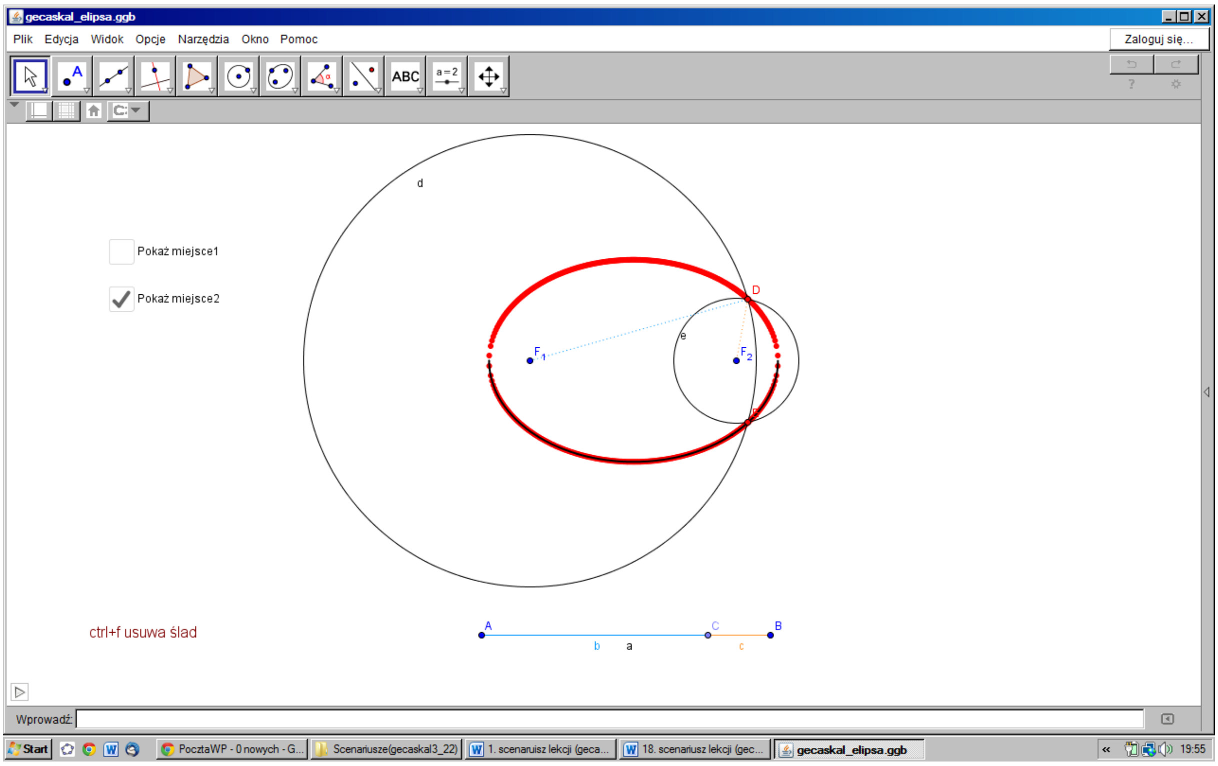
- jakikolwiek punkt, nie leżący na okręgu, ma odległość od środka inną.

Innymi, znanymi przykładami miejsc geometrycznych, są: symetralna odcinka, dwusieczna kąta (Wypowiedz ich określenia w terminologii miejsca geometrycznego, np. *Dwusieczna kąta jest miejscem geometrycznym punktów, równo oddalonych od ramion kąta*).
Miejscem geometrycznym punktów jest też elipsa: jest to zbiór takich punktów P, że suma odległości PF_1 i PF_2 od dwóch danych punktów równa się danej długości (większej od F_1F_2). Nie zawsze łatwo jest wyobrazić sobie miejsce geometryczne i tu z pomocą przychodzi GeoGebra.
Wykonajmy następującą konstrukcję:

1) konstruujemy odcinek AB o długości a.
2) Na tym odcinku wybieramy punt C.

3) Konstruujemy dwa odcinki: *AC* o długości *b* oraz *CB* o długości *c*.
4) Tworzymy nowe punkty *C* i *D*, których nazwy zmieniamy na F_1 i F_2 ($|F_1F_2|<a$).
5) Tworzymy okręgi: *d* o środku F_1 i promieniu *b* oraz *e* o środku F_2 i promieniu *c*.
6) Zaznaczamy punkty *D* i *E* przecięcia się okręgów *d* i *e* i włączamy dla nich `Ślad`.
7) Dla punktu *C* włączamy `Animację`.

Punkty *D* i *E* zakreślają elipsę. Możemy też wykorzystać narzędzie `Miejsce geometryczne.` By je otrzymać, zaznaczamy punkt *D*, a następnie *C* (mamy górną połówkę). Podobnie zaznaczamy punkty *E* i *C* (mamy dolną połówkę).
Aplet może wyglądać następująco:



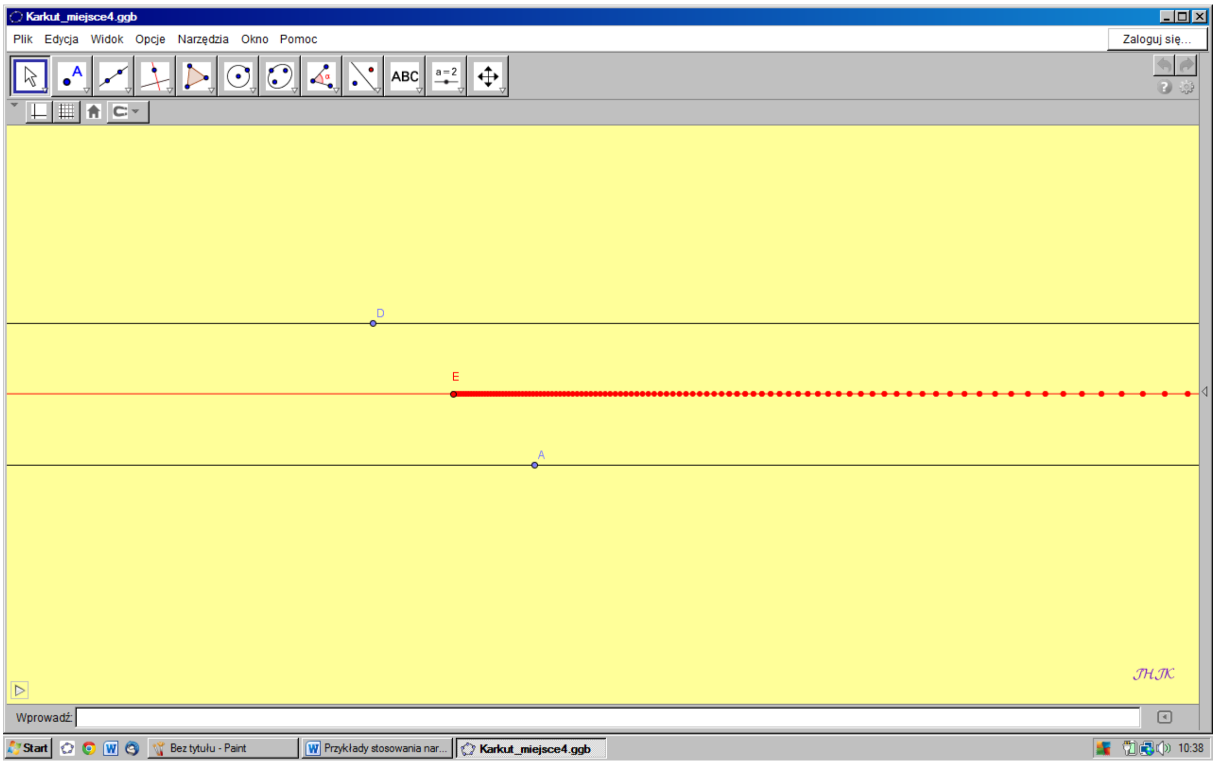
Dalsze ćwiczenia mogą być następujące:

1. Na jakiej linii leżą środki odcinków łączących punkty dwóch równoległych prostych?

Skonstruujmy odpowiedni aplet. Konstrukcja może być następująca:

a) Rysujemy dwie różne proste równoległe;
b) Na jednej z prostych wybieramy punkt *A*, na drugiej punkt *D* (`Punkt na Obiekcie`);
c) Znajdujemy środek E odcinka *AD* (`Środek`);
d) Dla punktu *E* wybieramy polecenie `Ślad włączony`;
e) Dla punktu *D* wybieramy polecenie `Animacja włączona`.

W efekcie tych działań punkt *E* zostawia ślad, który jest jego miejscem geometrycznym, gdy zmienia się położenie punktu *D* na prostej.
Ten sam obraz otrzymamy, stosując narzędzie `Miejsce geometryczne`: wybieramy to narzędzie i klikamy punkty *D* i *E*.
Zakładany efekt końcowy może być następujący:

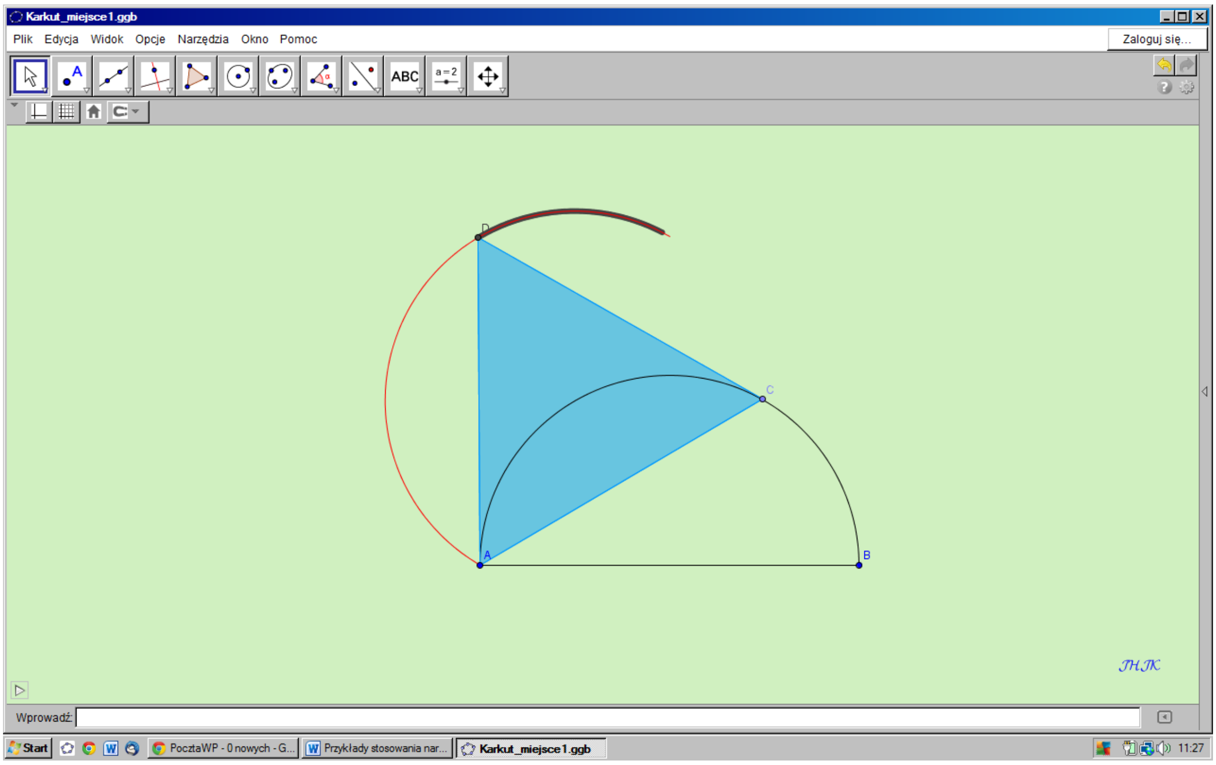


2. Na półokręgu o średnicy *AB* wybieramy dowolny punkt *C* i konstruujemy trójkąt równoboczny *ACD* (na zewnątrz półokręgu). Znajdź równanie linii, jaką zakreśla punkt *D*, gdy punkt *C* przebiega półokrąg.

Konstrukcja może przebiegać następująco:

a) Ustalamy średnicę półokręgu rysując odcinek *AB* (`Odcinek`);
b) Tworzymy półokrąg o średnicy *AB* (`Półokrąg wyznaczony przez dwa punkty`);
c) Na półokręgu wybieramy punkt *C* (`Punkt na Obiekcie`);
d) Konstruujemy trójkąt równoboczny o boku *AC* (`Wielokąt foremny`);
e) Dla punktu *D* wybieramy polecenie `Ślad włączony`;
f) Dla punktu *C* wybieramy polecenie `Animacja włączona`.

W efekcie tych działań punkt *D* zostawia ślad, który jest jego miejscem geometrycznym, gdy zmienia się położenie punktu *C* na półokręgu.
Ten sam obraz otrzymamy, stosując narzędzie `Miejsce geometryczne`: wybieramy to narzędzie i klikamy punkty *D* i *C*.
Zakładany efekt końcowy może być następujący:

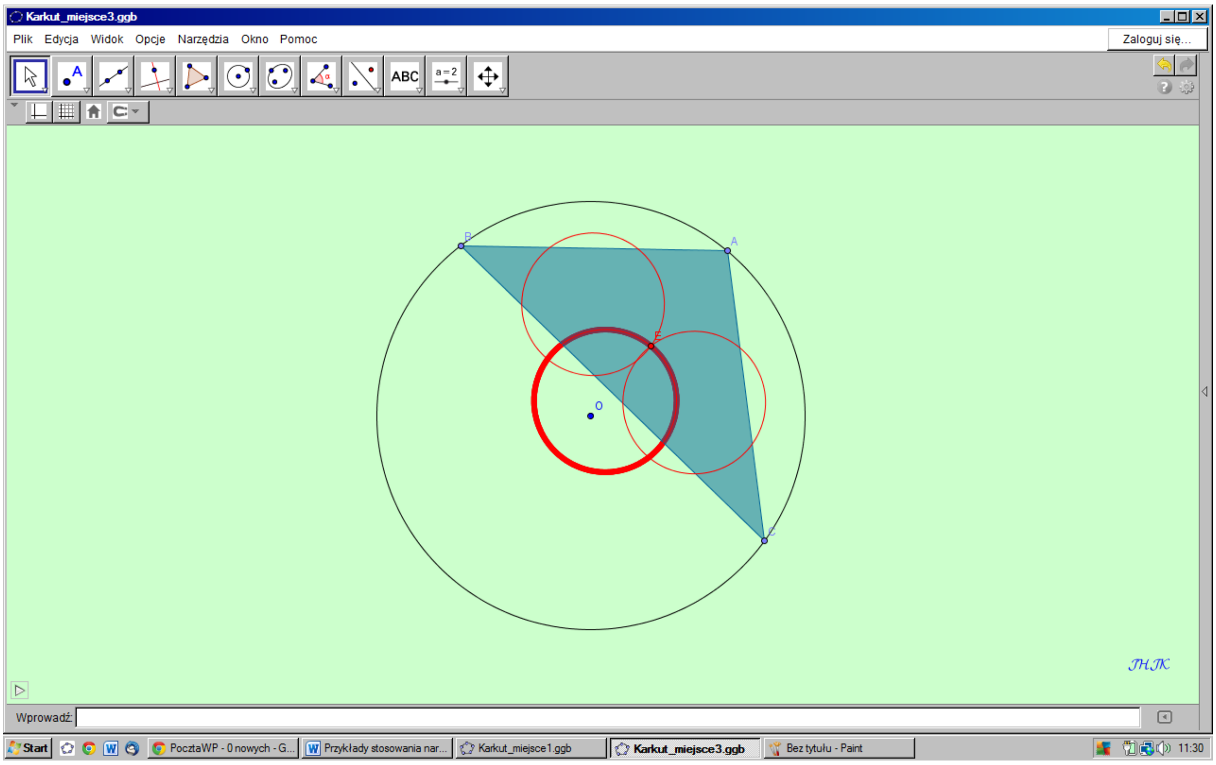


3. W dowolny okrąg wpisujemy dowolny trójkąt i znajdujemy jego barycentrum. Jaką linią jest miejsce geometryczne tego punktu, gdy wierzchołek trójkąta przebiega okrąg?

Konstrukcja może przebiegać następująco:

a) Konstruujemy dowolny okrąg (Okrąg o danym środku i promieniu);
b) Wybieramy trzy punkty na okręgu (Punkt na Obiekcie);
c) Rysujemy trójkąt *ABC* (Wielokąt);
d) W polu wprowadzania wpisujemy $E = \frac{A+B+C}{3}$;
e) Dla punktu *E* wybieramy polecenie `Ślad włączony`;
f) Dla punktu *A* wybieramy polecenie `Animacja włączona`.

W efekcie tych działań punkt *E* zostawia ślad, który jest jego miejscem geometrycznym, gdy zmienia się położenie punktu *A* na półokręgu.
Ten sam obraz otrzymamy, stosując narzędzie `Miejsce geometryczne`: wybieramy to narzędzie i klikamy punkty *E* i *A*. (Podobnie możemy postąpić z pozostałymi wierzchołkami trójkąta.)
Zakładany efekt końcowy może być następujący:



4. Kwadrat o boku *a* porusza się w ten sposób, że jeden z jego wierzchołków ślizga się po osi *Ox*, a wierzchołek do niego przyległy po osi *Oy*. Znajdź równanie linii, jakie zakreślają wierzchołki pozostałe.

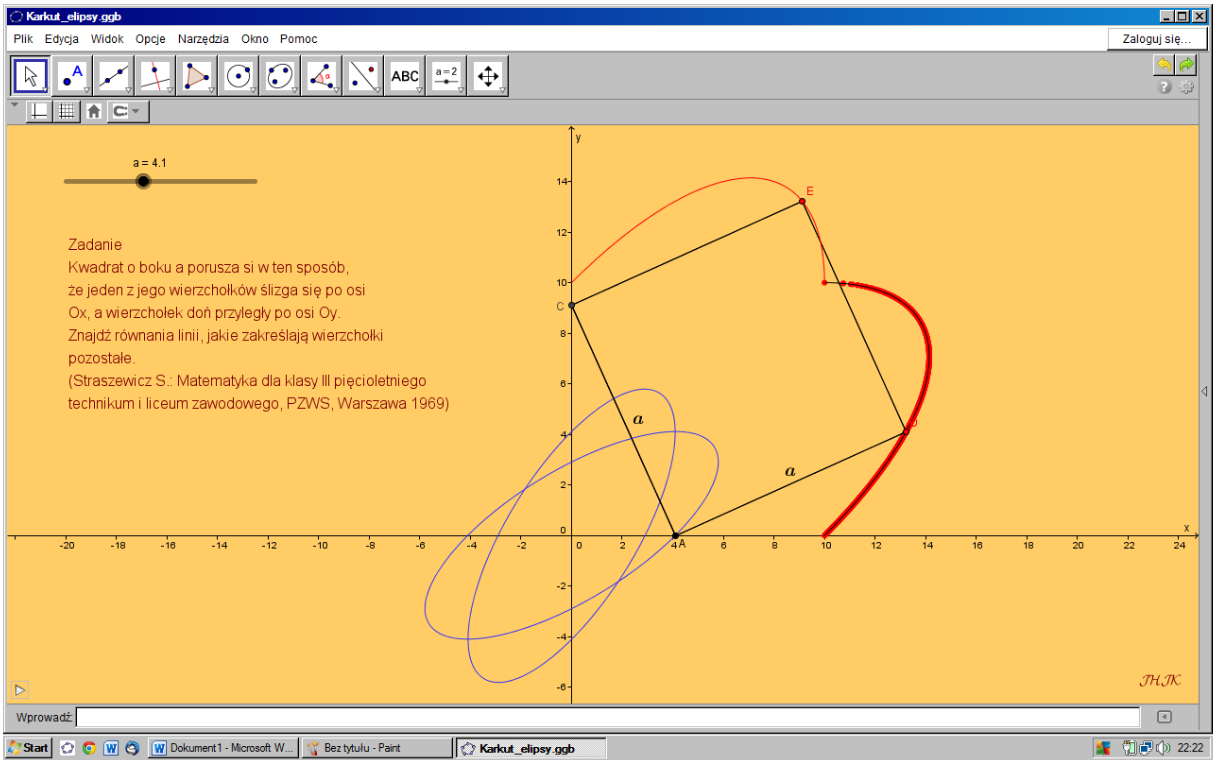
Konstrukcja może przebiegać następująco:

a) Tworzymy suwak *a*: zakres od 0 do 10, krok 0,01;
b) Wybieramy punkt *A* = (*a*, 0);
c) Konstruujemy okrąg o(*A*, *a*);
d) Znajdujemy punkty przecięcia okręgu z osią *y*;
e) Ukrywamy punkt leżący w dolnej półpłaszczyźnie oraz okrąg;
f) Rysujemy odcinek *AC*;
g) Na odcinku *AC* konstruujemy kwadrat *ACED*;
h) Dla punktów *D* i *E* wybieramy polecenie `Ślad włączony`;
i) Dla suwaka wybieramy polecenie `Animacja Włączona`.

W efekcie tych działań punkty *D* i *E* zostawiają ślady, które są ich jego miejscami geometrycznymi, gdy zmienia się wartość *a* suwaka.

Ten sam obraz otrzymamy, stosując narzędzie `Miejsce geometryczne`: wybieramy to narzędzie i klikamy punkt *E* oraz *a* (suwak). (Podobnie postępujemy z punktem *D*.)

Zakładany efekt końcowy może być następujący:



Znajdźmy równania linii, jakie zakreślają wierzchołki *D* i *E*.

Punkt *D* ma współrzędne $(x, y) \Leftrightarrow [A = (y, 0) \text{ i } C = (0, x - y), \text{ i } 0 \leq y \leq a, \text{ i } 0 \leq x - y \leq a]$.

$OA^2 + OC^2 = a^2 \Leftrightarrow y^2 + (x - y)^2 = a^2 \Leftrightarrow x^2 - 2xy + 2y^2 = a^2$.

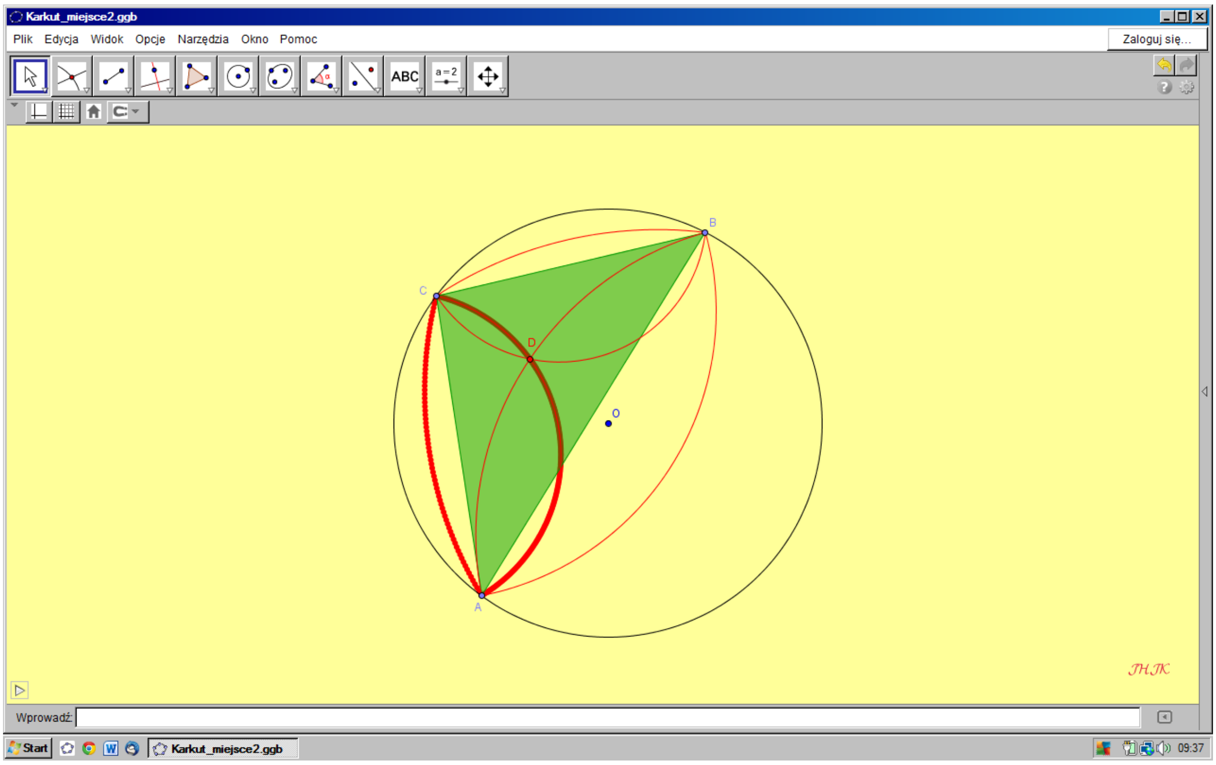
Punkt *E* ma współrzędne $(x, y) \Leftrightarrow [A = (y - x, 0) \text{ i } C = (0, x), \text{ i } 0 \leq x \leq a, \text{ i } 0 \leq y - x \leq a]$.

$OA^2 + OC^2 = a^2 \Leftrightarrow (y - x)^2 + x^2 = a^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 2xy + y^2 = a^2$.

Znalezione równania są równaniami elips, których fragmentami są miejsca geometryczne punktów *D* i *E*.

5. Jaką linię zakreśli środek okręgu wpisanego w trójkąt?

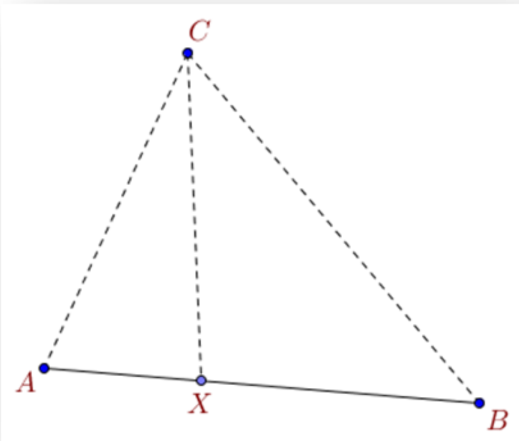
Wykonaj odpowiedni plik .ggb i zobacz to. Zakładany efekt końcowy może być następujący:


Karkut_miejsce2.ggb
Plik Edycja Widok Opcje Narzędzia Okno Pomoc
Zaloguj się...
ABC
a = 2
B
C
D
O
A
JHJK
Wprowadź:
Start
Karkut_miejsce2.ggb
09:37

scenariusz lekcji nr 15

1. Przedmiot: **Matematyka**
2. Dział programowy: **Planimetria, Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej**
3. Temat: **Nierówność trójkąta.**
4. Klasa: **Klasa II**
5. Zgodność z podstawą programową: **Uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto**
   - **stosuje wiadomości i umiejętności do rozwiązywania nowych problemów.**
6. Pomoce (środki) dydaktyczne
   - **stanowiska komputerowe (lub komputer nauczyciela z tablicą interaktywną lub rzutnikiem multimedialnym),**
   - **bezpłatne oprogramowanie GeoGebra wspomagające nauczanie matematyki (http://www.geogebra.org/cms/pl/download/)**
7. Cele: Uczeń:
   - widzi możliwość zastosowania nierówności trójkąta w różnych sytuacjach,
   - zna i stosuje definicje funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta,
   - stosuje twierdzenie sinusów,
   - wyciąga wnioski na podstawie zrealizowanych przykładów,
   - zapisuje uzyskane wnioski,
   - stosuje uzyskane wiadomości do rozwiązywania zadań,
   - posługuje się programem GeoGebra (lub arkuszem kalkulacyjnym).
8. Metody nauczania: **Praca z komputerem, elementy wykładu, ćwiczenia**
9. Formy pracy: **Praca indywidualna i w grupach**

Zacznijmy od przypomnienia nierówności trójkąta:
Z trzech odcinków można zbudować trójkąt wtedy i tylko wtedy, gdy długość najdłuższego z nich jest mniejsza od sumy długości odcinków pozostałych.
Przejdźmy do zadań.
Zadanie 1.
Punkty *A, B, C* są niewspółliniowe i punkt *X* należy do odcinka *AB*. Wykaż, że
$2CX > AC + BC - AB.$
Dowód.



1^o Niech $X = A$. Wtedy $CX = AC$. Wobec tego:

$2CX > AC + BC - AB$

$\Updownarrow$

$2AC > AC + BC - AB$

$\Updownarrow$

$AC > BC - AB$

$\Updownarrow$

$AC + AB > BC.$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, gdyż punkty *A, B, C* są niewspółliniowe.

2^o Niech $X = B$. Wtedy $CX = BC$. Wobec tego:

$2CX > AC + BC - AB$

$\Updownarrow$

$2BC > AC + BC - AB$

$\Updownarrow$

$BC > AC - AB$

$\Updownarrow$

$AB + BC > AC.$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, gdyż punkty *A, B, C* są niewspółliniowe.

3^o Niech $X \in \overline{AB}$ i $X \neq A$ i $X \neq B$. Wtedy punkty *A, C, X* są niewspółliniowe i punkty *B, C, X* są niewspółliniowe.

Stąd

$CX + AX > AC$ i $CX + BX > BC$.

Dodając ostatnie nierówności stronami, otrzymujemy:

$CX + AX + CX + BX > AC + BC,$

$2CX + AX + BX > AC + BC.$

Ponieważ $X \in \overline{AB}$, więc $AX + BX = AB$.

Zatem

$2CX + AB > AC + BC,$

czyli

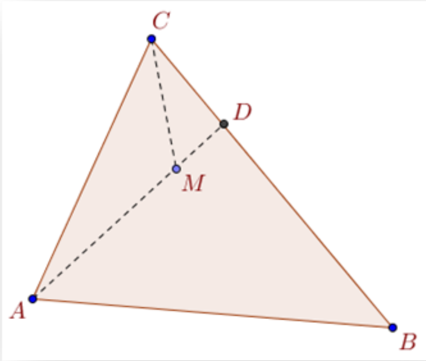
$2CX > AC + BC - AB,$

co należało wykazać.

Zadanie 2.

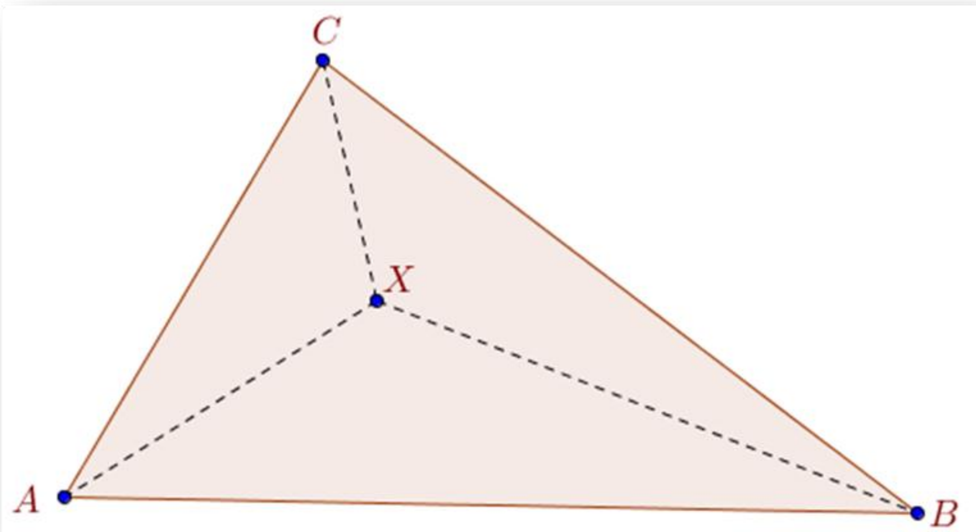
Wykaż, że jeśli punkt *M* należy do wnętrza trójkąta *ABC*, to

$AM + CM < AB + BC.$



Dowód.
Niech *D* będzie punktem przecięcia się prostej *AM* z prostą *BC*. Punkty *A, B, D* są niewspółliniowe oraz punkty *C, D, M* są niewspółliniowe.
Stąd
$AD < AB + BD$ i $CM < DM + CD$.

Dodając ostatnie nierówności stronami, otrzymujemy:
$AD + CM < AB + BD + DM + CD \quad (1)$
Ponieważ $D \in \overline{BC}$ i $M \in \overline{AD}$, więc $CD + BD = BC$ i $AM + DM = AD$.
Stąd i z (1), otrzymujemy:
$AM + DM + CM < AB + BC + DM$,
$AM + CM < AB + BC$,
co należało wykazać.
Zadanie 3
Wykaż, że jeśli *X* jest punktem wewnętrznym trójkąta *ABC*, to suma odległości punktu *X* od wierzchołków trójkąta jest mniejsza od jego obwodu.
Dowód.



Zgodnie z rozwiązaniem zadania 2., mamy:

$AX + BX < AC + BC$ i $BX + CX < AB + AC$ i $AX + CX < AB + BC$.

Dodając te nierówności stronami, otrzymujemy:

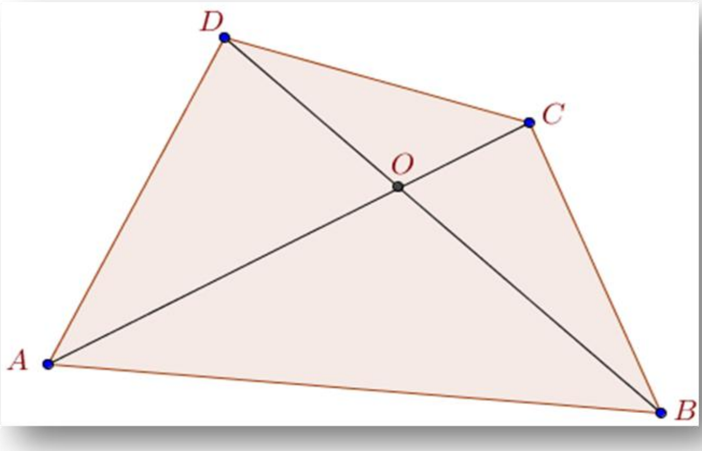
$2(AX + BX + CX) < 2(AB + BC + AC)$,

czyli

$AX + BX + CX < AB + BC + AC$,

co należało wykazać.

Zadanie 4



Dowód.

Niech *O* będzie punktem przecięcia się przekątnych czworokąta wypukłego *ABCD*. Ponieważ czworokąt jest wypukły, więc punkty *A, B, O* są niewspółliniowe i punkty *C, D, O* są niewspółliniowe. Stąd

$AB < AO + BO$ i $CD < CO + DO$.

Dodając te nierówności stronami, otrzymujemy:

$AB + CD < AO + BO + CO + DO \quad (1)$

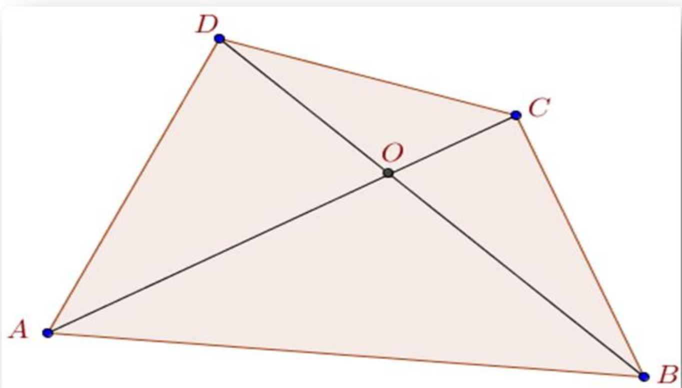
Ponieważ $O \in \overline{AC}$ i $O \in \overline{BD}$, więc $AO + CO = AC$ i $BO + DO = BD$. Stąd i z (1), otrzymujemy:

$AB + CD < AC + BD$,

co należało wykazać.

Zadanie 5

Wykaż, że suma długości przekątnych czworokąta wypukłego jest mniejsza od obwodu czworokąta, a większa od połowy obwodu tego czworokąta.

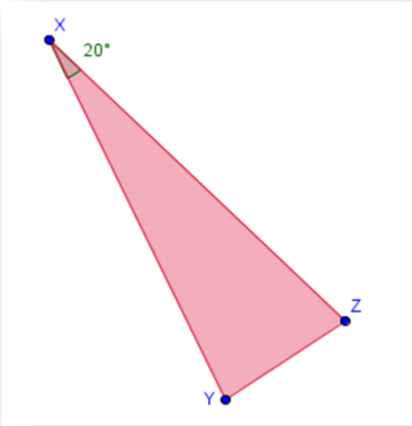


Niech *ABCD* będzie czworokątem wypukłym. Oznaczmy przez *O* punkt przecięcia jego przekątnych.
Mamy wykazać, że
$$\frac{AB + BC + CD + DA}{2} < AC + BD < AB + BC + CD + DA.$$
Wykażmy najpierw, że
$$AC + BD > \frac{AB + BC + CD + DA}{2}.$$
Mamy tutaj cztery trójki punktów nie współliniowych. Są to:
A, O, B i $B, O, C,$ i $C, O, D,$ i $A, O, D.$
Wynika stąd, że:
$$AO + OB > AB$$
$$BO + OC > BC$$
$$CO + OD > CD$$
$$AO + OD > DA$$
Dodając te nierówności stronami, otrzymujemy:
$$2(AO + OC + DO + OB) > AB + BC + CD + DA \quad (1)$$
Ponieważ $O \in \overline{AC}$ i $O \in \overline{BD}$, więc $AO + OC = AC$ i $BO + OD = BD$. Stąd i z (1), otrzymujemy:
$$2(AC + BD) > AB + BC + CD + DA,$$
czyli
$$AC + BD > \frac{AB + BC + CD + DA}{2}.$$
Pokażmy teraz, że
$$AC + BD < AB + BC + CD + DA.$$
Mamy tutaj cztery trójki punktów nie współliniowych. Są to:
A, B, C i $A, C, D,$ i A, B, D i $B, D, C.$
Wynika stąd, że:
$$\begin{cases} AC < AB + BC \\ AC < AD + DC \\ DB < AB + AD \\ DB < DC + CB \end{cases}$$
Dodając te nierówności stronami, otrzymujemy:
$$2(AC + DB) < 2(AB + BC + CD + DA),$$
czyli
$$AC + DB < AB + BC + CD + DA,$$
co należało wykazać.

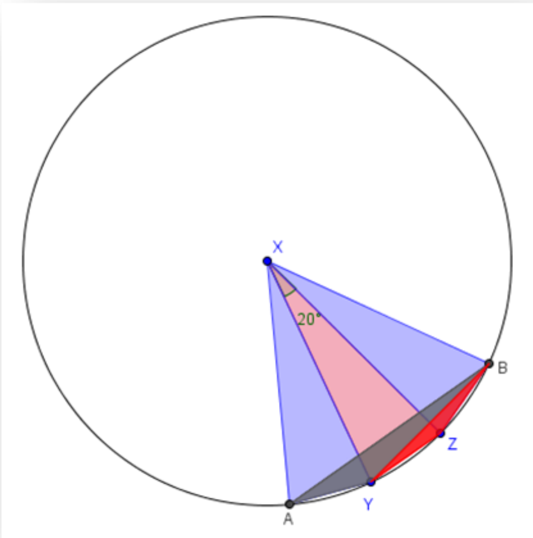
A teraz zadania trudne:

Zadanie

W trójkącie *XYZ* miara kąta przy wierzchołku *X* wynosi 20^0, zaś *XY* = *XZ*. Wykaż, że
$$2YZ < XY < 3YZ.$$
Dowód.



Wykażemy, że $3YZ > XY$.
Do danego trójkąta *XYZ* skonstruujmy dwa przystające trójkąty: jeden po jego lewej stronie (ΔXYA), a drugi po prawej (ΔXZB).



Otrzymaliśmy w ten sposób równoboczny trójkąt XAB. Zastosujmy teraz nierówność trójkąta do trójkątów *AYB* i *YZB*.

$$\begin{cases} AB < AY + YB \\ YB < YZ + ZB \end{cases}$$

Dodając te nierówności stronami, otrzymujemy:

$$AB + YB < AY + YB + YZ + ZB.$$

Trójkąt *XAB* jest równoboczny, więc *AB* = *XY*, co daje

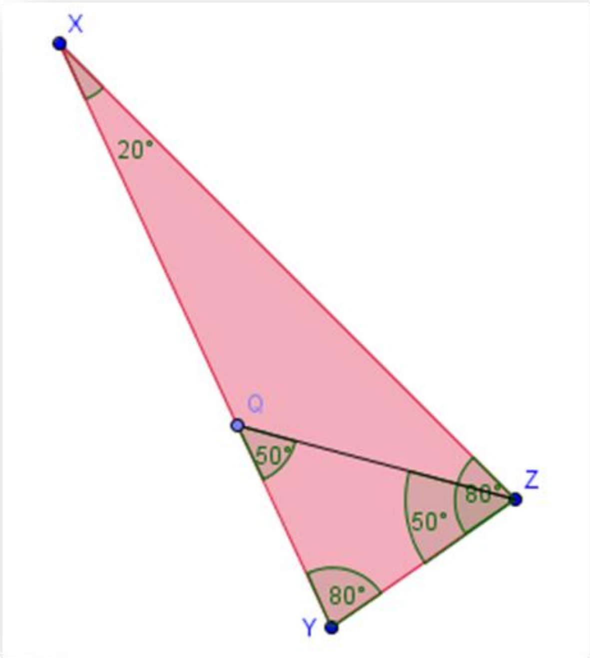
$$XY < AY + YZ + ZB.$$

Jest też $AY = YZ = ZB$, więc ostatecznie otrzymujemy

$XY < 3YZ$.

Wykażemy też, że *XY* > *2YZ*.

W tym celu wybierzmy na boku *XY* trójkąta *XYZ* punkt *Q* tak, by *YQ* = *YZ*. Jeśli wykażemy, że *XQ* > *YZ*, to wykażemy jednocześnie, że *XY* > 2*YZ*. Wykonajmy stosowny rysunek i zaznaczmy kąty otrzymanych trójkątów.



Stosując twierdzenie sinusów do trójkąta *XQZ,* otrzymujemy:

$$\frac{XQ}{\sin 30^0} = \frac{QZ}{\sin 20^0}, \quad XQ = \frac{QZ}{2\sin 20^0}.$$

Stosując to samo twierdzenie do trójkąta *QYZ*, otrzymujemy:

$$\frac{QY}{\sin 50^0} = \frac{QZ}{\sin 80^0}.$$

Ponieważ

$$\frac{XQ}{QY} = \frac{\sin 80^0}{2\sin 20^0 \sin 50^0} \approx 1{,}9,$$

więc *QX* > *QY.* Jednocześnie oznacza to, że *XY* > 2*YZ.*

Ostatecznie więc mamy:

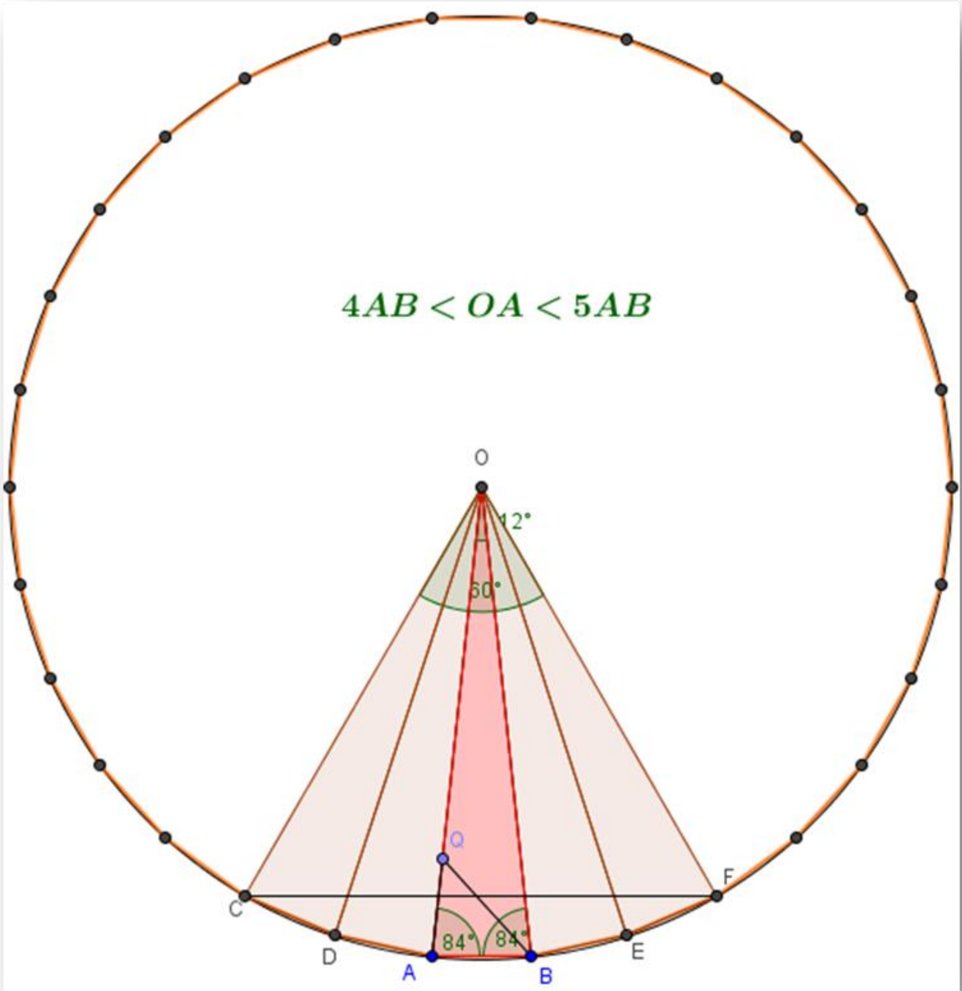
$2YZ < XY < 3YZ,$

co należało wykazać.

Zadanie domowe

W trójkącie *XYZ* miara kąta przy wierzchołku *X* wynosi 12^0, zaś *XY* = *XZ*. Wykaż, że

$4YZ < XY < 5YZ.$



scenariusz lekcji nr 16

Zgodne z Podstawą programową kształcenia ogólnego z matematyki w zakresie rozszerzonym (DzU z 2009 r. Nr 4, poz. 17)

Dział: Liczby rzeczywiste

Temat: Działania na potęgach.

Cel ogólny: Umiejętność stosowania poznanych działań na potęgach w zadaniach tekstowych.

Cele operacyjne:

Uczeń rozumie:

- pojęcie potęgi o wykładniku naturalnym i całkowitym
- genezę wzoru na mnożenie i dzielenie potęg o tych samych podstawach
- genezę wzoru na potęgowanie potęgi
- genezę wzoru na potęgowanie ilorazu i iloczynu

Uczeń potrafi:

- obliczać potęgi o wykładniku naturalnym
- zapisywać liczby w postaci potęg
- mnożyć i dzielić potęgi o tych samych podstawach
- potęgować potęgi
- porównywać potęgi
- potęgować ilorazy i iloczyny
- doprowadzić wyrażenia do prostszych postaci, stosując działania na potęgach
- stosować działania na potęgach w zadaniach tekstowych

Uczeń zna:

- pojęcie potęgi o wykładniku naturalnym
- wzór namnożenie i dzielenie potęgi o tych samych podstawach
- wzór na potęgowanie potęgi
- wzór na potęgowanie ilorazu i iloczynu

Środki dydaktyczne:

- ***MATeMAtyka 1,*** Podręcznik z płytą CD-ROM dla szkół ponadgimnazjalnych . Zakres podstawowy i rozszerzony NOWA ERA,
- ***MATeMAtyka 1***, Zbiór zadań dla szkół ponadgimnazjalnych. Zakres podstawowy i rozszerzony NOWA ERA,
- karta pracy.

Metody pracy:

Praca z podręcznikiem i zbiorem zadań, dyskusja.

Formy pracy:

- indywidualna
- praca w parach
- równym frontem

Czas zajęć:

- 1 godzina lekcyjna.

Przebieg lekcji:

Faza lekcji	Czynności nauczyciela i ucznia		Uwagi
I. Część organizacyjna:	Sprawdzenie obecności i pracy domowej.		
II. Część nawiązująca:	Pytania: a) Co to jest potęga? b) Jakie działania wykonujemy na potęgach? c) Jak mnożymy i dzielimy potęgi o tych samych podstawach? d) Jak potęgujemy potęgę?	Uczniowie odpowiadają na pytania. Uczniowie zapisują poznane działania na tablicy.	
III. Część właściwa: A	1. Zapoznanie uczniów z celami lekcji. 2. Zapisanie tematu lekcji. T: Działania na potęgach. Porządkowanie liczb w kolejności rosnącej i malejącej.	Uczniowie zapisują w zeszycie. Nauczyciel zapisuje na tablicy. Nauczyciel wypisuje liczby na tablicy. Uczniowie porządkują te liczby w podanej kolejności.	Praca z podręcznikiem, zbiorem zadań.

B C	Zapisywanie wyrażeń w postaci jednej potęgi i obliczanie wartości tych wyrażeń. Stosowanie działań na potęgach w zadaniach tekstowych.	Nauczyciel zapisuje wyrażenia na tablicy. Uczniowie doprowadzają te wyrażenia do postaci jednej potęgi i obliczają ich wartość stosując działania na potęgach. Uczniowie przy tablicy rozwiązują zadania z karty pracy.	*Załącznik*
IV. Podsumowanie.	Jakie znacie działania na potęgach?	Uczniowie odpowiadają na pytanie. Ocena pracy uczniów podczas lekcji.	
V. Praca domowa.	Wybrane zadania z podręcznika.	Nauczyciel wyjaśnia pracę domową. Uczniowie zapisują zadania w zeszytach.	

ZAŁĄCZNIK

KARTA PRACY

Zadanie 1

Podane poniżej liczby napisano według pewnej reguły. Jaka powinna być piąta liczba? $1; 16; 4^3; 49$

Zadanie 2

Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej sześcianu o krawędzi:

a) 4 cm

b) 2,5 dm

c) 1,2 m

Zadanie 3

Marek ma do przeczytania książkę, która liczy sobie 160 stron. Postanowił pierwszego dnia przeczytać połowę książki, drugiego dnia połowę stron, które pozostały, trzeciego dnia znowu połowę tego, co jeszcze pozostało do przeczytania itd.

a) Ile stron przeczyta Marek w ciągu trzech dni?

b) Jaka część książki przeczyta chłopiec szóstego dnia?

c) Ile dni zajmie Markowi przeczytanie całej książki, jeśli będzie postępował zgodnie z przyjęta zasadą?

Zadanie 4

Pani Ela wpłaciła do banku 5000 zł. Oprocentowanie wynosi 6% w stosunku rocznym. Ile pieniędzy będzie na koncie pani Eli po: a) trzech latach? b) pięciu latach? c)siedmiu latach?

Informacja do zadania:

Jeżeli kwota pieniędzy wpłaconych do banku, wzrasta w ciągu roku o p%, a odsetki są dopisywane do wpłaconej kwoty, to wartość końcową(kwota wpłacona + odsetki) po n latach możemy obliczyć ze wzoru:

$$K = k \cdot (1 + \frac{p}{100})^n$$

K - kwota po n latach

k - kwota wpłacona do banku

n - ilość lat

p - procent

scenariusz lekcji nr 17

Zgodne z Podstawą programową kształcenia ogólnego z matematyki w zakresie rozszerzonym (DzU z 2009 r. Nr 4, poz. 17)

Dział: Stereometria

Temat: Bryły obrotowe wokół nas

Cel ogólny: przypomnienie, usystematyzowanie i utrwalenie wiadomości z gimnazjum o bryłach obrotowych; stosowanie wzorów na obliczanie pola powierzchni i objętości brył obrotowych.

Cele operacyjne:

Uczeń powinien:

- znać pojecie i genezę bryły obrotowej,
- wiedzieć co to jest walec, stożek, stożek ścięty, kula, sfera,
- znać siatkę walca i stożka,
- znać wzory na objętość i pole powierzchni brył obrotowych,
- obliczać objętość i pole powierzchni brył obrotowych,
- ćwiczyć wyobraźnię przestrzenną, pamięć, rozumowanie przez analogię,
- rozwijać aktywność,
- stosować teorię w praktyce, uświadomić sobie praktyczne znaczenie wiedzy matematycznej,
- poprawnie stosować język matematyczny.

Metody i formy pracy: pogadanka z elementami wykładu, audiowizualna, demonstracja, poszukująca; praca indywidualna.

Środki dydaktyczne: MATeMAtyka 3 Podręcznik dla szkół ponadgimnazjalnych - zakres rozszerzony NOWA ERA, przyrządy geometryczne, modele brył, laptop, rzutnik multimedialny, karta pracy.

Czas lekcji: 1 godz.

Przebieg lekcji:

Ogniwo lekcji	**Czynności nauczyciela i ucznia**		**Uwagi**
I.Czynności organizacyjne:	Sprawdzenie obecności, sprawy porządkowe.		
II.Część naprowadzająca:	Nauczyciel nawiązuje do tematu lekcji poprzez odpytanie z pracy domowej (*praca domowa- przypomnienie wiedzy z gimnazjum na temat brył obrotowych)* Zadanie pytań pomocniczych w celu uzupełnienia wypowiedzi	Uczniowie odpowiadają na pytania.	Rozmowa nauczająca.

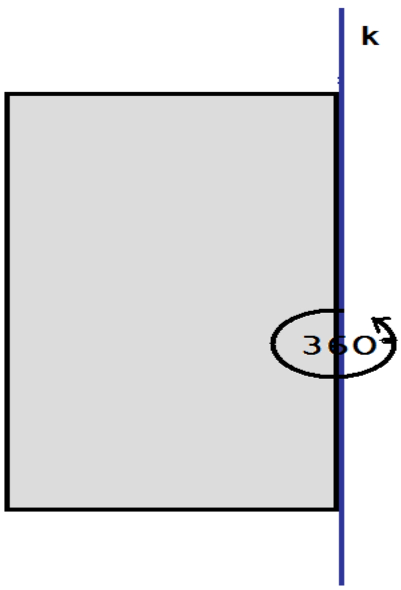
	uczniów		
III Część właściwa:	1. Zapoznanie uczniów z celami lekcji. 2. Zapisanie tematu lekcji. 3. Prezentacja modeli brył obrotowych Pytanie: *w wyniku obrotu jakich brył płaskich powstają bryły obrotowe?* 4. Pogadanka na temat prezentowanych modeli brył obrotowych. 5. Pogadanka o przekrojach płaskich brył obrotowych. 6. Przypomnienie wzorów na objętość i pole powierzchni całkowitej brył. 7. Rozwiązywanie wybranych zadań z podręcznika	Uczniowie zapisują w zeszycie. Nauczyciel zapisuje temat lekcji na tablicy. Prezentacja pt. *Bryły obrotowe wokół n*as - oglądanie z komentarzem dotyczącym pojęć: tworząca walca i stożka, wysokość walca i stożka, powierzchnia boczna i całkowita walca i stożka, kąt rozwarcia stożka, kula, koło wielkie kuli, sfera. Uczniowie zapisują wzory w zeszycie.	Pokaz (prezentacja multimedialna) *Załącznik1(materiał graficzny z prezentacji)*

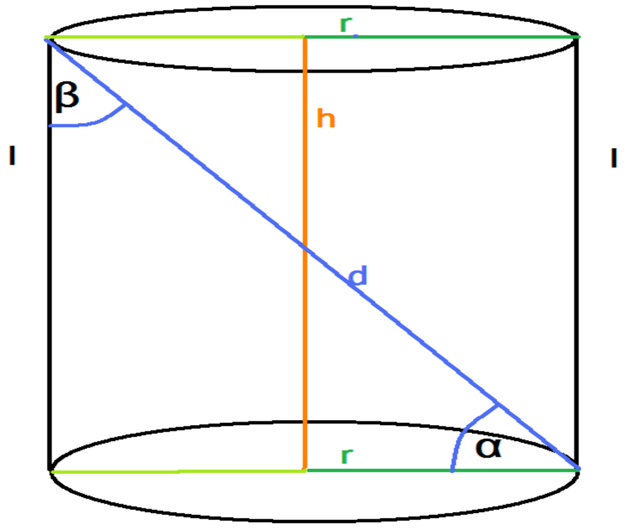
		Uczniowie przedstawiają rozwiązanie na tablicy. Nauczyciel sprawdza poprawność rozwiązania.	Praca indywidualna. Praca z podręcznikiem.
IV. Podsumowanie.	Podsumowanie podstawowych wiadomości o walcu stożku i kuli.	Uczniowie odpowiadają na pytania. Ocena wypowiedzi uczniów przez nauczyciela.	
V. Praca domowa.	Zadanie pracy domowej - karta pracy	Nauczyciel wyjaśnia pracę domową. Uczniowie wklejają kartę z zadaniami do zeszytów.	*Załącznik2*

<u>ZAŁĄCZNIK 1.</u>

KARTA PRACY – *bryły obrotowe*

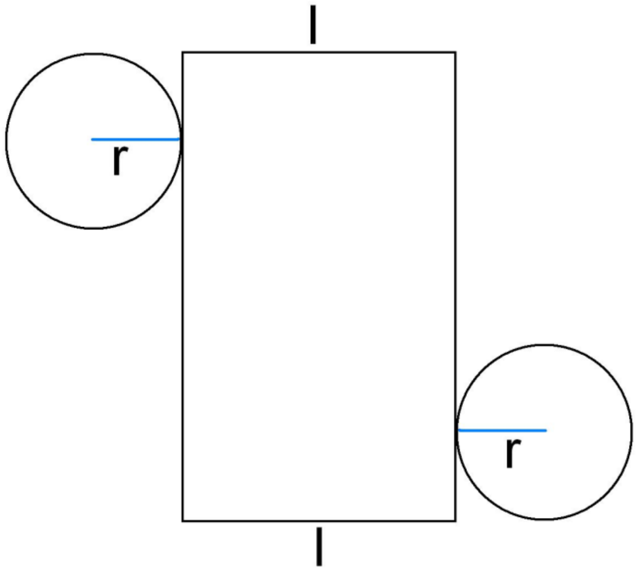
WALEC:





h- wysokość walca
l- tworząca walca
r- promień podstawy walca
d- przekątna przekroju poprzecznego walca
α- kat nachylenia przekątnej przekroju osiowego do płaszczyzny podstawy
β- kąt nachylenia przekątnej przekroju osiowego do tworzącej walca

Siatka walca:

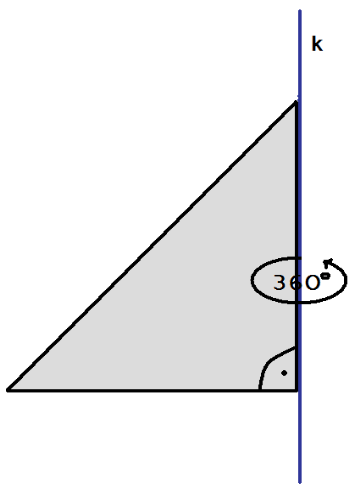


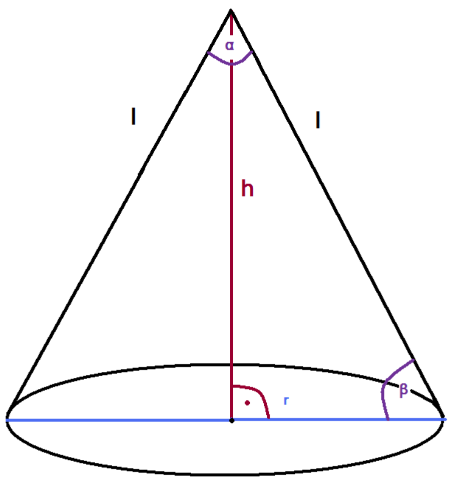
Związki miarowe w walcu:

$$Pc = 2Pp + Pb = 2\prod r^2 + 2\prod rl$$

$$V = Pph = \prod r^2 h$$

STOŻEK:





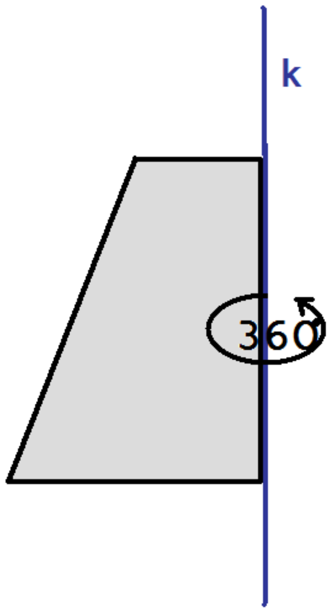
h- wysokość stożka

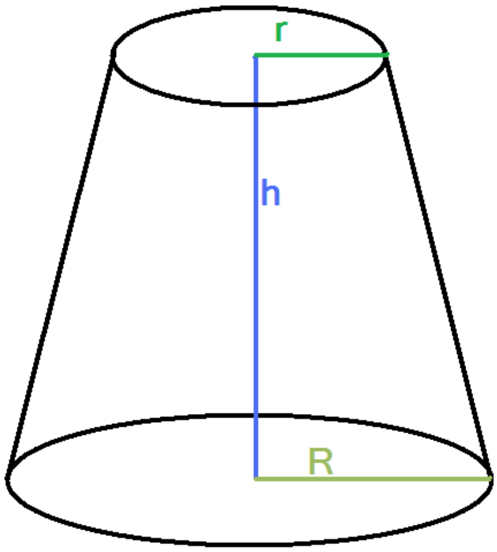
r - promień podstawy
l- tworząca stożka
α –kąt rozwarcia stożka
β – kat nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy
Związki miarowe w stożku:

$$Pc = Pp + Pb = \prod r^2 + \prod rl$$

$$V = \frac{1}{3}\prod r^2 h$$

STOŻEK ŚCIĘTY:

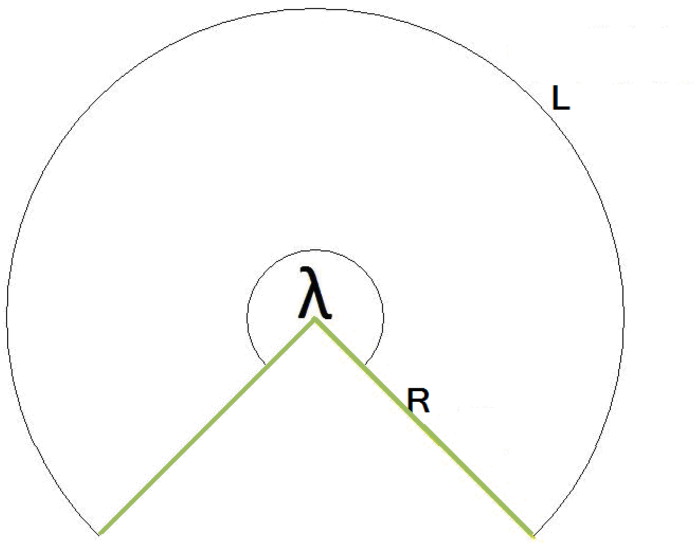




Objętość stożka ściętego:

$$V = \frac{\prod h}{12}\left(4R^2 + 4Rr + 4r^2\right)$$

Długość łuku τ wycinka koła jest równa długości obwodu koła podstawy

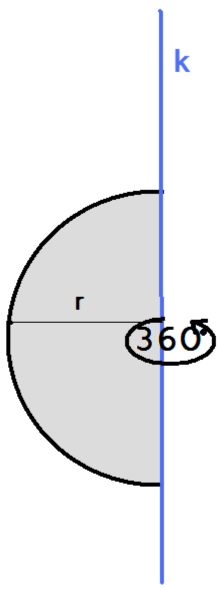


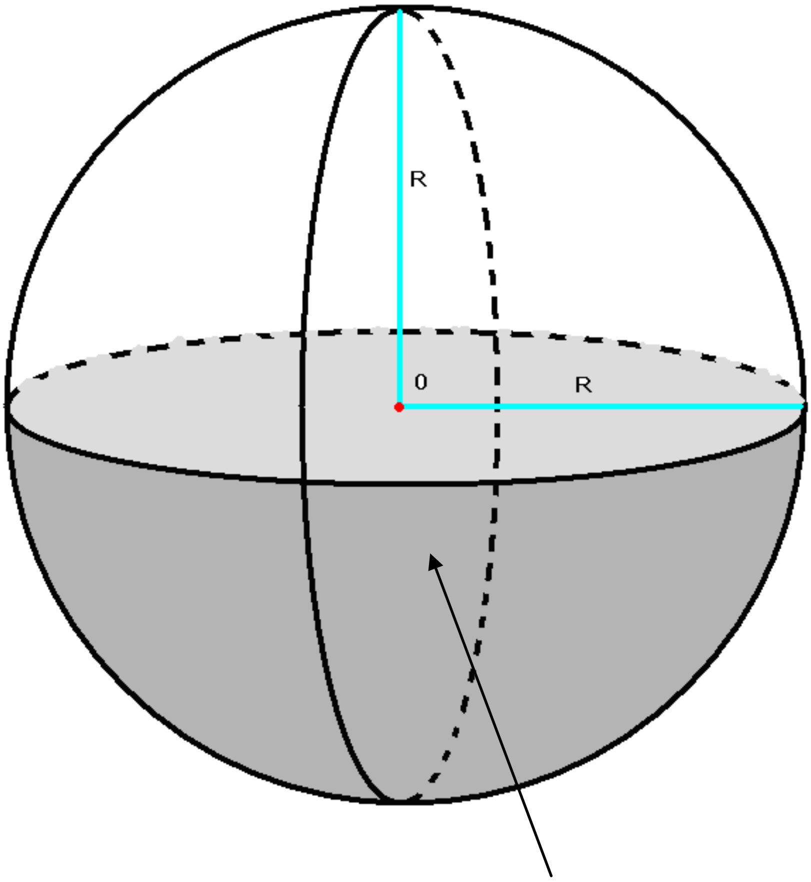
L – długość łuku wycinka koła
R- promień koła
λ- kąt środkowy na jakim jest oparty łuk L

$L = \frac{\prod R\lambda}{180^o}$ - wzór na długość łuku wycinka koła

$P = \frac{1}{2} LR$ - wzór na pole wycinka koła

KULA:





R – promień kuli

koło wielkie kuli

Związki miarowe w kuli:

$$Pc = 4\prod r^2$$

$$V = \frac{4}{3}\prod r^3$$

<u>**ZAŁĄCZNIK 2**</u>

KARTA PRACY – ***praca domowa***

Zad.1.

W garnku w kształcie walca o wysokości 0,6 m i średnicy podstawy 4 dm ugotowano zupę, której objętość zajmuje $\frac{4}{5}$ objętości garnka. Oblicz ile porcji można przygotować z tej zupy, jeżeli na jeden talerz wlewamy zupę z dwóch chochli w kształcie półkuli o średnicy 10 cm.

Zad.2.

Zbiornik w kształcie walca o średnicy 120 *cm* i wysokości 2 *m* należy napełnić wodą przyniesioną w wiaderkach w kształcie stożka ściętego o wymiarach: średnica dolnej podstawy 3 *dm*, średnica górnej podstawy4 *dm*, wysokość 35 *cm*. Oblicz ile pełnych wiaderek wody należy wlać do zbiornika, aby napełnić go w całości.

$V = \frac{\prod h}{12}\left(4R^2 + 4Rr + 4r^2\right)$ - wzór potrzebny do zadania 2 na objętość stożka ściętego

R- promien dużej podstawy, r- promień małej podstawy

scenariusz lekcji nr 18

Zgodne z Podstawą programową kształcenia ogólnego z matematyki w zakresie rozszerzonym (DzU z 2009 r. Nr 4, poz. 17)

Dział: Liczby rzeczywiste
Temat: **Obliczenia procentowe.**
Cel ogólny:
Przypomnienie i usystematyzowanie wiadomości dotyczących obliczeń procentowych.
Cele operacyjne:
Uczeń rozumie:

- pojęcie procentu
- potrzebę stosowania procentów w życiu codziennym

Uczeń potrafi:

- wskazywać przykłady zastosowań procentów w życiu codziennym
- zamieniać procenty na ułamki
- zamieniać ułamki na procenty
- obliczać procenty danych liczb
- znajdować liczby, znając ich procenty
- obliczać, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba
- rozwiązywać zadania tekstowe związane z procentami

Uczeń zna:

- pojęcie procentu

Środki dydaktyczne:
MATeMAtyka 1 Podręcznik i Zbiór zadań dla szkół ponadgimnazjalnych , zakres podstawowy i rozszerzony, karta pracy
Metody pracy:
Praca z podręcznikiem i zbiorem zadań, dyskusja, rozmowa nauczająca.
Formy pracy:

- indywidualna
- równym frontem
- praca w parach

Czas : 1 godzina lekcyjna
Przebieg lekcji:

Ogniwo lekcji	Czynności nauczyciela i ucznia	Uwagi
I.Czynności organizacyjne:	Sprawdzenie obecności i pracy domowej.	

II.Część naprowadzająca.	Pytania: a) Co to jest procent? b) Gdzie wykorzystuje się procenty w życiu codziennym? c) Jak zamieniamy ułamki na procenty i procenty na ułamki? d) Jak obliczamy procent z danej liczby? e) Jak obliczamy liczbę mając dany jej procent? f) Jak obliczamy, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba?	Uczniowie odpowiadają na pytania. Uczniowie w zeszycie zapisują przykłady wykorzystania procentów w życiu codziennym.	Rozmowa nauczająca.
III.Część główna. A	1. Zapoznanie uczniów z celami lekcji. 2. Zapisanie tematu lekcji. T: Obliczenia procentowe. Zamiana procentów na ułamki i ułamków na procenty.	Uczniowie zapisują w zeszycie. Nauczyciel zapisuje temat lekcji na tablicy. Nauczyciel na tablicy pisze ułamki i procenty. Uczniowie przy tablicy zamieniają ułamki na procenty i procenty na ułamki.	Praca ze zbiorem zadań. Praca równym frontem.

B C	Obliczanie procentu z danej liczby, liczbę mając dany jej procent oraz jakim procentem jednej liczby jest druga liczba. Rozwiązywanie zadań tekstowych związanych z procentami.	Uczniowie przy tablicy obliczają procent z dane liczby, liczbę mając dany jej procent oraz jakim procentem jednej liczby jest druga liczba. Uczniowie przy tablicy rozwiązują zadania tekstowe związane z procentami. Dokonują analizy zadania. Sprawdzają rozwiązanie z treścią zadania. Piszą odpowiedzi do zadań. Nauczyciel uświadamia uczniów o potrzebie stosowania procentów w życiu codziennym.	Praca w parach. Praca z podręcznikiem. Praca z podręcznikiem. Praca ze zbiorem zadań.
IV. Podsumowanie	Jak obliczamy procent z danej liczby? Jak obliczamy liczbę mając dany jej procent? Jak obliczamy, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba?	Uczniowie odpowiadają na pytania. Nauczyciel z uzasadnieniem ocenia pracę uczniów.	
V. Praca domowa.	Nauczyciel rozdaje karty pracy z zadaniami do domu oraz wyjaśnia pracę domową		*Załącznik*

ZAŁĄCZNIK

KARTA PRACY – *praca domowa*

Zadanie 1.

Wartość działki budowlanej równą 24 000 zł najpierw podwyższono o 15%, następnie obniżono o 15% . Oblicz końcową cenę działki.

Zadanie 2.

Na wycieczkę szkolną pojechało 24 uczniów, co stanowi 80% liczby uczniów pewnej klasy. Ilu uczniów liczy ta klasa?

Zadanie 3.

Oblicz próbę stopu, w którym jest 35g srebra i 5g miedzi.

Zadanie 4.

Jeden kilogram jabłek kosztuje 4zł, a jeden kilogram gruszek kosztuje 5zł. O ile procent cena 1 kg gruszek jest większa od ceny 1 kg jabłek gruszek?

Zadanie 5.

Założono lokatę w wysokości 5000zł na rok czasu. Oprocentowanie w skali roku wynosi 18%. Jaki będzie zysk po okresie pół roku?

Zadanie 6.

Jakie jest stężenie solanki, skoro do 20g wody wsypano 5g soli. Ile soli trzeba odlać, aby stężenie procentowe zwiększyło się do 25%?

scenariusz lekcji nr 19

Dział: Ciągi

Temat: Ciąg arytmetyczny – powtórzenie wiadomości

Cel ogólny: Doskonalenie umiejętności rozwiązywania zadań dotyczących ciągu arytmetycznego

Cele operacyjne:

Uczeń potrafi:

- podać definicję ciągu i własności ciągu arytmetycznego,
- podać wzory na n-ty wyraz ciągu oraz sumę początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego,
- obliczać sumę początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego,
- rozwiązywać zadania dotyczące ciągu arytmetycznego,
- rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności,
- opisać otrzymane rezultaty i dostrzec prawidłowości rozwiązania,
- współpracować i komunikować się w grupie.

Środki dydaktyczne:

MATeMAtyka 2, Zbiór zadań dla szkół ponadgimnazjalnych, zakres podstawowy i rozszerzony NOWA ERA, tablica, przygotowane karty pracy z treścią zadań, laptop z rzutnikiem.

Metody pracy:

Rozmowa nauczająca, ćwiczenia uczniowskie.

Formy pracy:

- indywidualna
- praca w grupach

Czas zajęć: 1 godzina lekcyjna

Przebieg lekcji:

Ogniwo lekcji	**Czynności nauczyciela i ucznia**		**Uwagi**
I.Część organizacyjna:	Sprawdzenie obecności i pracy domowej.		
II.Część nawiązująca: **III.Część właściwa:**	Wspólne przypomnienie i utrwalenie następujących pojęć: - pojęcie ciągu arytmetycznego i jego własności, - wzorów dotyczących ciągu arytmetycznego. 1. Zapoznanie uczniów z celami lekcji. 2. Zapisanie tematu	Uczniowie ustnie odpowiadają na zadane pytania, nauczyciel najważniejsze zapisuje na tablicy.	Rozmowa nauczająca

	lekcji. 3.Podzielenie uczniów na trzy grupy (np. według rzędów, w jakich siedzą) i rozdanie uczniom kart pracy z zadaniami. **A** **B.**	Nauczyciel zapisuje temat lekcji na tablicy. Nauczyciel dzieli uczniów na grupy. Uczniowie w grupach wykonują zadanie 1 - DOMINO. Do podanego a_1 i r należy dopasować sumę. Po skończeniu grupa zgłasza ten fakt nauczycielowi, który sprawdza poprawność ułożenia kostek. Po ułożeniu domina przez wszystkie grupy nauczyciel wyświetla rozwiązanie na rzutniku. Najszybsze poprawne rozwiązanie zostanie nagrodzone „plusami” z matematyki. Wylosowanie przez liderów grup jednego z czterech zadań (zadania2-5). Grupa otrzymuje treść wszystkich zadań, ale rozwiązuje tylko wylosowane . Każda z grup przedstawia	Załącznik Praca w grupie

		rozwiązanie na tablicy (po jednym przykładzie). Po przedstawieniu rozwiązań przez uczniów nauczyciel umieszcza poprawne rozwiązanie na rzutniku oraz dokładnie je omawia.	Praca w grupie
IV.Podsumowanie:	Podsumowanie lekcji oraz ocena przez nauczyciela najaktywniejszych uczniów.	Uczniowie odpowiadają na pytania nauczyciela.	
V.Praca domowa:	Zadanie i omówienie pracy domowej. Wybrane zadania ze zbioru zadań.	Nauczyciel zapisuje treść pracy domowej na tablicy. Wyjaśnia pracę domową. Uczniowie zapisują w zeszytach.	

<u>ZAŁĄCZNIK</u>

KARTA PRACY – *praca w grupach*

Zadanie 1 DOMINO:

START	$a_1 = 5$ $r = 5$ …………………………..	$S_{30} = 232$ …………………..	$a_1 = -2$ $r = 4$ ……………………………
$S_{50} = 480$ ……………………………	$a_1 = -6$ $r = 0$ ………………………	$S_{100} = -60$ ………………………………..	$a_1 = 0{,}5$ $r = -2$ ……………………………

$S_{40}=-154$ ………………………………	$a_1=3$ $r=4$ …………………………..	$S_{16}=528$ ……………………………..	$a_1=13$ $r=-3$ ………………………………
$S_{22}=-40$ ………………………………	$a_1=6$ $r=5$ …………………………..	$S_{12}=402$ …………………………	KONIEC

Zadanie 2.

Rozwiąż równanie [illegible]

Zadanie 3.

Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 200, które przy dzieleniu przez 7 daje resztę 1.

Zadanie 4.

W ciągu arytmetycznym $a_1=3$, $r=5$. Oblicz sumę wyrazów tego ciągu od 10 do 41 włącznie.

Zadanie 5.

Oblicz sumę wszystkich liczb dwucyfrowych, których reszta z dzielenia przez 5 daje 2.

scenariusz lekcji nr 20

Dział: Wielomiany

Temat: Pierwiastki wielomianu

Klasa II LO

Cel ogólny: Doskonalenie umiejętności rozwiązywania zadań wymagających zastosowania twierdzenia Bezouta i logicznego wnioskowania

Cele operacyjne:

Uczeń potrafi:

- podać definicję wielomianu i jego pierwiastka,
- obliczać wartość wielomianu dla podanego argumentu,
- podzielić wielomian przez dwumian x – a,
- zastosować twierdzenie Bezouta,
- opisać otrzymane rezultaty i dostrzec prawidłowości rozwiązania,
- współpracować i komunikować się w grupie.

Środki dydaktyczne:

MATeMAtyka 2, Zbiór zadań dla szkół ponadgimnazjalnych, zakres podstawowy i rozszerzony NOWA ERA, zeszyt, karty pracy.

Metody pracy:

Praca z podręcznikiem i zbiorem zadań, dyskusja, rozmowa nauczająca.

Formy pracy:

- indywidualna
- praca w grupach

Czas zajęć: 1 godzina lekcyjna

Przebieg lekcji:

Ogniwo lekcji	**Czynności nauczyciela i ucznia**		**Uwagi**
I.Część organizacyjna:	Sprawdzenie obecności i pracy domowej.		
II.Część nawiązująca: **III.Część właściwa:**	Przypomnienie podstawowych wiadomości o wielomianie i jego pierwiastkach, oraz twierdzeniu Bezouta (ewentualnie odpytanie na ocenę). 1. Zapoznanie uczniów z celami lekcji. 2. Zapisanie tematu	Uczniowie odpowiadają na pytania nauczyciela. Nauczyciel zapisuje temat lekcji na tablicy.	Rozmowa nauczająca.

	lekcji. 3.Podzielenie uczniów na trzy grupy (np. według rzędów, w jakich siedzą) i rozdanie uczniom kart pracy z zadaniami. 4.Samodzielne rozwiązanie przez uczniów zadania 2 podpunkt b) i zadania 3 podpunkt b. 5. Ćwiczenia utrwalające wiadomości. Wspólne rozwiązanie zadań 4, 5,6.	Nauczyciel dzieli uczniów na grupy. Uczniowie w grupach wykonują zadanie nr1, a następnie jeden przedstawiciel grupy referuje wyniki przy tablicy. Po omówieniu wszystkich przykładów sformułowanie wniosków przez uczniów i zapisanie ich w zeszytach. Uczniowie sprawdzają umiejętność samodzielnego rozwiązania zadania. Uczniowie przy tablicy rozwiązują zadania. Uczniowie omawiają z nauczycielem wszystkie wykonywane czynności oraz własności, z jakich skorzystano.	Załącznik nr 1 Praca w grupie. Praca indywidualna Załącznik nr 2 Praca całą klasą
IV.Podsumowanie:	Podsumowanie lekcji oraz ocena przez nauczyciela najaktywniejszych uczniów.	Uczniowie odpowiadają na pytania nauczyciela.	

V.Praca domowa:	Zadanie i omówienie pracy domowej. a) rozwiąż zadania 2 i 3 podpunkty a) i c) (analogicznie jak na lekcji), b) dokończyć zadanie 5 i 6. c) zadanie dodatkowe dla zainteresowanych uczniów – Zbiór zadań.	Nauczyciel zapisuje treść pracy domowej na tablicy. Wyjaśnia pracę domową. Uczniowie zapisują w zeszytach.	*Załączniki*

ZAŁĄCZNIK 1.

KARTA PRACY – *praca w grupach*

Zadanie 1

Dany jest wielomian W(x) oraz liczby a i b.

a) Oblicz W(a) i podziel wielomian W(x) przez dwumian x – a.

b) Oblicz W(b) i podziel wielomian W(x) przez dwumian x – b.

Sformułuj wnioski.

grupa 1. $W(x) = x^4 – x^3 – 3x^2 + 5x – 2$, a = 1, b = -3

grupa 2. $W(x) = x^4 – 5x^3 + x^2 + 11x – 2$, a = -1,b = 2

grupa 3. $W(x) = x^3 – x^2 - 4x + 4$, a = 2, b = -0,5

ZAŁĄCZNIK 2.

KARTA PRACY

Zadanie 2

Sprawdź nie wykonując dzielenia, czy wielomian W(x) jest podzielny przez podany dwumian:

a)$W(x)=6x^4+5x^3−38x^2+5x+6$; x+3

b)$W(x)=10x^5−6x^3+136$; x−2

c)$W(x)=x^4−x^3−2x^2+4x+4$; x+1

Zadanie 3

Wyznacz wszystkie pierwiastki wielomianu W(x),wiedząc, że wielomian ten jest podzielny przez podany obok dwumian, jeśli:

a)$W(x)=3x^3+20x^2+11x-6$; $x+1$

b)$W(x)=2x^3-10x^2+10x-8$; $x-4$

c)$W(x)=2x^3-3x^2-20x+21$; $x+3$

Zadanie 4

Dla jakich wartości parametru k wielomian $W(x) = x^3 + (k^2 + 1)x^2 + (3k -1)x + 1$ jest podzielny przez dwumian $x + 1$?

Zadanie 5

Dla jakich wartości parametru p reszta z dzielenia wielomianu

$W(x) = 2x^3 + (p + 1)x^2 + (4k - 2)x + 1$ przez dwumian $(x - 2)$ wynosi 4?

Zadanie 6

Dla jakich wartości parametrów m i n wielomian $W(x) = 3x^3 + mx^2 + nx - 4$ jest podzielny przez $(x^2 - 1)$?

scenariusz lekcji nr 21

Dział: Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka

Temat: Drzewo zdarzeń na matematyce

Cel ogólny:

Zdobycie umiejętności obliczania prawdopodobieństwa mniejszych zdarzeń w przestrzeń zdarzeń elementarnych z wykorzystaniem metody tzw. drzewek

Cele operacyjne:

Uczeń:

- potrafi przedstawiać kolejne etapy doświadczeń losowych za pomocą tzw. drzewek,
- potrafi zastosować drzewko do rozwiązywania zadań z rachunku prawdopodobieństwa,
- oblicza prawdopodobieństwo zdarzenia losowego zgodnie z definicją,
- potrafi analizować tekst matematyczny,
- rozwija logiczne myślenie.

Metody lekcji:

- pogadanka,
- praca z tekstem,
- ćwiczenia uczniowskie.

Formy pracy na lekcji:

2) praca indywidualna ucznia,
3) praca grupowa.

Środki dydaktyczne:

- **MATeMAtyka 3,** Podręcznik i Zbiór zadań dla szkół ponadgimnazjalnych, zakres podstawowy i rozszerzony NOWA ERA, zeszyt, karta pracy, arkusze papieru.

Czas zajęć: 1 godzina lekcyjna.

Przebieg lekcji:

<table>
<tr><th>Ogniwo lekcji</th><th colspan="2">Czynności nauczyciela i ucznia</th><th>Uwagi</th></tr>
<tr><td>I.Część organizacyjna:</td><td colspan="2">Sprawdzenie obecności, wprowadzenie atmosfery pracy.</td><td></td></tr>
<tr><td>II.Część nawiązująca:</td><td>Powtórzenie wiadomości z ostatnich lekcji, sprawdzenie pracy domowej.

Pogadankę przeprowadza nauczyciel lub wyznaczony do tego uczeń, który zadaje pytania: Co to jest zdarzenie losowe. W jaki sposób można je określi?,</td><td>Uczniowie mieli za zadanie:
• wyjaśnić pojęcia tj. zdarzenia elementarnego, przestrzeni zdarzeń elementarnych;
• opisać co rozumiesz przez zdarzenie pewne i niemożliwe;
• podać klasyczna</td><td></td></tr>
</table>

III.**Część właściwa:**	*jak bardzo jest ono prawdopodobne. Podaj nowe pojęcia związane ze zdarzeniami losowymi.* 1. Zapoznanie uczniów z celami lekcji. 2. Zapisanie tematu lekcji. 3. Analiza tekstu na karcie pracy i w podręczniku. (Przypomnienie w jaki sposób czyta się ze zrozumieniem teksty matematyczne). 4. Przykłady zastosowań drzewek do	*definicję prawdopodobieństwa.* Nauczyciel zapisuje temat lekcji na tablicy. Nauczyciel rozdaje uczniom karty pracy i prosi o przeczytanie zawartego tam tekstu i porównanie go z materiałem z podręcznika. Wcześniej jednak należy przypomnieć metody analizy tekstów matematycznych.– „burza mózgów”. Uczniowie samodzielnie czytają tekst. (Najlepiej, aby każdy uczeń posiadał kartę pracy, bo wówczas praca jest spokojniejsza i bardziej efektywna). Nauczyciel dzieli uczniów na 3 - 4 osobowe grupy (maksymalnie 4 osoby w grupie) i rozdaje uczniom karty pracy z zadaniami do wykonania. Uczniowie wykonują w grupach podane zadania: *Na otrzymanych arkuszach papieru należy narysować*	Rozmowa nauczająca (pogadanka) Praca z podręcznikiem i kartą pracy - Załącznik nr 1

	rozwiązywania zadań.	*drzewa doświadczeń i zaznaczyć kolorem gałęzie sprzyjające danemu zdarzeniu oraz obliczyć prawdopodobieństwa podanych zdarzeń.* Nauczyciel nadzoruje pracę uczniów. Zadanie kończy wspólne omówienie rozwiązań przez ochotników lub wybranych uczniów przy tablicy i wyjaśnienie ewentualnych błędów. Reszta uczniów sprawdza swoje rozwiązania i zapisuje w zeszytach.	Praca w grupach Załącznik nr 2
IV.Podsumowanie:	Podsumowanie lekcji.	Uczniowie odpowiadają na pytania nauczyciela zbierające wiadomości zdobyte na lekcji: *W jaki sposób rysuje się drzewo doświadczenia? Co zapisujemy na końcach gałęzi, a co na gałęziach. Jaka własność maja prawdopodobieństwa opisujące gałęzie wychodzące z jednego węzła? W jaki sposób oblicza się prawdopodobieństwa zdarzeń? Czy zawsze należy rysować wszystkie gałęzie drzewa?* Nauczyciel na podsumowanie może narysować mapę mentalną obrazującą sposób poprawnego rysowania drzewa i korzystania z niego podczas obliczania prawdopodobieństwa	Praca całą klasą.

		zdarzeń	
V. Praca domowa:	Zadanie i omówienie pracy domowej: Wybrane zadania ze zbioru zadań.	Nauczyciel wyjaśnia pracę domową. Uczniowie zapisują w zeszytach.	Zbiór zadań.
	Ocena pracy uczniów podczas lekcji.	Nauczyciel z uzasadnieniem ocenia pracę uczniów.	

ZAŁĄCZNIK 1.

KARTA PRACY – *tekst*

Co to są drzewa zdarzeń?

Tak zwane „drzewa zdarzeń” lub „drzewka” są innym podejściem stosowanym do obliczania prawdopodobieństwa, niż metody które poznaliście do tej pory.

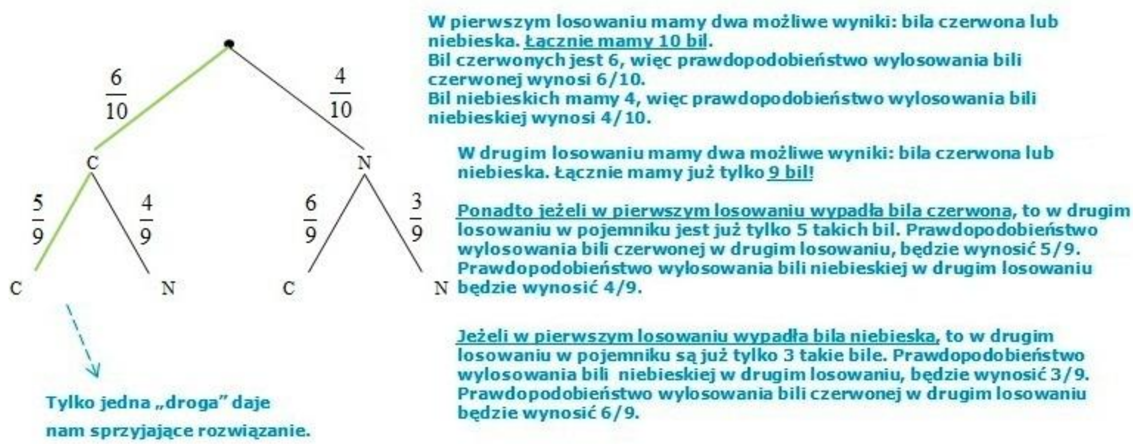
W poprzednich podrozdziałach aby obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia losowego, obliczaliśmy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych oraz liczbę wszystkich zdarzeń zdarzenia losowego. W przypadku drzewek będziemy obliczać prawdopodobieństwa mniejszych zdarzeń, składających się na przestrzeń zdarzeń elementarnych, a następnie będziemy wykonywać działania na tych prawdopodobieństwach.

Zanim napiszemy czym jest to „mniejsze zdarzenie”, należy wyjaśnić w jakich sytuacjach możemy stosować tę metodę. Podstawowym warunkiem jest wystąpienie przynajmniej dwóch losowań (np: rzucamy dwa razy kostką, losujemy trzy bile z siedmiu itp.). Nie może także być ich zbyt dużo (najlepiej nie więcej niż trzy).

Wspomniane wcześniej „mniejsze zdarzenie” to jedno losowanie lub jeden wybór.

Przykład 1:

W pojemniku znajduje się 6 bil czerwonych i 4 bile niebieskie. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia losowego, polegającego na wylosowaniu dwóch bil czerwonych.



$$P(A)=\frac{\overset{2}{\cancel{6}}}{\underset{2}{\cancel{10}}}\cdot\frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{3}{\cancel{9}}}=\frac{1}{3}$$

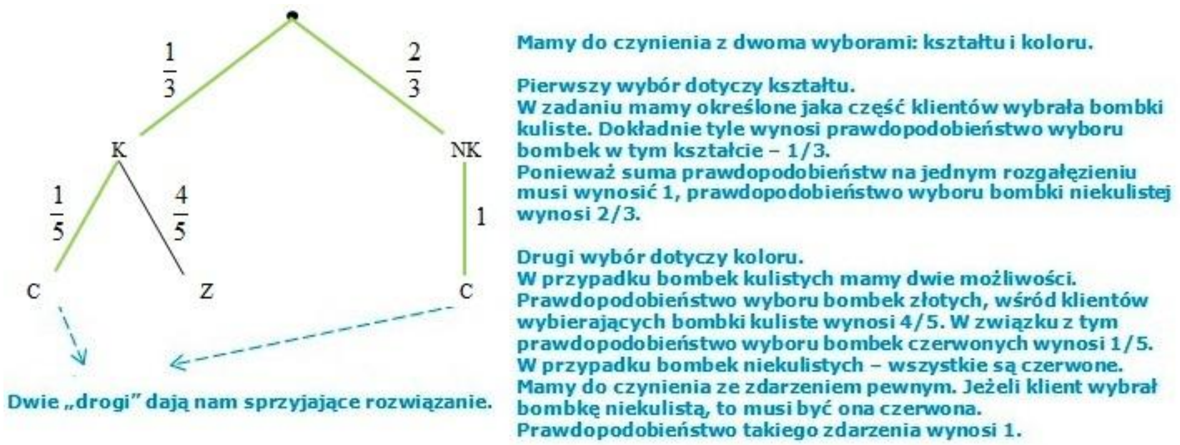
Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia losowego zgodnie z zasadą:

P(A) = iloczyn prawdopodobieństw jednej „drogi" + iloczyn prawdopodobieństw drugiej + iloczyn prawdopodobieństw trzeciej …

Możemy się spotkać z zadaniami, w których prawdopodobieństwo wszystkich lub niektórych „mniejszych zdarzeń" zostaje podane w treści.

Przykład 2:

W firmie produkującej ozdoby choinkowe, okazało się, że 1/3 sprzedanych bombek miała kształt kulisty, a pozostałe miały inny kształt. Ponadto bombki kuliste były w dwóch kolorach: czerwonym i złotym, a bombki niekuliste tylko w kolorze czerwonym. Wśród klientów wybierających bombki kuliste aż 4/5 wybierało bombki złote. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia losowego, polegającego na wylosowaniu spośród sprzedanych bombek, bombki czerwonej.



$$P(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}+\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{1}{15}+\frac{2}{3}=\frac{1}{15}+\frac{10}{15}=\frac{11}{15}$$

www.matematykam.pl

<u>ZAŁĄCZNIK 2.</u>

KARTA PRACY – *praca w grupach.*

Zadanie dla grup. Przedstaw za pomocą drzew przebieg następujących doświadczeń losowych oraz oblicz prawdopodobieństwo każdego wyniku:

a) dwukrotny rzut monetą,
b) dwukrotny rzut kostką do gry,
c) płeć trojga dzieci państwa Kowalskich,
d) losowanie bez zwracania trzech kolorowych kostek: zielonej, czerwonej, białej,
e) rozmieszczenie trzech pań A, B, C w trzech wagonach tramwaju,
f) trzykrotny rzut monetą,
g) trzykrotny rzut kostką do gry.

scenariusz lekcji nr 22

Dział: Funkcje

Temat: **Przesunięcia wykresów funkcji**

Cel ogólny: Doskonalenie umiejętności rysowania wykresów funkcji

Cele operacyjne:

Uczeń potrafi:

1) posługiwać się komputerem,
2) podać podstawowe definicję dotyczące funkcji: dziedzina, zbiór wartości, wykres funkcji, miejsce zerowe,
3) przesunąć wykres funkcji wzdłuż osi x,
4) przesunąć wykres funkcji wzdłuż osi y,
5) dopasować wzory funkcji do wykresów,
6) na podstawie wykresu podać wniosek, ustalić rodzaj i wielkość przesunięcia,
7) współpracować i komunikować się w grupie.

Środki dydaktyczne:

Zestawy zadań, komputer z zainstalowanym programem graficznym do rysowania wykresów funkcji.

Metody pracy:

Praca z komputerem – ćwiczenia uczniowskie, rozmowa nauczająca.

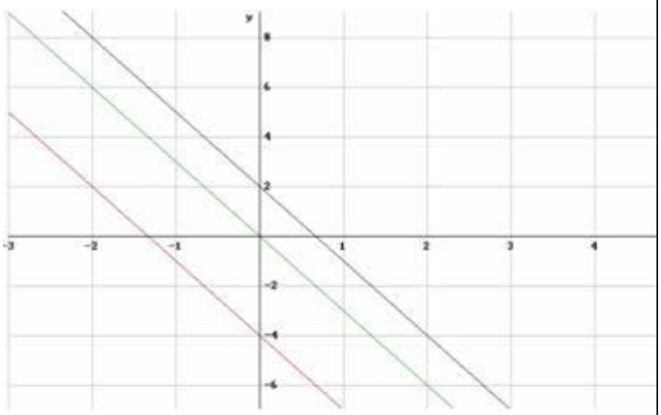
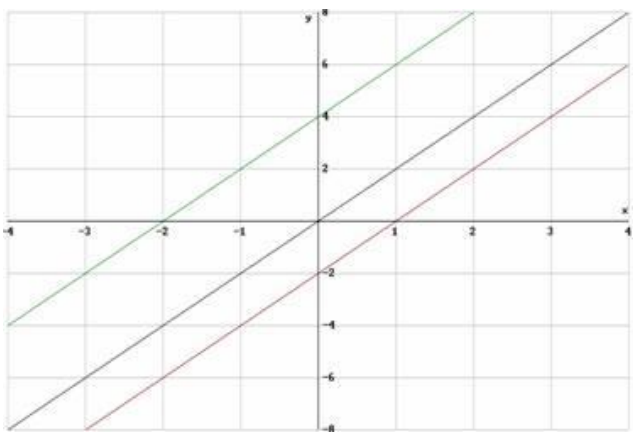
Formy pracy:

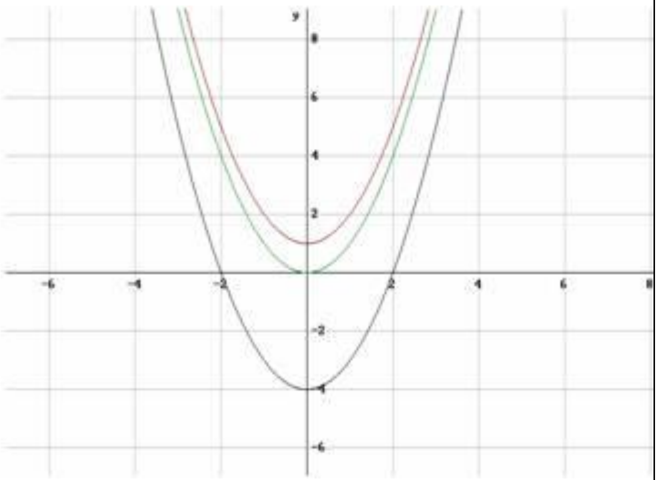
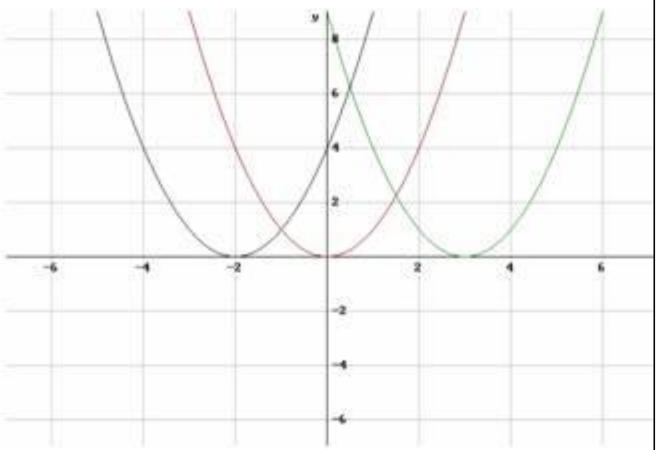
- praca z całą klasą,
- praca w grupach,
- praca indywidualna.

Czas zajęć: 1 godzina lekcyjna

Przebieg lekcji:

Ogniwo lekcji	**Czynności nauczyciela i ucznia**		**Uwagi**
I.Część organizacyjna:	Sprawdzenie obecności i pracy domowej.		
II.Część nawiązująca:	Rozmowa wprowadzająca w temat lekcji	Nauczyciel przeprowadza krótką prezentację możliwości np. programu „Kreator wykresów” lub innego programu do rysowania wykresów funkcji. Uczniowie obserwują ekran komputera powiększony na panelu. Nauczyciel może wspomnieć o innych programach tego typu oraz kalkulatorze graficznym.	Rozmowa nauczająca
	1.Podanie tematu lekcji	Nauczyciel zapisuje temat lekcji na tablicy.	
III.Część właściwa:	2.Wykonanie za pomocą komputera wykresów	Nauczyciel pisze na tablicy równania funkcji, które	Praca w grupach.

A	funkcji: y=-3x, y=-3x+2, y=-3x-4 oraz obserwacja tych przesunięć	uczniowie mają za zadanie zobrazować wykresem na komputerze. Uczniowie pracują w parach.  Uczniowie formułują wniosek dotyczący rodzaju i wielkości przesunięcia: *wykresy tych funkcji powstają z przesunięcia wykresu y=-3x wzdłuż osi y odpowiednio o dwie jednostki do góry , o cztery jednostki w dół.* Uczniowie rysują wykresy kolejnych funkcji i ponownie formułują wnioski:	
	y=2x y=2(x-1) y=2(x+2)	 *wykresy funkcji powstają z przesunięcia wykresu funkcji y=2x wzdłuż osi x odpowiednio o jedna jednostkę w prawo, o dwie jednostki w lewo.* Wydrukowanie i wklejenie wykresów do zeszytów. Nauczyciel rozdaje uczniom karty pracy.	

B	3. Ćwiczenia utrwalające wiadomości. Wspólne rozwiązanie zadań z karty pracy. Zad.1 Zad.2.	Uczniowie stosują się do polecania: *Dla każdego z poniższych wykresów opisz jak go otrzymano, przesuwając wykres funkcji $y=x^2$, oraz podaj wzory otrzymanych funkcji*  Odp: Przesunięcia wzdłuż osi y : jedną jednostkę do góry $y=x^2+1$ i cztery jednostki do dołu $y=x^2-4$  Odp: Przesunięcia wzdłuż osi x: o trzy jednostki w prawo $y=(x-3)^2$ i dwie jednostki w lewo $y=(x+2)^2$	Praca całą klasą

		Uczniowie formułuj wnioski dla ogółu funkcji: *wykres funkcji y= f(x)+b powstaje z wykresu funkcji y= f(x),przesuwając go wzdłuż osi y: w górę gdy b>0, w dół gdy b<0* *wykres funkcji y= f(x-a) powstaje z wykresu funkcji y= f(x),przesuwając go wzdłuż osi x:w prawo gdy a>0, w lewo gdy a<0.* Uczniowie rozwiązują zadania i omawiają z nauczycielem wszystkie wykonywane czynności oraz własności, z jakich skorzystano. Nauczyciel ocenia poprawność rozwiązań oraz nagradza najaktywniejszych uczniów.	
IV.Podsumowanie:	Podsumowanie lekcji jest 5 min sprawdzian wiadomości	Nauczyciel rozdaje karteczki z zadaniem sprawdzającym: *Narysuj wykres funkcji y= $\frac{1}{x}$ oraz dokonaj jego przesunięcia:* • *o 3 jednostki w górę* ***Grupa1*** • *o 2 jednostki w prawo* ***Grupa2*** *Zapisz wzory otrzymanych funkcji.* Uczniowie rozwiązują zadanie sprawdzające na kartkach. Nauczyciel zbiera karteczki z rozwiązaniami uczniów. Sprawdzian ocenia na następnych zajęciach.	Praca indywidualna
V.Praca domowa:	Zadanie i omówienie pracy domowej. Wybrane zadania ze zbioru zadań.	Nauczyciel zapisuje treść pracy domowej na tablicy. Wyjaśnia pracę domową Uczniowie zapisują w zeszytach	

scenariusz lekcji nr 23

Dział: Równania i nierówności

Temat: Ćwiczenia w rozwiązywaniu równań i nierówności.

Cel ogólny:

Utrwalenie i usystematyzowanie wiadomości dotyczących sposobu rozwiązywania równań (nierówności) stopnia pierwszego z jedną niewiadomą.

Cele operacyjne:

Uczeń rozumie:

- pojęcie rozwiązania równania
- pojęcie rozwiązania nierówności

Uczeń potrafi:

- zapisywać zadania w postaci równania
- rozpoznawać równania i nierówności równoważne
- stosować metodę równań równoważnych
- rozwiązywać równania i nierówności z zastosowaniem przekształceń na wyrażeniach algebraicznych
- przedstawiać zbiory rozwiązań nierówności na osi liczbowej
- analizować treść zadań
- przedstawiać treść zadań za pomocą równań i nierówności oraz sprawdzać rozwiązania

Uczeń zna:

- pojęcie równania
- pojęcie rozwiązania równania
- pojęcia: równania równoważne, tożsamościowe, sprzeczne
- metodę równań równoważnych
- pojęcie nierówności i jej rozwiązania
- wzory skróconego mnożenia

Środki dydaktyczne:

- **MATeMAtyka 1,** Podręcznik z płytą CD-ROM dla szkół ponadgimnazjalnych . Zakres podstawowy i rozszerzony NOWA ERA,
- **MATeMAtyka 1**, Zbiór zadań dla szkół ponadgimnazjalnych. Zakres podstawowy i rozszerzony NOWA ERA,
- karty pracy.

Metody pracy:

Praca z podręcznikiem i zbiorem zadań, dyskusja.

Formy pracy:

- indywidualna
- praca w parach
- równym frontem
- praca w grupach

Czas zajęć:

- 1 godzina lekcyjna.

Przebieg lekcji:

Faza lekcji	Czynności nauczyciela i ucznia		Uwagi
I. Część organizacyjna:	Sprawdzenie obecności i pracy domowej.		
II. Część nawiązująca:	Pytania: a) Co to jest równanie i nierówność? b) Co jest rozwiązaniem równania, a co nierówności? c) Jak rozwiązujemy równania, a jak nierówności? d) Jakie są rodzaje równań? e) Jakie znacie wzory skróconego mnożenia?	Uczniowie odpowiadają na pytania. Uczniowie zapisują przykłady równań na tablicy. Uczniowie wymieniają wzory skróconego mnożenia.	Rozmowa nauczająca.
III. Część właściwa:	1. Zapoznanie uczniów z celami lekcji. 2. Zapisanie tematu lekcji. T: Rozwiązywanie równań i nierówności. Rozwiązywanie nierówności pierwszego	Uczniowie zapisują w zeszycie. Nauczyciel zapisuje temat lekcji na tablicy. Nauczyciel zapisuje na tablicy nierówności.	Praca z

	stopnia z jedną niewiadomą. Rozwiązywanie równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą. Rozwiązywanie zadań tekstowych za pomocą równań i sprawdzanie rozwiązania.	 Uczniowie rozwiązują nierówności przy tablicy. Przedstawiają rozwiązania nierówności na osi liczbowej. Nauczyciel dzieli uczniów na grupy czteroosobowe i rozdaje każdej grupie plansze z równaniami. Uczniowie w grupach rozwiązują równania oraz dyskutują nad ich rozwiązaniem. Nauczyciel sprawdza poprawność rozwiązania równań. Nauczyciel zapoznaje uczniów z planem rozwiązania (plansza) podaje etapy rozwiązywania zadania z treścią. Uczniowie zapisują notatkę. Uczniowie rozwiązują zadania z treścią. Sprawdzają poprawność	podręcznikiem. *Załącznik 1.* Praca w grupach. *Załącznik 2.* Praca

		rozwiązania z treścią zadania	indywidualna. Praca ze zbiorem zadań.
IV. Podsumowanie.	Jakie znacie rodzaje równań? Jak rozwiązujemy równania i nierówności? Co jest rozwiązaniem równania, a co nierówności? Jakie są etapy rozwiązywania zadania z treścią? Ocena pracy uczniów podczas lekcji przez nauczyciela.	Uczniowie odpowiadają na pytania.	
V. Praca domowa.	Zadania z podręcznika	Nauczyciel wyjaśnia pracę domową. Uczniowie zapisują zadania w zeszytach.	

ZAŁĄCZNIK 1.

KARTA PRACY - ***Zadania dla grup***

• • Zadanie 1 Rozwiąż równania. $5(x+1)-2(2x+3)+4x=-x+5$ $(x+2)^2-(x+3)(x-3)=6(x+4)-15$ $\frac{4x+2}{4}=\frac{2x+3}{3}$	Zadanie 2 Rozwiąż nierówności. $5(x-1)-2x+3>2x$ $\frac{2x+2}{2}-\frac{5x-5}{3}\leq\frac{x}{2}+5$

	$\frac{2x+1}{5} + x < \frac{x}{5} + 5$

ZAŁĄCZNIK 2.

KARTA PRACY - *Zastosowanie równań do rozwiązywania zadań tekstowych*

„Nacobezu", czyli na co będę zwracać uwagę

ETAPY ROZWIĄZANIA I OMÓWIENIE POSZCZEGÓLNYCH CZYNNOŚCI:

a) Analiza zadania.
b) Ułożenie równania.
c) Rozwiązanie równania.
d) Sprawdzenie warunków zadania.
e) Podanie odpowiedzi.

❖ Analiza zadania to:

- uważne przeczytanie tekstu,
- ustalenie niewiadomej,
- oznaczenie niewiadomą literką. zapisanie związków między danymi a niewiadomą oraz innych danych.

❖ Ułożenie równania to:

- podanie dwóch różnych wyrażeń przedstawiających tę samą wielkość i połączenie ich znakiem równości.

❖ Po rozwiązaniu należy sprawdzić:

- czy otrzymana liczba jest rozwiązaniem równania,
- czy otrzymane rozwiązanie jest zgodne z treścią zadania.

Uwaga: rozwiązanie równania to nie to samo, co rozwiązanie zadania.

scenariusz lekcji nr 24

Dział: Analiza matematyczna

Temat: Pochodna – rozwiązywanie zadań typu maturalnego

Czas: 45 min.

Cele: Na lekcji uczniowie będą kształcić/doskonalić (Podstawa Programowa)

na poziomie ogólnym – umiejętności złożone

III. Modelowanie matematyczne

IV. Użycie i tworzenie strategii

na poziomie szczegółowym – umiejętności

- Wyznaczanie wartości największej i najmniejszej wartości funkcji ciągłej w przedziale domkniętym
- Wyznaczanie ekstremum funkcji

Ponadto jak na każdej lekcji matematyki uczniowie będą kształcić i doskonalić umiejętności rachunkowe, posługiwanie się językiem matematyki, posługiwania się symboliką matematyczną, czytania tekstu ze zrozumieniem, przedstawiania pełnego toku rozwiązania zadania wraz z uzasadnieniem.

Typ: lekcja ćwiczeniowa

Forma: zbiorowa, indywidualna

Metoda: praktyczna-ćwiczenia, eksponująca, z elementami heurezy

Środki dydaktyczne: prezentacja multimedialna „Die Ableitung einer Funktion in Übungen” „Pochodna funkcji w ćwiczeniach”

Tok lekcji:

FAZA	PLANOWANY PRZEBIEG LEKCJI	UWAGI
Wstępna	1. Powitanie 2. Sprawdzenie obecności 3. Nawiązanie do tematu 2. Zapisanie tematu	*Przy nawiązaniu do tematu lekcji* *- przypomnienie omówionych dotychczas zagadnień z rachunku różniczkowego i podanie ich w kontekście wymagań podstawy programowej i wymagań egzaminu maturalnego* *- podkreślenie celów i głównego celu lekcji tj. ćwiczenie umiejętności rozwiązywania zadań „typu maturalnego” z zastosowaniem rachunku pochodnych* *- nawiązanie do egzaminu maturalnego (wiadomości i doświadczenia ze spotkań dla nauczycieli matematyki)* *- zapowiedź, że lekcja będzie z elementami*

		języka niemieckiego *- wprowadzenie luźnej atmosfery, pokaz prezentacji multimedialnej z elementami humoru*
Główna	1. **Wprowadzenie** Na lekcji rozwiązywane będą zadania „typu maturalnego” z zastosowaniem rachunku pochodnych dotyczące wyznaczania ekstremum oraz wartości największej i najmniejszej w przedziale domkniętym. 2. **Zadanie 1** Dla jakiego parametru a funkcja f ma ekstremum w punkcie x_0, jeśli $a)\ f(x) = ax^2 - 4x + 8 \qquad x_0 = 1$ $b)\ f(x) = \frac{ax-1}{x^2-1} \qquad x_0 = 2$ <u>*Rozwiązanie*</u> Slajdy 6 – 11 3. **Zadanie 2** Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji w	*Lekcja ilustrowana prezentacją multimedialną* *„Die Ableitung einer Funktion in Übungen”* *Tłumaczenie - wspólnie z klasą. W razie niejasności – nauczyciel.* *Na slajdach zawarta treść zadań i ich rozwiązania. Zmiana slajdów w tempie i rytmie dopasowanym do uczniów.* *Przypominamy i omawiamy z uczniami:* *- twierdzenia o wyznaczaniu pochodnej, w tym pochodnej funkcji wielomianowej i wymiernej* *- warunek konieczny i wystarczający istnienia ekstremum* *- typy ekstremów- maximum i minimum* *- sposób rozwiązywania zadań z parametrem* *- wyznaczamy model i strategię rozwiązania zadania* *Zadanie (a) rozwiązuje uczeń przy tablicy* *Zadanie (b) uczniowie samodzielnie w zeszycie* *Przypominamy i omawiamy z uczniami:*

	podanym przedziale $a)\ f(x) = x^3 - 6x^2 + 6 \qquad <-2,2>$ $b)\ f(x) = \sqrt{5-4x} \qquad <-1,1>$ *Rozwiązanie* Slajdy 14 – 19	*- własności funkcji ciągłej, w szczególności własność Weierstrassa* *- model rozwiązania zadania dot. wyznaczania wartości największej i najmniejszej funkcji w przedziale domkniętym* *- w zadaniu (b) zwracamy szczególną uwagę na problem „obejścia" zapisu funkcji z pierwiastkiem (w podstawie programowej nie ma pochodnej funkcji złożonej). Warto nawiązać, że tego typu problemy pojawią się w zadaniach optymalizacyjnych z geometrii !* *Zadanie (a) rozwiązuje uczeń przy tablicy* *Zadanie (b) uczniowie samodzielnie w zeszycie* *W trakcie rozwiązywania i omawiania zadań zwracamy wspólnie z uczniami uwagę na poprawność merytoryczną, poprawność języka i symboli matematyki. Nawiązujemy do tego co było, co zrealizowaliśmy, co powinniśmy umieć, do podstawy programowej i wymagań egzaminu maturalnego 2015.* *Popełniane ewentualne błędy wykorzystujemy metodycznie i dydaktycznie.*
Końcowa	1.Podsumowanie lekcji. 2. Zadanie pracy domowej	*- omówienie tego co działo się na lekcji* *- ocena słowna aktywności i postawy uczniów* *- podziękowanie uczniom*

Załącznik nr 1 - prezentacja

scenariusz lekcji nr 25

Dział: Analiza matematyczna
Temat: Granica funkcji
Czas: 90 min.
Cele: Na lekcji uczniowie będą kształcić (Podstawa Programowa)

na poziomie ogólnym – umiejętności złożone

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji
III. Modelowanie matematyczne
V. Rozumowanie i argumentacja

na poziomie szczegółowym –

- Zna określenie/definicję granicy funkcji w punkcie (i granicy jednostronnej) i w nieskończoności
- Rozumie pojęcie granicy funkcji
- Rozumie analogie /związek granicy ciągu liczbowego z granica funkcji
- Potrafi obliczyć granice funkcji, granice jednostronne w punkcie i w nieskończoności

Ponadto jak na każdej lekcji matematyki uczniowie będą kształcić i doskonalić umiejętności rachunkowe, posługiwanie się językiem matematyki, posługiwania się symboliką matematyczną, czytania tekstu ze zrozumieniem, przedstawiania pełnego toku rozwiązania zadania wraz z uzasadnieniem.

Typ: wprowadzenie nowego materiału
Forma: zbiorowa
Metoda: wykład heurystyczny, metoda eksponująca
Środki dydaktyczne: prezentacja multimedialna
- „Granica funkcji"
- Program GeoGebra
- Zasoby internetu (linki w prezentacji): medianauka.pl, youtube.com, mathvids.com

Tok lekcji:

FAZA	PLANOWANY PRZEBIEG LEKCJI	UWAGI
Wstępna	1. Powitanie 2. Sprawdzenie obecności 3. Zapisanie tematu 4. Podanie i omówienie celów lekcji (slajd 2)	*- przypomnienie uczniom o zmianach w podstawie programowej i nowych wymaganiach na Maturze 2015* *- podkreślenie głównego celu lekcji: poznanie pojęcia granicy funkcji i nabycie umiejętności obliczania podstawowych typów granic* *- wprowadzenie luźnej atmosfery, pokaz prezentacji multimedialnej z elementami*

		humoru
Główna	1. **Wprowadzenie** W nawiązaniu do tematu przypominamy uczniom pojęcie granicy ciągu liczbowego, podstawowe twierdzenia oraz sposoby jej obliczania. (slajdy 3-5) 2. **Wprowadzenie pojęcia granicy funkcji wraz z formalną definicją i zapisem** - wprowadzamy pojęcie granicy funkcji w punkcie (slajdy 6-10) - wprowadzamy pojęcie granic jednostronnych funkcji w punkcie oraz asymptoty pionowej (slajd 11-12) - wprowadzamy pojęcie granicy funkcji w nieskończoności i asymptoty poziomej (slajd 13) 3. **Obliczanie granic - przykłady** (slajdy 16-20)	*Lekcja ilustrowana prezentacją multimedialną* *„Granica funkcji”* *Zmiana slajdów w tempie i rytmie dopasowanym do uczniów.* *Jedynie przypominamy granicę ciągu liczbowego.* *Warto zwrócić uwagę na intuicyjne pojęcie granicy tj. wykres i stwierdzenie, że punkty na wykresie „dążą do…”* *Omawiamy „proces” konstruowania pojęcia granicy funkcji* *Podstawa programowa NIE WYMAGA formalnej znajomości pojęcia granicy funkcji punkcie (i następnych pojęć/twierdzeń).* *Ważne jest intuicyjne rozumienie !* *Dlatego warto chwilę zatrzymać się na slajdzie 15. Oczekujemy pomysłowości, kreatywności i inicjatywy uczniów przy podawaniu przykładów rysunkowych.* *Przedstawiamy i omawiamy wraz z uczniami podstawowe typy granic funkcji i sposoby ich obliczania.* *Warto zilustrować poszczególne przykłady (przynajmniej wybrane) wykresami funkcji z wykorzystaniem programu GeoGebra.* *Na wykresie uczniowie mogą wizualnie zauważyć „gdzie dąży funkcja …”*
Końcowa	1.Podsumowanie lekcji. 2. Powtórzenie/przypomnienie celów lekcji	*- omówienie tego co działo się na lekcji* *- ocena słowna aktywności i postawy uczniów* *- podziękowanie uczniom*

Załącznik nr 2 – prezentacja

scenariusz lekcji nr 26

Temat: Liczby naturalne. Podzielność liczb, cechy podzielności.
Czas: 90 min.
Cele: Kształtowanie umiejętności „myślenia matematycznego”, w szczególności realizacja wymagań ogólnych:

III – modelowanie matematyczne
IV – użycie i tworzenie strategii
V – Rozumowanie i argumentacja

Na poziomie szczegółowym:

- Uczeń zna pojęcie podzielności i dzielenia z resztą liczb naturalnych oraz potrafi dokonać odpowiedniego zapisu
- Uczeń zna cechy podzielności przez 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10 i potrafi je stosować
- Uczeń potrafi dokonać rozkładu liczby na czynniki pierwsze
- Uczeń potrafi z rozkładu (postaci iloczynowej) wyznaczyć dzielniki danej liczby
- Uczeń potrafi wyznaczyć NWD i NWW dwóch liczb naturalnych
- Uczeń potrafi zastosować wiedzę i umiejętności do przeprowadzania prostych dowodów dot. podzielności

Forma: zbiorowa, indywidualna
Metoda: heureza
Środki dydaktyczne: prezentacja multimedialna „O podzielności”
Tok zajęć:

FAZA	PLANOWANY PRZEBIEG LEKCJI	UWAGI
Wstępna	1. Powitanie 2. Sprawdzenie obecności 3. Zapisanie tematu 4. Podanie i omówienie celów lekcji	*- przypomnienie uczniom o zmianach w podstawie programowej i nowych wymaganiach na Maturze 2015* *- podkreślenie głównego celu lekcji: kształcenie umiejętności przeprowadzania rozumowania matematycznego (przeprowadzania prostych dowodów o podzielności)*
Główna	1. **Wprowadzenie** W nawiązaniu do tematu przypominamy uczniom pojęcia: - budowy i dowodzenia twierdzeń - zbioru liczb naturalnych - dzielenia z resztą i bez reszty - zapisu dzielenia z resztą i bez reszty - cech podzielności - rozkładu liczby na czynniki pierwsze	*Lekcja ilustrowana prezentacją multimedialną* *„O podzielności”* *Zmiana slajdów w tempie i rytmie dopasowanym do uczniów.* *Nawiązujemy do wiedzy i umiejętności uczniów jakie już posiadają z poprzednich etapów edukacyjnych i poprzednich lekcji* *Algorytm Euklidesa tylko w klasach z*

	- algorytm wyznaczania NWD i NWW (slajdy 1 – 10) 2. **Zadanie 1** Wyznacz wszystkie dzielniki liczby 420. (slajd 11) 3. **Zadanie 2** Wykaż, że liczba jest podzielna przez 8. (slajd 12) 4. **Zadanie 3** Udowodnij, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 8. (slajd 13) $3^{32}-1$ 5. **Zadanie 4** Uzasadnij, że różnica sześcianu liczby naturalnej i jej samej jest podzielna przez 6. (slajd 14) 6. **Zadanie 5** Pewna liczba przy dzieleniu przez 7 daje reszty 6. Oblicz resztę z dzielenia kwadratu tej liczby przez 7. (slajd 15) 7. **Zadanie 6** Liczba a przy dzieleniu przez 4 daje reszty 3, zaś przy dzieleniu przez 5 reszty 2. Oblicz resztę z dzielenia liczby a przez 20. (slajd 16) 8. **Zadanie 7** Wykaż, że różnica liczb trzycyfrowych,	*nauczaniem matematyki w zakresie rozszerzonym* ***ZADANIA NALEŻY DOBRAĆ/WYSELEKCJONOWAĆ W ZALEŻNOŚCI OD KLASY !!!*** *Rozkładamy liczbę na czynniki pierwsze, a następnie wyznaczamy wszystkie dzielniki liczby przez „kombinacje” liczb pierwszych i ich iloczynów* *Przypominamy i korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia.* *Zauważamy, że ostatecznie otrzymujemy iloczyn. Liczba dzieli się przez każdy z czynników, więc również przez 8.* *Zwracamy uwagę na zapis dwóch kolejnych liczb nieparzystych oraz właściwe zinterpretowanie zadania, zapis i zastosowanie wzoru skróconego mnożenia.* *Zwracamy uwagę na właściwe symboliczne zapisanie treści zadania. Rozkładamy różnicę na iloczyn.* *UZASADNIAMY podzielność przez 6 przez podzielność przez 2 i 3* *Zwracamy uwagę na zapis danej liczby i jej kwadratu zgodnie z warunkami zadania. Pokazujemy jak uzyskać zapis 7K + M* *Zwracamy uwagę na zapis danej liczby na dwa*

	z których jedna jest zapisana tymi samymi cyframi co druga, lecz w odwrotnym porządku, jest podzielna przez 99 (slajd 17) 9. **Zadanie 8** Dana jest pięciocyfrowa liczba palindromiczna. Wykaż, że jeśli odejmiemy od tej liczby liczbę która powstała przez zamianę cyfr jedności i dziesiątek oraz tysięcy i setek tysięcy, to otrzymamy liczbę podzielną przez 37. (slajd 18) 10. **Zadanie 9** Uzasadnij, że liczba jest podzielna przez 10. (slajd 20) 11. **Zadanie 10** Uzasadnij, że liczba jest podzielna przez 9, jeśli suma jej cyfr jest podzielna przez 9. $3^{24} - 11^{3}$	*sposoby wynikające z założenia. Rozwiązujemy układ równań metodą przeciwnych współczynników od razu uzyskując żądaną postać zapisu* *Zadanie 8 jest rozwinięciem zadania 7* *Zwracamy na inna metodę dowodzenia !*
Końcowa	1.Podsumowanie lekcji. 2. Powtórzenie/przypomnienie celów lekcji	*- omówienie tego co działo się na lekcji* *-przypomnienie podstawowych „sposobów dowodzenia zadań na podzielność”* *- ocena słowna aktywności i postawy uczniów* *- podziękowanie uczniom*

Załącznik nr 3 - prezentacja