



SCENARIUSZ ZAJĘĆ KOŁA NAUKOWEGO z MATEMATYKI

prowadzonego w ramach projektu *Uczeń OnLine*

1. Autor: Anna Wołoszyn
2. Grupa docelowa: klasa 1 Gimnazjum
3. Liczba godzin: 2
4. Temat zajęć: Trójkąt Pascala. Wykorzystanie trójkąta Pascala we wzorach skróconego mnożenia
5. Cele zajęć:
 - rozwijanie świadomości u uczniów możliwości samodzielnego wyprowadzania potrzebnych wzorów
 - zapoznanie się z pojęciem „trójkąt Pascala” - jak go utworzyć i gdzie może być wykorzystany
 - kształtowanie umiejętności stosowania wzorów skróconego mnożenia poprzez graficzną prezentację dowodów w prezentacji multimedialnej
 - przybliżenie sylwetki znanego matematyka Blaise Pascal
 - kształtowanie umiejętności wypowiadania działań matematycznych z uwzględnieniem kolejności wykonywania działań
 - kształtowanie spostrzegawczości
6. Metody i techniki pracy: pogadanka, metoda problemowa, burza mózgów, prezentacja multimedialna wzorów, symulacja komputerowa trójkąta Pascala, praca z komputerem, ćwiczenia uzupełniające.
7. Materiały dydaktyczne:
 - prezentacja multimedialna dot. Wzorów skróconego mnożenia oraz opisująca twórczość Pascala
 - symulacja komputerowa „trójkąta Pascala”
 - plansze z Trójkątami Pascala (liczby podzielne przez 2, 3, 4, 6...)
8. Literatura:
 - Materiały do warsztatu: „Gdy intuicja zawodzi, czyli szkolne zmagania z nieskończonością” – Gdańskie Wydawnictwo Naukowe 2009r.
 - Symulacja komputerowa Trójkąta Pascala: <http://www.jakubas.pl/matematyka/16-Ne-Pa-Si-Fi/Ne-Pa-Si-Fi.htm>
9. Przebieg zajęć:

ETAP-1: powtórzenie wiadomości potrzebnych do realizacji tematu

Lekcja rozpoczyna się od przypomnienia wiadomości o wyrażeniach algebraicznych, wzorach skróconego mnożenia i ich zastosowań. Omówienie metod rozkładu wyrażeń algebraicznych na czynniki, wyłączanie wspólnego czynnika poza nawias grupowanie wyrazów i wyłączanie wspólnego czynnika poza nawias. Nauczyciel wspomaga się prezentacją multimedialną dot. Wyrażeń algebraicznych.

Nauczyciel rozdaje kartki z układanką dotyczącą wyrażeń algebraicznych, proponuje pracę samodzielną. Uczniowie wykonują obliczenia w zeszycie, następnie łączą liczbę z literą, odczytują hasło.



Zadanie 1

Rozwiąż zadania, a następnie połącz liczbę z literą.

Odczytaj HASŁO: _ _ _ _ _

1	$(x + 1)(x + 3)$
2	$(x - 5)(x - 2)$
3	$(5 + x)(2x - 1)$
4	$(x - 4)(x + 4)$
5	$(7 + y)(7 - y)$
6	$2x(y + x)$
7	$(x - 5)3x$
8	$(x + 1)^2$
9	$(x + y)^2$
10	$(5 - x)^2$
11	$(2x - 3)^2$
12	$(x - 1)(x + 1)$
13	$4 - x^2$
14	$x^2 - 6x + 9$

P	$x^2 + 2x + 1$
L	$(x - 2)(x + 2)$
T	$x^2 + 4x + 3$
J	$x^2 - 16$
A	$x^2 + 2xy + y^2$
Ó	$2x^2 + 9x - 5$
R	$x^2 - 7x + 10$
S	$25 - 10x + x^2$
A	$x^2 - 1$
C	$4x^2 - 12x + 9$
T	$3x^2 - 15x$
K	$49 - y^2$
A _ę	$2xy + 2x^2$
A	$(x - 3)^2$

ETAP-2: wprowadzenie

Nauczyciel wprowadza uczniów do tematu pytaniem retorycznym, czy chcieliby wyprowadzać sami wzory skróconego mnożenia np. $(x + y)^8$. Na pewno uczniowie wyrażą chęć poznać metodę łatwego i szybkiego wyprowadzania potrzebnego wzoru. Nauczyciel prosi, aby uczniowie wyprowadzili kilka wzorów za pomocą mnożenia sum i wypisali współczynniki liczbowe przy kolejnych jednomianach. Nauczyciel motywuje uczniów do pracy tłumacząc, że wykonana przez nich praca pozwoli znaleźć zależność, która potem będzie bardzo przydatna.

ETAP-3: realizacja

Uczniowie samodzielnie rozwiązują zadanie 2. Zauważają, że jest to trójkątna tablica której pierwszy wiersz stanowi liczba 1, a każdy powstaje w ten sposób, że pod każdymi dwoma sąsiednimi wyrazami poprzedniego wiersza pisze się ich sumę, a na początku i na końcu każdego nowego wiersza dopisuje się jedynek.

Wskazówka: Należy zwrócić uwagę uczniom, aby zapisywali wielomiany w postaci uporządkowanej od najwyższej potęgi do najniższej oraz na dokładność obliczeń.



Zadanie 2

Zapisz rozwiązanie	Wypisz współczynniki liczbowe
$(a+b)^0 = \dots\dots\dots$	
$(a+b)^1 = \dots\dots\dots$	
$(a+b)^2 = \dots\dots\dots$	
$(a+b)^3 = \dots\dots\dots$	

Następnie nauczyciel pokazuje planszę z „trójkątem Pascala” oraz przedstawia symulację komputerową programu dostępnego w Internecie Pana Eugeniusz Jakubas (<http://www.jakubas.pl/matematyka/16-Ne-Pa-Si-Fi/Ne-Pa-Si-Fi.htm>). Uczniowie samodzielnie uruchamiają program oraz tworzą różne trójkąty Pascala dla dowolnego n.

Uczniowie korzystając z komputerów mają za zadanie znaleźć informacje oraz przedstawić kilka faktów z życiorysu Blaise Pascala.

Nauczyciel przedstawia wzór na sześcian sumy: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
Aby uzasadnić wzór sugeruje wykonanie mnożenia z zadania 3 (dla ułatwienia sugeruje wykorzystać wzór na kwadrat sumy):

Zadanie 3

$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = \dots\dots\dots$

Rozwiązanie:

$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$



Nauczyciel zachęca uczniów, by zaobserwowali co dzieje się z wykładnikami potęg dla kolejnych wzorów oraz obliczyli jakie są sumy wykładników w poszczególnych parach?

Wskazówka: Należy zwrócić uwagę, że jeśli nie ma jednej ze zmiennych to znaczy, że jej wykładnik jest zerem. Zapis $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 b^0 + 3a^2 b^1 + 3a^1 b^2 + a^0 b^3$

Zadanie 4

Wzory	Potęga	Pary wykładników w kolejnych jednomianach
$(a + b)^2$	2	
		Jakie są sumy wykładników w poszczególnych parach?
$(a + b)^3$	3	
		Jakie są sumy wykładników w poszczególnych parach?
$(a + b)^4$	4	
		Jakie są sumy wykładników w poszczególnych parach?
$(a + b)^5$	5	
		Jakie są sumy wykładników w poszczególnych parach?

Rozwiązanie zadania 4

Wzory	Potęga	Pary wykładników w kolejnych jednomianach
$(a + b)^2$	2	2, 0 1, 1 0, 2
		Jakie są sumy wykładników w poszczególnych parach? 2
$(a + b)^3$	3	3, 0 2, 1 1, 2 0, 3
		Jakie są sumy wykładników w poszczególnych parach? 3
$(a + b)^4$	4	4, 0 3, 1 2, 2 1, 3 0, 4
		Jakie są sumy wykładników w poszczególnych parach? 4
$(a + b)^5$	5	5, 0 4, 1 3, 2 2, 3 1, 4 0, 5
		Jakie są sumy wykładników w poszczególnych parach? 5

Uczniowie powinni bez problemu zauważyć zależności. Suma wykładników w każdym jednomianie jest stała.

Nauczyciel przypomina uczniom, co się dzieje z liczbą ujemną w zależności od parzystości wykładnika. W wyrażeniu $(a - b)^n$ liczba b jest ujemna dla wykładników nieparzystych, a dodatnia dla parzystych.

Przykład: $(a - b)^5 = a^5 b^0 - 5a^4 b^1 + 10 a^3 b^2 - 10 a^2 b^3 + 5 ab^4 - a^0 b^5$

Pierwszy jednomian jest zawsze dodatni, wartość kolejnych zmienia się co drugi jednomian.

Nauczyciel prosi uczniów o wyprowadzanie wzoru, o którym mówił na początku lekcji:

Zadanie 5

Wyprowadź wzór: $(x + y)^8 = \dots\dots\dots$

Po sprawdzeniu rozwiązania zadania, uczniowie wykonują kilka podobnych zadań do przećwiczenia nabytych umiejętności – zadanie 6

Zadanie 6

$(x - 3)^4 = \dots\dots\dots$

$(3x + 2y)^5 = \dots\dots\dots$

$(4 - y)^6 = \dots\dots\dots$

ETAP-4: Podsumowanie

Po sprawdzeniu wyników nauczyciel podsumowuje temat i prosi chętnych uczniów do wyznaczenia szóstego jednomianu wyrażenia $(a + b)^{17}$

Ciekawostki:

◆ **Właściwość potęgi liczby 11**

Zadanie 7

Oblicz:

$11^0 =$

$11^1 =$

$11^2 =$

$11^3 =$

$11^4 =$

$11^5 =$

Jedyna w swoim rodzaju *właściwość potęgi liczby 11*. Potęgowanie w zadaniu 7 można wykonać bez mozolnego mnożenia, wystarczy zbudować piramidę cyfrową.

$11^0 = 1$

$11^1 = 11$

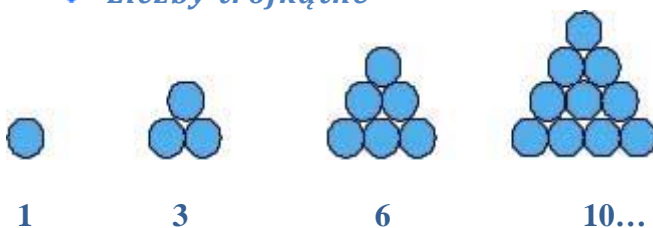
$11^2 = 121$

$11^3 = 1331$

$11^4 = 14641$

$11^5 = 161051$ → Na ostatnim miejscu stoi zawsze jedynka, dziesiątki każdej następnej potęgi równają się dziesiątką poprzedniej potęgi +jedność, setki równają się setkom poprzedniej+ dziesiątki itd.

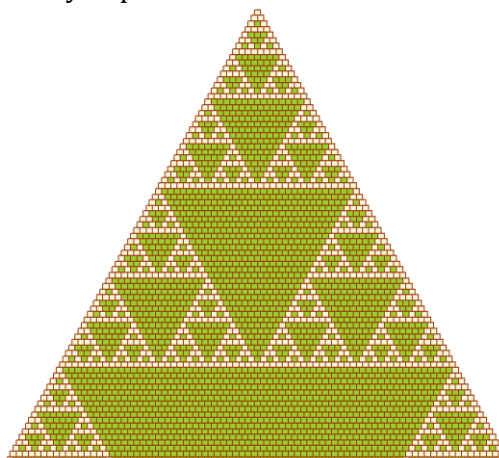
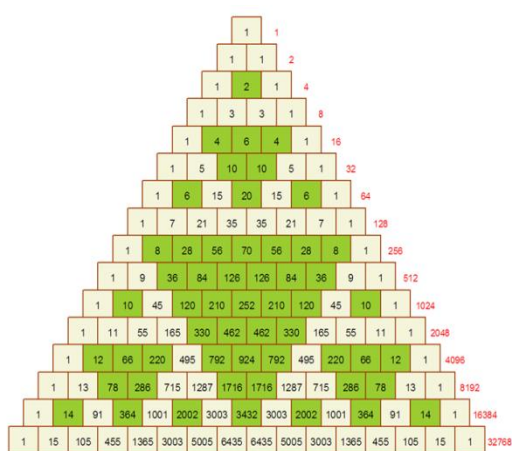
◆ **Liczby trójkątne**



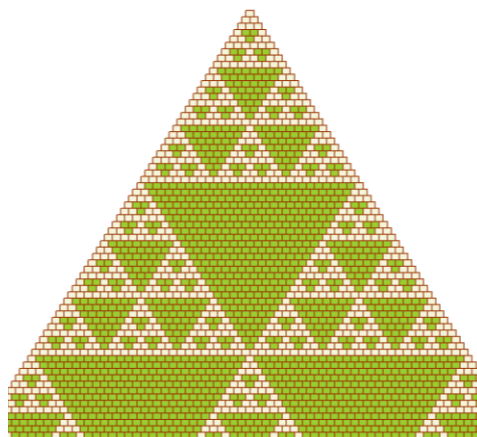
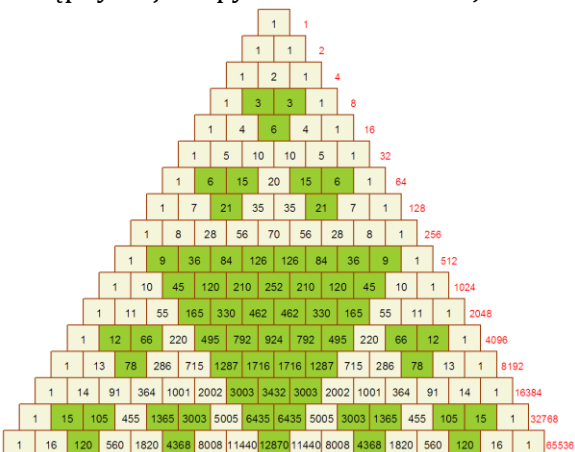
W matematyce liczba trójkątna to liczba, którą można przedstawić w postaci sumy kolejnych, początkowych liczb naturalnych. Kolejne liczby trójkątne to: **1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, ...**



Nauczyciel pokazując prezentację multimedialną z trójkami Pascala. Na pierwszym slajdzie przedstawia zamalowane pola z liczbami podzielnymi przez 2.



Następny slajd to pytanie do uczniów. Jakie liczby zostały zamalowane?



Uczniowie powinni bez problemu odpowiedzieć, że liczby te są podzielne przez 3.

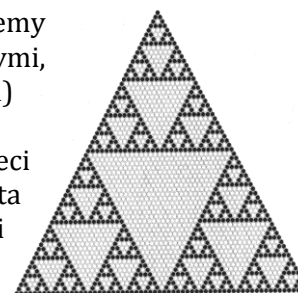


Jeżeli zostanie czasu na lekcji można przedstawić zamalowane trójkąty Pascala z liczbami podzielnymi przez 4, 5, 6, 15, 16, 17, 100, 153 itp.

Zobaczmy co się stanie jeśli zamalujemy wszystkie pola z liczbami nieparzystymi, a pozostałe (czyli z liczbami parzystymi) pozostawimy puste.

A teraz umieścimy w podobnej sieci sześciokątnej pierwsze 64 wiersze trójkąta Pascala i zamalujemy analogiczne pola (czyli zamalujemy pola zawierające liczby nieparzyste a pozostałe pozostawiamy puste...):

Jak widać trójkąt Pascala kryje przed nami jeszcze wiele tajemnic.





Karta Pracy – „trójkąt Pascala”

Zadanie 1

Rozwiąż zadania, a następnie połącz liczbę z literą.

Odczytaj HASŁO: _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

1	$(x + 1)(x + 3)$
2	$(x - 5)(x - 2)$
3	$(5 + x)(2x - 1)$
4	$(x - 4)(x + 4)$
5	$(7 + y)(7 - y)$
6	$2x(y + x)$
7	$(x - 5)3x$
8	$(x + 1)^2$
9	$(x + y)^2$
10	$(5 - x)^2$
11	$(2x - 3)^2$
12	$(x - 1)(x + 1)$
13	$4 - x^2$
14	$x^2 - 6x + 9$

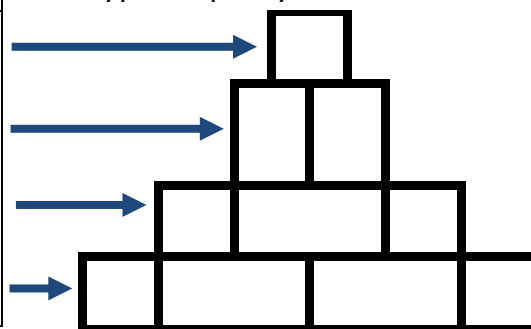
P	$x^2 + 2x + 1$
L	$(x - 2)(x + 2)$
T	$x^2 + 4x + 3$
J	$x^2 - 16$
A	$x^2 + 2xy + y^2$
Ó	$2x^2 + 9x - 5$
R	$x^2 - 7x + 10$
S	$25 - 10x + x^2$
A	$x^2 - 1$
C	$4x^2 - 12x + 9$
T	$3x^2 - 15x$
K	$49 - y^2$
Ą	$2xy + 2x^2$
A	$(x - 3)^2$



Zadanie 2

Zapisz rozwiązanie
$(a+b)^0 = \dots\dots\dots$
$(a+b)^1 = \dots\dots\dots$
$(a+b)^2 = \dots\dots\dots$
$(a+b)^3 = \dots\dots\dots$

Wypisz współczynniki liczbowe



Zadanie 3

Dokończ zadanie:

$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = \dots\dots\dots$

Zadanie 4

Uzupełnij puste miejsca w tabeli.

Wzory	Potęga	Pary wykładników w kolejnych jednomianach
$(a + b)^2$	2	
		Jakie są sumy wykładników w poszczególnych parach?
$(a + b)^3$	3	
		Jakie są sumy wykładników w poszczególnych parach?
$(a + b)^4$	4	
		Jakie są sumy wykładników w poszczególnych parach?
$(a + b)^5$	5	
		Jakie są sumy wykładników w poszczególnych parach?

Zadanie 5

Wyprowadź wzór: $(x + y)^8 = \dots\dots\dots$

Zadanie 6

Wyprowadź wzory:

$(x - 3)^4 = \dots\dots\dots$

$(3x + 2y)^5 = \dots\dots\dots$

$(4 - y)^6 = \dots\dots\dots$

Zadanie 7

Oblicz:

$11^0 = \dots\dots\dots$

$11^1 = \dots\dots\dots$

$11^2 = \dots\dots\dots$

$11^3 = \dots\dots\dots$

$11^4 = \dots\dots\dots$

10. Spostrzeżenia po realizacji: Nic tak nie ćwiczy pamięci, wyzwala kreatywności i uczy niesztampowego myślenia, jak rozwiązywanie zadań logicznych. Opisany sposób postępowania sprzyja nauczaniu matematyki, przyzwyczajają do skutecznego poszukiwania różnych dróg prowadzących do celu, uczy dociekliwości oraz samodzielności. Lekcja prowadzona w oparciu o prezentację multimedialną wzbogaconą symulacjami oraz pracą z komputerem staje się przyjemna i ciekawsza.

Oświadczam, że scenariusz zajęć nie narusza praw autorskich osób trzecich.

Czytelny podpis.....