

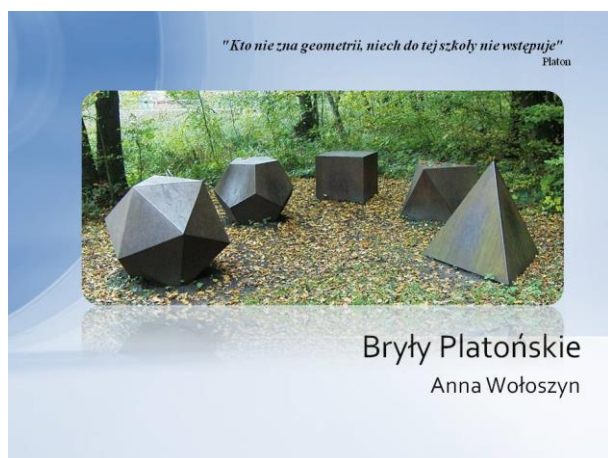
SCENARIUSZ ZAJĘĆ KOŁA NAUKOWEGO z MATEMATYKI

prowadzonego w ramach projektu *Uczeń OnLine*

1. Autor: Anna Wołoszyn
2. Grupa docelowa: Klasa 2 Gimnazjum
3. Liczba godzin: 2
4. Temat zajęć: Geometria brył platońskich
5. Cele zajęć:
 - Rozwijanie wyobraźni przestrzennej
 - Kształtowanie umiejętności praktycznego wykorzystania własności figur przestrzennych
 - Rozróżnianie brył platońskich
 - Odkrywanie twierdzenie Eulera o wielościanach wypukłych
 - Poznanie rysu historycznego geometrii starożytnej
6. Metody i techniki pracy: pogadanka, burza mózgów, praca z komputerem, rozwiązywanie problemów poprzez omawianie praktycznego zastosowania matematyki w życiu codziennym
7. Materiały dydaktyczne: prezentacja multimedialna dot. brył platoński, historii i ewaluacją matematyki na podstawie rozwoju geometrii, symulacja komputerowa „Bryły”, siatki brył
8. Literatura: ELITMAT- Dariusz Kulma, „Kalejdoskop matematyczny” - Hugo Steinhaus, „Matematyczne origami - krawędziowce” - Agata Wierzbie, „Encyklopedia szkolna : Matematyka”, „Klasyki filozofii” - Ryszard Palacz
9. Przebieg zajęć:

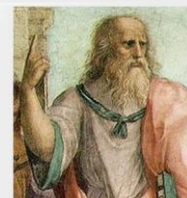
ETAP 1 – nauczyciel wprowadza do tematu

Przedstawia historię Platona oraz jego twórczość (prezentacja slajdy 1-6 - załącznik)



Kim był PLATON i dlaczego w matematyce nazwy niektórych pojęć nawiązują do jego osoby?

- Platon - grecki filozof i uczoney żył w latach 427 p. n. e. - 347 p. n. e., właściwie nazywał się Arystokles. Imię Platon otrzymał w gimnazjone ze względu na silne plecy (Platon bowiem to tyle co szerokoplecy).
- Był uczniem Sokratesa i nauczycielem Arystotelesa. Założył w Atenach szkołę zwaną Akademią Platońską.



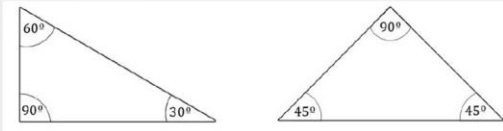
W kosmologii Platona ważne miejsce zajmuje teoria pięciu wielościanów foremnych.

Platon zajmował się również konstrukcjami geometrycznymi, które można wykonywać używając **tylko cyrkla i liniału**. Noszą one nazwę konstrukcji klasycznych, **konstrukcji platońskich**

Platon wyróżnił dwie podstawowe formy budujące materię

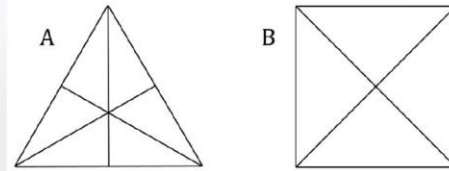
- trójkąty prostokątne
- równoramienne
- różnoramienne, w których miary kątów przy wierzchołkach wynoszą kolejno 30, 60 i 90 stopni

różnorodność materii uzasadniał nieskończenie wieloma możliwościami wspólnej kombinacji tych elementów



Podstawowe formy Platona

Ze złożenia odpowiedniej ilości trójkątów prostokątnych jednego rodzaju, Platon stworzył układ nazwany przez siebie „elementem matematycznym”.



Elementy matematyczne Platona zbudowane z trójkątów prostokątnych różnoramiennych (A) oraz z trójkątów prostokątnych równoramiennech (B)

Budulec wszelkiej materii

Z odpowiedniej ilości jednakowych elementów matematycznych Platon utworzył pięć wielościanów foremnych, które filozof uznawał za budulec wszelkiej materii



Bryły platońskie budujące kolejno żywioły ognia, powietrza, wody, ziemi oraz bliżej nieokreśloną cząstkę boską



Wszczę świat tworzą cztery elementy: ziemia, powietrze, woda, ogień



Platon uznał, że atomy muszą mieć kształt najpiękniejszych brył, a więc **wielościanów foremnych**. Ponieważ brył takich jest pięć, filozof wymyślił piąty składnik materii: eter, z którego zbudowane są ciała niebieskie.

Przyroda powstaje z bezkresu. Ale jak? Na zasadzie wyłaniania się przeciwieństw. Co powoduje ten proces? Powoduje go wieczny ruch ("Wielki Wybuch"); Eter = piąty żywioł.

Myśliciele od zawsze zastanawiali się, co jest tam gdzie nic nie ma. Długo panującą koncepcją na ten temat była koncepcja eteru wypełniającego cały wszechświat. Jednak naukowcy w XIX wieku zanegowali tę teorię jako bezzasadną i niemieszczącą się w materialistycznym pojęciu świata.



ETAP 2 – powtórzenie wiadomości z poprzednich zajęć dot. własności graniastosłupów i ostrosłupów

Pogadanka na temat brył - nauczyciel prezentuje modele brył. Uczniowie wymieniają nazwy brył. Zależność nazwy od podstawy bryły. Uczniowie podają ile poniższe bryły mają: wierzchołków, krawędzi, ścian. Nauczyciel zadaje pytanie: **Czym są wielościany foremne? Czy wśród prezentowanych brył jest wielościan foremny?** Na pewno uda się wskazać czworościan foremny i sześcian. Uczniowie podają definicje bryły, wielościanu, wielokąta foremnego i wielościanu foremnego. Nauczyciel przedstawia slajd 7 z zapisanymi definicjami.

Czym są wielościany foremne?

Pitagorejczycy, a później sam Platon, uważali, że cztery główne żywioły, które tworzą świat zbudowane są z wielościanów foremnych

- **Bryła** jest to ograniczona część przestrzeni.
- **Wielościan** jest to bryła ograniczona ze wszystkich stron płaszczyznami. Jego wszystkie ściany są wielokątami.
- **Wielokąt foremny** jest to wielokąt, który ma wszystkie boki równe oraz wszystkie kąty równe.
- **Wielościan foremny** to wielościan, którego ścianami są wielokąty foremne.



ETAP 3 – wprowadzenie i realizacja tematu zajęć.

Omówienie własności kolejnych, wskazanych przez uczniów modeli brył przedstawiające wielościany foremne. Przedstawienie ciekawostek dot. **teoria pięciu wielościanów foremnych według Platona.**

Sześcian – Platon uważał, że Ziemia utworzona miała być z sześcianów

Siatki sześcianów – max 11

Czworościan symbolizował ogień

Ogień, jako żywioł „najbardziej ruchliwy”, zbudowany jest z brył czworościanu foremnego

Ośmiościan symbolizował powietrze

Dwunastościan postrzegano go jako subtelne i tajemnicze tworzywo ciał niebieskich - eter

Dwunastościanowi pitagorejczycy przypisali zarys wszechświata. W kosmologii Arystotelesa, który był uczniem Platona, dwunastościanowi przypisano piąty żywioł "quinta essentia" (istota rzeczy, najważniejszy element czegoś). - ETER
Miał on być najdoskonalszym z żywiołów w strukturze wszechświata. Postrzegano go jako subtelne i tajemnicze tworzywo ciał niebieskich.

Dwudziestościan symbolizował wodę

Dwudziestościan foremny (in. ikosaedr) to najbardziej złożony wielościan foremny o 20 ścianach w kształcie przystających trójkątów równobocznych. Posiada 30 krawędzi i 12 wierzchołków



Nauczyciel dzieli uczniów na grupy (mogą być dwuosobowe) i rozdaje siatki wszystkich wielościanów platońskich (załączniki). Prosi o złożenie (sklejenie) brył i uzupełnienie wniosków w karcie pracy - zadanie 1. Można zamiast sklejanego siatek wykorzystać klocki REKO.

Nauczyciel wskazuje, że istnieje stała zależność między liczbą ścian, wierzchołków i krawędzi.

Elementy wielościanów foremnych
tabela do uzupełnienia

Nazwa	Liczba ścian i ich kształt	Liczba krawędzi	Liczba wierzchołków
czworościan			
sześćścian			
ośmiościan			
dwunastościan			
dwudziestościan			

Elementy wielościanów foremnych

Nazwa	Liczba ścian i ich kształt	Liczba krawędzi	Liczba wierzchołków
czworościan	4 trójkąty	6	4
sześćścian	6 kwadratów	12	8
ośmiościan	8 trójkątów	12	6
dwunastościan	12 pięciokątów	30	20
dwudziestościan	20 trójkątów	30	12

Uczniowie na pewno nie będą mieli problemu z wypełnieniem tabelki. Po obserwacji zapisują w karcie pracy wzór zależności między ilością ścian, krawędzi i wierzchołków w postaci:


$$W+S=K+2$$

Twierdzeniem Eulera o wielościanach wypukłych

Jeżeli wielościan wypukły ma w wierzchołków, k krawędzi i s ścian, to

$$w - k + s = 2$$

lub

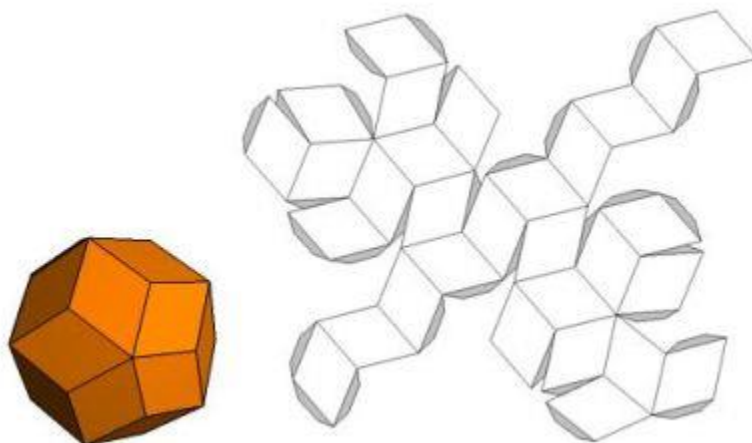
$$w + s = k + 2$$


Szwajcarski banknot 10-frankowy, na cześć Eulera, najznakomitszego szwajcarskiego matematyka w historii

Nauczyciel zadaj pytanie:

Czy wyprowadzana zależność jest zasadna dla innych brył, niekoniecznie platońskich?

Nauczyciel przedstawia inne bryły np. wielościany Catalana o przystających ścianach, które nie są jednak figurami foremnymi, np. trzydziestościan rombowy



Uczniowie powinni zauważyć, że wielokąt ma 30 ścian, 32 wierzchołki i 60 krawędzi. Zależność jest poprawna dla wszystkich wielokątów wypukłych a twierdzenie o zależności $w+s=k+2$ nazywamy twierdzeniem Eulera o wielościanach wypukłych.

ETAP 4 - Zadania utrwalające materiał z lekcji

Zadanie 2.

Dodekaedr to dwunastościan, w którym wszystkie ściany są pięciokątami foremnymi. O bryle tej



można powiedzieć, że:

- ma 30 krawędzi i 20 wierzchołków
- krawędzi jest 50% więcej niż wierzchołków
- ma 26 krawędzi i 16 wierzchołków
- suma wierzchołków i ścian równa jest sumie krawędzi powiększonej o trzy

Zadanie 3.

Wielościany Catalana mają wszystkie ściany przystające, które nie są jednak wielokątami foremnymi. Jednym z takich wielościanów jest sześćdziesięścian deltoidowy. Bryła ta ma:



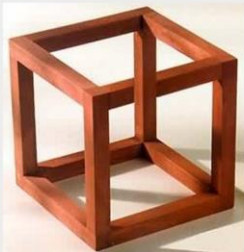
- 61 wierzchołków
- 62 wierzchołki
- 57 wierzchołków
- 2 razy więcej krawędzi niż ścian

ETAP 5- Posumowanie


Nauczyciel zaznacza, że udało się wspólnie odkryć twierdzenie Eulera o wielościanach. Prosi o przypomnienie twierdzenia i wzoru Eulera, przedstawienie wielościanów foremnych i ich własności. Na koniec lekcji w ramach ciekawostki warto przedstawić slajdy o bryłach niemożliwych, które na pewno zachęcą uczniów do rozwijania wyobraźni przestrzennej na lekcjach geometrii.

Ciekawostka - Bryły niemożliwe


Rysowanie na płaszczyźnie figur przestrzennych musi być podporządkowane pewnym regułom, aby obraz przedstawiony był zgodny z rzeczywistością. Nieprzestrzeganie tych reguł daje w efekcie powstanie figur niemożliwych.



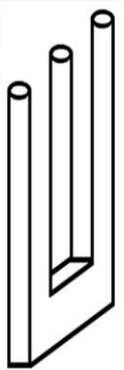
Bryły niemożliwe



Trójkąt Penrose'a



Kwadrat Penrose'a



Claisebrook Roundabout w południowej Australii

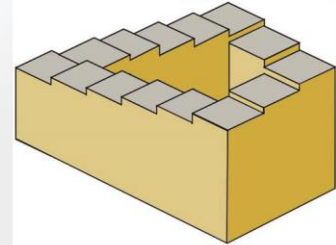
O tym, jak popularna i intrygująca jest ta figura, może świadczyć fakt, że trójkąt Penrose'a stał się inspiracją dla wielu budowli architektonicznych na naszym kontynencie



Fot. 2.10. Prawdziwy model niemożliwego trójkąta. To, co zobaczone, zostało uchwycone fotograficznie
Autor fotografii i: Bjorn Christian Torrissen, bjornfree.com

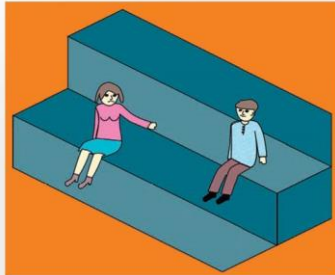
Schody Penrose'a.

Rysunek przedstawia schody załamane czterokrotnie pod kątem go stopni. Nie byłoby w tym nic dziwnego, gdyby nie to, że schody prowadzą w górę, a jednak na górę po nich nie można wejść – ciągle wraca się do punktu wyjściowego. Jest to niemożliwe do wykonania w trzech wymiarach, ale dwuwymiarowy rysunek umożliwił przedstawienie tej paradoksalnej budowli dzięki zaktóceniu perspektywy.



Ławka nieszczęśliwie zakochanych

Dwoje młodych ludzi siedzących na jednej ławce. Zdawałoby się, że nic nie jest w stanie przeszkodzić im w spotkaniu. A jednak tym utrudnieniem jest ławka. Ławka? Ale jakim cudem? Przecież siedząc na ławeczce, nie mogą być już bliżej siebie. A jednak...



Film: <http://youtu.be/OzBiV116oKg>

10. Spostrzeżenia po realizacji:

Zaciekawić ucznia matematyką to jedno z najważniejszych zadań stojących przed nauczycielem. Aby to zrobić przygotowałam na lekcje prezentację multimedialną, film, siatki brył, modele brył i symulacje komputerowe. Zbiór ciekawostek dotyczących wielościanów foremnych pozwoliło urozmaicić i uatrakcyjnić lekcje. Wiadomości ściśle matematyczne są podane w ciekawy, które w miarę realizacji lekcji pozwalają wspólnie odkryć twierdzenie Eulera o wielościanach.

Dodatkowo jeżeli czasu wystarczy przygotowałam **ciekawostkę o bryłach niemożliwych**.

Rozwijanie wyobraźni przestrzennej jest zaproszeniem do geometrii. Jest dobrym wstępem do matematyki. Daje to, co jest charakterystyczne dla matematyki i co najtrafniej opisał już Platon w starożytności: „Matematycy kreślą konkretne figury, na których prowadzą swoje argumentacje, ale myślą nie o tych, co właśnie kreślą, ale o tych idealnych, prawdziwych, pomyślanych, których żaden człowiek nie może inaczej zobaczyć, jak tylko myśleć” (Platon, *Państwo*, Księga 6, 510 DE).

Oświadczam, że scenariusz zajęć nie narusza praw autorskich osób trzecich.

Czytelny podpis.....



KARTA PRACY - WIELOŚCIANY

Zadanie 1: Elementy wielościanów foremnych – uzupełnij tabelę.

Nazwa	Liczba ścian i ich kształt	Liczba krawędzi	Liczba wierzchołków
czworościan			
sześćcian			
ośmiościan			
dwunastościan			
dwudziestościan			

wzór zależności między ilością ścian, krawędzi i wierzchołków

Zadanie 2.

Dodekaedr to dwunastościan, w którym wszystkie ściany są pięciokątami foremnymi. O bryle tej można powiedzieć, że:

- ma 30 krawędzi i 20 wierzchołków
- krawędzi jest 50% więcej niż wierzchołków
- ma 26 krawędzi i 16 wierzchołków
- suma wierzchołków i ścian równa jest sumie krawędzi powiększonej o trzy



Zadanie 3.

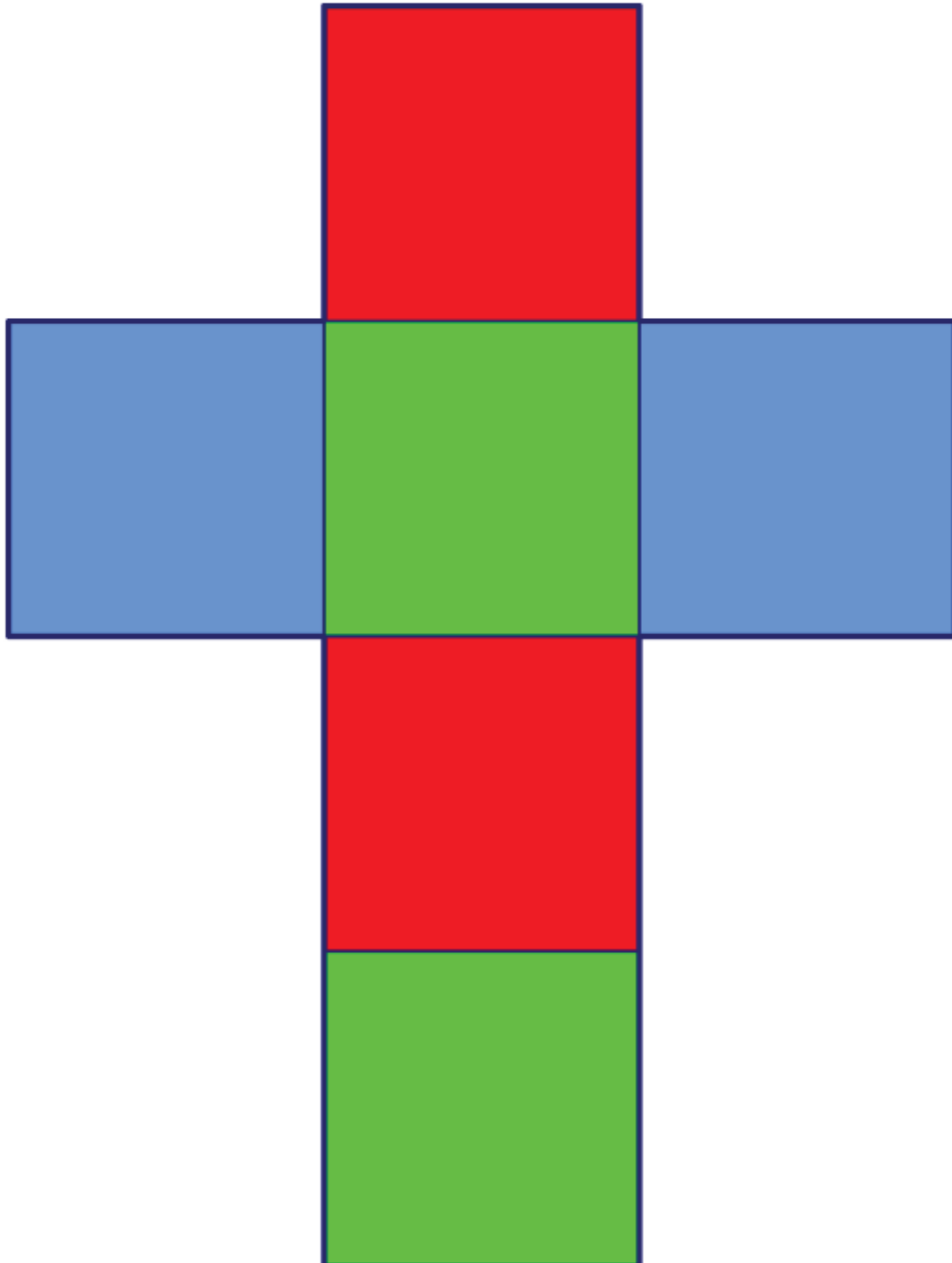
Wielościany Catalana mają wszystkie ściany przystające, które nie są jednak wielokątami foremnymi. Jednym z takich wielościanów jest sześćdziesięścian deltoidowy. Bryła ta ma:

- 61 wierzchołków
- 62 wierzchołki
- 57 wierzchołków
- 2 razy więcej krawędzi niż ścian

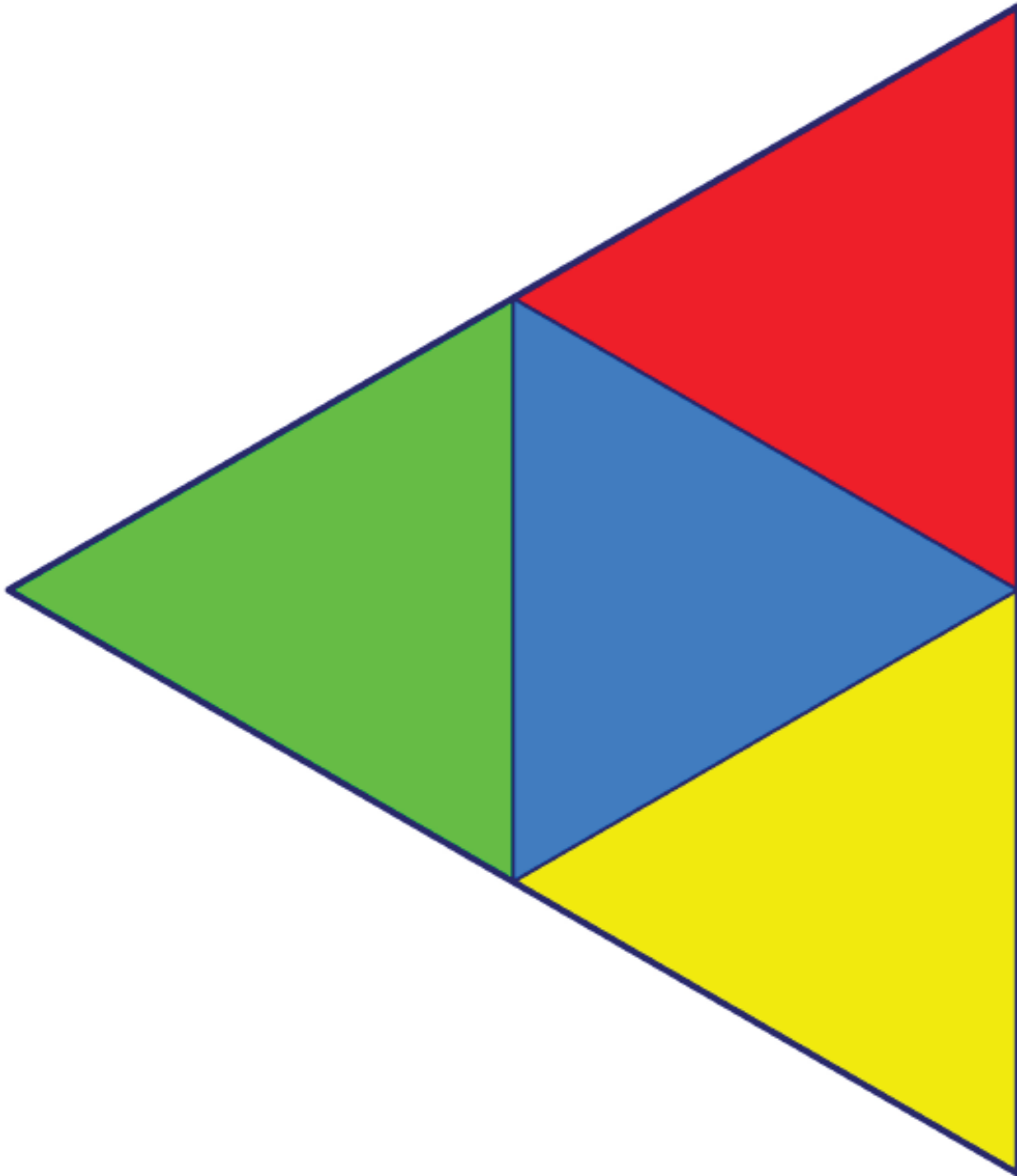




Siatka sześcianu

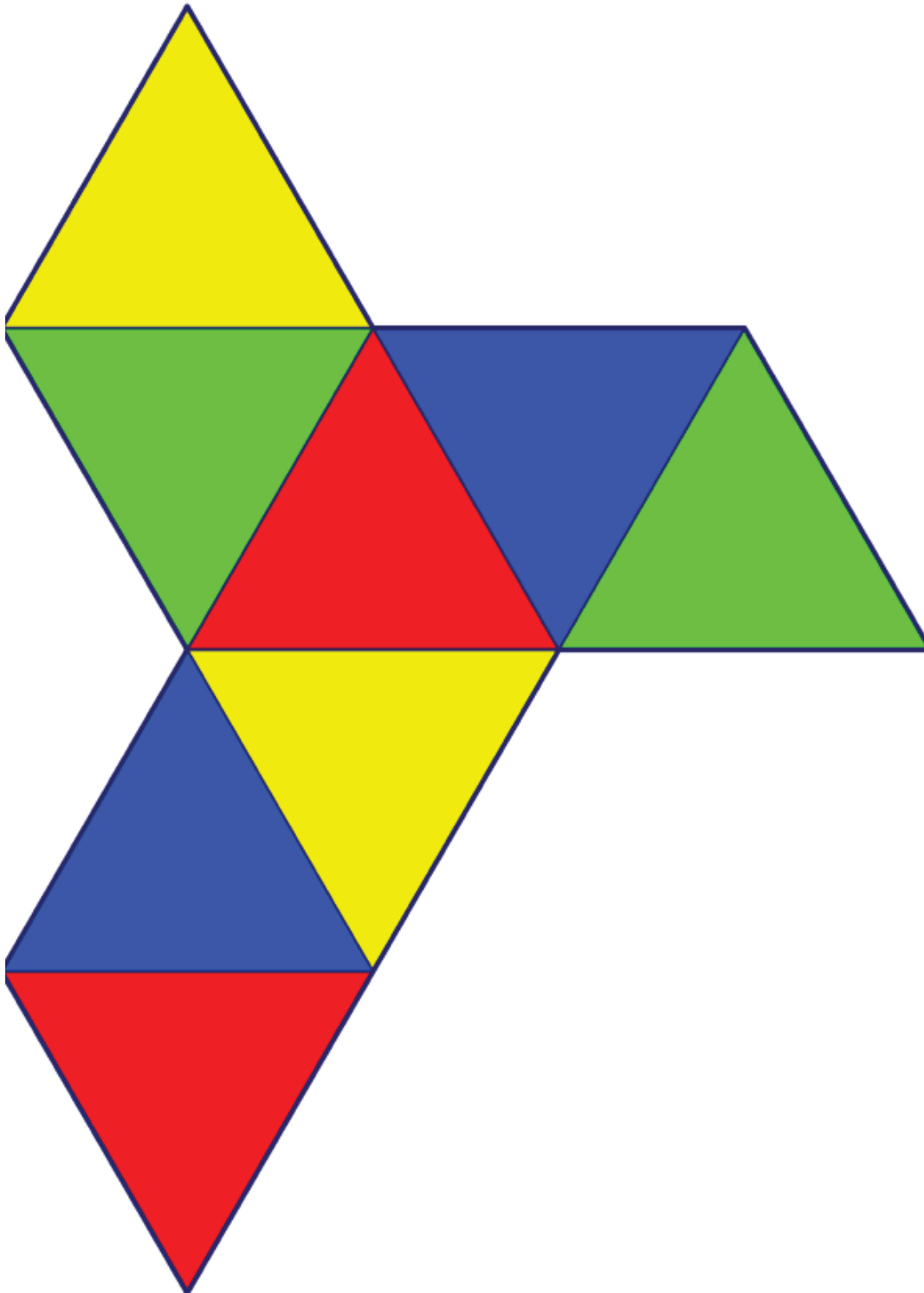


Siatka czworokątnu



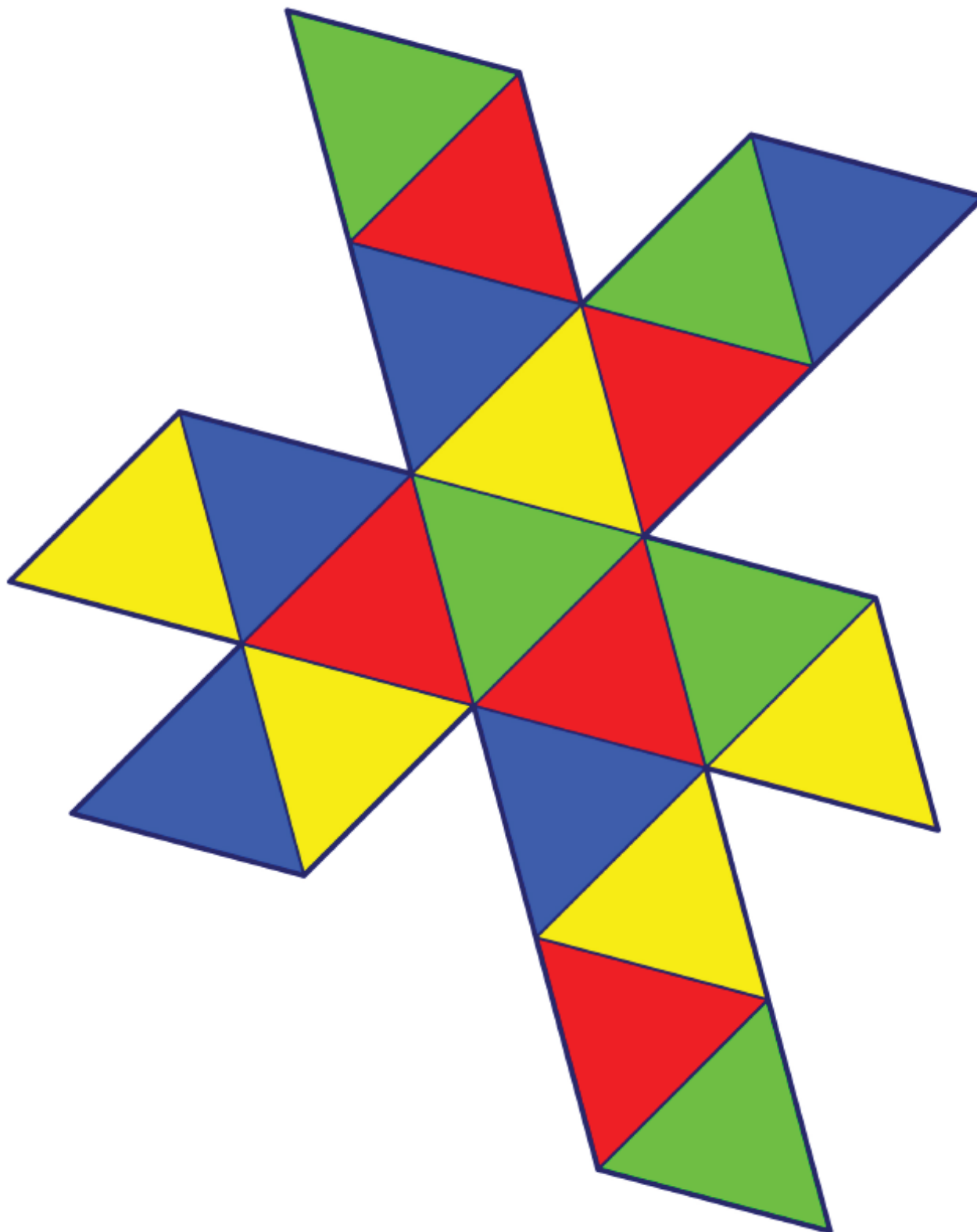


Siatka ośmiościanu





Siatka dwudziestościanu





Siatka dwunastościanu

