KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

projekt nr POKL.03.03.04-00-110/12
„Z Wojskową Akademią Techniczną nauka jest fascynująca!"

WYKŁAD Z FIZYKI
dla uczestników projektu w dniu 18.06.2015 r.

„Kinematyka i dynamika – nieinercyjne układy odniesienia"

dr Arkadiusz Szymaniec

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wprowadzenie.

Jaś i Małgosia kręcą się na karuzeli symetrycznej dwuramiennej. Siedzą na karuzeli zwróceni do siebie twarzami, symetrycznie względem osi obrotu karuzeli. Jaś ma dropsa, którego chce dać Małgosi, ponieważ nie może zatrzymać karuzeli, postanowił rzucić dropsa Małgosi. Zawsze rzucał bardzo celnie, ale wyrzucony cukierek nie dotarł do Małgosi, ponadto jego tor lotu wyglądał bardzo dziwnie.

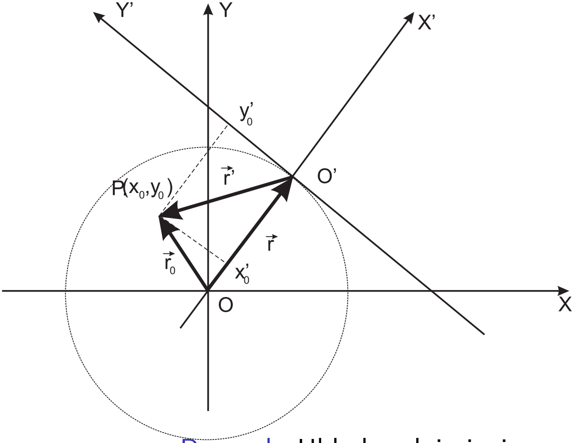
Założenia.

- Karuzela obraca się ze stałą prędkością kątową ω przeciwnie do ruchu wskazówek zegara,
- Jaś rzuca dropsa w kierunku Małgosi w taki sposób, że wypadkowy wektor prędkości dropsa jest równoległy do ramienia karuzeli i wynosi $v_0 = const > 0$,
- zaniedbujemy siłę grawitacji i siłę oporu powietrza,
- ramię karuzeli wynosi r.

Etap 1.

Wyznaczamy zależności między współrzędnymi w dwóch różnych płaskich kartezjańskich układach odniesienia. Układ OXY jest układem nieruchomym, którego środek O pokrywa się z osią obrotu karuzeli. Układ $O'X'Y'$ jest układem związanym z Jasiem, którego środek pokrywa się z siodełkiem Jasia, a oś $O'X'$ pokrywa się z ramieniem karuzeli. Środek układu porusza się po okręgu o środku w punkcie O i promieniu r przeciwnie do ruchu wskazówek zegara z prędkością kątową ω. Twarz Jasia jest stale skierowana równolegle do osi $O'X'$ w jej ujemnym kierunku. Sytuację obrazuje rysunek:

Etap 1.



Rysunek: Układy odniesienia

Etap 1.

Kąt obrotu φ mierzymy między osią OX, a promieniem wodzącym $\vec{r}$. Interesuje nas postać przekształcenia $(x', y') = f(x, y)$, a więc sposób przeliczania współrzędnych punktu z jednego układu do drugiego. Wobec rysunku 1 zachodzi relacja

$$\vec{r}_0 = \vec{r} + \vec{r'} \Longrightarrow \vec{r'} = \vec{r}_0 - \vec{r} \tag{1}$$

Etap 1.

Ponieważ wektory $\vec{r_0}$ i $\vec{r}$ w układzie kartezjańskim OXY można zapisać w postaci:

$$\vec{r_0} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}; \qquad \vec{r} = \begin{bmatrix} rcos(\varphi) \\ rsin(\varphi) \end{bmatrix}, \tag{2}$$

gdzie: $r = \|\vec{r}\|$ jest długością wektora, to wstawiając relacje wzoru (2) do wzoru (1) otrzymujemy przedstawienie

$$\vec{r'} = \begin{bmatrix} x_0 - rcos(\varphi) \\ y_0 - rsin(\varphi) \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Etap 1.

Pozostaje przedstawić składowe wektora $\vec{r'}$ w układzie $O'X'Y'$. To zadanie możemy zrealizować np. na dwa następujące sposoby:

- Sposób I. (Wymaga znajomości iloczynu skalarnego i pojęcia rzutu prostopadłego w ujęciu analitycznym.) Wersory osi (reper) układu współrzędnych $O'X'Y'$ wyrażają się wzorami

$$\vec{e'}_1 = \begin{bmatrix} cos(\varphi) \\ sin(\varphi) \end{bmatrix}; \quad \vec{e'}_2 = \begin{bmatrix} -sin(\varphi) \\ cos(\varphi) \end{bmatrix}; \qquad \|\vec{e'}_1\| = 1; \quad \|\vec{e'}_2\| = 1. \tag{4}$$

Etap 1.

Wówczas składowe wektora $\vec{r'}$ (punktu P) w układzie współrzędnych $O'X'Y'$ wyrażają się wzorami:

$$\begin{aligned} x'_0 = (\vec{e'}_1|\vec{r'}) = (x_0 - rcos\varphi)cos\varphi + (y_0 - rsin\varphi)sin\varphi \\ = x_0cos\varphi + y_0sin\varphi - r \\ y'_0 = (\vec{e'}_2|\vec{r'}) = -(x_0 - rcos\varphi)sin\varphi + (y_0 - rsin\varphi)cos\varphi \\ = -x_0sin\varphi + y_0cos\varphi. \end{aligned} \tag{5}$$

Etap 1.

- Sposób II. (Wymaga znajomości twierdzenia sinusów.) Rozpatrzmy trójkąt $\triangle OPO'$, przy czym kąt w wierzchołku O oznaczymy przez $\varphi_0 - \varphi$, gdzie φ_0 jest kątem jaki tworzy wektor $\vec{r_0}$ z osią OX. Kąt w wierzchołku O' oznaczymy przez α, wówczas z tw. sinusów dla $\triangle OPO'$ mamy

$$\frac{r'}{sin(\varphi_0 - \varphi)} = \frac{r_0}{sin\alpha} \Longrightarrow sin\alpha = \frac{r_0}{r'} sin(\varphi_0 - \varphi) \qquad (6)$$

Zatem wysokość trójkąta $\triangle OPO'$ jest równa (dodatnia część osi OY)

$$y_0' = r' sin\alpha = r_0 sin(\varphi_0 - \varphi) = r_0(sin\varphi_0 cos\varphi - sin\varphi cos\varphi_0) \quad (7)$$

Etap 1.

Wobec określenia kąta φ_0 możemy zapisać $x_0 = r_0 cos\varphi_0$ i $y_0 = r_0 sin\varphi_0$, wówczas po uwzględnieniu wzoru (7) otrzymujemy

$$y_0' = -x_0 sin\varphi + y_0 cos\varphi \tag{8}$$

W następnym kroku wyznaczymy składową $x_0' = -r + d$, gdzie d jest odcinkiem łączącym wierzchołek O z punktem przecięcia wysokości opuszczonej z wierzchołka P na bok OO' ($-r$ wynika z położenia punktu P po ujemnej stronie osi OX'). Wówczas $\frac{d}{r_0} = cos(\varphi_0 - \varphi)$, a stąd uwzględniając relacje na x_0 i y_0 otrzymujemy:

$$x_0' = -r + d = -r + r_0 cos(\varphi_0 - \varphi) = -r + x_0 cos\varphi + y_0 sin\varphi \tag{9}$$

Etap 1.

Ostatecznie na mocy powyższych rozważań otrzymaliśmy wzory na transformacje współrzędnych między układami OXY i $O'X'Y'$ w postaci:

$$\begin{aligned} x_0' &= x_0 cos\varphi + y_0 sin\varphi - r \\ y_0' &= -x_0 sin\varphi + y_0 cos\varphi \end{aligned} \tag{10}$$

Transformacje odwrotne mają postać

$$\begin{aligned} x_0 &= (x_0' + r) cos\varphi - y_0' sin\varphi \\ y_0 &= (x_0' + r) sin\varphi + y_0' cos\varphi \end{aligned} \tag{11}$$

Etap 2.

Etap II. (Modelowanie doświadczenia.) Jaś i Małgosia kręcą się na karuzeli z prędkością kątową ω, zatem $\varphi = \omega t$, t – czas. Jaś rzuca cukierek do Małgosi (p. założenia) tak, że wektor prędkości $\vec{v}_0$ jest równoległy do ramienia karuzeli, zatem

$$\vec{v}_0 = \begin{bmatrix} -v_0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Przy czym przyjmujemy, że Jaś rzucił cukierek w chwili $t_0 = 0$, co odpowiada następującej sytuacji na rysunku 1:

Etap 2.

- Ramię karuzeli pokrywa się z osią OX w układzie OXY, siodełko Jasia znajduje się w punkcie $(r, 0)$ w tym układzie, oraz Jaś siedzi skierowany twarzą w kierunku środka układu OXY.
- W układzie OXY cukierek porusza się po osi z prędkością v_0, zatem w każdej chwili czasu $t > 0$ cukierek znajduje się w punkcie $P(r - v_0 t, 0)$.

Etap 2.

W konsekwencji trajektoria cukierka (w czasie jednego obrotu karuzeli $t \in [0, \frac{2\pi}{\omega}]$) w układzie OXY jest odcinkiem $\overline{P_0 P}$ o początku w punkcie $P_0(r, 0)$ i końcu w punkcie $P(r - \frac{2\pi v_0}{\omega}, 0)$. Pytanie, jak wygląda trajektoria cukierka w układzie $O'X'Y'$ dla czasu $t \in [0, \frac{2\pi}{\omega}]$? Korzystając z powyższych rozważań i wzoru (10) otrzymujemy równanie trajektorii cukierka w układzie $O'X'Y'$ w następującej postaci:

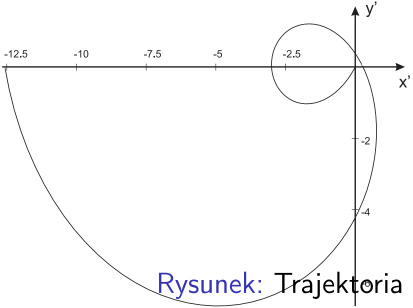
$$\begin{aligned} x'(t) &= (r - v_0 t) cos(\omega t) - r \\ y'(t) &= (v_0 t - r) sin(\omega t) \end{aligned} \tag{13}$$

Etap 2.

Wykonujemy przykładowe wykresy trajektorii za pomocą komputera. Wykresy możemy wykonać za pomocą programu umożliwiającego kreślenie krzywych zadanych parametrycznie lub za pomocą arkusza kalkulacyjnego, tablicując funkcje $x'(t)$ i $y'(t)$ z małym krokiem dla $t \in [0, \frac{2\pi}{\omega}]$, a następnie wykonując wykres. Przykładowe wykresy trajektorii prezentujemy poniżej:

Etap 2.

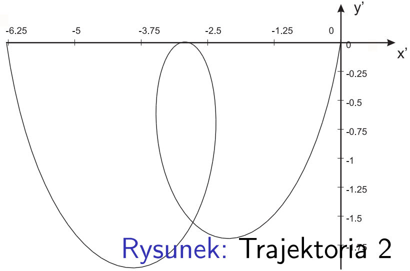
1^0 Trajektoria dla $r = 3$, $\omega = 1$, $v_0 = 2$ i $t \in [0, 2\pi]$.



Rysunek: Trajektoria 1

Etap 2.

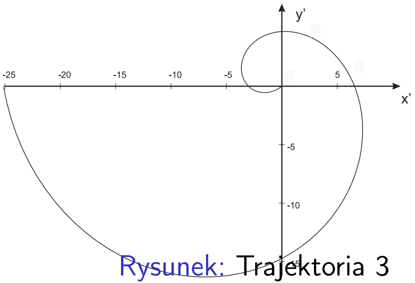
2^0 Trajektoria dla $r = 3$, $\omega = 1$, $v_0 = 1$ i $t \in [0, 2\pi]$.



Rysunek: Trajektoria 2

Etap 2.

3^0 Trajektoria dla $r = 3$, $\omega = 1$, $v_0 = 4$ i $t \in [0, 2\pi]$.



Rysunek: Trajektoria 3

Etap 3.

Etap III. (Analiza modelu.) Zakładając, że jedynym parametrem modelu jest v_0, odpowiedzieć na następujące pytania:

1) Czy Jaś mógł rzucić cukierek tak by sam go złapał? Podaj warunki kiedy jest to możliwe.

2) Czy Jaś mógł rzucić cukierek tak by złapała go Małgosia? Podaj warunki kiedy jest to możliwe.

Etap 3.

Przykładowe rozwiązanie:
Ad 1) Rozważamy sytuację w układzie OXY. Ponieważ drops porusza się ruchem jednostajnym wzdłuż osi OX, to złapanie dropsa przez Jasia jest możliwe tylko wówczas, gdy cukierek znajdzie się punkcie $P(-r, 0)$ w tej samej chwili co Jaś. Jaś znajdzie się w punkcie P, gdy kąt obrotu karuzeli wyniesie $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. W konsekwencji

$$\omega t = \pi + 2k\pi \Longrightarrow t = \frac{\pi + 2k\pi}{\omega} \tag{14}$$

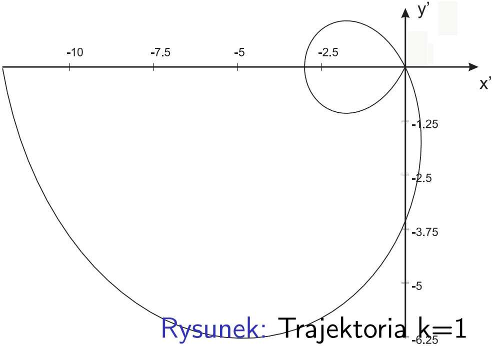
Etap 3.

Z drugiej strony cukierek znajdzie się w punkcie P, gdy $r - v_0 t = r$. Zatem na mocy wzoru (14) mamy

$$r - v_0 t = r \Longrightarrow v_0 = \frac{2r}{t} = \frac{2r\omega}{\pi + 2k\pi} \tag{15}$$

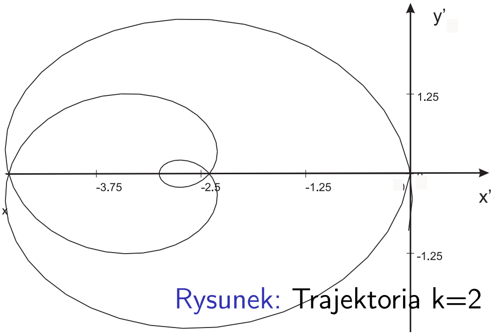
Należy podkreślić, że na wykresie trajektorii sytuacja, gdy Jaś łapie cukierek oznacza, że trajektoria przechodzi przez środek układu współrzędnych dwa razy. Poniżej prezentujemy wykresy trajektorii dla $\omega = 1$, $r = 3$ i $k = 1, 2$.

Etap 3.



Rysunek: Trajektoria k=1

Etap 3.



Rysunek: Trajektoria k=2

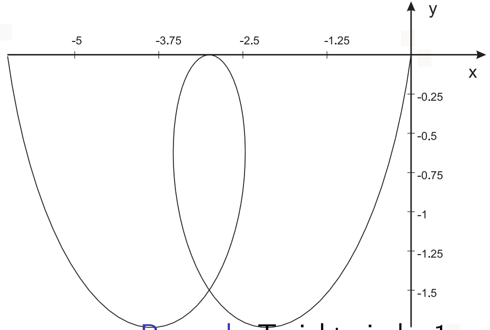
Etap 3.

Ad 2) Sytuację rozpatrujemy ponownie w układzie OXY. Korzystając z rozważań z poprzedniego punktu, wiemy że Małgosia musi znaleźć się w punkcie P, aby złapać dropsa musi zatem wykonać pełny obrót. W konsekwencji

$$\omega t = 2k\pi \Longrightarrow t = \frac{2k\pi}{\omega}; \quad k \in \mathbb{N}_+. \tag{16}$$

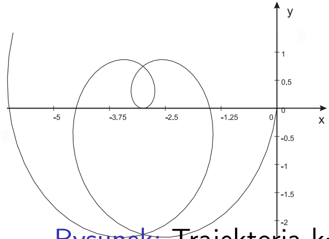
Biorąc pod uwagę wzór (15) mamy $v_0 = \frac{r\omega}{k\pi}$. Poniżej prezentujemy wykresy trajektorii dla $\omega = 1$, $r = 3$ i $k = 1, 2$.

Etap 3.



Rysunek: Trajektoria k=1

Etap 3.



Rysunek: Trajektoria k=2

Etap 4.

Etap IV(Rozbudowa modelu) Przeprowadzić dyskusję i odpowiedzieć na następujące pytanie:

- Z jaką prędkością musi Jaś rzucić dropsa (podać postać wektora), aby drops poruszał się ruchem jednostajnym wzdłuż osi OX w układzie OXY? W rozważaniach uwzględnić fakt, że Jaś obraca się na karuzeli.

- Z jaką siłą musi Jaś działać na cukierek, aby drops poruszał się ruchem jednostajnym wzdłuż osi OX w układzie OXY? W rozważaniach uwzględnić fakt, że Jaś obraca się na karuzeli.