

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
**Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”**

## Wstęp

Wielostronne oddziaływanie na zainteresowania uczniów przedmiotami ścisłymi zapewnia zaproponowany przez pracowników naukowych Politechniki Białostockiej, Uniwersytetu w Białymstoku i Wyższej Szkoły Finansów i Zarządzania w Białymstoku cykl „Zajęcia na wyższych uczelniach”. Pakiet został wyposażony w zbiór 20 scenariuszy takich zajęć, które poprowadzone w warunkach placówki naukowej poszerzają wiedzę uczniów i pozwalają na ukierunkowanie ich dalszych wyborów w ścieżce osobistej kariery zawodowej.



**Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy**  
**Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”**

## Spis scenariuszy

Wstęp .....	1
Scenariusz nr 1: Czy myślę i wypowiadam się logicznie? .....	4
Scenariusz nr 2: Wprowadzenie do programu C.a.R.....	14
Scenariusz nr 3: Podstawowe konstrukcje geometryczne statyczne z programem C.a.R.-wybrane punkty szczególne trójkąta .....	18
Scenariusz nr 4: Złota liczba w programie C.a.R i geometryzacja wzoru skróconego mnożenia .....	23
Scenariusz nr 5: Geometria spidronu na płaszczyźnie.....	34
Scenariusz nr 6: Ciąg arytmetyczny i jego własności.....	37
Scenariusz nr 7: Wirtualna Rzeczywistość - Fotorealistyczna grafika 3D .....	50
Scenariusz nr 8: Innowacyjne aplikacje wykorzystujące przetwarzanie dźwięku i mowy .....	53
Scenariusz nr 9: Zliczamy zbiory i funkcje .....	57
Scenariusz nr 10: Jak dowodzimy twierdzeń? .....	75
Scenariusz nr 11: Zbiory .....	79
Scenariusz nr 12: Geometria spidronu w przestrzeni.....	87
Scenariusz nr 13: Ciąg geometryczny i jego własności .....	90
Scenariusz nr 14: Odkrywamy twierdzenia geometryczne z komputerem.....	110
Scenariusz nr 15: Graj w grę komputerową ... i ucz się geometrii sferycznej .....	114
Scenariusz nr 16: Rozszerzona Rzeczywistość - czyli co nas czeka już za kilka lat.....	116
Scenariusz nr 17: Czy komputery potrafią myśleć? - Wykorzystanie algorytmów sztucznej inteligencji .....	119
Scenariusz nr 18: Latarka, fontanna i antena, czyli krzywe stożkowe na biwaku .....	122



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
**Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”**

Scenariusz nr 19: Optymalne linie .....	125
Scenariusz nr 20: Przykłady konstrukcji dynamicznych z programem C.a.R.: miejsca geometryczne punktów .....	128



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

## Scenariusz nr 1: Czy myślę i wypowiadam się logicznie?

<b>Temat zajęć</b>		<b>Czy myślę i wypowiadam się logicznie?</b>
<b>Dział</b>		Logika matematyczna
<b>Klasa (poziom edukacyjny)</b>		
<b>Czas trwania zajęć</b>		2 godziny
Lp.	Element scenariusza	Treść
1.	Cel ogólny	<ul style="list-style-type: none"> <li>- ukazanie uczniom matematyki jako teorii aksjomatycznej,</li> <li>- zapoznanie uczniów z elementami logiki matematycznej,</li> <li>- wprowadzenie aparatu niezbędnego do oceny poprawności rozumowań, do pozyskiwania nowej wiedzy na podstawie wiedzy już posiadanej,</li> <li>- zachęcenie uczniów do studiowania matematyki lub informatyki (nauk ścisłych)</li> </ul>
2.	Cele szczegółowe	<ul style="list-style-type: none"> <li>- uczeń wie, co to jest zdanie logiczne,</li> <li>- uczeń podaje przykłady zdań logicznych,</li> <li>- uczeń podaje przykłady zdań, które nie są zdaniami logicznymi,</li> <li>- uczeń, spośród podanych zdań wskazuje zdania logiczne,</li> <li>- uczeń uzasadnia, dlaczego dane zdanie jest lub nie jest zdaniem logicznym,</li> <li>- uczeń zna spójniki logiczne i ich symbole,</li> <li>- uczeń rozumie pojęcia koniunkcja, alternatywa, implikacja, równoważność zdań, negacja zdania,</li> <li>- uczeń zna wartości logiczne koniunkcji dwóch zdań, alternatywy dwóch zdań, implikacji dwóch zdań, równoważności dwóch zdań, negacji zdania,</li> <li>- uczeń stosuje wartości logiczne koniunkcji dwóch zdań, alternatywy dwóch zdań, implikacji dwóch zdań, równoważności dwóch zdań, negacji zdania do oceny prawdziwości zdań bardziej złożonych,</li> <li>- uczeń zna i stosuje metodę wprost i nie wprost do oceny prawdziwości zdań złożonych,</li> <li>- uczeń zapisuje w języku logiki zdań zdania i dłuższe wypowiedzi zapisane w języku naturalnym, ocenia ich wartość logiczną</li> </ul>
3.	Formy i metody	Formy: praca zespołowa, praca indywidualna, metody: pogadanka, dyskusja, burza mózgów

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

4.	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	Karty pracy
5.	Wprowadzenie do zajęć	<p>Prowadzący zajęcia stosuje pogadankę jako metodę wprowadzenia do rachunku zdań. Na wstępie nauczyciel pyta uczniów: co to jest prostokąt? Uczniowie odpowiadają np: prostokąt to figura płaska. Nauczyciel pyta teraz: co to jest figura płaska? Uczniowie odpowiadają np. Jest to część płaszczyzny ograniczona łamaną zamkniętą. Nauczyciel pyta uczniów: a co to jest łamana zamknięta? Uczniowie odpowiadają np.: Jest to krzywa zbudowana z odcinków połączony w pewien charakterystyczny sposób. Nauczyciel pyta: co to jest odcinek? Uczniowie odpowiadają np.: to część prostej. Nauczyciel pyta: a co to jest prosta? Uczniowie zastanawiają się i najprawdopodobniej nie udzielą odpowiedzi, gdyż prosta to pojęcie pierwotne geometrii euklidesowej i nie definiuje się go. Tutaj pojawia się moment na charakterystykę teorii matematycznej jako teorii aksjomatycznej: jak widzicie na przykładzie pojęcia prostokąta, w teorii matematycznej nowe pojęcia definiujemy wykorzystując pojęcia wcześniej poznane, a te z kolei musiały być zdefiniowane poprzez pojęcia jeszcze wcześniej wprowadzone, itd., aż dochodzimy do pojęć dla których nie ma pojęć wcześniejszych. Pojęcia dla których nie ma pojęć wcześniej zdefiniowanych (wcześniejszych) nazywamy <b>pojęciami pierwotnymi</b>.</p> <p>Następnie nauczyciel podaje przykłady takich pojęć pierwotnych w matematyce szkolnej: np.: punkt, zbiór, liczba naturalna, i kontynuuje pogadankę, mówiąc, że w miarę rozwoju wiedzy określenia są precyzowane, własności rozważanych pojęć uogólniane, wprowadza się nowe pojęcia, oznaczenia, symbole, które umożliwiają krótkie, ale dokładne i zrozumiałe zapisy formułowanych myśli i rozumowań. Z czasem ustala się listę własności charakterystycznych dla danego działu – są to takie własności, z których wynikają już wszystkie inne własności dotąd poznane i dotyczą tylko pojęć pierwotnych . Jeśli udaje się ustalić listę takich własności podstawowych, to powstaje <b>teoria aksjomatyczna</b>, w której <b>aksjomatami</b> są te własności.</p> <p>Nauczyciel podaje, że podstawą każdej teorii aksjomatycznej jest <b>logika matematyczna</b> i krótko charakteryzuje ją: logika to przede wszystkim teoria rozumowań, a rozumowanie (najogólniej), to proces pozyskiwania nowej wiedzy tylko na podstawie wiedzy już posiadanej. Logika jest narzędziem pozwalającym ocenić m.in. prawdziwość informacji.</p> <p>Nauczyciel zdaje uczniom pytanie: <i>czy logika jest tylko narzędziem użytecznym do powstania teorii aksjomatycznej? Czy może potrzebna jest nam na co dzień?</i> Uczniowie wypowiadają się.</p>

## Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

### Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

		<p>Prowadzący zajęcia podkreśla, iż logika matematycznej odgrywa rolę w różnych dziedzinach wiedzy i działalności ludzkiej np. sędzia wydający wyrok w jakiejś sprawie powinien ten wyrok uzasadnić, a uzasadnianie twierdzeń, to element logiki matematycznej, lekarz stawia diagnozę na podstawie zebranych informacji, a więc wyciąga wnioski z tych informacji.</p>
6.	Przebieg zajęć ( <i>pełna wersja</i> )	<p>Prowadzący zajęcia podkreśla iż logika zajmuje się oceną prawdziwości informacji i zadaje pytanie uczniom: jak zapisuje się informacje. Uczniowie (ewentualnie z pomocą nauczyciela) odpowiadają: informacje zapisuje się za pomocą zdań. Nauczyciel podaje, że logika zajmuje się właśnie <b>zdaniami logicznymi</b>, tj. takimi zdaniami orzekającymi, o których potrafimy orzec czy są prawdziwe, czy fałszywe. Uczniowie rozwiązują zadanie z KARTY PRACY NR 1, a następnie rozwiązania są prezentowane przez wybranych uczniów i omawiane na forum klasy.</p> <p>Nauczyciel wprowadza funkcję przyporządkowującą zdaniu logicznemu liczbę 0 lub 1; 0 w przypadku , gdy zdanie jest fałszywe, 1 – gdy prawdziwe.</p> <p>Następnie , prowadzący zajęcia wskazuje, iż, podobnie jak w językach naturalnych, tak i w języku logiki można budować zdania złożone. Nauczyciel prosi uczniów o podanie przykładów zdań złożonych i wskazanie spójników łączących zdania proste występujące w tym zdaniu złożonym. Nauczyciel zapisuje zdania na tablicy, podkreślając te spójniki. Następnie nauczyciel wprowadza umowę, że zdania logiczne atomowe (najprostsze zdania, z których budujemy zdania złożone) będziemy zapisywać za pomocą małych liter alfabetu, najczęściej p, q ,r, s, t.</p> <p>Nauczyciel wprowadza symbole: <math>\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow</math> koniunkcji, alternatywy, negacji, implikacji, równoważności zdań, a następnie wypisane na tablicy zdania złożone zapisuje za pomocą symboli logicznych, np.:</p> <p>Jest mróz i pada śnieg.</p> <p>Oznaczmy zdania atomowe następująco:</p> <p>p: Jest mróz.</p> <p>q: Pada śnieg.</p> <p>Zdanie Jest mróz i pada śnieg. zapiszemy za pomocą symboli logicznych następująco: <math>p \wedge q</math>.</p> <p>Nauczyciel przy aktywnym udziale uczniów (uczniowie odwołują się do swojej intuicji i wiedzy) za pomocą tabel wprowadza wartości logiczne koniunkcji, alternatywy, implikacji, równoważności zdań, negacji zdania. Uczniowie uzupełniają tabele z KARTY PRACY NR 2.</p>

**Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy**  
**Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”**

		<p>Rozwiązywane są zadanie 1 i 2 z KARTY PRACY NR 3.</p> <p>Zadanie 3 z KARTY PRACY NR 3 jest rozwiązywane metodą wprost, tzn. rozważając wszystkie możliwe wartości logiczne zdań atomowych.</p> <p>Rozwiązując zadanie 4 z KARTY PRACY NR 3 uczniowie zauważają, że wśród podanych zdań są takie, które są prawdziwe niezależnie od wartości logicznej zdań atomowych. Nauczyciel wprowadza definicję tautologii i wprowadza nazwy poszczególnych praw rachunku zdań.</p> <p>Uczniowie rozwiązują wybrane podpunkty zadania 5 z KARTY PRACY NR 3 sprawdzają, które z podanych zdań są tautologiami.</p> <p>Uczniowie pod kierunkiem nauczyciela dyskutują rozwiązanie zadań 6 oraz 7 z KARTY PRACY NR 3.</p> <p>Następnie rozwiązywane jest zadanie nr 8 z KARTY PRACY NR 3, podpunkt (e). Najpierw wypowiedź jest zapisywana za pomocą schematu, a następnie równoważnie za pomocą wyrażenia rachunku zdań. Ocena prawdziwości wyrażenia jest równoważna ocenie prawdziwości wypowiedzi. Nauczyciel podaje metodę nie wprost sprawdzenie prawdziwości zdań logicznych.</p>
7.	Podsumowanie zajęć	<p>W ramach podsumowania nauczyciel odpytuje wybranych uczniów z zakresu materiału realizowanego na lekcji (Co to jest zdanie logiczne? Jaką wartość liczbową przypisujemy zdaniu prawdziwemu, a jaką fałszywemu? Kiedy koniunkcja dwóch zdań jest fałszywa? Kiedy implikacja dwóch zdań jest fałszywa? Kiedy alternatywa dwóch zdań jest prawdziwa? Kiedy równoważność dwóch zdań jest prawdziwa? A kiedy fałszywa?) Na koniec prowadzący zajęcia pyta się uczniów czy zdania: <math>x &gt; 0</math> oraz <math>x^2 - 5 = 0</math> są zdaniami logicznymi. Po podaniu przez uczniów odpowiedzi (nie są), nauczyciel podaje definicję funkcji zdaniowej, wprowadza kwantyfikator ogólny i szczegółowy i podaje informację, że badaniem prawdziwości zdań kwantyfikowanych zajmuje się również logika, a tę część logiki nazywamy rachunkiem kwantyfikatorów lub predykatów. Nauczyciel zachęca uczniów do podjęcia studiów na kierunku matematyka i informatyka, gdzie na zajęciach z logiki i teorii mnogości będą mogli zapoznać się z tym rachunkiem.</p>
8.	Uwagi metodyczne do realizacji	<p>Aktywizować czynności myślowe uczniów – mają świetną intuicję i powinni w jak największej mierze samodzielnie rozwiązywać zadania.</p>

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

## Załączniki do scenariusza nr 1

### KARTA PRACY NR 1

Poniżej wypisano sześć zdań. Oceń, które z nich jest zdaniem logicznym, a które nie jest. Uzasadnij swoją ocenę.

1. 16 jest kwadratem liczby naturalnej.
2. Gdańsk jest stolicą Polski.
3. Czy jutro będzie padał deszcz?
4. Weź parasol!
5. Na każdym trójkącie można opisać okrąg.
6. Jutro jest sobota.

Zdanie 1 ..... zdaniem logicznym, ponieważ .....

Zdanie 2 ..... zdaniem logicznym, ponieważ .....

Zdanie 3 ..... zdaniem logicznym, ponieważ .....

Zdanie 4 ..... zdaniem logicznym, ponieważ .....

Zdanie 5 ..... zdaniem logicznym, ponieważ .....

Zdanie 6 ..... zdaniem logicznym, ponieważ .....





Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

## KARTA PRACY NR 2

Tabela wartości logicznych negacji zdania  $p$ :

$p$	$\neg p$
1	
0	

Tabela wartości logicznych koniunkcji zdań  $p$  oraz  $q$ :

$p$	$q$	$p \wedge q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Tabela wartości logicznych alternatywy zdań  $p$  oraz  $q$ :

$p$	$q$	$p \vee q$
1	1	
1	0	



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
**Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”**

0	1	
0	0	

Tabela wartości logicznych implikacji zdań  $p$  oraz  $q$ :

$p$	$q$	$p \rightarrow q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Tabela wartości logicznych równoważności zdań  $p$  oraz  $q$ :

$p$	$q$	$p \leftrightarrow q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

## KARTA PRACY NR 3

**Zadanie 1:** Literami p, q, r, s oznaczono następujące zdania:

p: Ziemia jest planetą.

q: Słońce jest planetą.

r: Ziemia krąży wokół Słońca.

s: Słońce krąży wokół Ziemi.

Oceń wartość logiczną zdań:

(a)  $p \vee q$ ,

(b)  $p \wedge s$ ,

(c)  $r \rightarrow p$ ,

(d)  $\neg(r \vee s)$ ,

(e)  $q \leftrightarrow s$ .

**Zadanie 2:** Zapisz za pomocą symboli logicznych oraz oceń wartość logiczną zdań:

(a) 15 jest liczbą pierwszą i Ziemia jest planetą.

(b) Jeśli pada deszcz, to mam zły humor.

(c) Zrobię ciasto, jeśli będę mieć ochotę.

(d)  $\sqrt{25}$  jest liczbą pierwszą lub 5 jest liczbą ujemną.

(e) Na niebie jest tęcza wtedy i tylko wtedy, gdy pada deszcz i świeci słońce.

**Zadanie 3:** Dane są dwa zdania:

p: Wiesz, że żyjesz.

q: Żyjesz.



**Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy**  
**Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”**

Zapisz symbolicznie zdanie: Jeżeli wiesz, że żyjesz, to żyjesz i jeżeli wiesz, że żyjesz, to nie żyjesz, więc nie wiesz, że żyjesz. Określ wartość logiczną tego zdania.

**Zadanie 4:** Które z poniższych zdań są prawdziwe, niezależnie od wartości logicznych zdań  $p$  i  $q$ :

- (a)  $(p \wedge q) \rightarrow p$ ,
- (b)  $(p \vee q) \rightarrow q$ ,
- (c)  $p \vee (\neg p)$ ,
- (d)  $(\neg(\neg p)) \leftrightarrow p$ ,
- (e)  $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
- (f)  $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ .

**Zadanie 5:** Które z poniższych zdań są tautologiami rachunku zdań:

- (a)  $(p \rightarrow \neg p) \rightarrow p$ ,
- (b)  $(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg p \vee q$ ,
- (c)  $(p \rightarrow \neg p) \rightarrow q$ ,
- (d)  $\neg(p \wedge \neg p)$ ,
- (e)  $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$ .

**Zadanie 6:** : Rozpatrzmy następujący dialog między mamą a dzieckiem:

- *Nie chcesz zupki?*

- *Nie!*

Czy dziecko chciało zupki?

**Zadanie 7:** Przeanalizuj informację zamieszczoną na tabliczce w sklepie z alkoholem: *Osobom nieletnim i nietrzeźwym alkoholu nie sprzedajemy.* Czy właściciel sklepu miał na myśli to, co zapisał?



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

**Zadanie 8<sup>1</sup>:** Zapisz za pomocą symboli logicznych i oceń prawdziwość następujących wypowiedzi:

- (a) Jeśli będę się uczył lub jestem geniuszem, zdam maturę. Nie zostaną dopuszczony do egzaminów wstępnych na architekturę. Jeśli zdam maturę, zostaną dopuszczony do egzaminów wstępnych na architekturę. A więc nie będę się uczył.
- (b) Jeśli będę się uczył lub jestem geniuszem, zdam egzamin. Jeśli zdam egzamin będę mógł uczęszczać na następne wykłady. Zatem, jeśli nie zostaną dopuszczony do następnych wykładów, to nie jestem geniuszem.
- (c) Jeśli meteorolodzy przewidują, że będzie sucho, to pójdę na wycieczkę lub będę pływać. Pójdę pływać wtedy i tylko wtedy, gdy meteorolodzy podadzą, że będzie ciepło. Zatem, jeśli nie idę na wycieczkę, meteorolodzy przewidują, że będzie mokro lub ciepło.
- (d) Jeśli dostanę pracę i będę ciężko pracować, to będę awansować. Jeśli będę awansować, to będę zadowolony. Nie będę zadowolony. Zatem albo nie dostanę pracy albo nie będę ciężko pracować.
- (e) Jeśli moje obliczenia się zgadzają i zapłacę rachunek za elektryczność, to zabraknie mi pieniędzy. Jeśli nie zapłacę rachunku, to wyłączą mi prąd. Zatem, jeśli nie zabraknie mi pieniędzy i prądu mi nie wyłączą, to moje obliczenia się nie zgadzają.

<sup>1</sup> Zadanie pochodzi ze strony internetowej <http://157.158.16.215/zs/logika/logika2.pdf> z drobnymi zmianami.



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

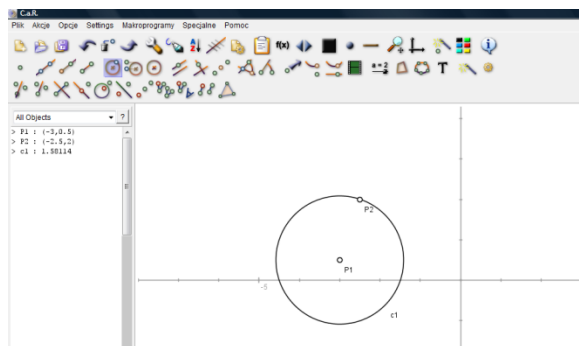
## Scenariusz nr 2: Wprowadzenie do programu C.a.R

<b>Temat zajęć</b>		<b>Wprowadzenie do programu C.a.R</b>
<b>Dział</b>		
<b>Klasa (poziom edukacyjny)</b>		
<b>Czas trwania zajęć</b>		<b>2 godziny</b>
<b>Lp.</b>	<b>Element scenariusza</b>	<b>Treść</b>
	Cel ogólny	Zainteresowanie uczniów zastosowaniami komputera w geometrii.
	Cele szczegółowe	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Podanie informacji o programie C.a.R.</li> <li>• Zapoznanie uczniów z instalacją programu C.a.R.</li> <li>• Zapoznanie z menu i możliwościami programu.</li> <li>• Nauka podstawowych czynności możliwych do wykonania w programie.</li> </ul>
	Formy i metody	<b>Metody pracy:</b> ćwiczenia z komputerem stymulowane instrukcją multimedialną. <b>Formy organizacyjne:</b> praca z całą grupą, praca indywidualna.
	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	<b>Pomoce dydaktyczne:</b> rzutnik multimedialny, ekran, komputery: minimum jedno stanowisko na 2 osoby (preferowane jedna osoba przy komputerze).
	Wprowadzenie do zajęć	<b>1)</b> Podanie krótkiej informacji o programie i cyklu zajęć. C.a.R.= „Compasses and Ruler”= „Cyrkiel i linijka”.
	Przebieg zajęć( <i>pełna wersja</i> )	<b>Przebieg zajęć:</b> <b>2)</b> Wspólna instalacja programu na poszczególnych stanowiskach, pobranie ze strony :

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

<http://www.softdir.pl/details.php?id=083A5D202B&n=C.a.R.> lub z zamieszczonej już wersji instalacyjnej na dysku.

- 3) Uruchomienie programu i ogólny wgląd w podstawowe menu, w szczególności menu pomocy.
- 4) Omówienie wyglądu okna programu C.a.R. i najważniejszych narzędzi:



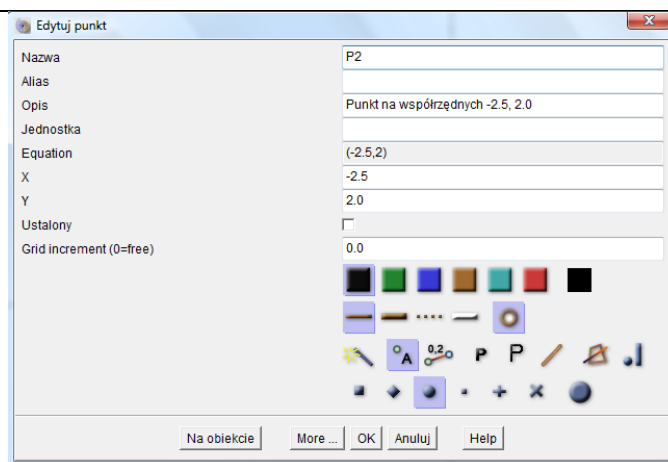
Okno pracy.



Najważniejsze narzędzia.

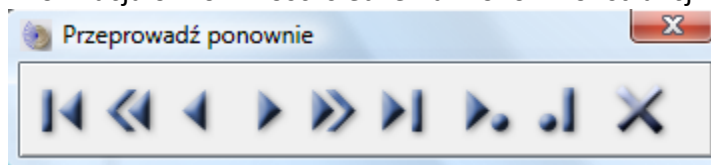
- 5) Omówienie najważniejszych opcji tworzonego obiektu.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
**Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”**



**Okienko opcji obiektu.**

6) Informacja o możliwości śledzenia kroków konstrukcji.



**Okno odtwarzania zapisanej konstrukcji.**

7) Przejście przez menu/Pomoc/Pomoc i Przykłady do strony

<file:///D:/Application/JavaCaR/Tutorial/tut1.html>

i rozpoczęcia aktywnej nauki z podstaw programu, tłumaczenie osoby prowadzącej zajęcia.

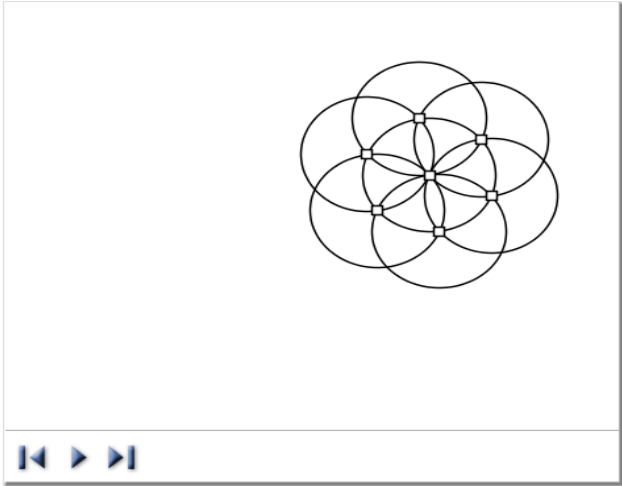






8) Kolejno przejście przez interaktywną naukę z zaznaczania punktów, odcinków, prostych, okręgów.

<file:///D:/Application/JavaCaR/Tutorial/tut-2-1x.html>,

9) Wykonanie samodzielne rysunku z zamieszczonej propozycji:



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
**Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”**

		<p>You can see the construction step by step here.</p>  <p>First, click on , then continue with  .  Back </p> <p>  </p> <p><b>10)</b> Przejrzenie zamieszczonych w dokumentacji przykładów.  <b>11)</b> Zadanie : Skonstruuj kwadrat o zadanym boku AB. Opisz etapy konstrukcji.</p>
	Podsumowanie zajęć	Opis konstrukcji kwadratu przez parę ochotników.
	Uwagi metodyczne do realizacji	Należałoby natychmiast powtórzyć zajęcia ćwiczące zdobyte umiejętności i nawiązać do materiału realizowanego w podstawie programowej z matematyki w danej klasie/poziomie. Najlepiej zamieścić krótki quiz na platformie e-learningowej w kursie prowadzonym przez wskazanego nauczyciela matematyki.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

### Scenariusz nr 3: Podstawowe konstrukcje geometryczne statyczne z programem C.a.R.-wybrane punkty szczególne trójkąta

Temat zajęć		Podstawowe konstrukcje geometryczne statyczne z programem C.a.R.-wybrane punkty szczególne trójkąta
Dział		Matematyka
Klasa (poziom edukacyjny)		
Czas trwania zajęć		1 godzina
Lp.	Element scenariusza	Treść
	Cel ogólny	Wspomaganie nauczania geometrii poprzez użytkowe programy komputerowe
	Cele szczegółowe	<ul style="list-style-type: none"> <li>Przegląd klasycznych konstrukcji geometrycznych.</li> <li>Powtórzenie definicji wybranych punktów szczególnych trójkąta: środek ciężkości, środek okręgu opisanego, środek okręgu wpisanego, ortocentrum, punkt Nagela.</li> <li>Kształtowanie umiejętności wykorzystania komputera do rozwiązywania problemów matematycznych.</li> <li>Rozwijanie umiejętności opisu konstrukcji.</li> <li>Rozwijanie umiejętności samokontroli działania.</li> <li>Wzrost zainteresowania matematyką i jej zastosowaniami.</li> <li>Umiejętność samodzielnej pracy oraz współdziałania w zespole.</li> </ul>
	Formy i metody	<p><b>Metody pracy:</b> ćwiczenia z komputerem stymulowane instrukcją multimedialną.</p> <p><b>Formy organizacyjne:</b> praca z całą grupą, praca indywidualna.</p>
	Środki dydaktyczne	rzutnik multimedialny, ekran, komputery: minimum jedno stanowisko na 2 osoby (preferowane jedna

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

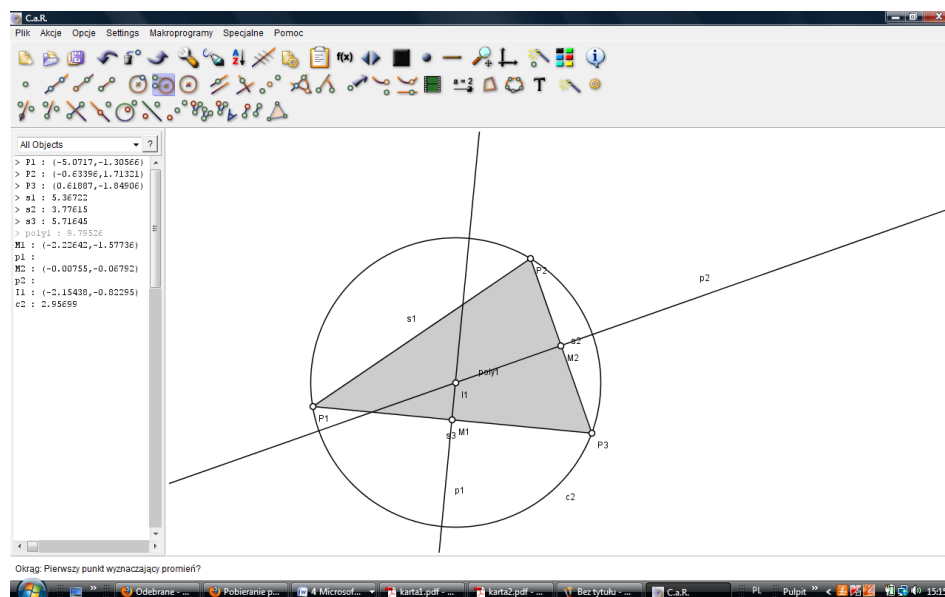
(ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	osoba przy komputerze), biały papier, cyrkle, ołówki, linijki.
Wprowadzenie do zajęć	Przypomnienie definicji symetralnej odcinka, środkowej w trójkącie, wysokości, dwusiecznej kąta.
Przebieg zajęć ( <i>pełna wersja</i> )	<ol style="list-style-type: none"> <li>1) Przypomnienie definicji symetralnej odcinka, środkowej w trójkącie, wysokości, dwusiecznej kąta.</li> <li>2) Wykonanie wymienionych konstrukcji na papierze.</li> <li>3) Wykonanie konstrukcji w programie C.a.R. wraz ze stworzeniem wspólnej instrukcji. Grupa dyktuje kolejne kroki jakie należy wykonać. Prowadzący zapisuje na komputerze, wyświetla na ekranie, w czasie dyskusji dokonuje zmian. Końcową wersję drukuje grupie.</li> <li>4) Zadanie 1: Skonstruować okrąg opisany na trójkącie. Podać opis konstrukcji.</li> <li>5) Skonstruować okrąg wpisany w trójkąt.</li> <li>6) Wykorzystanie opcji programu pokazującej długości narysowanych odcinków i wykonanie rysunku trójkąta prostokątnego, zmierzenie długości jego boków oraz przeprowadzenie obliczeń sprawdzających twierdzenie Pitagorasa. Wykonanie pełnej ilustracji.</li> <li>7) Obliczenie stosunku pola/półowa długości obwodu, sprawdzenie z długością promienia okręgu wpisanego. Powtórzenie konstrukcji okręgu wpisanego.</li> <li>8) Postawienie problemu do pracy indywidualnej: konstrukcja punktu Nagela.</li> <li>9) Podsumowanie i ewaluacja zajęć.</li> </ol>
Podsumowanie zajęć	Powtórzenie słowne tworzonych konstrukcji.
Uwagi metodyczne do realizacji	Warto przeprowadzić zajęcia w klasie I szkoły ponadgimnazjalnej, zanim jeszcze uczniowie pamiętają pojęcia z gimnazjum. Można dodać w dalszym etapie zadania praktyczne, połączyć z projektem do wykonania. Warto pamiętać o tym, aby nie wyręczać uczniów, pozwalać na swobodną dyskusję i eksperyment.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

## Załączniki do scenariusza nr 3

Zadanie 1:

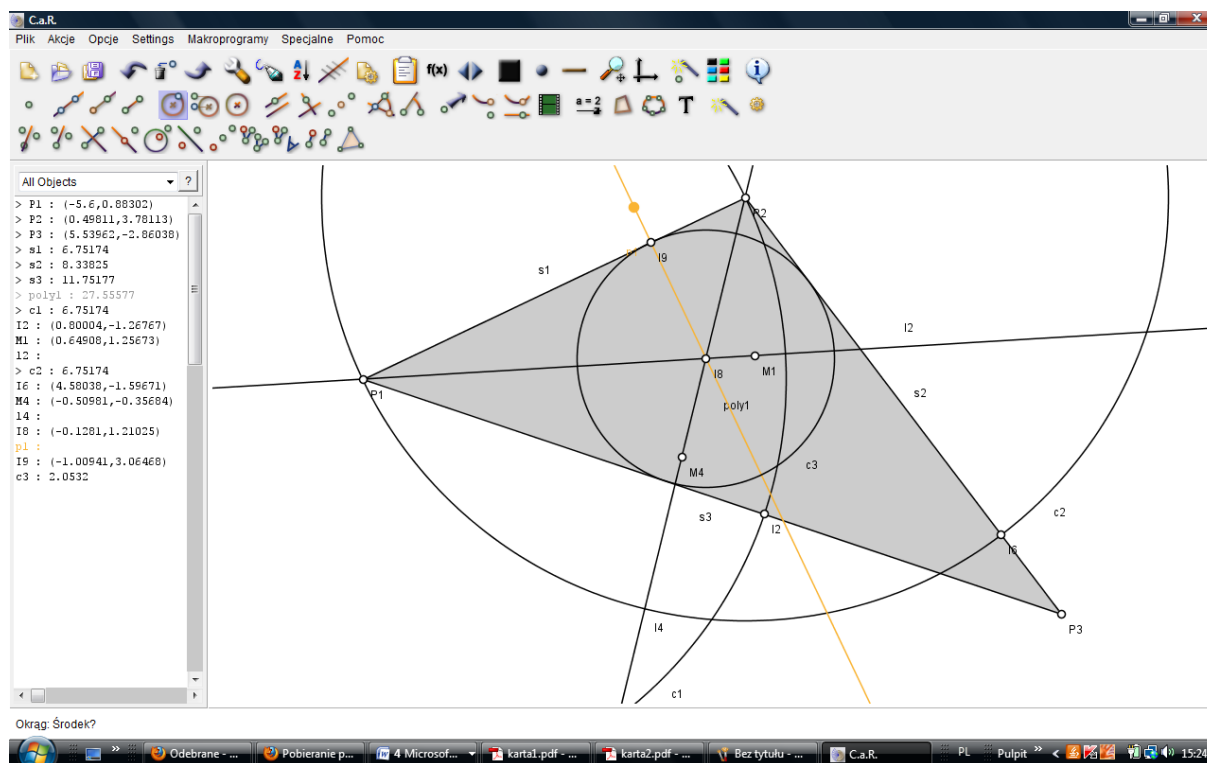
Skonstruować okrąg opisany na trójkącie. Podać opis konstrukcji.



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

Zadanie 2:

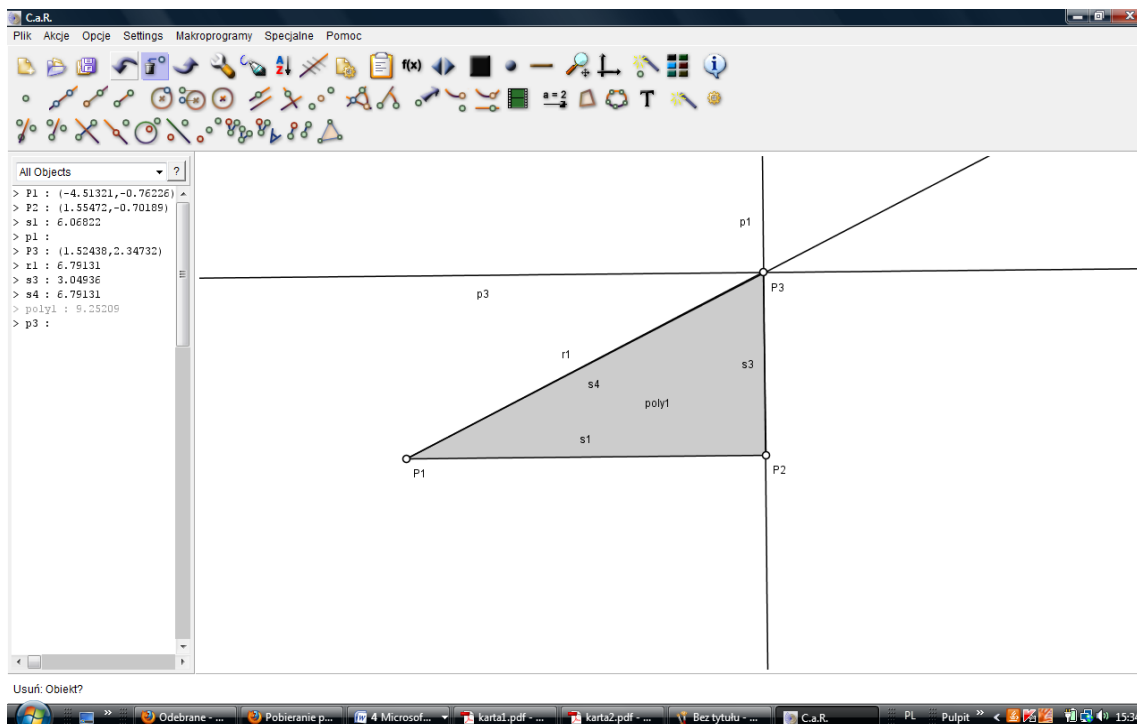
Skonstruować okrąg wpisany w trójkąt.



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

## Zadanie 3:

Wykorzystanie opcji programu pokazującej długości narysowanych odcinków i wykonanie rysunku trójkąta prostokątnego, zmierzenie długości jego boków oraz przeprowadzenie obliczeń sprawdzających twierdzenie Pitagorasa. Wykonanie pełnej ilustracji.

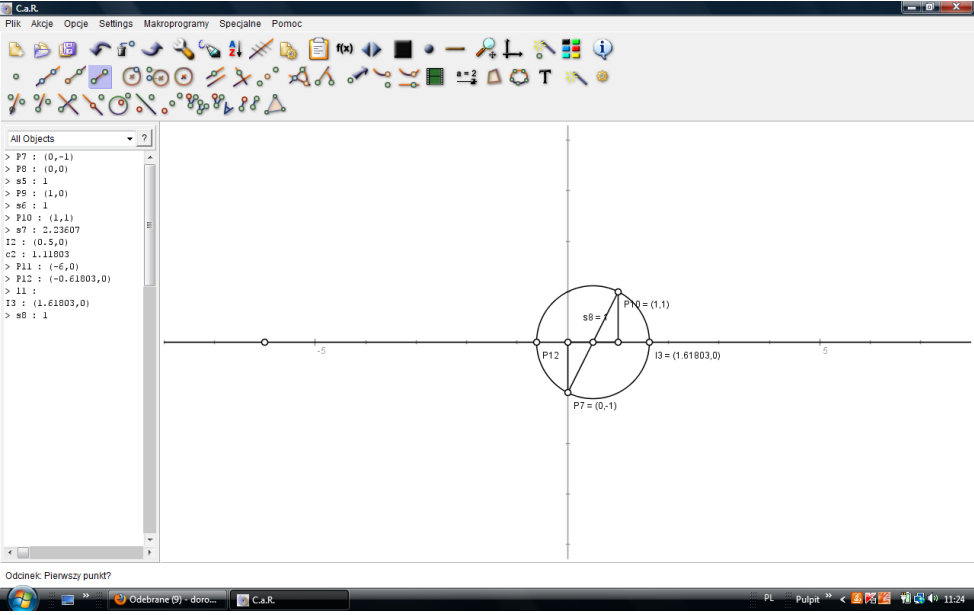


Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

## Scenariusz nr 4: Złota liczba w programie C.a.R i geometryzacja wzoru skróconego mnożenia

Temat zajęć		Złota liczba w programie C.a.R i geometryzacja wzoru skróconego mnożenia
Dział		Matematyka
Klasa (poziom edukacyjny)		
Czas trwania zajęć		1 godzina
Lp.	Element scenariusza	Treść
	Cel ogólny	Wspomaganie nauczania geometrii poprzez użytkowe programy komputerowe
	Cele szczegółowe	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Zapoznanie z pojęciem złotego podziału odcinka, z jego historią, konstrukcją zastosowaniami.</li> <li>• Próba kształtowanie niezmiernie trudnej czynności: geometryzacja rozwiązania równania II stopnia.</li> <li>• Powtórzenie wzorów skróconego mnożenia.</li> <li>• Próba nauki geometryzacji wybranych wzorów.</li> <li>• Kształtowanie umiejętności wykorzystania komputera do rozwiązywania problemów matematycznych.</li> <li>• Rozwijanie umiejętności opisu konstrukcji.</li> <li>• Rozwijanie umiejętności samokontroli działania.</li> <li>• Wzrost zainteresowania matematyką i jej zastosowaniami.</li> <li>• Umiejętność samodzielnej pracy oraz współdziałania w zespole.</li> </ul>
	Formy i metody	<p><b>Metody pracy:</b> ćwiczenia z komputerem stymulowane instrukcją multimedialną.</p> <p><b>Formy organizacyjne:</b> praca z całą grupą, praca indywidualna.</p>

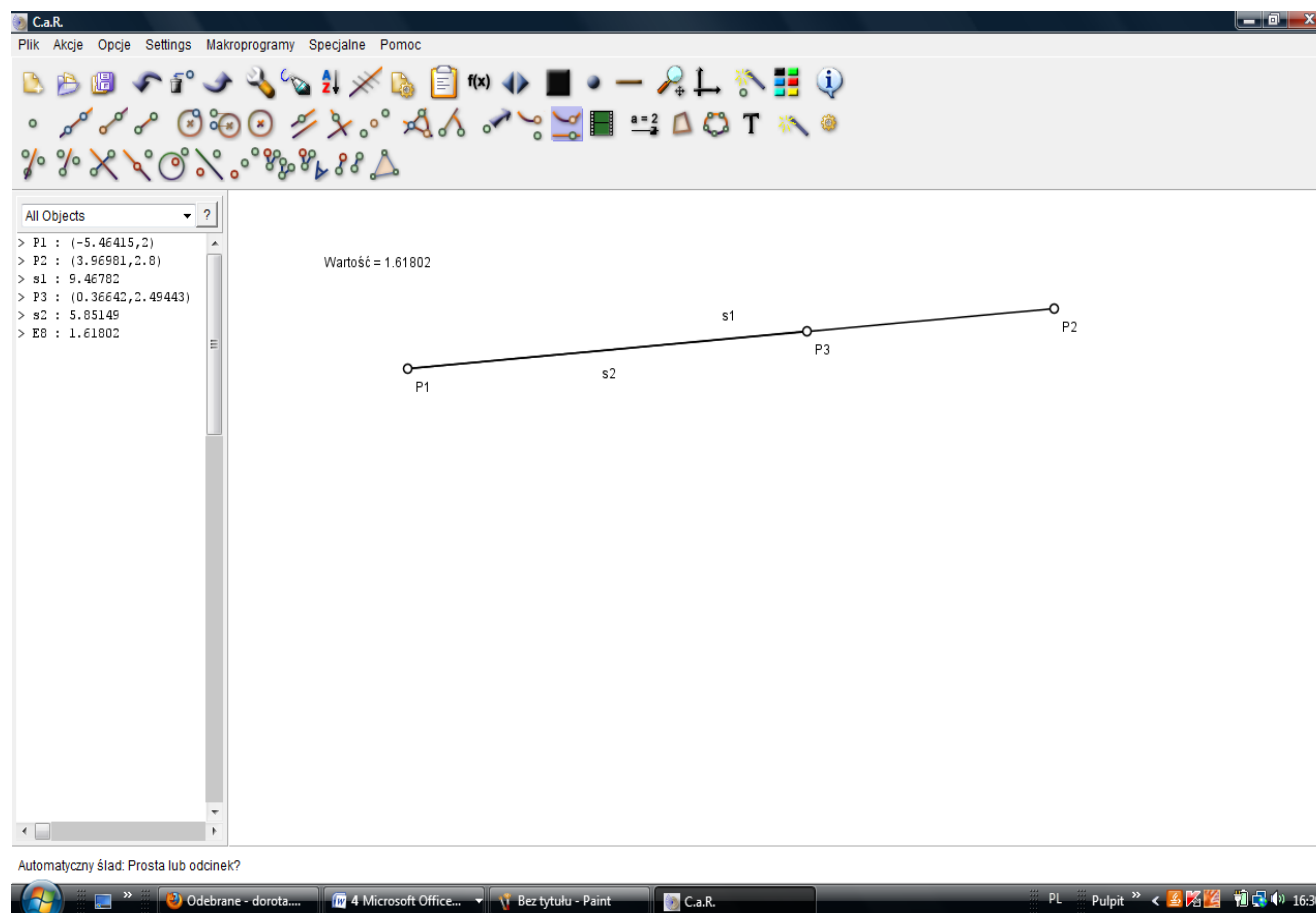
Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
**Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”**

Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	rzutnik multimedialny, ekran, komputery: minimum jedno stanowisko na 2 osoby (preferowane jedna osoba przy komputerze), biały papier, cyrkle, ołówki, linijki.
Wprowadzenie do zajęć	Przypomnienie lub wprowadzenie podstawowych funkcjonalności w programie C.a.R.
Przebieg zajęć <i>(pełna wersja)</i>	<p>1) Określenie złotego podziału odcinka. Podanie złotego równania: <math>x^2-x-1=0</math>. Wyznaczenie rozwiązania dodatniego w postaci <math>\frac{1+\sqrt{5}}{2}</math>.</p> <p>2) Wyjaśnienie konstrukcji geometrycznej pozwalającej rozwiązać równanie kwadratowe i rozwiązania równania złotego. Odczyt przybliżonej wartości rozwiązania dodatniego.</p> 



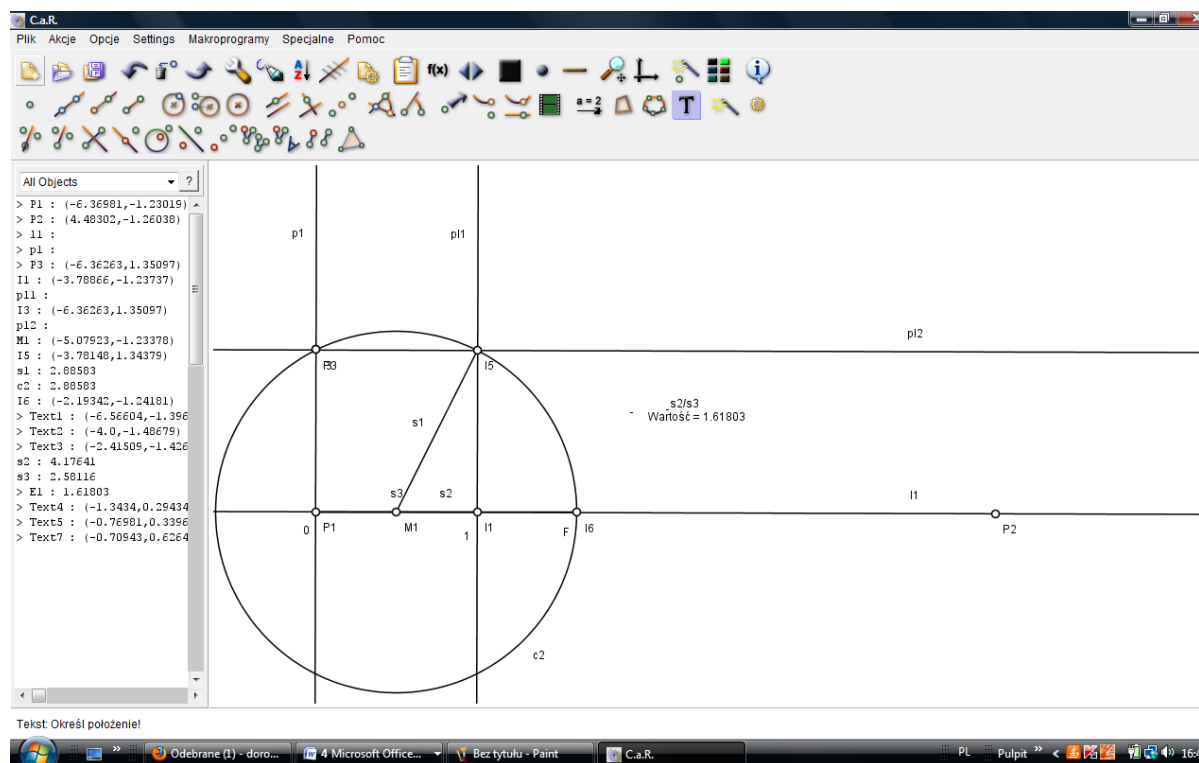
Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

3) Złote cięcie w programie C.a.R. z wykorzystaniem wyrażeń arytmetycznych w programie.



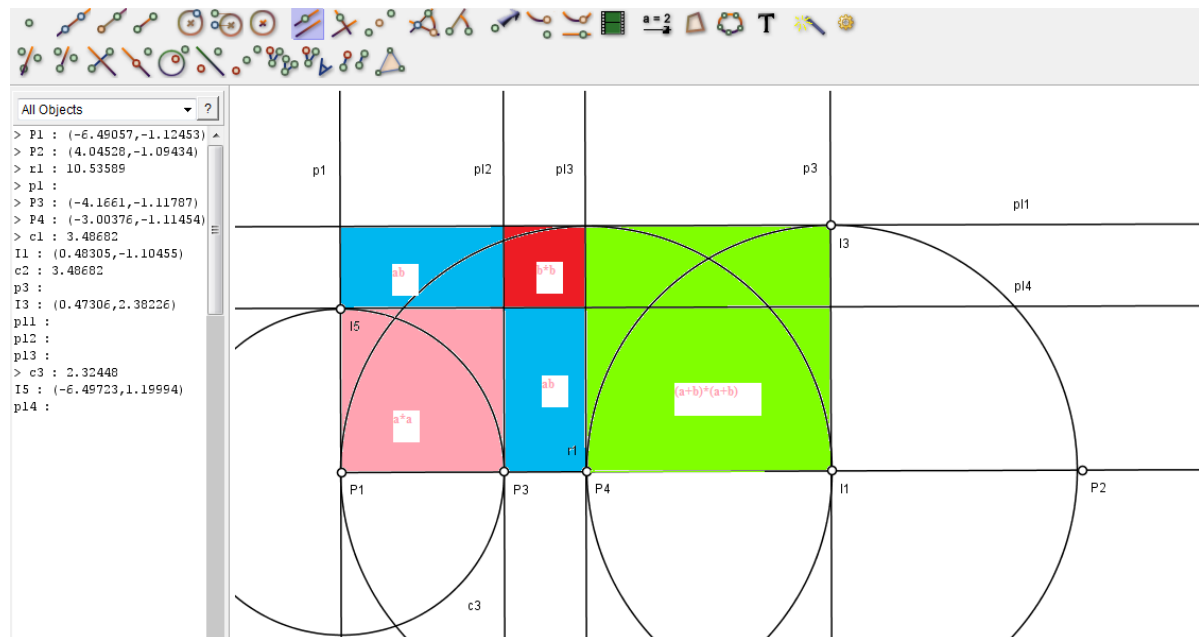
Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
**Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”**

4) Konstrukcja geometryczna złotej liczby, na kartce za pomocą cyrka i linijki oraz w C.a.R.



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

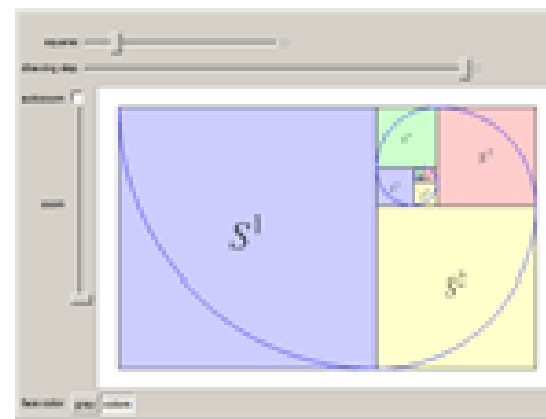
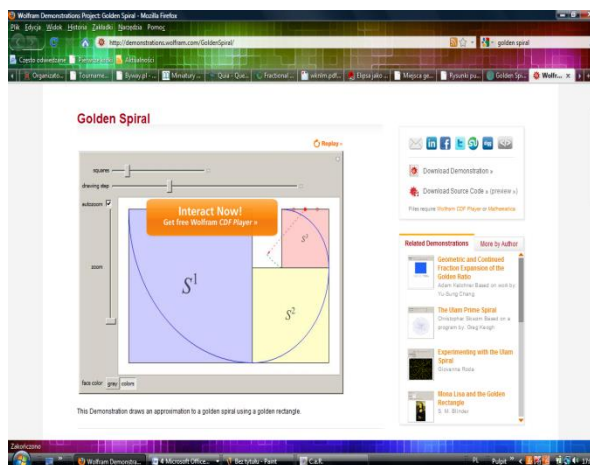
- 5) Konstrukcja złotego prostokąta i złotego trójkąta w C.a.R.  
6) Odczyt wzoru skróconego mnożenia na kwadrat sumy z rysunku:



- 7) Zadanie: wykonaj ilustrację wzoru:  
 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ , który wynika ze wzoru:  $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$ .  
oraz wzoru:  $(a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2$

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
**Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”**

- 8) Postawienie problemu do pracy indywidualnej: konstrukcja złotej spirali.  
 Przykład na podstawie apletu Wolfram Demonstration Project:  
<http://demonstrations.wolfram.com/GoldenSpiral/>



Podsumowanie zajęć

Powtórzenie słowne tworzonych konstrukcji.

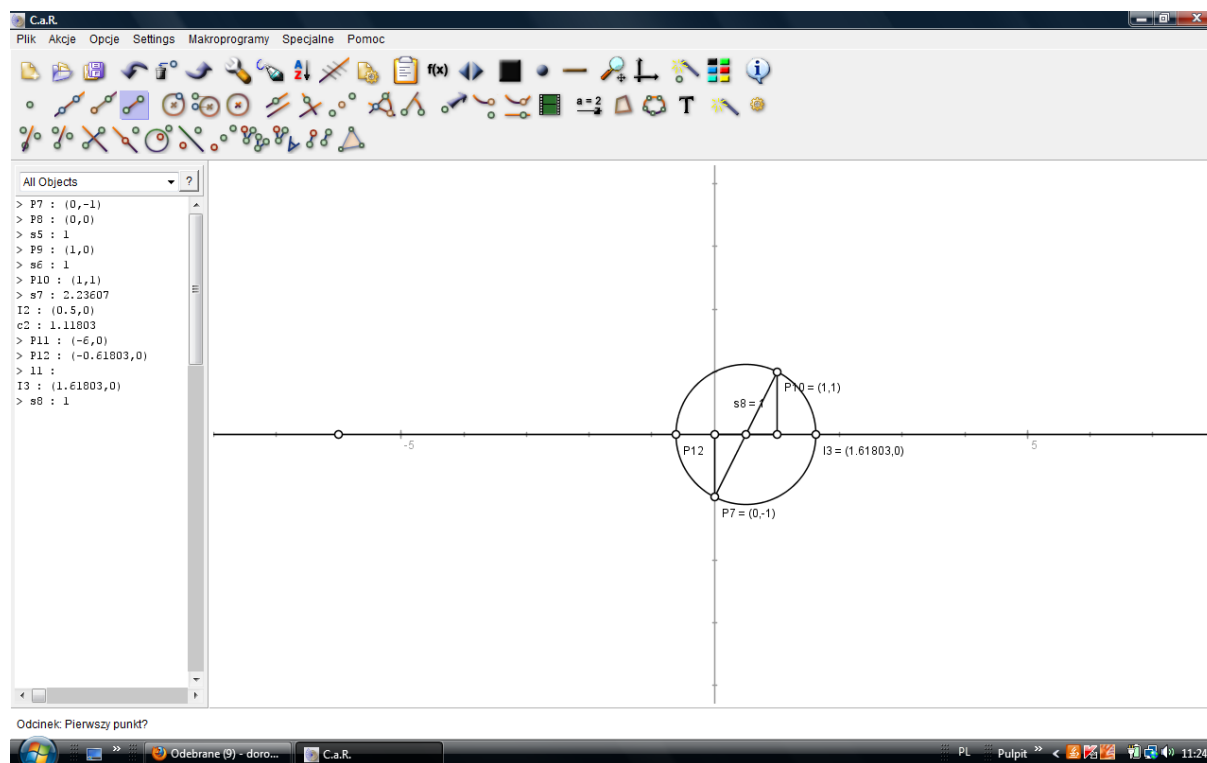
Uwagi metodyczne do realizacji

Warto przeprowadzić zajęcia w klasie I szkoły ponadgimnazjalnej, zanim jeszcze uczniowie pamiętają pojęcia z gimnazjum. Można dodać w dalszym etapie zadania praktyczne, połączyć z projektem do wykonania. Warto pamiętać o tym, aby nie wyręczać uczniów, pozwalać na swobodną dyskusję i eksperyment. Zajęcia mogą być realizowane w ciągu 90 minut, przy zachowaniu 45minut jest mało czasu, biorąc po uwagę konieczność wprowadzenia do programu C.a.R.

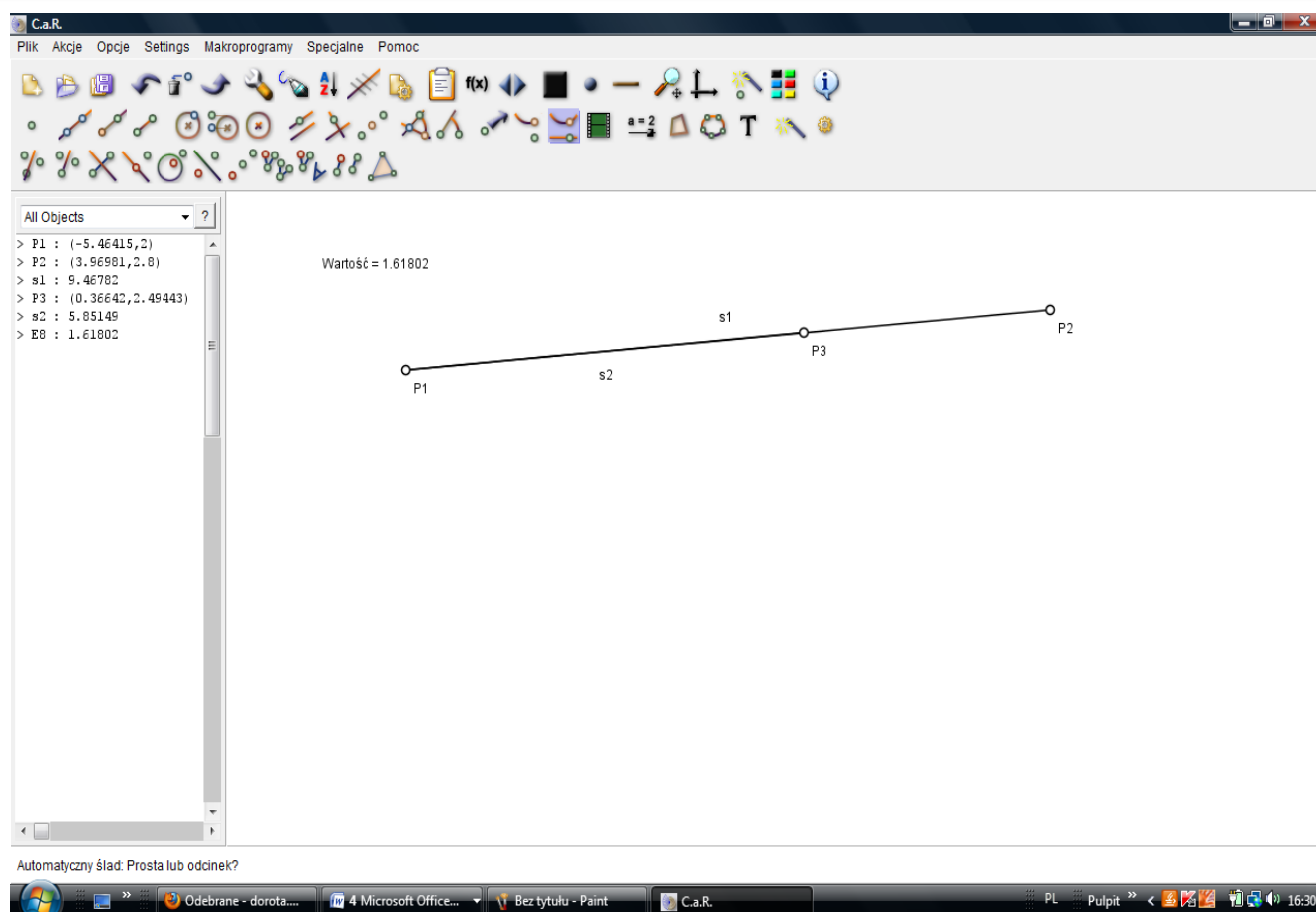
Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

## Załączniki do scenariusza nr 4

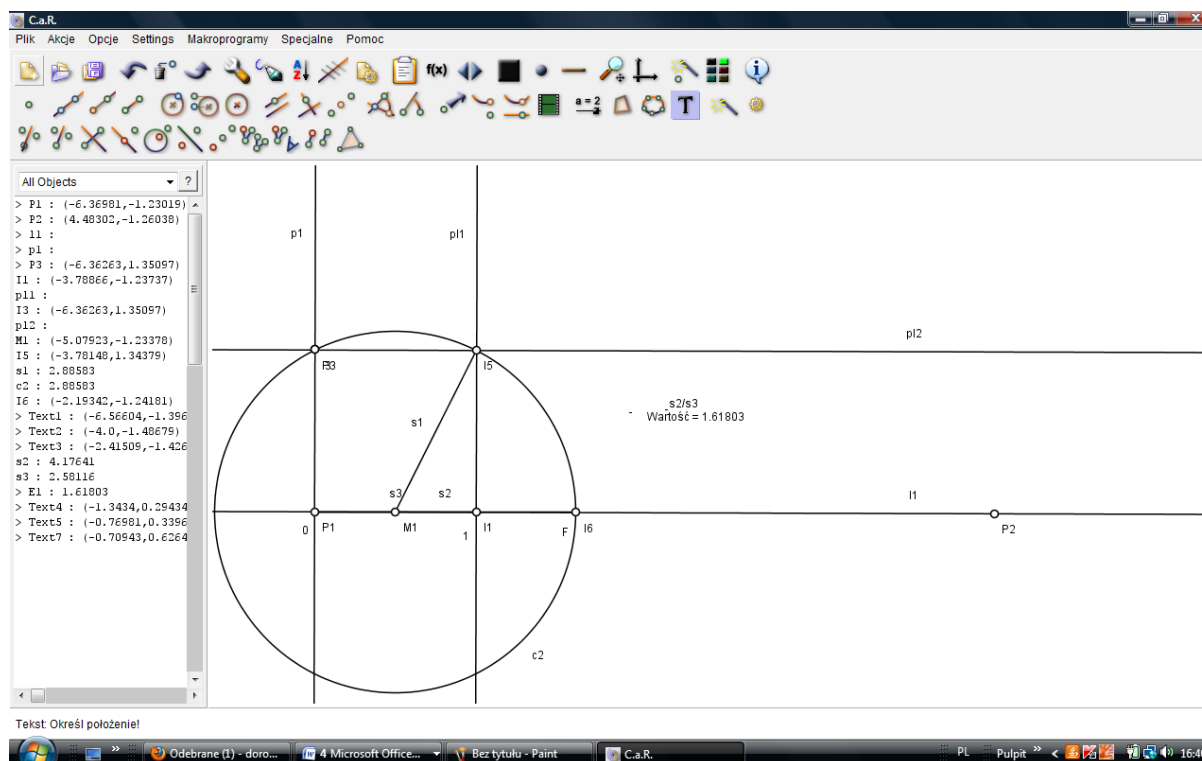
### Materiały do powielenia



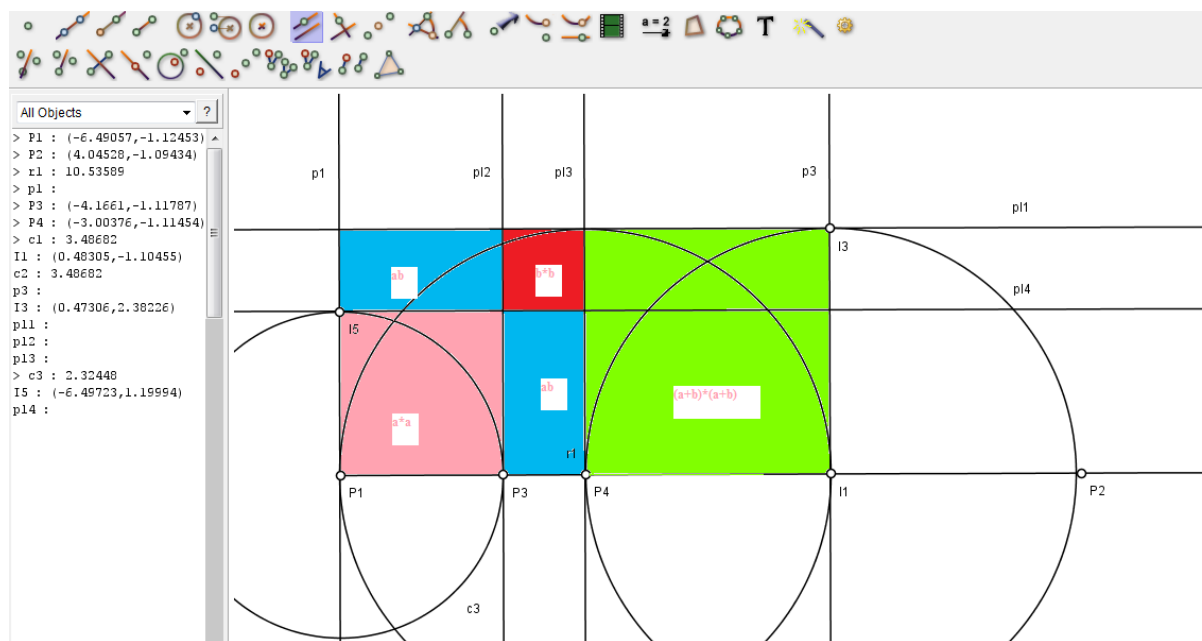
Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
**Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”**

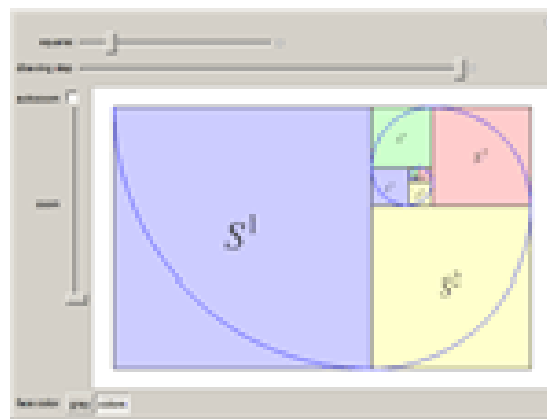
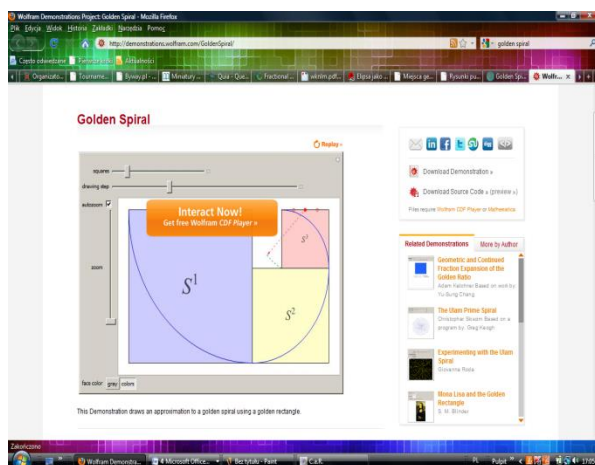


Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
**Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”**





Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

## Scenariusz nr 5: Geometria spidronu na płaszczyźnie

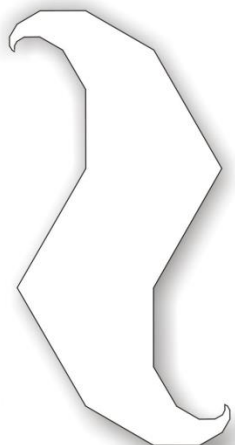
<b>Temat zajęć</b>		<b>Geometria spidronu na płaszczyźnie</b>
<b>Dział</b>		<b>Geometria na płaszczyźnie, ciągi liczbowe</b>
<b>Klasa (poziom edukacyjny)</b>		
<b>Czas trwania zajęć</b>		<b>2 godziny</b>
<b>Lp.</b>	<b>Element scenariusza</b>	<b>Treść</b>
	Cel ogólny	Wprowadzenie pojęcia, metod konstrukcji i własności spidronu.
	Cele szczegółowe	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Przypomnienie cech podobieństwa trójkątów i pojęcia skali podobieństwa;</li> <li>• Przypomnienie pojęcia ciągu geometrycznego;</li> <li>• Wprowadzenie pojęcia szeregu geometrycznego, warunków jego zbieżności oraz wzoru na sumę szeregu geometrycznego;</li> <li>• Inspirowanie uczniów do samodzielnych poszukiwań konstrukcji, podobnych do przedstawionych (przy pomocy cyrkla i linijki lub przy pomocy komputerowych programów graficznych);</li> <li>• Inspirowanie uczniów do artystycznych poszukiwań z wykorzystaniem obiektów i konstrukcji matematycznych.</li> </ul>
	Formy i metody	Wykład, pokaz multimedialny, pogadanka, ćwiczenia
	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	Rzutnik, ekran, gotowe formy wielokątów foremnych, cyrkiel, linijka, notatki własne uczniów.
	Wprowadzenie do	Przedstawienie historii spidronu oraz sylwetki twórcy.

**Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy**  
**Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”**

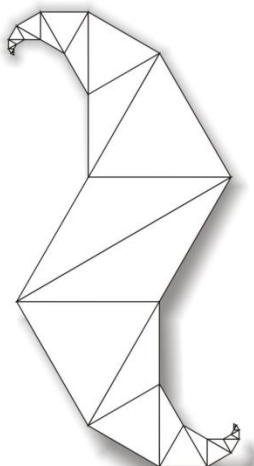
	zajęć	
	Przebieg zajęć ( <i>pełna wersja</i> )	<ol style="list-style-type: none"> <li>1) Próba samodzielnego wyznaczania spidronu przy użyciu gotowych form sześciokąta.</li> <li>2) Omówienie szczegółów konstrukcji spidronu, w tym: przypomnienie konstrukcji sześciokąta foremnego, pojęcia przekątnej wielokąta, klasyfikacji trójkątów, cech podobieństwa trójkątów, skali podobieństwa.</li> <li>3) Samodzielna, wykonana przez uczniów konstrukcja spidronu przy użyciu cyrkla i linijki.</li> <li>4) Wyznaczanie kątów w spidronie oraz skal podobieństw trójkątów.</li> <li>5) Próba obliczenia pola spidronu, w tym: przypomnienie pojęcia ciągu geometrycznego oraz wprowadzenie pojęcia szeregu geometrycznego, warunków jego zbieżności i wzoru na sumę szeregu geometrycznego.</li> <li>6) Omówienie uzyskanej w ten sposób własności spidronu (pole spidronu równe jest polu trójkąta równobocznego o boku długości równej długości podstawy spidronu).</li> <li>7) Przedstawienie innych sposobów dowodzenia powyższego faktu.</li> <li>8) Omówienie sposobu łączenia spidronów.</li> <li>9) Przedstawienie kilku możliwych sposobów pokrywania płaszczyzny spidronami.</li> <li>10) Prezentacja przykładów prac artystycznych inspirowanych konstrukcją i własnościami spidronów (prace „escheropodobne”, rozety spidronowe, rysunki fraktalne, itp.).</li> <li>11) Wyznaczanie spidronów na bazie, innych niż sześciokąt, wielokątów foremnych.</li> <li>12) Aktywizacja uczniów do powielania wcześniejszej metody (z wykorzystaniem skali podobieństwa i sumy szeregu geometrycznego) przy obliczaniu pól uzyskanych spidronów.</li> <li>13) Inspirowanie uczniów do samodzielnych poszukiwań konstrukcji, podobnych do przedstawionych (przy pomocy narzędzi kreślarskich lub przy pomocy komputerowych programów graficznych);</li> </ol>
	Podsumowanie zajęć	Utrwalenie poznanych pojęć i faktów: spidron, konstrukcja i własności spidronu, szereg geometryczny, warunki zbieżności szeregu geometrycznego.
	Uwagi metodyczne do realizacji	

## Załączniki do scenariusza nr 5

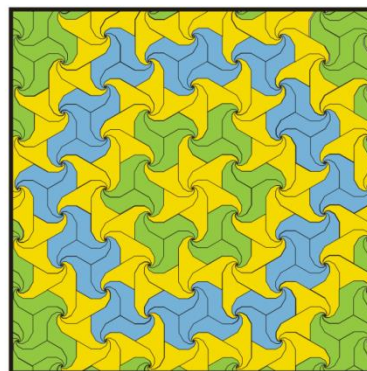
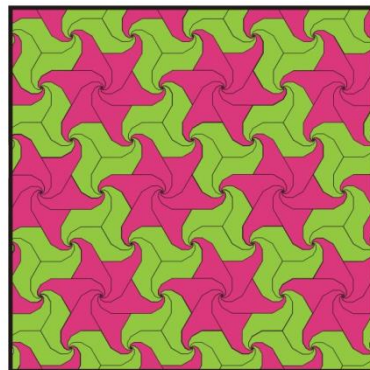
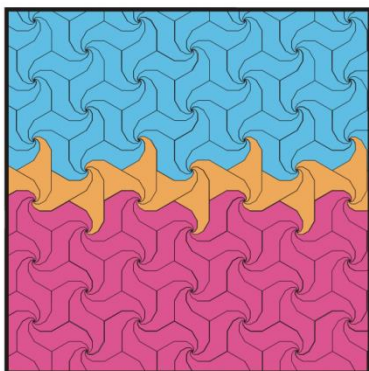
A) Spidron



B) Konstrukcja spidronu



C) Przykładowe sposoby pokrywania płaszczyzny



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

## Scenariusz nr 6: Ciąg arytmetyczny i jego własności

<b>Temat zajęć</b>		<b>Ciąg arytmetyczny i jego własności</b>
<b>Dział</b>		<b>Ciągi liczbowe</b>
<b>Klasa (poziom edukacyjny)</b>		
<b>Czas trwania zajęć</b>		<b>2 godziny</b>
<b>Lp.</b>	<b>Element scenariusza</b>	<b>Treść</b>
	Cel ogólny	<ul style="list-style-type: none"> <li>• zapoznanie uczniów z definicją ciągu arytmetycznego oraz podstawowymi własnościami tego ciągu</li> <li>• kształcenie umiejętności zapisywania odpowiednich wniosków i uzyskanych informacji</li> <li>• utrwalanie poznanego materiału na podstawie zadań</li> </ul>
	Cele szczegółowe	<p><b>Uczeń potrafi:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• podać przykład ciągu arytmetycznego</li> <li>• obliczać <math>n</math>-ty wyraz ciągu arytmetycznego</li> <li>• wyznaczać ciąg arytmetyczny</li> <li>• wyznaczać różnicę ciągu arytmetycznego</li> <li>• wyznaczać sumę ciągu arytmetycznego</li> <li>• podać podstawowe własności ciągu arytmetycznego</li> <li>• wykazać na podstawie definicji, że dany ciąg jest arytmetyczny</li> <li>• stosować definicje i własności ciągów do rozwiązywania zadań</li> </ul>
	Formy i metody	Praca indywidualna, pomoc nauczyciela w przypadku wystąpienia pytań
	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł,	Praca na platformie elearningowej, zajęcia prowadzone są w formie „lekcji”

**Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy**  
**Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”**

	gra)	
	Wprowadzenie do zajęć	Nauczyciel wita uczniów i podaje temat zajęć.
	Przebieg zajęć ( <i>pełna wersja</i> )	<ol style="list-style-type: none"> <li>1) Nauczyciel podaje uczniom cele ogólne oraz szczegółowe zajęć.</li> <li>2) Uczniowie wraz z nauczycielem logują się na platformę elearningową i zajęcia prowadzone są w formie „lekcji”. Sposób ten pozwala na przedstawienie treści na wielu ze sobą powiązanych stronach. Każda ze stron lekcji kończy się pytaniem sprawdzającym stopień opanowania prezentowanego materiału. W zależności od udzielonej odpowiedzi uczeń może przenieść się do kolejnej części zajęć, „powtarzać” bieżącą stronę.</li> <li>3) Uczniowie indywidualnie czytają przygotowany materiał. Należy podkreślić, że materiał elearningowy nie zastąpi żywego kontaktu ucznia z nauczycielem. Dlatego w przypadku wystąpienia jakichkolwiek wątpliwości nauczyciel może od razu odpowiedzieć na pytania. Zaletą tej metody jest możliwość indywidualizacji tempa przyswajania wiedzy, wielokrotnego ćwiczenia zadań w różnych zestawach, co z jednej strony ułatwia aktywizację uczniów słabszych, a z drugiej strony uczniom zdolnym pozwala uniknąć znużenia niepotrzebnymi ćwiczeniami w tempie uczniów wolniej pracujących.</li> <li>4) Strony wykładowe prezentują materiał w podobny sposób, jak w szkolnym podręczniku, tyle że wzbogacony o elementy pozwalające na aktywny udział ucznia w procesie zapoznawania się z materiałem.</li> </ol>
	Podsumowanie zajęć	Nauczyciel omawia wyniki uzyskane podczas zajęć.
	Uwagi metodyczne do realizacji	Nowa forma zajęć spodobała się uczniom. Uczniowie nie mieli zastrzeżeń do przygotowanego materiału. Wszyscy uczniowie zaliczyli pytania sprawdzające.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

## Załączniki do scenariusza nr 6

MATEMATYKA ▶ MAT Zmień rolę na...

---

OSOBY	TEMATYKA
Uczestnicy	Forum aktualności
<b>AKTYWNOŚCI</b>	
Fora dyskusyjne Lekcje	1  Ciąg arytmetyczny <input type="checkbox"/>
<b>SZUKAJ W FORUM</b>	
<input type="text"/> Wykonaj Zaawansowane ?	



## Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

### Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

#### CIĄG ARYTMETYCZNY ?

Podgląd Edytuj Raporty Oceń eseje

Wynik jest pokazywany tylko studentowi. Zaloguj się jako student.

##### Menu lekcji

Ciąg arytmetyczny -  
definicja  
Monotoniczność ciągu  
Przykład ciągu  
arytmetycznego  
Wzór na kolejny wyraz  
ciągu.  
Suma n wyrazów  
ciągu arytmetycznego  
Koniec

#### CIĄG ARYTMETYCZNY - DEFINICJA

Ciąg liczbowy nazywany ciągiem arytmetycznym, gdy różnica między dowolnym wyrazem ciągu, a wyrazem bezpośrednio go poprzedzającym jest stała - oznaczamy ją przez  $r$  i nazywamy różnicą ciągu arytmetycznego.

Kolejny wyraz ciągu powstaje przez dodanie do poprzedniego różnicy  $r$ .

np.  $a_n = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$   
 $a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$   
 $a_3 - a_2 = 3 - 2 = 1$   
 $a_4 - a_3 = 4 - 3 = 1$   
 itd.

Różnica  $r = 1$   
*Ten ciąg jest arytmetyczny.*

##### Menu lekcji

Ciąg arytmetyczny -  
definicja  
Monotoniczność ciągu  
Przykład ciągu  
arytmetycznego  
Wzór na kolejny wyraz  
ciągu.  
Suma n wyrazów  
ciągu arytmetycznego  
Koniec

Ciąg określony jest wzorem  $a_n = 3n - 2$ . Oblicz wyrazy:  $a_1, a_2, a_3, a_5, a_6$

- 1, 4, 7, 13, 16
- 16, 13, 10, 7, 4
- 4, 7, 1, 13, 16
- 1, 4, 7, 10, 13

Proszę sprawdzić jedną odpowiedź





Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

Menu lekcji

Ciąg arytmetyczny -  
definicja

Monotoniczność ciągu

Przykład ciągu  
arytmetycznego

Wzór na kolejny wyraz  
ciągu.

Suma n wyrazów  
ciągu arytmetycznego

Koniec

Czy dane liczby są trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego:

$$2 - 3\sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{3} + 2}, 2 + \sqrt{3}$$

- nie
- tak

Proszę sprawdzić jedną odpowiedź

Menu lekcji

Ciąg arytmetyczny -  
definicja

Monotoniczność ciągu

Przykład ciągu  
arytmetycznego

Wzór na kolejny wyraz  
ciągu.

Suma n wyrazów  
ciągu arytmetycznego

Koniec

Czy dane liczby są trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego:

$$74 - \sqrt{37}, 37, \sqrt{37}$$

- nie
- tak

Proszę sprawdzić jedną odpowiedź



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

## Menu lekcji

Ciąg arytmetyczny -  
definicja

Monotoniczność ciągu

Przykład ciągu  
arytmetycznego

Wzór na kolejny wyraz  
ciągu.

Suma  $n$  wyrazów  
ciągu arytmetycznego

Koniec

## MONOTONICZNOŚĆ CIĄGU

Jeżeli:

- $r > 0$  to ciąg jest rosnący
- $r < 0$  to ciąg jest malejący
- $r = 0$  to ciąg jest stały

## Menu lekcji

Ciąg arytmetyczny -  
definicja

Monotoniczność ciągu

Przykład ciągu  
arytmetycznego

Wzór na kolejny wyraz  
ciągu.

Suma  $n$  wyrazów  
ciągu arytmetycznego

Koniec

Zbadaj monotoniczność ciągu arytmetycznego danego wzorem ogólnym:  $a_n=3n-2$

- ciąg malejący
- ciąg stały
- to nie jest ciąg arytmetyczny
- ciąg rosnący

Proszę sprawdzić jedną odpowiedź



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

## Menu lekcji

Ciąg arytmetyczny -  
definicja

Monotoniczność ciągu

Przykład ciągu  
arytmetycznego

Wzór na kolejny wyraz  
ciągu.

Suma n wyrazów  
ciągu arytmetycznego

Koniec

Zbadaj monotoniczność ciągu arytmetycznego danego wzorem ogólnym:  $a_n = 4 - 5n$

- ciąg stały
- ciąg rosnący
- malejąco-rosnący
- ciąg malejący

Proszę sprawdzić jedną odpowiedź

## Menu lekcji

Ciąg arytmetyczny -  
definicja

Monotoniczność ciągu

Przykład ciągu  
arytmetycznego

Wzór na kolejny wyraz  
ciągu.

Suma n wyrazów  
ciągu arytmetycznego

Koniec

### PRZYKŁAD CIĄGU ARYTMETYCZNEGO

Czy ciąg  $a_n = n$  jest arytmetyczny?

**Rozwiązanie:**

Należy sprawdzić, czy różnica  $a_{n+1} - a_n$  jest stałą liczbą.

(Aby wyznaczyć wyraz  $(n+1)$  do wzoru na  $a_n$  podstawiamy zamiast  $n$   $n+1$ )

Utwórzmy tę różnicę

$$a_n = n$$

$$a_{n+1} = n + 1$$

$$a_{n+1} - a_n = n + 1 - n = 1$$

Niezależnie od wartości  $n$  - różnica wynosi 1, czyli ciąg  $a_n = n$  jest arytmetyczny.



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
**Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”**

Menu lekcji

Ciąg arytmetyczny -  
definicja

Monotoniczność ciągu

Przykład ciągu  
arytmetycznegoWzór na kolejny wyraz  
ciągu.Suma n wyrazów  
ciągu arytmetycznego

Koniec

Ciąg określony jest wzorem  $a_n = 3n - 2$ . Oblicz różnicę:  $a_{20} - a_{19}$ 

- 1
- 3
- 1
- 3

Proszę sprawdzić jedną odpowiedź

Menu lekcji

Ciąg arytmetyczny -  
definicja

Monotoniczność ciągu

Przykład ciągu  
arytmetycznegoWzór na kolejny wyraz  
ciągu.Suma n wyrazów  
ciągu arytmetycznego

Koniec

Ciąg określony jest wzorem  $a_n = 3n - 2$ . Wyznacz różnicę  $a_{n+1} - a_n$ 

- 3
- 1
- 4
- 1

Proszę sprawdzić jedną odpowiedź

## Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

### Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

Menu lekcji

Ciąg arytmetyczny -  
definicja

Monotoniczność ciągu

Przykład ciągu  
arytmetycznegoWzór na kolejny wyraz  
ciągu.Suma n wyrazów  
ciągu arytmetycznego

Koniec

#### WZÓR NA KOLEJNY WYRAZ CIĄGU.

Mając dany pierwszy wyraz ciągu  $a_1$  i różnicę  $r$  możemy wyznaczyć każdy jego wyraz. Wykorzystujemy wtedy następujące wzory:

$$a_n = a_{n-1} + r \text{ lub } a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

Zależność między trzema kolejnymi wyrazami w ciągu arytmetycznym:

$$a_n = (a_{n-1} + a_{n+1}) / 2 \text{ dla } n \geq 2$$

Z powyższego wzoru wynika, że każdy wyraz ciągu arytmetycznego oprócz pierwszego i (jeżeli ciąg jest skończony) ostatniego jest średnią arytmetyczną dwóch sąsiednich wyrazów, to znaczy wyrazów poprzedniego i następnego.

Menu lekcji

Ciąg arytmetyczny -  
definicja

Monotoniczność ciągu

Przykład ciągu  
arytmetycznegoWzór na kolejny wyraz  
ciągu.Suma n wyrazów  
ciągu arytmetycznego

Koniec

Między liczby 3 i 251 wstaw takie trzy liczby, aby łącznie tworzyły ciąg arytmetyczny. Jakie to liczby?

- 66, 128, 190
- 63, 125, 187
- 64, 126, 188
- 65, 127, 189

Proszę sprawdzić jedną odpowiedź

## Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

### Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

Menu lekcji

Ciąg arytmetyczny - definicja

Monotoniczność ciągu

Przykład ciągu arytmetycznego

Wzór na kolejny wyraz ciągu.

Suma n wyrazów ciągu arytmetycznego

Koniec

Temperatura w górach obniża się latem o 0,7°C na każde 100m wzniesienia. Oblicz temperaturę na Giewoncie (1900m), gdy w Zakopanym (837m) jest 16,4°C.

<input type="radio"/>	9,4
<input type="radio"/>	10,1
<input type="radio"/>	10,8
<input type="radio"/>	11,5

[Proszę sprawdź jedną odpowiedź](#)

Temperatura w górach obniża się latem o 0,7°C na każde 100m wzniesienia. Oblicz temperaturę nad Morskim Okiem (1393m), gdy na Rysach (2503m) jest 8,7°C.

<input type="radio"/>	15,0
<input type="radio"/>	16,4
<input type="radio"/>	17,1
<input type="radio"/>	15,7

[Proszę sprawdź jedną odpowiedź](#)

Menu lekcji

Ciąg arytmetyczny - definicja

Monotoniczność ciągu

Przykład ciągu arytmetycznego

Wzór na kolejny wyraz ciągu.

Suma n wyrazów ciągu arytmetycznego

Koniec

#### SUMA N WYRAZÓW CIĄGU ARYTMETYCZNEGO

Suma  $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ , n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego o różnicy  $r$ , wyraża się wzorem:

$$S_n = ((a_1 + a_n)/2) * n \text{ lub } S_n = ((2 * a_1 + (n-1) * r)/2) * n$$

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

Menu lekcji

- Ciąg arytmetyczny - definicja
- Monotoniczność ciągu
- Przykład ciągu arytmetycznego
- Wzór na kolejny wyraz ciągu.
- Suma n wyrazów ciągu arytmetycznego
- Koniec

Znajdź sumę dwudziestu kolejnych liczb będących wielokrotnościami 7 (zaczynając od 7)

<input type="radio"/>	1320
<input type="radio"/>	1000
<input type="radio"/>	1477
<input type="radio"/>	1470

Proszę sprawdzić jedną odpowiedź

Menu lekcji

- Ciąg arytmetyczny - definicja
- Monotoniczność ciągu
- Przykład ciągu arytmetycznego
- Wzór na kolejny wyraz ciągu.
- Suma n wyrazów ciągu arytmetycznego
- Koniec

Znajdź sumę czterdziestu pięciu kolejnych liczb będących wielokrotnościami liczby 11, zaczynając od 33.

<input type="radio"/>	9845
<input type="radio"/>	8761
<input type="radio"/>	12375
<input type="radio"/>	14231

Proszę sprawdzić jedną odpowiedź

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

Składając do kasy oszczędności, w każdym miesiącu o 20zł więcej niż w poprzednim zbieramy po n miesiącach 1845zł. Oblicz liczbę miesięcy n, jeżeli pierwszy wkład wynosił 125zł.

- 9
- 10
- 7
- 8

Proszę sprawdzić jedną odpowiedź

Wykopanie pierwszego metra studni kosztuje 12 zł, a każdego następnego o 4 zł drożej. Ile kosztuje wykopanie studni głębokości 25m?

- 500
- 2000
- 1000
- 1500

Proszę sprawdzić jedną odpowiedź





Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
**Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”**

Wykopanie pierwszego metra studni kosztuje 15 zł, a każdego następnego o 7 zł drożej. Ile kosztuje wykopanie studni głębokości 12m?

<input type="radio"/>	842
<input type="radio"/>	542
<input type="radio"/>	642
<input type="radio"/>	742

Proszę sprawdzić jedną odpowiedź

Wykopanie pierwszego metra studni kosztowało 8 zł, a każdego następnego o 3 zł drożej. Jaka była jej głębokość, gdy wykopanie kosztowało 798 zł?

<input type="radio"/>	22
<input type="radio"/>	21
<input type="radio"/>	20
<input type="radio"/>	19

Proszę sprawdzić jedną odpowiedź



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

## Scenariusz nr 7: Wirtualna Rzeczywistość - Fotorealistyczna grafika 3D

<b>Temat zajęć</b>		<b>Wirtualna Rzeczywistość - Fotorealistyczna grafika 3D</b>
<b>Dział</b>		<b>Informatyka</b>
<b>Klasa (poziom edukacyjny)</b>		
<b>Czas trwania zajęć</b>		<b>2 godziny</b>
<b>Lp.</b>	<b>Element scenariusza</b>	<b>Treść</b>
	Cel ogólny	Celem zajęć jest zapoznanie ucznia z zagadnieniami grafiki 3D oraz jej możliwościami i wykorzystaniu w dzisiejszym świecie. Uczeń w wyniku zajęć powinien poznać się z podstawowymi pojęciami grafiki 3D oraz jej możliwościami wykorzystania.
	Cele szczegółowe	Uczeń w wyniku zajęć powinien zdobyć wiedzę: <ul style="list-style-type: none"> <li>• na temat podstawowych pojęć grafiki 3D;</li> <li>• możliwości wykorzystania grafiki 3D w różnych dziedzinach gospodarki i życia codziennego;</li> <li>• możliwości tworzenia realistycznej grafiki 3D i animacji komputerowej;</li> <li>• na temat podstawowych mechanizmów tworzenia grafiki 3D.</li> </ul>
	Formy i metody	Pogadanka, wykład z wykorzystaniem prezentacji multimedialnej, metody praktyczne, praca w grupach przy wykorzystaniu komputera.
	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	Komputer, rzutnik multimedialny, dostęp do sieci Internet
	Wprowadzenie do zajęć	Dynamiczny postęp w rozwoju narzędzi do tworzenia grafiki 3D oraz wzrost mocy obliczeniowej komputerów PC pozwala na wykorzystanie metod wizualizacji w wielu dziedzinach życia codziennego, a także rozrywki elektronicznej (np. gry komputerowe) czy filmu (np. Avatar). Prezentacja ma na celu pokazanie możliwości

## Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

### Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

		projektowania i tworzenia grafiki przestrzennej 3D. Ma to na celu uzmysłowienie uczestnikom, jakie możliwości dają współczesne narzędzia i oprogramowanie komputerowe w tej dziedzinie.
	Przebieg zajęć( <i>pełna wersja</i> )	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Prezentacja multimedialna</li> <li>2. Dyskusja w czasie prezentacji</li> <li>3. Ćwiczenia z użyciem komputera</li> <li>4. Pytania i odpowiedzi</li> <li>5. Prezentacja działania przykładowej aplikacji oraz wideo z wykorzystaniem systemu do projekcji obrazu 3D</li> <li>6. Pytania i odpowiedzi</li> <li>7. Test wielokrotnego wyboru sprawdzający zapamiętanie pojęć</li> <li>8. Pytania i odpowiedzi</li> </ol>
	Podsumowanie zajęć	<p>Prezentacja mówi w przystępny sposób o tajnikach tworzenia realistycznej grafiki i animacji 3D, z którą w dzisiejszych czasach spotykamy się coraz częściej. Mało kto zdaje sobie sprawę, że za tym kryje się fizyka, matematyka i specjalizowane algorytmy informatyczne.</p> <p>W wielu dziedzinach, grafika komputerowa 3D jest wykorzystywana na co dzień. To nie chodzi już tylko o gry komputerowe. Warto wspomnieć, o projektowaniu, architekturze, wizualizacji, systemach interaktywnych.</p>
	Uwagi metodyczne do realizacji	Rozwinąć element warsztatowy, związany z eksperymentowaniem uczniów z grafiką 3D za pomocą podstawowych parametrów tworzenia grafiki 3D i animacji.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
**Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”**

## Załączniki do scenariusza nr 7

Załącznik 1: Prezentacja w formie PDF: Wirtualna Rzeczywistość - Fotorealistyczna grafika 3D

Załącznik 2: Materiały do notatek ze slajdami (3 szt. na A4) w formie PDF: Wirtualna Rzeczywistość - Fotorealistyczna grafika 3D

Załącznik 3: Pytania sprawdzające

Załącznik 4: Pytania sprawdzające - klucz odpowiedzi



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

## Scenariusz nr 8: Innowacyjne aplikacje wykorzystujące przetwarzanie dźwięku i mowy

<b>Temat zajęć</b>		<b>Innowacyjne aplikacje wykorzystujące przetwarzanie dźwięku i mowy</b>
<b>Dział</b>		<b>Informatyka</b>
<b>Klasa (poziom edukacyjny)</b>		
<b>Czas trwania zajęć</b>		<b>2 godziny</b>
<b>Lp.</b>	<b>Element scenariusza</b>	<b>Treść</b>
	Cel ogólny	Celem zajęć jest zapoznanie ucznia z zagadnieniami komputerowego przetwarzania dźwięku i mowy oraz jej możliwościami i wykorzystaniu w dzisiejszym świecie. Uczeń w wyniku zajęć powinien zapoznać się z podstawowymi pojęciami syntezy i rejestracji dźwięku, przetwarzania sygnałów oraz możliwościami wykorzystania tego narzędzia w życiu codziennym, elektronice i rozrywce.
	Cele szczegółowe	Uczeń w wyniku zajęć powinien zdobyć wiedzę: <ul style="list-style-type: none"> <li>• na temat podstawowych pojęć przetwarzania sygnałów;</li> <li>• możliwości wykorzystania przetwarzania dźwięku i mowy w różnych dziedzinach gospodarki i życia codziennego;</li> <li>• możliwości tworzenia aplikacji (programów komputerowych) opartych o rozpoznawanie i syntezę mowy; na temat podstawowych algorytmów przetwarzania sygnału mowy.</li> </ul>
	Formy i metody	Pogadanka, wykład z wykorzystaniem prezentacji multimedialnej, metody praktyczne, praca w grupach przy wykorzystaniu komputera.
	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	Komputer, rzutnik multimedialny, dostęp do sieci Internet

**Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy**  
**Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”**

	Wprowadzenie do zajęć	Nauczyciel na podstawie prezentacji z złącznika przedstawia podstawowe cechy przetwarzania sygnałów, na przykładzie dźwięku i mowy. Prezentacja przedstawia kolejne etapy przetwarzania. Poczynając od nagrywania dźwięku, poprzez opisanie rodzaju sygnału aż do przedstawienia sposobu analizy i syntezy dźwięku i mowy. Omawiane etapy zostaną przedstawione na przykładzie internetowych prezentacji multimedialnych . Zostaną omówione także zagadnienia metod i algorytmów analizy sygnału dźwiękowego.
	Przebieg zajęć( <i>pełna wersja</i> )	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Prezentacja multimedialna</li> <li>2. Dyskusja w czasie prezentacji</li> <li>3. Pytania i odpowiedzi</li> <li>4. Prezentacja różnic pomiędzy dźwiękiem syntezy a zarejestrowanym cyfrowo w formacie MP3</li> <li>5. Omówienie różnicy pomiędzy dźwiękiem z płyty CD (CD Audio) a dźwiękiem wykorzystywanym w Internecie i filmach (MP3)</li> <li>6. Prezentacja wybranych systemów syntezy mowy (IVONA, wirtualnych doradców – botów internetowych)</li> <li>7. Ćwiczenia z użyciem komputera</li> <li>8. Pytania i odpowiedzi</li> </ol>
	Podsumowanie zajęć	Prezentacja mówi w przystępny sposób o tajnikach przetwarzania dźwięku i mowy, z którą w dzisiejszych czasach spotykamy się na co dzień. Mało kto zdaje sobie sprawę, że za tym kryje się fizyka, matematyka i specjalizowane algorytmy informatyczne. W wielu dziedzinach, synteza mowy jest wykorzystywana na co dzień: <ul style="list-style-type: none"> <li>• urządzenie do czytanie książek dla osób niewidomych</li> <li>• telefony komórkowe</li> <li>• systemy zapowiedzi słownych</li> <li>• kioski informacyjne</li> <li>• zabawki</li> <li>• urządzenia audio/wideo</li> <li>• nawigacje i innego rodzaju przewodniki</li> </ul>

## Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

## Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

Uwagi metodyczne do realizacji	Rozwinąć element warsztatowy, związany z eksperymentowaniem uczniów w celu pokazania różnic pomiędzy dźwiękiem syntezowanym (ang. chip tune) a dźwiękiem rejestrowanym o jakości płyty CD lub zbliżonej do jakości płyty CD. Doświadczenia możliwość doświadczalnego zbadania stopnia kompresji MP3 i jego wpływu na jakość dźwięku.
--------------------------------	--



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
**Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”**

## Załączniki do scenariusza nr 8

Załącznik 1: Prezentacja w formie PDF: Innowacyjne aplikacje wykorzystujące przetwarzanie dźwięku i mowy

Załącznik 2: Materiały do notatek ze slajdami (3 szt. na A4) w formie PDF: Innowacyjne aplikacje wykorzystujące przetwarzanie dźwięku i mowy





Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

## Scenariusz nr 9: Zliczamy zbiory i funkcje

<b>Temat zajęć</b>		<b>Zliczamy zbiory i funkcje</b>
<b>Dział</b>		<b>Kombinatoryka</b>
<b>Klasa (poziom edukacyjny)</b>		
<b>Czas trwania zajęć</b>		<b>2 godziny</b>
<b>Lp.</b>	<b>Element scenariusza</b>	<b>Treść</b>
	Cel ogólny	<ul style="list-style-type: none"> <li>• zapoznanie uczniów z elementami metody matematycznej,</li> <li>• wprowadzenie aparatu matematycznego, który jest niezbędny do konstruowania algorytmów oraz ich analizy,</li> <li>• usystematyzowanie wiedzy na temat funkcji,</li> <li>• zapoznanie uczniów z zasadą mnożenia – jedną z podstawowych zasad zliczania obiektów kombinatorycznych,</li> <li>• zachęcenie uczniów do studiowania matematyki lub informatyki (nauk ścisłych)</li> </ul>
	Cele szczegółowe	<ul style="list-style-type: none"> <li>• uczeń zna podstawowe zasady zliczania: mnożenia, dodawania, uczeń stosuje zasady zliczania do przeliczania funkcji ze zbioru skończonego w zbiór skończony: dowolnych, iniekcji, bijekcji, wybranych surjekcji,</li> <li>• uczeń stosuje zasady zliczania do przeliczania skończonych podzbiorów zbioru skończonego,</li> <li>• uczeń zna symbol Newtona <math>\binom{n}{k}</math>,</li> <li>• uczeń wie, że <math>\binom{n}{k}</math> jest to liczba k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego,</li> <li>• uczeń zna definicję silni i potrafi ją zastosować do obliczeń,</li> </ul>

**Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy**  
**Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”**

		<ul style="list-style-type: none"> <li>uczeń wie, jak obliczyć oraz oblicza wartość <math>\binom{n}{k}</math>, dla <math>n \geq k \geq 0</math>,</li> <li>uczeń zna i potrafi uzasadnić (swoimi słowami) następujące własności symbolu Newtona: <math>\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}</math> dla <math>n \geq k</math>, <math>\binom{n}{k} = 0</math> dla <math>k &gt; n</math>, <math>\binom{n}{k} = 1</math> dla <math>k = 0</math> lub <math>k = n</math>, <math>\binom{n}{0} = \delta_{n,0}</math>, gdzie <math>\delta_{n,0}</math> – delta Kroneckera.</li> <li>uczeń stosuje symbol Newtona do przeliczania zbiorów</li> </ul>
	Formy i metody	Formy pracy: praca w parach, praca zespołowa pod kierunkiem nauczyciela. Metody pracy: aktywizujące: dyskusja, burza mózgów, problemowo-ćwiczeniowa.
	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	Karty pracy, Lista zadań
	Wprowadzenie do zajęć	Przypomnienie z udziałem obecnych niezbędnych wiadomości na temat funkcji, m.in. pojęć: funkcji, argumentu funkcji, wartości danego argumentu funkcji, funkcji różnowartościowej (iniekcji), „na” (surjekcji), różnowartościowej i „na” (bijekcji) (zapoznanie uczniów z nazwami iniekcja, surjekcja, bijekcja oraz wprowadzenie formalnych określeń tych funkcji, z użyciem kwantyfikatorów, jeśli trzeba, należy wprowadzić współczesną notację dla symboli kwantyfikatorów: $\forall, \exists$ ) z wykorzystaniem KARTY PRACY NR 1.
	Przebieg zajęć (pełna wersja)	Prowadzący zajęcia rozdaje uczniom przygotowane wcześniej zadania – KARTĘ PRACY NR 2. Uczniowie, rozwiązując zadanie 1, dowolnymi sposobami zliczają funkcje. Pierwsze trzy podpunkty tego zadania można rozwiązać stosując prymitywną metodę przeliczania, mianowicie przez wypisanie wszystkich możliwości, gdyż liczba zliczanych obiektów (funkcji) jest bardzo mała. Przeliczenie funkcji, o których mowa w podpunktach (d) oraz (e) zadania 1 w/w metodą jest czasochłonne. Uczniowie poszukują bardziej efektywnej metody rozwiązania tego zadania. Należy oczekiwać (ewentualnie po naprowadzeniu przez prowadzącego), iż część uczniów zauważy, że zadanie to należy rozwiązać stosując zasadę mnożenia.

## Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

## Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

**OGÓLNE PRAWO MNOŻENIA**

*Jeżeli pewna procedura może być rozbita na  $n$  kolejnych kroków, z  $k_1$  wynikami w pierwszym kroku,  $k_2$  wynikami w drugim kroku, ...,  $k_n$  wynikami w  $n$ -tym kroku, to w całej procedurze mamy  $k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$  wyników (rozumianych jako uporządkowane ciągi wyników cząstkowych).*

Nauczyciel omawia zasadę mnożenia, bez jej formalnego zapisu, w momencie, w którym któryś z uczniów intuicyjnie ją zastosuje. Może to już nastąpić w trakcie rozwiązywania przez uczniów Zadania 1b.

Stosując zasadę mnożenia uczniowie rozwiązują zadanie 2. Już po rozwiązaniu podpunktu (a) tego zadania nauczyciel wprowadza pojęcie silni wraz z jej definicją rekurencyjną.

Podpunkt (e) tego zadania jest zadaniem-problemem. Uczniowie poszukują jego rozwiązania, a następnie ze wsparciem nauczyciela dochodzą do wniosku, że do przeliczenia wszystkich surjekcji o których mowa z zadaniu potrzeba rozważyć mnóstwo przypadków. W tym momencie nauczyciel komunikuje, że są inne sposoby rozwiązania tego zadania, które uczniowie poznają na pierwszym roku studiów informatyki lub matematyki na zajęciach Matematyka Dyskretna – zachęcenie do studiowania na kierunkach ścisłych.

Zadanie 3 to uogólnienie części podpunktów z zadania 1 oraz zadania 2. Rozwiązując je, uczniowie stosują elementy metody matematycznej, m.in. t.j. uogólnianie, rozumowanie rekurencyjne, specyfikacja, dzięki czemu zdobywają umiejętność posługiwania się niezbędnymi narzędziami umożliwiającymi twórcze rozwiązanie napotkanego problemu. Zadanie to nauczyciel zadaje do rozwiązania w domu, wyjaśniając jakie przypadki należy tutaj rozważyć.

Wypisując wszystkie podzbiory zbioru  $\{x, y, z\}$  (zadanie 4(a)) uczniowie przypominają sobie znaczenie i rozumienie pojęć zbioru, podzbioru, zbioru pustego, zbioru właściwego, zbioru niewłaściwego oraz twierdzenie teorii zbiorów, mówiące, że zbiór pusty zawiera się w każdym zbiorze (i znów zachęta do podjęcia studiów na kierunkach ścisłych – na zajęciach z Podstaw Logiki i Teorii Mnogości uczniowie posiadają umiejętność dowodzenia tego twierdzenia i wielu innych).

Rozwiązując zadanie 4 (b) uczniowie zauważają, że prymitywna metoda rozwiązania zadania poprzez wypisanie wszystkich podzbiorów dwuelementowych zbioru 20-elementowego jest metodą nieefektywną. Ponieważ

**Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy**  
**Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”**

		<p>przeliczenie zadanych obiektów z zastosowaniem zasady mnożenia na tym poziomie wiedzy i umiejętności, jakie uczniowie posiadają jest zadaniem zbyt trudnym, prowadzący zajęcia aktywnie pomaga w zliczaniu tych zbiorów, ustalając najpierw kolejność elementów w podzbiorze, a następnie pozbywając się tej ustalonej kolejności z uwagi na to, że kolejność elementów w podzbiorze nie ma znaczenia. Otrzymujemy wynik: <math>\frac{20 \cdot 19}{2}</math>. W tym momencie wprowadzamy symbol Newtona <math>\binom{n}{k}</math> jako liczbę k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego (liczba sposobów na jakie można wybrać k elementów ze zbioru n elementów (elementy w zbiorze są rozróżnialne)). Nauczyciel podaje też sposób na wyliczenie wartości symbolu, mianowicie:</p> $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ <p>dla <math>n \geq k \geq 0, n, k</math> – liczby naturalne. Następnie uczniowie przeliczają dla wybranych liczb naturalnych <math>n, k</math> liczby <math>\binom{n}{k}</math> oraz przeliczają skrajne wartości: <math>\binom{n}{0}, \binom{n}{k}, \binom{n}{n}</math>, itp. Uczniowie poznają definicję wykorzystując do przeliczenia podzbiorów, o których mowa w zadaniu 4 (b) – (g). Uczniowie zauważają, iż</p> $\binom{20}{1} = \binom{20}{19}, \binom{20}{2} = \binom{20}{18}, \binom{20}{3} = \binom{20}{17}$ <p>Nauczyciel z aktywnym udziałem uczniów wprowadza uogólnienie: <math>\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}</math> dla <math>n \geq k \geq 0, n, k</math> – liczby naturalne.</p> <p>Zadanie 5 zostaje zadane uczniom do rozwiązania w domu.</p> <p>Po rozwiązaniu zadań z KARTY PRACY NR 2, nauczyciel rozdaje uczniom LISTĘ ZADAŃ. Uczniowie rozwiązują co najmniej jedno zadanie z tej listy. Zadania, które nie zostaną rozwiązane na zajęciach, uczniowie będą rozwiązywać w domu, kontaktując się ewentualnie z prowadzącym zajęcia drogą elektroniczną lub osobiście.</p>
	Podsumowanie zajęć	<p>Nauczyciel prosi uczniów o przypomnienie zasady zliczania, jaka była stosowana do przeliczania obiektów kombinatorycznych w trakcie zajęć i wskazanie przykładów ich zastosowania. Następnie nauczyciel prosi uczniów o policzenie wartości symbolu Newtona dla <math>n = 5, k = 3</math>, a następnie dla <math>n = 0, k = 0</math>, dla <math>n \neq 0, k = 0</math>, dla <math>n \in N, k = 1</math>, oraz dla <math>n \geq 1, k = n - 1</math>. Pożegnanie się z uczniami i zachęcenie ich do wzięcia udziału w</p>



## Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

## Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

		kolejnych zajęciach poświęconych tematowi : <i>Czy myślę i wypowiadam się logicznie?</i>
	Uwagi metodyczne do realizacji	Zastosować metodę problemowo-czynnościową, która aktywizuje ucznia do działania. Karty pracy są tak skonstruowane, że pozwalają na wykorzystanie tej metody do odkrywania przez uczniów nowej wiedzy i zaznajamiania się z nowymi metodami rozwiązywania problemów. Należy rozwiązać przynajmniej jedno zadanie z LISTY ZADAŃ .



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
**Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”**

## Załączniki do scenariusza nr 9

### KARTA PRACY NR 1

Dwie pielęgniarki zmierzyły temperaturę ciała 7 osobom: Uli, Ali, Oli, Kamilowi, Zosi, Michałowi, Kacprowi. Każda z nich zapisała w swoim notesie wyniki tego pomiaru. Pierwsza z nich zanotowała wyniki następująco:

Ula → 36,5

Ala → 36,4

Ola → 36,8

Kamil → 37

Zosia → 36,5

Michał → 36,8

Kacper → 36,6

Druga pielęgniarka zanotowała wyniki pomiaru następująco:

36,5 → Ula, Zosia

36,4 → Ala

36,8 → Ola, Michał

37 → Kamil

36,6 → Kacper

Popatrzmy na powyższe zapisy jak na przyporządkowania. Czemu i co przyporządkowała każda z tych pielęgniarek?

Odp: .....

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

Czy któreś z tych przyporządkowań jest funkcją? Jeśli tak, to wskaż które. Uzasadnij swoją odpowiedź.

Odp:.....

W przypadku, gdy któreś z rozważanych przyporządkowań jest funkcją, wypisz jej argumenty oraz wartości. Zbadaj, czy funkcja ta jest injekcją, surjekcją, bijekcją?

Argumenty funkcji: .....

Wartości funkcji: .....

Funkcja ta jest injekcją. Prawda  Fałsz

Funkcja ta jest surjekcją. Prawda  Fałsz

Funkcja ta jest bijekcją. Prawda  Fałsz

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

## KARTA PRACY NR 2

**Zadanie 1.** Oblicz (dowolną metodą), ile jest:

(a) wszystkich, różnych funkcji ze zbioru  $\{1,2,3,4\}$  w zbiór  $\{8\}$

Odp: Jest ..... wszystkich, różnych funkcji ze zbioru  $\{1,2,3,4\}$  w zbiór  $\{8\}$ .

(b) wszystkich, różnych funkcji ze zbioru  $\{1,2,3\}$  w zbiór  $\{4,5\}$

Odp: Jest ..... wszystkich, różnych funkcji ze zbioru  $\{1,2,3\}$  w zbiór  $\{4,5\}$ .

(c) wszystkich, różnych funkcji ze zbioru  $\{1,2,3\}$  w zbiór  $\emptyset$

Odp: Jest ..... wszystkich, różnych funkcji ze zbioru  $\{1,2,3\}$  w zbiór  $\emptyset$ .





Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

(d) wszystkich, różnych funkcji ze zbioru  $\{1,2,3\}$  w zbiór  $\{1,2,3,4,\dots,999,1000\}$

Odp: Jest ..... wszystkich, różnych funkcji ze zbioru  $\{1,2,3\}$  w zbiór  $\{1,2,3,4,\dots,999,1000\}$ .

(e) wszystkich, różnych funkcji ze zbioru dwudziestoelementowego  $\{a_1, a_2, \dots, a_{20}\}$  w zbiór dziewięćdziesięcioelementowy  $\{b_1, b_2, \dots, b_{90}\}$

Odp: Jest ..... wszystkich, różnych funkcji ze zbioru  $\{a_1, a_2, \dots, a_{20}\}$  w zbiór  $\{b_1, b_2, \dots, b_{90}\}$ .

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

**Zadanie 2.** Oblicz, ile jest:

(a) wszystkich, różnych iniekcji ze zbioru  $\{1,2,3\}$  w zbiór  $\{1,2\}$ .

Odp: Jest ..... wszystkich, różnych iniekcji ze zbioru  $\{1,2,3\}$  w zbiór  $\{1,2\}$ .

(b) wszystkich, różnych iniekcji ze zbioru  $\{1,2,3\}$  w zbiór  $\{5,6,7\}$

Odp: Jest ..... wszystkich, różnych iniekcji ze zbioru  $\{1,2,3\}$  w zbiór  $\{5,6,7\}$ .

(c) wszystkich, różnych iniekcji ze zbioru  $\{1,2,3\}$  w zbiór  $\{1,2,3,4,\dots,9999,10000\}$

Odp: Jest ..... wszystkich, różnych iniekcji ze zbioru  $\{1,2,3\}$  w zbiór  $\{1,2,3,4,\dots,9999,10000\}$ .



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

(d) wszystkich, różnych surjekcji ze zbioru  $\{a_1, a_2, \dots, a_{200}\}$  na zbiór  $\{b_1, b_2, \dots, b_{200}\}$

Odp: Jest ..... wszystkich, różnych surjekcji ze zbioru  $\{a_1, a_2, \dots, a_{200}\}$  na zbiór  $\{b_1, b_2, \dots, b_{200}\}$ .

(e) wszystkich, różnych surjekcji ze zbioru  $\{a_1, a_2, \dots, a_{200}\}$  na zbiór  $\{b_1, b_2, \dots, b_{10}\}$ .



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

**Zadanie 3.** Oblicz, ile jest:

(a) wszystkich, różnych funkcji ze zbioru  $k$ -elementowego  $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k\}$  w zbiór  $n$ -elementowy

$\{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}$  ( $k, n$  – liczby naturalne) ( UWAGA! Rozważ wszystkie możliwości dla zadanych liczb naturalnych  $k$  oraz  $n$ .)

Odp: .....

(b) wszystkich, różnych iniekcji ze zbioru  $k$ -elementowego  $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k\}$  w zbiór  $n$ -elementowy  $\{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}$  ( $k, n$  – liczby naturalne). (UWAGA! Rozważ wszystkie możliwości dla zadanych liczb naturalnych  $k$  oraz  $n$ .)

Odp: .....

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

**Zadanie 4.**

(a) Wypisz wszystkie podzbiory zbioru  $\{x, y, z\}$ . Ile podzbiorów wypisałeś?

Odp: .....

(b) Ile jest wszystkich jednoelementowych podzbiorów zbioru 20-elementowego?

Odp: .....



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
**Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”**

(c) Ile jest wszystkich dwuelementowych podzbiorów zbioru 20-elementowego?

Odp: .....

(d) Ile jest wszystkich trzelementowych podzbiorów zbioru 20-elementowego?

Odp: .....



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
**Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”**

(e) Ile jest wszystkich dziewiętnastoelementowych podzbiorów zbioru 20-elementowego?

Odp: .....

(f) Ile jest wszystkich osiemnastoelementowych podzbiorów zbioru 20-elementowego?

Odp: .....

(g) Ile jest wszystkich siedemnastoelementowych podzbiorów zbioru 20-elementowego?

Odp: .....

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
**Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”**

*Czy zauważyłeś coś ciekawego?*

**Zadanie 5.** Ile jest wszystkich podzbiorów zbioru  $n$ -elementowego?

LISTA ZADAŃ





**Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy**  
**Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”**

**Zadanie 1:** Iloma sposobami mogą być postawione na szachownicy dwie wieże różnych kolorów, tak aby jedna biła drugą?

**Zadanie 2:** Ile można wykonać różnych trójkolorowych chorągiewek z sześciu barw?

**Zadanie 3:** Ile jest liczb czterocyfrowych, w których nie powtarza się żadna cyfra?

**Zadanie 4:** Sześć osób ma do dyspozycji 6 różnokolorowych kieliszków i 2 różne gatunki win. Iloma sposobami mogą się napić?

**Zadanie 5:** Alfabet Morse'a składa się z dwóch różnych elementów: kreski i kropki. Ile słów długości 5 można utworzyć z tych znaków?

**Zadanie 6:** Ile można utworzyć liczb czterocyfrowych, w których na pierwszym i ostatnim miejscu występuje ta sama cyfra i w których:

- (a) cyfry mogą się powtarzać,
- (b) nie mogą się powtarzać (z wyjątkiem tych pierwszej i ostatniej).

**Zadanie 7:** Trzech panów i cztery panie mają zamiar udać się na wycieczkę w szyku tzw. „gęsiego”. Iloma sposobami mogą się ustawić, jeśli panowie nie mogą sąsiadować z panami, a panie z paniami?

**Zadanie 8:** Rzucamy trzema kostkami do gry: zieloną, czerwoną i niebieską.

- (a) Ile różnych wyników możemy otrzymać?
- (b) W ilu wynikach nie uzyskamy tej samej liczby oczek na wszystkich trzech kostkach?

**Zadanie 9:** Na ile sposobów można spośród  $n$  małżeństw wybrać jedną kobietę i jednego mężczyznę, którzy nie są małżeństwem?

**Zadanie 10:** Tworzymy uporządkowane pary ze słowa RADOŚĆ.

- (a) Ile jest par złożonych z różnych liter?
- (b) Ile jest par, w których pierwsza litera jest samogłoską, a druga spółgłoską?

**Zadanie 11:**

- (a) Ile jest liczb 5-cyfrowych?
- (b) Ile jest parzystych liczb 5-cyfrowych?
- (c) Ile liczb 5-cyfrowych zawiera dokładnie jedną trójkę?
- (d) Ile jest takich liczb 5-cyfrowych, które niezależnie od kierunku czytania przedstawiają tę samą liczbę?

**Zadanie 12:** Na ile sposobów można wybrać kolejno dwie karty z talii 52 kart tak, aby pierwszą kartą był as, a drugą nie była dama?

**Zadanie 13:** Na ile sposobów można wybrać delegację spośród pięciu kobiet i czterech mężczyzn, która będzie składać się z dwóch kobiet i dwóch mężczyzn?

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
**Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”**

**Zadanie 14:** Ile różnych wyników można otrzymać przy rzucaniu dwiema kostkami, jeśli rozróżniamy wynik w zależności od sumy wyrzuconych oczek.



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

## Scenariusz nr 10: Jak dowodzimy twierdzeń?

Temat zajęć		Jak dowodzimy twierdzeń?
Dział		
Klasa (poziom edukacyjny)		
Czas trwania zajęć		2 godziny
Lp.	Element scenariusza	Treść
	Cele ogólne	<ul style="list-style-type: none"> <li>• rozwijanie rozumienia pojęć „twierdzenie” oraz „dowód”,</li> <li>• zapoznanie uczniów z podstawowymi technikami dowodzenia twierdzeń – dowód wprost, dowód przez sprowadzenie do sprzeczności, dowód indukcyjny,</li> <li>• kształtowanie umiejętności dowodzenia twierdzeń,</li> <li>• zapoznanie uczniów z elementami metody matematycznej</li> </ul>
	Cele szczegółowe	<ul style="list-style-type: none"> <li>• uczeń zna pojęcie twierdzenia,</li> <li>• uczeń zna formy przedstawiania twierdzeń matematycznych – forma zdania orzekającego i forma zdania warunkowego,</li> <li>• uczeń wskazuje założenie i tezę twierdzenia zapisanego w postaci implikacji,</li> <li>• uczeń zna rolę dowodu jako argumentu potwierdzającego prawdziwość twierdzenia,</li> <li>• uczeń wie jak udowodnić wprost i przez sprowadzenie do sprzeczności twierdzenie w postaci implikacji lub zdania ogólnego,</li> <li>• uczeń rozumie twierdzenie o indukcji matematycznej i wie, że można je stosować w dowodzeniu własności liczb naturalnych.</li> </ul>
	Formy i metody	<p><b>Metody pracy:</b> - pokaz, pogadanka, burza mózgów, problemowa.</p> <p><b>Formy pracy:</b> - zbiorowa</p>
	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym)	1. Prezentacja przedstawiająca dowód Twierdzenia Talesa zamieszczona na portalu <a href="http://www.scholaris.pl">scholaris.pl</a> ( <a href="http://www.scholaris.pl/frontend,4,86717.html">http://www.scholaris.pl/frontend,4,86717.html</a> ).

## Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

### Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

	wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	<ol style="list-style-type: none"> <li>2. Film, na którym zaprezentowano dowód Twierdzenia Pitagorasa podany przez Garfielda, zamieszczony na portalu <a href="http://www.scholaris.pl">scholaris.pl</a> (<a href="http://www.scholaris.pl/frontend,4,1028828.html">http://www.scholaris.pl/frontend,4,1028828.html</a>).</li> <li>3. Film zamieszczony na <a href="http://www.joemonster.org">joemonster.org</a> (<a href="http://www.joemonster.org/filmy/12061/30_000_kostek_domina">http://www.joemonster.org/filmy/12061/30_000_kostek_domina</a>) ukazujący burzenie konstrukcji z klocków domino .</li> <li>4. Lista zadań.</li> </ol>
	Wprowadzenie do zajęć	Dyskusja z uczniami na temat „twierdzenia” i „dowodu”. Uwypuklenie roli dowodu w matematyce.
	Przebieg zajęć( <i>pełna wersja</i> )	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Zapoznanie uczniów z formami przedstawiania twierdzeń matematycznych – forma zdania warunkowego i orzekającego. Prowadzący zajęcia rozdaje uczniom listę zadań. Na liście zapisane są twierdzenia w różnych formach. Uczniowie najpierw określają w jakiej formie zapisano poszczególne twierdzenia, a następnie wskazują założenie i tezę każdego z podanych twierdzeń.</li> <li>2. Zapoznanie uczniów z dowodem wprost na przykładzie dowodów Twierdzenia Talesa i Twierdzenia Pitagorasa – wykorzystanie prezentacji multimedialnej i filmu. Po prezentacji dowodu Twierdzenia Talesa nauczyciel naprowadza uczniów na sformułowanie twierdzenia odwrotnego do Twierdzenia Talesa, a po prezentacji dowodu Twierdzenia Pitagorasa nauczyciel podaje twierdzenie cosinusów (i zwraca uwagę, że szczególnym przypadkiem tego twierdzenia jest tw. Pitagorasa)</li> <li>3. Zapisanie na tablicy <i>Twierdzenia o średniej arytmetycznej i geometrycznej</i>: Jeśli <math>a, b</math> są różnymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi, to <math>\frac{a+b}{2} &gt; \sqrt{ab}</math>. Uczniowie wskazują założenia i tezę twierdzenia, a następnie, pod kierunkiem nauczyciela, redagują dowód wprost tego twierdzenia. Następnie nauczyciel prezentuje taktykę dowodzenia twierdzeń przez sprowadzenie do sprzeczności i stosuje ją do udowodnienia <i>Twierdzenia o średniej arytmetycznej i geometrycznej</i>.</li> <li>4. Nauczyciel z aktywnym udziałem uczniów buduje dowody twierdzeń: zadanie 1 - dowód przez sprowadzenie do sprzeczności, zadanie 2 – dowód wprost, zadanie 3 – dowód wprost, zadanie 5 (o ile starczy czasu) – dowód wprost. Pozostałe zadania pozostają do samodzielnego rozwiązania dla osób chętnych.</li> <li>5. Nauczyciel wyświetla film z burzenia konstrukcji z klocków domino, a następnie prowokuje burzę mózgow zadając pytanie: „Co wspólnego ma konstrukcja z klocków domino z dowodzeniem twierdzeń?” Można spodziewać się, że uczniowie nie dostrzegą tego związku. Nauczyciel wyjaśnia więc, na podstawie konstrukcji z klocków domino, metodę dowodzenia twierdzeń „przez indukcję” i podaje Twierdzenie o indukcji matematycznej dla liczb naturalnych. Nauczyciel pokazuje, jak</li> </ol>

## Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

## Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

		wykorzystać to twierdzenie do dowodzenia własności liczb naturalnych np.: Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi: $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$ i/lub innych (w zależności od pozostałego do dyspozycji czasu).
	Podsumowanie zajęć	Nauczyciel prosi uczniów o przypomnienie różnych form przedstawiania twierdzeń i określenie w jakich formach podano poszczególne twierdzenia z listy zadań. Nauczyciel prosi uczniów o wymienienie różnych technik dowodzenia twierdzeń. Zakończenie. Pożegnanie się z uczniami i zachęcenie do podjęcia studiów na kierunkach ścisłych.
	Uwagi metodyczne do realizacji	Mobilizować uczniów do pracy nad poszukiwaniem i redagowaniem dowodów twierdzeń. Uczniowie zachęceni do tych aktywności matematycznych, chętnie je podejmują i budują dowody.

## Załączniki do scenariusza nr 10

## LISTA ZADAŃ

**Zadanie 1.** Udowodnij twierdzenie: Dla dowolnych liczb dodatnich  $a, b, c, d$  prawdziwa jest nierówność:  $ac + bd \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}$ .

**Zadanie 2.** Udowodnij twierdzenie: Jeśli  $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2$ , to  $ad = bc$ .

**Zadanie 3.** Udowodnij twierdzenie: Jeśli długości przekątnych rombu o kącie ostrym  $45^\circ$  są równe  $e$  oraz  $f$  i  $e < f$ , to  $\frac{e}{f} = \sqrt{2} - 1$ .

**Zadanie 4.** Udowodnij twierdzenie: Dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x, y, z$  takich, że  $x + y + z = 0$  zachodzi równość:  $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2} = \frac{1}{3}$ .

**Zadanie 5.** Udowodnij twierdzenie: W dowolnym czworokącie wypukłym  $ABCD$  niebędącym równoległobokiem, w którym punkty  $M, N$  są odpowiednio środkami boków  $AB$  i  $CD$ , a punkty  $P, Q$  są odpowiednio środkami przekątnych  $AC$  i  $BD$ , odcinki  $MQ$  oraz  $PN$  są równoległe.

**Zadanie 6.** Udowodnij twierdzenie: Jeśli  $(a_n)$  jest ciągiem geometrycznym, to ciąg  $(b_n)$  określony wzorem  $b_n = a_n + a_{n+1}$  jest ciągiem geometrycznym.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

## Scenariusz nr 11: Zbiory

<b>Temat zajęć</b>		<b>Zbiory</b>
<b>Dział</b>		<b>Elementy logiki i teorii mnogości</b>
<b>Klasa (poziom edukacyjny)</b>		
<b>Czas trwania zajęć</b>		<b>2 godziny</b>
<b>Lp.</b>	<b>Element scenariusza</b>	<b>Treść</b>
	Cele ogólne	<ul style="list-style-type: none"> <li>• usystematyzowanie wiedzy na temat zbiorów,</li> <li>• kształtowanie umiejętności stawiania hipotez i ich weryfikacji,</li> <li>• zapoznanie uczniów z elementami metody matematycznej,</li> <li>• zapoznanie uczniów z podstawowymi technikami dowodzenia twierdzeń na przykładzie twierdzeń wyrażających własności zbiorów,</li> <li>• zapoznanie uczniów z programem Mizar służącym do weryfikacji poprawności dowodów zapisanych w języku Mizar.</li> </ul>
	Cele szczegółowe	<ul style="list-style-type: none"> <li>• uczeń zna podstawowe operacje na zbiorach: suma, iloczyn, różnica zbiorów, dopełnienie zbioru,</li> <li>• uczeń oblicza sumę, iloczyn, różnicę podanych zbiorów określonych przez bezpośrednie wyliczenie ich elementów oraz zbiorów zdefiniowanych przez podanie warunku, jaki powinny spełniać jego elementy,</li> <li>• uczeń zna i rozumie definicje zawierania i równości zbiorów, uczeń ustala, jakie relacje inkluzji zachodzą między podanymi zbiorami,</li> <li>• uczeń wyznacza elementy należące do podanego zbioru oraz wskazuje te, które nie są elementami danego zbioru,</li> <li>• uczeń zna definicję zbioru pustego,</li> <li>• uczeń wie, że zbiór pusty zawiera się w każdym zbiorze,</li> <li>• uczeń potrafi wykorzystać diagramy Venna w celu postawienia hipotezy dotyczących podanych własności zbiorów,</li> <li>• uczeń jest świadomy, że każdą hipotezę należy zweryfikować – obalić ją (np. podając kontrprzykład) lub udowodnić (wówczas hipoteza staje się twierdzeniem).</li> </ul>

**Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy**  
**Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”**

	Formy i metody	<b>Metody pracy:</b> - burza mózgów, problemowa, ćwiczeniowa. <b>Formy pracy:</b> - zbiorowa
	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	Karta pracy, Lista Zadań, System Mizar
	Wprowadzenie do zajęć	Przypomnienie z udziałem obecnych niezbędnych wiadomości na temat zbiorów m.in.: przykłady zbiorów, różne sposoby określania zbiorów, oznaczenia zbiorów i ich elementów, oznaczenia znanych uczniom zbiorów liczbowych, element zbioru.
	Przebieg zajęć( <i>pełna wersja</i> )	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Prowadzący zajęcia rozdaje uczniom przygotowane wcześniej zadania – KARTĘ PRACY. Uczniowie rozwiązują zadania 1 i 2. W trakcie rozwiązywania zadania 1 uczniowie formułują (przy pomocy nauczyciela) definicję zbioru pustego. Wyniki rozwiązań zadań są omawiane na forum grupy.</li> <li>2. Przypomnienie przez uczniów i zapisanie przez nauczyciela na tablicy definicji sumy, iloczynu, różnicy zbiorów. Rozwiązywanie zadania 3 z KARTY PRACY.</li> <li>3. Przypomnienie przez uczniów i zapisanie przez nauczyciela na tablicy definicji dopełnienia zbioru. Rozwiązywanie zadania 4 z KARTY PRACY.</li> <li>4. Przypomnienie definicji zawierania i równości zbiorów. Nauczyciel rozdaje LISTĘ ZADAŃ. Uczniowie rozwiązując zadanie z listy zadań stawiają hipotezy, posługują się diagramami Venna do stawiania hipotez, podają kontrprzykłady obalające hipotezę, nabywają świadomości, że każdą tezę należy udowodnić aby stała się twierdzeniem lub obalić. Zapoznanie uczniów z systemem Mizar.</li> </ol>
	Podsumowanie zajęć	Nauczyciel prosi uczniów o przypomnienie różnych sposobów określania zbiorów, definicji sumy, iloczynu, różnicy zbiorów, dopełnienia zbioru, zawierania i równości zbiorów. Przypomnienie czym jest hipoteza i kiedy staje się twierdzeniem. Pożegnanie się z uczniami i zachęcenie do podjęcia studiów na kierunkach ścisłych.
	Uwagi metodyczne do realizacji	W zależności od stanu wiedzy uczniów, można zrezygnować z części podpunktów zadań 1 i 2, 3, 4 z KARTY PRACY.



## Załączniki do scenariusza nr 11

## KARTA PRACY

**Zadanie 1.** Wypisz wszystkie elementy następujących zbiorów (przyjmujemy, że różne litery oznaczają różne przedmioty, ewentualnie liczby rzeczywiste):

$A = \{1, 3, -7, 2, 0\}$       Elementy zbioru A to: .....

$B = \{a, b, c\}$       Elementy zbioru B to: .....

$C = \{1, 2, 1, 2\}$       Elementy zbioru C to: .....

$D = \{a, b, a\}$       Elementy zbioru D to: .....

$E = \{\{1\}\}$       Elementy zbioru E to: .....

$F = \{\{a\}, \{a, b\}, a\}$       Elementy zbioru F to: .....

$G = \emptyset$       Elementy zbioru G to: .....

$H = \{\{a\}, \{a, b\}, a\}$       Elementy zbioru H to: .....

$I = \{\{a\}, b, \emptyset\}$       Elementy zbioru I to: .....

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

**Zadanie 2.** Podaj elementy następujących zbiorów:

$$A = \{x \in Z: x^2 < 10\}$$

$$B = \{y \in N: y = 2 \wedge y = 4\}$$

$$C = \{y \in N: y = -2 \vee y = 4\}$$

$$D = \{x \in R: x^2 < 0\}$$

$$E = \{x \in R: x < 2\}$$

$$F = \{x \in R: x \geq -3\}$$

$$G = \{x \in R: x < 2 \vee x < 4\}$$

$$H = \{x \in R: x \geq -2 \wedge x \leq 5\}$$

**Zadanie 3.** Oblicz  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$  i  $B \setminus A$  dla następujących zbiorów (przyjmujemy, że różne litery oznaczają różne liczby rzeczywiste):

1.  $A = \{1, 3, 5\}$ ,  $B = \{3, 5\}$

$$A \cup B =$$

$$A \cap B =$$

$$A \setminus B =$$

$$B \setminus A =$$

2.  $A = \{a, b, c, d\}$ ,  $B = \{a, b, e, f, g\}$

$$A \cup B =$$



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

$$A \cap B =$$

$$A \setminus B =$$

$$B \setminus A =$$

$$3. A = \{x \in N: x < 3\}, \quad B = \{x \in N: x \geq 3\}$$

$$A \cup B =$$

$$A \cap B =$$

$$A \setminus B =$$

$$B \setminus A =$$

$$4. A = \{x \in N: x < 0\}, \quad B = \{x \in N: x \leq 3\}$$

$$A \cup B =$$

$$A \cap B =$$

$$A \setminus B =$$

$$B \setminus A =$$



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

5.  $A = \{x \in R: x < 1\}$ ,  $B = \{x \in R: x \geq -3\}$

$$A \cup B =$$

$$A \cap B =$$

$$A \setminus B =$$

$$B \setminus A =$$

6.  $A = \{x \in R: x < 1\}$ ,  $B = \{x \in R: x \geq 3\}$

$$A \cup B =$$

$$A \cap B =$$

$$A \setminus B =$$

$$B \setminus A =$$

7.  $A = \{x \in R: x < 3\}$ ,  $B = \{x \in R: x < 2\}$

$$A \cup B =$$

$$A \setminus B =$$

$$A \cap B =$$

$$B \setminus A =$$

**Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy**  
**Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”**

**Zadanie 4.** Wyznacz dopełnienia zbiorów A do przestrzeni liczb naturalnych podanych w zadaniu 3 podpunktach: 3.1, 3.2, 3.4, 3.5 oraz dopełnienia zbiorów B do przestrzeni liczb rzeczywistych podanych w podpunktach: 3.6, 3.7, 3.8.

LISTA ZADAŃ

**Zadanie 1.** Jakie relacje inkluzji zachodzą między następującymi zbiorami A oraz B:

1.  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{1, 3, 4\}$
2.  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{1, 4\}$
3.  $A = \emptyset$ ,  $B = \{1, 3\}$
4.  $A = \{x \in N: x > 2\}$ ,  $B = \{y \in N: y > 2\}$
5.  $A = \{x \in N: x > 2\}$ ,  $B = \{y \in R: y > 2\}$
6.  $A = \{x \in R: x > 2\}$ ,  $B = \{x \in N: y > 1\}$
7.  $A = \{x \in R: x > 1\}$ ,  $B = \{y \in R: y > 2\}$
8. A – zbiór trójkątów równoramiennych, B – zbiór trójkątów równobocznych
9. A – zbiór kwadratów, B – zbiór rombów
10. A – zbiór kwadratów, B – zbiór rombów o co najmniej jednym kącie prostym.

**Zadanie 2.** Sprawdzić, czy poniższe równości są tożsamościami rachunku zbiorów. Jeśli nie, podać kontrprzykład.

1.  $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
2.  $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$
3.  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
4.  $A \cup (A \cap B) = A$
5.  $A \cap (A \cup B) = B$
6.  $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cup B) = C$
7.  $(A \cup B)' = A' \cap B'$
8.  $(A \cap B)' = A' \cup B'$



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

9.  $A \cup (B \setminus C) = [(A \cup B) \setminus C] \cup (A \cap C)$

10.  $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

## Scenariusz nr 12: Geometria spidronu w przestrzeni

<b>Temat zajęć</b>		<b>Geometria spidronu w przestrzeni</b>
<b>Dział</b>		<b>Geometria na płaszczyźnie i w przestrzeni, ciągi liczbowe</b>
<b>Klasa (poziom edukacyjny)</b>		
<b>Czas trwania zajęć</b>		<b>2 godziny</b>
<b>Lp.</b>	<b>Element scenariusza</b>	<b>Treść</b>
	Cel ogólny	Wprowadzenie pojęć, metod konstrukcji i własności spidronu, spirali spidronowej oraz spidrohedronu;
	Cele szczegółowe	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Przypomnienie pojęcia i metod konstrukcji spidronu;</li> <li>• Wprowadzenie pojęcia spirali spidronowej i jej długości;</li> <li>• Wprowadzenie pojęcia spidrohedronu, jego siatki i metod konstrukcji;</li> <li>• Inspirowanie uczniów do samodzielnych poszukiwań konstrukcji podobnych do przedstawionych;</li> <li>• Inspirowanie uczniów (także) do artystycznych poszukiwań z wykorzystaniem obiektów i konstrukcji matematycznych.</li> </ul>
	Formy i metody	Wykład, pokaz multimedialny, pogadanka, ćwiczenia.
	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	Rzutnik, ekran, gotowe formy sześciokątów, gotowe siatki modułów spidronowych, notatki własne uczniów.
	Wprowadzenie do zajęć	Przedstawienie historii spidronu oraz sylwetki twórcy.

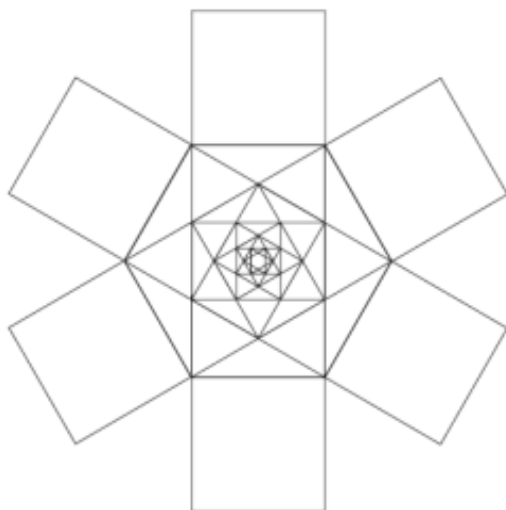
**Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy**  
**Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”**

	Przebieg zajęć ( <i>pełna wersja</i> )	<ol style="list-style-type: none"> <li>1) Przypomnienie pojęcia spidronu i sposobu jego konstrukcji.</li> <li>2) Wprowadzenie pojęcia i metody konstrukcji spiral spidronowych.</li> <li>3) Obliczanie długości spirali spidronowej (element przypomnienia wiadomości z zajęć poprzednich, czyli pojęcia skali podobieństwa i sumy szeregu geometrycznego).</li> <li>4) Omówienie siatki modułu spidronowego i roli tzw. gniazd spidronowych.</li> <li>5) Praca indywidualna nad przygotowaniem do złożenia gotowej siatki modułu, czyli wycięcie gniazda spidronowego, identyfikacja spiral spidronowych, ustalenie ich orientacji oraz wyrycie ostrym narzędziem (szpilką, pinezką lub cyrklem) poszczególnych spiral.</li> <li>6) Złożenie pojedynczego modułu.</li> <li>7) Omówienie jego własności (objętość modułu równa połowie objętości sześcianu o boku długości równej długości boku modułu spidronowego).</li> <li>8) Prezentacja gotowej bryły – spidrohedronu.</li> <li>9) Omówienie różnych sposobów konstrukcji spidrohedronu (sposób ułożenia modułów, ich lewo- lub prawoskrętność).</li> <li>10) Praca w grupach nad konstrukcją własnego modelu spidrohedronu.</li> <li>11) Przedstawienie artystycznych spidronowych inspiracji przestrzennych.</li> <li>12) Przypomnienie pojęć brył platońskich oraz archimedesowych.</li> <li>13) Prezentacja możliwości „spidronizacji” brył platońskich i archimedesowych jako inspiracja dla uczniów do samodzielnej pracy i poszukiwań.</li> <li>14) Omówienie dostępnej bibliografii i źródeł pozyskiwania informacji nt. spidronów.</li> </ol>
	Podsumowanie zajęć	Utrwalenie poznanych pojęć i faktów: spidron, spirala spidronowa, spidrohedron.
	Uwagi metodyczne do realizacji	

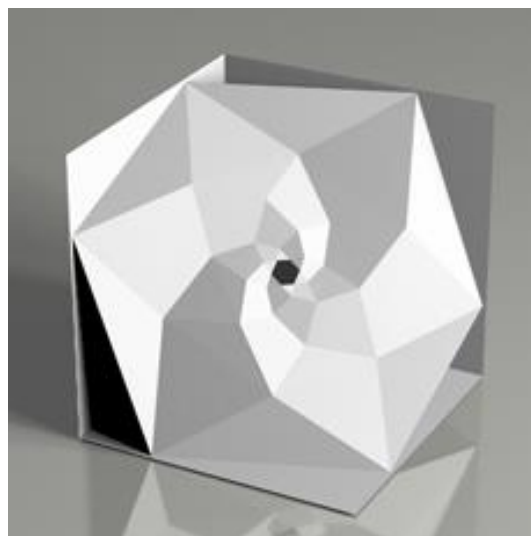


## Załączniki do scenariusza nr 12

A) Siatka modułu spidronowego



B) Moduł spidronowy



Zródło: <http://spidron.hu>

C) Spidrohedron



Zródło: <http://spidron.hu>

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

## Scenariusz nr 13: Ciąg geometryczny i jego własności











<b>Temat zajęć</b>		<b>Ciąg geometryczny i jego własności</b>
<b>Dział</b>		<b>Ciągi liczbowe</b>
<b>Klasa (poziom edukacyjny)</b>		
<b>Czas trwania zajęć</b>		<b>2 godziny</b>
<b>Lp.</b>	<b>Element scenariusza</b>	<b>Treść</b>
	Cel ogólny	<ul style="list-style-type: none"> <li>zapoznanie uczniów z definicją ciągu geometrycznego oraz podstawowymi własnościami tego ciągu</li> <li>kształcenie umiejętności zapisywania odpowiednich wniosków i uzyskanych informacji</li> <li>utrwalanie poznanego materiału na podstawie zadań</li> </ul>
	Cele szczegółowe	<p><b>Uczeń potrafi:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>podać przykład ciągu geometrycznego</li> <li>obliczać <math>n</math>-ty wyraz ciągu geometrycznego</li> <li>wyznaczać ciąg geometrycznego</li> <li>wyznaczać sumę ciągu geometrycznego</li> <li>podać podstawowe własności ciągu geometrycznego</li> <li>wykazać na podstawie definicji, że dany ciąg jest geometrycznego</li> <li>stosować definicje i własności ciągów do rozwiązywania zadań</li> </ul>
	Formy i metody	Praca indywidualna, pomoc nauczyciela w przypadku wystąpienia pytań
	Środki dydaktyczne	Praca na platformie elearningowej, zajęcia prowadzone są w formie „lekcji”

**Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy**  
**Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”**

	(ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	
	Wprowadzenie do zajęć	Nauczyciel wita uczniów i zapowiada temat zajęć.
	Przebieg zajęć ( <i>pełna wersja</i> )	<ol style="list-style-type: none"> <li>1) Nauczyciel dyktuje uczniom cele ogólne oraz szczegółowe zajęć.</li> <li>2) Uczniowie wraz z nauczycielem logują się na platformę elearningową i zajęcia prowadzone są w formie „lekcji”. Sposób ten pozwala na przedstawienie treści na wielu ze sobą powiązanych stronach. Każda ze stron lekcji może kończyć się pytaniem, sprawdzającym stopień opanowania prezentowanego materiału. W zależności od udzielonej odpowiedzi uczeń może przenieść się do kolejnej części zajęć, „powtarzać” bieżącą stronę, cofnąć się do strony poprzedniej lub przenieść się do stron uzupełniających.</li> <li>3) Uczniowie indywidualnie czytają przygotowany materiał. Należy podkreślić, że materiał elearningowy nie zastąpi żywego kontaktu ucznia z nauczycielem. Dlatego w przypadku wystąpienia jakichkolwiek wątpliwości nauczyciel może od razu odpowiedzieć na pytania. Zaletą tej metody jest możliwość indywidualizacji tempa przyswajania wiedzy, wielokrotnego ćwiczenia zadań w różnych zestawach, co z jednej strony ułatwia aktywizację uczniów słabszych, a z drugiej strony uczniom zdolnym pozwala uniknąć znużenia niepotrzebnymi ćwiczeniami w tempie uczniów wolniej pracujących.</li> <li>4) Strony wykładowe prezentują materiał w podobny sposób, jak w szkolnym podręczniku, tyle że wzbogacony o elementy pozwalające na aktywny udział ucznia w procesie zapoznawania się z materiałem.</li> </ol>
	Podsumowanie zajęć	Nauczyciel omawia wyniki uzyskane podczas zajęć.
	Uwagi metodyczne do realizacji	Nowa forma zajęć spodobała się uczniom. Uczniowie nie mieli zastrzeżeń do przygotowanego materiału. Wszyscy uczniowie zaliczyli pytania sprawdzające.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

## Załączniki do scenariusza nr 13

<b>OSOBY</b>   Uczestnicy	<b>TEMATYKA</b>
	 Forum aktualności
<b>AKTYWNOŚCI</b>   Fora dyskusyjne  Lekcje	1  Ciąg arytmetyczny
	2  Ciąg geometryczny
<b>SZUKAJ W FORUM</b>  <input type="text"/> Wykonaj Zaawansowane 	

## Menu lekcji

Ciąg geometryczny -  
definicja

Wykazać z definicji, że  
jest to ciąg  
geometryczny

n-ty wyraz ciągu  
geometrycznego

n-ty wyraz ciągu  
geometrycznego cd.

Suma ciągu  
geometrycznego

Przykład

Przykłady zadań  
różnych

Koniec

## CIĄG GEOMETRYCZNY - DEFINICJA

Ciąg  $a_n$  nazywamy ciągiem geometrycznym jeżeli każdy wyraz tego ciągu począwszy od drugiego powstaje przez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez pewną liczbę  $q$  (iloraz ciągu). Tzn, dla każdego  $n$  spełniony jest warunek:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

$a_n$  - pierwszy wyraz ciągu geometrycznego

$q$  - iloraz ciągu geometrycznego

Przykłady ciągu geometrycznego:

$(-9, 3, -1, 1/3, -1/9, 1/27, \dots)$   $q = -1/3$

$(1, 2, 4, 8, 16, \dots)$   $q = 2$

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

## Menu lekcji

Ciąg geometryczny -  
definicja

Wykazać z definicji, że  
jest to ciąg  
geometryczny

n-ty wyraz ciągu  
geometrycznego

n-ty wyraz ciągu  
geometrycznego cd.

Suma ciągu  
geometrycznego

Przykład

Przykłady zadań  
różnych

Koniec

Wyznacz czwarty wyraz ciągu geometrycznego, wiedząc że  $a_1=3$  oraz  $q=3$

- |                       |    |
|-----------------------|----|
| <input type="radio"/> | 9  |
| <input type="radio"/> | 3  |
| <input type="radio"/> | 81 |

Proszę sprawdzić jedną odpowiedź

Pasek Postępu nie jest wyświetlany dla Prowadzący

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
**Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”**

## Menu lekcji

Ciąg geometryczny -  
definicja

Wykazać z definicji, że  
jest to ciąg  
geometryczny

n-ty wyraz ciągu  
geometrycznego

n-ty wyraz ciągu  
geometrycznego cd.

Suma ciągu  
geometrycznego

Przykład

Przykłady zadań  
różnych

Koniec

### WYKAZAĆ Z DEFINICJI, ŻE JEST TO CIĄG GEOMETRYCZNY

Na podstawie definicji zbadać, czy ciąg  $a_n = 3^n$  jest geometryczny

Korzystamy z definicji ciągu geometrycznego:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q \quad / : a_n$$

$$q = a_{n+1} / a_n$$

Ciąg jest ciągiem geometrycznym, jeżeli  $a_{n+1} / a_n$  jest stałe

$$a_n = 3^n$$

$$a_{n+1} = 3^{n+1}$$

$$a_{n+1} / a_n = 3^{n+1} / 3^n = 3^n \cdot 3 / 3^n = 3$$

Ciąg  $a_n = 3^n$  jest geometryczny



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

## Menu lekcji

Ciąg geometryczny -  
definicja

Wykazać z definicji, że  
jest to ciąg  
geometryczny

n-ty wyraz ciągu  
geometrycznego

n-ty wyraz ciągu  
geometrycznego cd.

Suma ciągu  
geometrycznego

Przykład

Przykłady zadań  
różnych

Koniec

Zbadaj, czy ciąg  $a_n = 2n$  jest geometryczny.



NIE



TAK

Proszę sprawdzić jedną odpowiedź

Pasek Postępu nie jest wyświetlany dla Prowadzący





## Menu lekcji

Ciąg geometryczny -  
definicja

Wykazać z definicji, że  
jest to ciąg  
geometryczny

n-ty wyraz ciągu  
geometrycznego

n-ty wyraz ciągu  
geometrycznego cd.

Suma ciągu  
geometrycznego

Przykład

Przykłady zadań  
różnych

Koniec

**N-TY WYRAZ CIĄGU GEOMETRYCZNEGO**

Chcąc obliczyć n-ty wyraz ciągu geometrycznego korzystamy ze wzoru:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

**Przykład**

Oblicz czwarty wyraz ciągu geometrycznego, którego pierwszy wyraz jest równy 1, a iloraz ciągu wynosi 2.

Z danych w zadaniu wiemy, że:

$$n=4$$

$$a_1=1$$

$$q=2$$

Obliczamy czwarty wyraz tego ciągu, podstawiając dane z zadania do wzoru:

$$a_4 = 1 \cdot 2^{4-1} = 2^3 = 8$$

Zatem czwarty wyraz tego ciągu to 8.



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

## Menu lekcji

Ciąg geometryczny -  
definicja

Wykazać z definicji, że  
jest to ciąg  
geometryczny

n-ty wyraz ciągu  
geometrycznego

n-ty wyraz ciągu  
geometrycznego cd.

Suma ciągu  
geometrycznego

Przykład

Przykłady zadań  
różnych

Koniec

Wyznacz pierwszy wyraz ciągu geometrycznego, mając dane  $a_7=125$  oraz  $q=5$ .

- |                       |       |
|-----------------------|-------|
| <input type="radio"/> | 0,04  |
| <input type="radio"/> | 0,008 |
| <input type="radio"/> | 5     |

Proszę sprawdzić jedną odpowiedź

Pasek Postępu nie jest wyświetlany dla Prowadzący

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

## Menu lekcji

Ciąg geometryczny -  
definicja

Wykazać z definicji, że  
jest to ciąg  
geometryczny

n-ty wyraz ciągu  
geometrycznego

n-ty wyraz ciągu  
geometrycznego cd.

Suma ciągu  
geometrycznego

Przykład

Przykłady zadań  
różnych

Koniec

Wyznacz pierwszy wyraz ciągu geometrycznego, mając dane  $a_6=32/27$  oraz  $q=-2/3$ .

- |                       |    |
|-----------------------|----|
| <input type="radio"/> | 3  |
| <input type="radio"/> | -9 |
| <input type="radio"/> | -3 |
| <input type="radio"/> | 9  |

Proszę sprawdzić jedną odpowiedź

Pasek Postępu nie jest wyświetlany dla Prowadzący

## Menu lekcji

Ciąg geometryczny -  
definicja

Wykazać z definicji, że  
jest to ciąg  
geometryczny

$n$ -ty wyraz ciągu  
geometrycznego

$n$ -ty wyraz ciągu  
geometrycznego cd.

Suma ciągu  
geometrycznego

Przykład

Przykłady zadań  
różnych

Koniec

**N-TY WYRAZ CIĄGU GEOMETRYCZNEGO CD.**

W sytuacji gdy musimy obliczyć  $n$ -ty wyraz ciągu, a znamy  $k$ -ty wyraz i iloraz  $q$ , to możemy skorzystać ze wzoru:

$$a_n = a_k \cdot q^{n-k}$$

**Przykład**

Wyznacz 21-ty wyraz ciągu geometrycznego o którym wiesz, że:

$$a_{18} = -5 \text{ oraz } q = 2.$$

**Rozwiązanie:**

$$a_{21} = -5 \cdot 2^{21-18} = -5 \cdot 2^3 = -5 \cdot 8 = -40$$

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

## Menu lekcji

Ciąg geometryczny -  
definicja

Wykazać z definicji, że  
jest to ciąg  
geometryczny

n-ty wyraz ciągu  
geometrycznego

n-ty wyraz ciągu  
geometrycznego cd.

Suma ciągu  
geometrycznego

Przykład

Przykłady zadań  
różnych

Koniec

Wyznacz 21-ty wyraz ciągu geometrycznego o którym wiesz, że:

$$a_{23} = 81 \text{ oraz } q = 3.$$

- |                       |    |
|-----------------------|----|
| <input type="radio"/> | 81 |
| <input type="radio"/> | 9  |
| <input type="radio"/> | 3  |

Proszę sprawdzić jedną odpowiedź

Pasek Postępu nie jest wyświetlany dla Prowadzący



## Menu lekcji

Ciąg geometryczny -  
definicja

Wykazać z definicji, że  
jest to ciąg  
geometryczny

n-ty wyraz ciągu  
geometrycznego

n-ty wyraz ciągu  
geometrycznego cd.

Suma ciągu  
geometrycznego

Przykład

Przykłady zadań  
różnych

Koniec

## SUMA CIĄGU GEOMETRYCZNEGO

Sumę pierwszych  $n$  wyrazów ciągu geometrycznego liczymy ze wzoru:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{(1 - q^n)}{(1 - q)}$$

Przykład.

Oblicz sumę 9 pierwszych wyrazów ciągu geometrycznego o wzorze ogólnym  $a_n = 2^n$ .

Obliczamy pierwszy wyraz ciągu:

$$a_1 = 2^1 = 2$$

$$q = 2$$

Zatem szukana suma wynosi:

$$S_9 = 2 \cdot \frac{(1 - 2^9)}{(1 - 2)} = 2 \cdot \frac{(1 - 512)}{-1} = 1022$$

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

## Menu lekcji

Ciąg geometryczny -  
definicja

Wykazać z definicji, że  
jest to ciąg  
geometryczny

n-ty wyraz ciągu  
geometrycznego

n-ty wyraz ciągu  
geometrycznego cd.

Suma ciągu  
geometrycznego

Przykład

Przykłady zadań  
różnych

Koniec

Oblicz sumę ośmiu pierwszych wyrazów ciągu geometrycznego mając dane  $a_1=4$  i  $a_3=16$ .

- |                       |       |
|-----------------------|-------|
| <input type="radio"/> | 1024  |
| <input type="radio"/> | 1020  |
| <input type="radio"/> | -1020 |
| <input type="radio"/> | -1024 |

Proszę sprawdzić jedną odpowiedź

Pasek Postępu nie jest wyświetlany dla Prowadzący



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
**Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”**

## Menu lekcji

Ciąg geometryczny -  
definicja

Wykazać z definicji, że  
jest to ciąg  
geometryczny

n-ty wyraz ciągu  
geometrycznego

n-ty wyraz ciągu  
geometrycznego cd.

Suma ciągu  
geometrycznego

Przykład

Przykłady zadań  
różnych

Koniec

## PRZYKŁAD

Wyznacz ciąg geometryczny mając dane  $a_3 = 9$   $a_5 = 81$

Rozwiązanie:

$$a_3 = 9$$

$$a_5 = 81$$

Korzystamy z  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Tworzymy układ równań:

$$\begin{cases} a_1 \cdot q^{3-1} = 9 \\ a_1 \cdot q^{5-1} = 81 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 \cdot q^2 = 9 / : q^2 \\ a_1 \cdot q^4 = 81 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = \frac{9}{q^2} \\ \frac{9}{q^2} \cdot q^4 = 81 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = \frac{9}{q^2} \\ 9 \cdot q^2 = 81 / : 9 \end{cases}$$





Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
**Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”**

$$\begin{cases} a_1 = \frac{9}{q^2} \\ q^2 = 9 \end{cases}$$

Równanie  $q^2 = 9$  ma dwa rozwiązania  $q = -3$  lub  $q = 3$ .

$$\begin{cases} a_1 = \frac{9}{q^2} \\ q = -3 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} a_1 = \frac{9}{q^2} \\ q = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = \frac{9}{(-3)^2} \\ q = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = \frac{9}{3^2} \\ q = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ q = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = 1 \\ q = 3 \end{cases}$$

Odp. Rozwiązaniem są dwa ciągi geometryczne:  $a_1 = 1, q = -3$  lub  $a_1 = 1, q = 3$ .



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

## Menu lekcji

Ciąg geometryczny -  
definicja

Wykazać z definicji, że  
jest to ciąg  
geometryczny

n-ty wyraz ciągu  
geometrycznego

n-ty wyraz ciągu  
geometrycznego cd.

Suma ciągu  
geometrycznego

Przykład

Przykłady zadań  
różnych

Koniec

Trzeci wyraz ciągu geometrycznego wynosi 45, a szósty 1215. Znajdź sumę ośmiu pierwszych wyrazów tego ciągu.

- |                       |       |
|-----------------------|-------|
| <input type="radio"/> | 16401 |
| <input type="radio"/> | 16400 |
| <input type="radio"/> | 16399 |

Proszę sprawdzić jedną odpowiedź

Pasek Postępu nie jest wyświetlany dla Prowadzący

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

## Menu lekcji

Ciąg geometryczny -  
definicja

Wykazać z definicji, że  
jest to ciąg  
geometryczny

n-ty wyraz ciągu  
geometrycznego

n-ty wyraz ciągu  
geometrycznego cd.

Suma ciągu  
geometrycznego

Przykład

Przykłady zadań  
różnych

Koniec

Wyznacz ciąg geometryczny tzn.  $a_1$  i  $q$  wiedząc, że:  $a_4=2$ ,  $a_8=32$ . Oblicz sumę pięciu pierwszych wyrazów tego ciągu.

- $a_1=1/4, q=2, s_5=31/4$
- $a_1=-2, q=1/4, s_5=29/4$
- $a_1=2, q=1/4, s_5=32/4$

Proszę sprawdzić jedną odpowiedź

Pasek Postępu nie jest wyświetlany dla Prowadzący



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
**Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”**

## Menu lekcji

Ciąg geometryczny -  
definicja

Wykazać z definicji, że  
jest to ciąg  
geometryczny

n-ty wyraz ciągu  
geometrycznego

n-ty wyraz ciągu  
geometrycznego cd.

Suma ciągu  
geometrycznego

Przykład

Przykłady zadań  
różnych

Koniec

### PRZYKŁADY ZADAŃ RÓŻNYCH

Składamy 2 stycznia do banku 100zł na oprocentowanie 3% miesięcznie, tzn. ostatniego dnia miesiąca bank dopisuje do kwoty znajdującej się na koncie 3% tej kwoty i kwota ta wchodzi do podstawy oprocentowania w następnym miesiącu. Jaką kwotą będziemy dysponowali po upływie 2 kwartałów nie dokonując wpłat ani wypłat.

I sposób rozwiązania zadania

I miesiąc wpłata 100zł

II miesiąc wpłata  $100zł + 3\% \cdot 100zł = 103zł$

III miesiąc wpłata  $103zł + 3\% \cdot 103zł = 106,09zł$

IV miesiąc wpłata  $106,09zł + 3\% \cdot 106,09zł = 109,2727 \sim 109,27zł$

V miesiąc wpłata  $109,27zł + 3\% \cdot 109,27zł = 112,5508 \sim 112,55zł$

VI miesiąc wpłata  $112,55zł + 3\% \cdot 112,55zł = 115,9274 \sim 115,93zł$

II sposób rozwiązania zadania (stosowanie wiadomości dotyczących ciągu geometrycznego)

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

Analiza zadania

Dane:  $a_1 = 100$  (pierwsza wpłata);  $q = 1,03$ ;  $n = 6$  (ilość miesięcy po dwóch kwartałach)

Szukane:  $a_6$  (kwota po dwóch kwartałach)

Obliczenia

$$a_6 = a_1 \cdot q^5$$

$$a_6 = 100 \cdot (1,03)^5 = \underline{\underline{115,93}}$$

Menu lekcji

Ciąg geometryczny -  
definicja

Wykazać z definicji, że  
jest to ciąg  
geometryczny

n-ty wyraz ciągu  
geometrycznego

n-ty wyraz ciągu  
geometrycznego cd.

Suma ciągu  
geometrycznego

Przykład

Przykłady zadań  
różnych

Koniec

Składamy 2 stycznia do banku 100zł na oprocentowanie 9% kwartalnie. Jaka kwota będziemy dysponowali po upływie 2 kwartałów nie dokonując wpłat ani wypłat.

- |                       |        |
|-----------------------|--------|
| <input type="radio"/> | 118,81 |
| <input type="radio"/> | 109,09 |
| <input type="radio"/> | 100,09 |

Proszę sprawdzić jedną odpowiedź

Pasek Postępu nie jest wyświetlany dla Prowadzący

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

## Scenariusz nr 14: Odkrywamy twierdzenia geometryczne z komputerem

<b>Temat zajęć</b>		Odkrywamy twierdzenia geometryczne z komputerem
<b>Dział</b>		Geometria
<b>Klasa (poziom edukacyjny)</b>		
<b>Czas trwania zajęć</b>		2 godziny
Lp.	Element scenariusza	Treść
	Cel ogólny	Inspirowanie uczniów do samodzielnego konstruowania wiedzy matematycznej z wykorzystaniem programu Geogebra
	Cele szczegółowe	Zapoznanie uczniów z programem Geogebra do interaktywnego uczenia się geometrii i algebry; Wdrażanie uczniów do wnikliwego rozpatrywania twierdzeń matematycznych; Wdrażanie uczniów do prowadzenia dyskusji, stawiania hipotez i argumentowania; Doskonalenie umiejętności posługiwania się oprogramowaniem edukacyjnym.
	Formy i metody	Prezentacja, dyskusja, praca z komputerem
	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	Program Geogebra; Karta pracy
	Wprowadzenie do zajęć	Dyskusja z uczniami na temat budowy twierdzenia i poznanych twierdzeń
	Przebieg zajęć ( <i>pełna wersja</i> )	1. Wprowadzenie; 2. Prezentacja programu Geogebra; 3. Wspólne udowodnienie twierdzenia o okręgu opisanym na trójkącie; 4. Samodzielna praca uczniów nad stawianiem hipotez do problemów wymienionych w karcie pracy



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
**Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”**

	Podsumowanie zajęć	Dyskusja nad rezultatami pracy uczniów podczas zajęć.
	Uwagi metodyczne do realizacji	Częściej rozmawiać z uczniami. Inspirować ich do samodzielnego konstruowania wiedzy. Organizować ich pracę badawczą. Używać komputera w celach twórczych (dla uczniów).



## Załączniki do scenariusza nr 14

Karta pracy:

**Spróbuj postawić hipotezę z programem GeoGebra ([www.geogebra.org](http://www.geogebra.org))**

### Twierdzenie Cramera

Spośród wszystkich wielokątów o danych bokach  $a_1, a_2, \dots, a_n$  (gdzie  $n \geq 3$ ) największe pole ma wielokąt wpisany w koło.

### Twierdzenie Newtona

W czworokącie opisanym na kole (okręgu) odcinki łączące punkty styczności boków przeciwległych z kołem (okręgiem) przechodzą przez punkt przecięcia przekątnych czworokąta.

### Twierdzenie Simsona

Czworokąt wypukły ABCD można wpisać w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy rzuty prostokątne wierzchołka D na proste AB, BC, CA leżą na jednej prostej.

### Problem 1.

Dwusieczna kąta wewnętrznego w trójkącie dzieli przeciwległy bok trójkąta na dwa odcinki. Czy istnieje związek między długościami tych odcinków i długościami pozostałych boków trójkąta?

### Problem 2.

Czy odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta ma jakieś szczególne cechy?



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

**Problem 3.**

Czy odcinek równoległy do boku trójkąta ma jakieś szczególne cechy?

**Problem 4.**

Czy na każdym czworokącie można opisać okrąg?

**Problem 5.**

Czy w każdy czworokąt można wpisać okrąg?

**Problem 6.**

Czy możliwe jest stwierdzenie, czy dwie proste są równoległe, gdy znamy ich równania?

Czy możliwe jest stwierdzenie, czy dwie proste są prostopadłe, gdy znamy ich równania?

Znajdź związki pomiędzy współczynnikami w równaniach prostych równoległych oraz związki pomiędzy współczynnikami w równaniach prostych prostopadłych.

**A tutaj wpisz twierdzenie lub problem, który Cię interesuje i spróbuj zbadać go z programem GeoGebra...**



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

## Scenariusz nr 15: Graj w grę komputerową ... i ucz się geometrii sferycznej

<b>Temat zajęć</b>		<b>Graj w grę komputerową ... i ucz się geometrii sferycznej</b>
<b>Dział</b>		<b>Geometria</b>
<b>Klasa (poziom edukacyjny)</b>		
<b>Czas trwania zajęć</b>		<b>2 godziny</b>
<b>Lp.</b>	<b>Element scenariusza</b>	<b>Treść</b>
	Cel ogólny	Inspirowanie uczniów do samodzielnego konstruowania wiedzy matematycznej z wykorzystaniem gry komputerowej i tradycyjnych środków dydaktycznych
	Cele szczegółowe	Zapoznanie się uczniów z podstawami geometrii na powierzchni sferycznej; Wdrażanie uczniów do posługiwania się różnorodnymi środkami dydaktycznymi w celu prowadzenia pracy badawczej i konstruowania wiedzy matematycznej; Wdrażanie uczniów do prowadzenia dyskusji, stawiania hipotez i argumentowania; Doskonalenie umiejętności posługiwania się oprogramowaniem edukacyjnym.
	Formy i metody	Prezentacja, dyskusja, praca z komputerem, metoda problemowa, metoda porównawcza
	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	Gra komputerowa „pięć w linii prostej”; Globus; Zestaw modeli i przyrządów do badania własności figur geometrycznych na sferze „Lénárt Sphere”
	Wprowadzenie do zajęć	Dyskusja z uczniami na temat różnic pomiędzy płaszczyzną i sferą na przykładzie globusa (globalne ujęcie np. podróży) i otaczających nas powierzchni płaskich (lokalne ujęcie poruszania się)
	Przebieg zajęć ( <i>pełna wersja</i> )	1. Nawiązanie do gry w kółko i krzyżyk na płaszczyźnie. Aby skutecznie grać w grę „kółko i krzyżyk” na płaszczyźnie należy wiedzieć, co to jest prosta na płaszczyźnie. 2. Prezentacja gry komputerowej „pięć w linii prostej” na sferze. Aby skutecznie grać w grę „pięć w linii



**Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy**  
**Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”**

		<p>prostej na sferze” należy wiedzieć, co to jest prosta sferyczna.</p> <p>3. Uczniowie grają w grę „pięć w linii prostej” i wyrażają swoje spostrzeżenia na temat figur geometrycznych widocznych na powierzchni kuli do gry (na ekranie komputera). W ten sposób gromadzą podstawową wiedzę na temat geometrii sferycznej i stawiają hipotezy dotyczące własności figur na sferze.</p> <p>4. Uczniowie definiują „sferyczną prostą”. Pomagają sobie globusem i własnościami prostej na płaszczyźnie.</p> <p>5. Uczniowie (pod kierunkiem osoby prowadzącej zajęcia) badają sumę kątów wewnętrznych trójkąta sferycznego. Posługują się kulką z gry „pięć w linii prostej”. Dokonują odkrycia: suma kątów w trójkącie na sferze jest większa niż 180 stopni!</p> <p>6. Prezentacja sposobu posługiwania się zestawem modeli i przyrządów do badania własności figur geometrycznych na sferze „Lénárt Sphere”.</p> <p>7. Uczniowie badają inne własności figur na sferze, np. istnienie/nieistnienie prostopadłości i równoległości na sferze, „dziwne” trójkąty (np. o trzech kątach prostych) itp.</p>
	Podsumowanie zajęć	Dyskusja podsumowująca: porównanie własności niektórych figur geometrycznych na płaszczyźnie i na sferze
	Uwagi metodyczne do realizacji	<p>Podstawy geometrii na sferze nie są trudne do zrozumienia już dla ucznia gimnazjum lub liceum, jeżeli nie traktuje się tematu zbyt teoretycznie i dysponuje się odpowiednimi pomocami naukowymi do jego wprowadzenia. Dyskusja z uczniami, zadawanie inspirujących pytań, stawianie problemów na miarę ich możliwości intelektualnych oraz ciągłe porównywanie własności figur w dwóch systemach geometrycznych przynoszą dobre rezultaty. Tak więc:</p> <p>Częściej rozmawiać z uczniami. Inspirować ich do samodzielnego konstruowania wiedzy. Organizować ich pracę badawczą. Używać komputera i tradycyjnych pomocy dydaktycznych (również tych z najbliższego otoczenia uczniów) w celach twórczych (dla uczniów).</p>

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

## Scenariusz nr 16: Rozszerzona Rzeczywistość - czyli co nas czeka już za kilka lat

<b>Temat zajęć</b>		<b>Rozszerzona Rzeczywistość - czyli co nas czeka już za kilka lat</b>
<b>Dział</b>		Informatyka
<b>Klasa (poziom edukacyjny)</b>		gimnazjalne/ponadgimnazjalne
<b>Czas trwania zajęć</b>		90 min.
<b>Lp.</b>	<b>Element scenariusza</b>	<b>Treść</b>
	Cel ogólny	Celem zajęć jest zapoznanie ucznia z zagadnieniami rzeczywistości rozszerzonej (ang. Augmented Reality). Uczeń w wyniku zajęć powinien zapoznać się z podstawowymi pojęciami przetwarzania i wizualizacji danych dodatkowych oraz możliwościami jej wykorzystania w gospodarce i życiu codziennym.
	Cele szczegółowe	<p>Uczeń w wyniku zajęć powinien zdobyć wiedzę:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• na temat podstawowych pojęć rzeczywistości rozszerzonej;</li> <li>• możliwości wykorzystania rzeczywistości rozszerzonej w różnych dziedzinach gospodarki i życia codziennego;</li> <li>• możliwości tworzenia aplikacji wykorzystujących rzeczywistość rozszerzoną;</li> <li>• na temat podstawowych algorytmów rzeczywistości rozszerzonej.</li> </ul> <p>Celem zajęć jest udzielenie odpowiedzi na następujące pytania:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Co to jest rzeczywistość rozszerzona?</li> <li>• Jakie techniki rzeczywistości rozszerzonej wykorzystywane są obecnie?</li> <li>• Jak realizowana są mechanizmy rozpoznawania obrazów i głosu?</li> <li>• Czy są dostępne już dziś i jakie rozwiązania wykorzystujące rzeczywistość rozszerzoną?</li> </ul>
	Formy i metody	Pogadanka, wykład z wykorzystaniem prezentacji multimedialnej
	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym	Komputer, rzutnik multimedialny, dostęp do sieci Internet, telefon klasy smartfon z aplikacją rzeczywistości rozszerzonej

**Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy**  
**Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”**

	wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	
	Wprowadzenie do zajęć	<p>Nauczyciel na podstawie prezentacji z złącznika przedstawia podstawowe zagadnienia dotyczące rzeczywistości rozszerzonej.</p> <p>Prezentacja przedstawia kolejne etapy przetwarzania oraz wizualizacji dodatkowych danych. Poczynając od prezentacji danych dodatkowych, poprzez algorytmy przetwarzające obrazy a na mechanizmach dodatkowych kończąc. Omawiane etapy zostaną przedstawione na przykładzie internetowych prezentacji multimedialnych .</p> <p>Zostaną omówione także zagadnienia metod i algorytmów rzeczywistości rozszerzonej:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Wyjaśnienie zjawiska rzeczywistości rozszerzonej,</li> <li>• Algorytmy przetwarzania i wizualizacji danych,</li> <li>• Urządzenia wykorzystujące mechanizmy rzeczywistości rozszerzonej.</li> </ul>
	Przebieg zajęć( <i>pełna wersja</i> )	<p>9. Prezentacja multimedialna</p> <p>10. Dyskusja w czasie prezentacji</p> <p>11. Pytania i odpowiedzi</p> <p>12. Prezentacja wybranych systemów rzeczywistości rozszerzonej w postaci filmów w serwisie Youtube</p> <p>13. Prezentacja aplikacji rzeczywistości rozszerzonej na smartfonie</p> <p>14. Pytania i odpowiedzi</p>
	Podsumowanie zajęć	Na zajęciach zostaną omówione także, systemy komputerowe rzeczywistości rozszerzonej. Jest to połączenie dedykowanego oprogramowania ze specjalizowanym sprzętem umożliwiające pobieranie, przetwarzanie i wizualizację danych dodatkowych.
	Uwagi metodyczne do realizacji	brak

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
**Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”**

## Załączniki do scenariusza nr 16

Załącznik 1: Prezentacja w formie PDF: Rozszerzona Rzeczywistość - czyli co nas czeka już za kilka lat

Załącznik 2: Materiały do notatek ze slajdami (3 szt. na A4) w formie PDF: Rozszerzona Rzeczywistość - czyli co nas czeka już za kilka lat



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

## Scenariusz nr 17: Czy komputery potrafią myśleć? - Wykorzystanie algorytmów sztucznej inteligencji

<b>Temat zajęć</b>		<b>Czy komputery potrafią myśleć? - Wykorzystanie algorytmów sztucznej inteligencji</b>
<b>Dział</b>		Informatyka
<b>Klasa (poziom edukacyjny)</b>		gimnazjalne/ponadgimnazjalne
<b>Czas trwania zajęć</b>		90 min.
<b>Lp.</b>	<b>Element scenariusza</b>	<b>Treść</b>
	Cel ogólny	Celem zajęć jest zapoznanie ucznia z zagadnieniami sztucznej inteligencji (AI – Artificial Intelligence) . Uczeń w wyniku zajęć powinien zapoznać się z podstawowymi pojęciami metod AI oraz możliwościami jej wykorzystania w gospodarce i życiu codziennym.
	Cele szczegółowe	Uczeń w wyniku zajęć powinien zdobyć wiedzę: <ul style="list-style-type: none"> <li>• na temat podstawowych pojęć sztucznej inteligencji;</li> <li>• możliwości wykorzystania sztucznej inteligencji w różnych dziedzinach gospodarki i życia codziennego;</li> <li>• możliwości tworzenia aplikacji wykorzystujących sztuczną inteligencję;</li> <li>• na temat podstawowych algorytmów wykorzystywanych w naśladowaniu procesu myślowego człowieka.</li> </ul>
	Formy i metody	Pogadanka, wykład z wykorzystaniem prezentacji multimedialnej
	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	Komputer, rzutnik multimedialny, dostęp do sieci Internet, telefon klasy smartfon z aplikacją rzeczywistości rozszerzonej
	Wprowadzenie do	Sztuczna inteligencja, jest to dziedzina informatyki zajmujący się konstruowaniem maszyn i algorytmów, których działanie posiada "znamiona inteligencji". Rozumie się przez to zdolność do samorzutnego przystosowywania się

## Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

## Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

	zajęć	do zmiennych warunków... Ponieważ termin "inteligencja" trudno precyzyjnie zdefiniować, w szczególności w stosunku do maszyn, zaproponowano w zamian test. Najsłynniejszym jest test Turinga, którego celem jest stwierdzenie, czy maszyna jest inteligentna. Badacz zadaje pytania, na które odpowiadają maszyna oraz człowiek. Nie widzi on swoich respondentów, a jego zadaniem jest określenie, z kim ma do czynienia. Jeśli maszyna zostanie uznana za człowieka, to można o niej powiedzieć, że jest inteligentna.
	Przebieg zajęć( <i>pełna wersja</i> )	15. Prezentacja multimedialna 16. Dyskusja w czasie prezentacji 17. Pytania i odpowiedzi 18. Prezentacja wybranych systemów sztucznej inteligencji w postaci filmów w serwisie Youtube 19. Prezentacja systemu Apple Siri na smartfonie 20. Pytania i odpowiedzi
	Podsumowanie zajęć	Nauczyciel na podstawie prezentacji z złącznika przedstawia podstawowe zagadnienia sztucznej inteligencji z przykładowymi zastosowaniami. Wszystkie wizje sztucznej inteligencji stworzone przez kulturę (i pokazywane w filmach) całkowicie zdominowały nasz sposób myślenia o sztucznej inteligencji. Uważamy, że jej nie ma, bo z pewnością zauważylibyśmy jej narodziny. Czy rzeczywiście cokolwiek byśmy dostrzegli? Mijały jednak lata i stopniowo okazywało się, że sprawa jest znacznie trudniejsza, niż dotąd sądzono. Wielkie nadzieje ludzkości i wielkie pieniądze funduszy przepadły, a w połowie lat 80. Badacze doszli do bolesnych wniosków, które sformułowano w postaci tak zwanego paradoksu Moraveca: "Stosunkowo łatwo sprawić, żeby komputery przejawiały umiejętności dorosłego człowieka w testach na inteligencję albo w grze w warcaby, ale jest trudne albo wręcz niemożliwe zaprogramowanie im umiejętności rocznego dziecka w percepcji i mobilności".
	Uwagi metodyczne do realizacji	brak



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
**Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”**

## Załączniki do scenariusza nr 17

Załącznik 1: Prezentacja w formie PDF: Czy komputery potrafią myśleć? - Wykorzystanie algorytmów sztucznej inteligencji

Załącznik 2: Materiały do notatek ze slajdami (3 szt. na A4) w formie PDF: Czy komputery potrafią myśleć? - Wykorzystanie algorytmów sztucznej inteligencji



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

## Scenariusz nr 18: Latarka, fontanna i antena, czyli krzywe stożkowe na biwaku

<b>Temat zajęć</b>		Latarka, fontanna i antena, czyli krzywe stożkowe na biwaku.
<b>Dział</b>		Geometria
<b>Klasa (poziom edukacyjny)</b>		Szkoły ponadgimnazjalne
<b>Czas trwania zajęć</b>		90 min (2x45min)
Lp.	Element scenariusza	Treść
	Cel ogólny	Zapoznanie z pojęciem krzywych stożkowych.
	Cele szczegółowe	Zapoznanie się z rodzajami krzywych stożkowych. Przyswojenie wiedzy o rodzajach krzywych i miejsc ich występowania w otaczającym świecie. Nabycie umiejętności rysowania krzywych.
	Formy i metody	<p>Metody pracy:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• pogadanka;</li> <li>• warsztat tematyczny;</li> <li>• praca odkrywczą, twórczą;</li> <li>• wykonywanie rysunku;</li> <li>• operacje manualne;</li> </ul> <p>Formy pracy:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• praca z całą klasą;</li> <li>• praca w grupach, praca w parach;</li> <li>• praca indywidualna;</li> </ul>
	Środki dydaktyczne	Jako środki dydaktyczne służyły: latarki oraz specjalna tablica do rysowania krzywych stożkowych.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
**Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”**

	(ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	
	Wprowadzenie do zajęć	Przeprowadzenie doświadczeń, w wyniku których otrzymane zostaną krzywe stożkowe, przykładowo świecenie latarką pod różnym kątem na ścianę, puszczanie strumienia wody tak, aby uzyskać parabolę itp.
	Przebieg zajęć ( <i>pełna wersja</i> )	Wprowadzenie poprzez doświadczenie, następnie wyjaśnienie pojęcia krzywej stożkowej, podanie definicji, rodzajów, własności. Kolejną część zajęć to prezentacja krzywych na stożku jako krzywych powstałych w wyniku przecięcia stożka płaszczyzną. Po tym następuje nauka rysowania elipsy przy pomocy specjalnej tablicy. Zajęcia kończy prezentacja urządzeń z zastosowanymi krzywymi stożkowymi oraz uzmysłowienie, gdzie w życiu codziennym wykorzystuje się i spotyka krzywe stożkowe.
	Podsumowanie zajęć	Podkreślenie i uzmysłowienie, gdzie w życiu codziennym wykorzystuje się i spotyka krzywe stożkowe.
	Uwagi metodyczne do realizacji	Przedstawienie nieznanego pojęcia krzywej stożkowej najpierw przy pomocy doświadczenia, następnie treści teoretycznych, a na końcu nauka rysowania takiej krzywej to dobra ścieżka edukacyjna pozwalająca na zapoznanie się nowym obiektem.

## Załączniki do scenariusza nr 18

Źródło:

[http://pl.wikipedia.org/wiki/Krzywa\\_sto%C5%BCkowa](http://pl.wikipedia.org/wiki/Krzywa_sto%C5%BCkowa)

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

## Scenariusz nr 19: Optymalne linie

<b>Temat zajęć</b>		<b>Optymalne linie</b>
<b>Dział</b>		Geometria
<b>Klasa (poziom edukacyjny)</b>		Szkoły ponadgimnazjalne
<b>Czas trwania zajęć</b>		<b>90 min (2x45min)</b>
<b>Lp.</b>	<b>Element scenariusza</b>	<b>Treść</b>
	Cel ogólny	Zapoznanie z pojęciem najkrótszych linii na płaszczyźnie i w przestrzeni
	Cele szczegółowe	Diagnoza znajomości pojęcia odległości, optymalizacji, a także wyobraźni o zastosowaniach matematyki w otaczającym świecie, umiejętności rozwiązywania problemów przy współpracy w grupie oraz indywidualnie.
	Formy i metody	Metody: - pogadanka; - warsztat tematyczny; - gra; - praca odkrywczą, twórczą; - wykonywanie rysunku; - operacje manualne; Formy organizacyjne: - praca z całą klasą; - praca w parach; - praca indywidualna;
	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w	Kartki i flamastry; opracowano grę polegającą na znajdowaniu najkrótszej drogi na różnych powierzchniach: płaszczyźnie, graniastosłupie, walcu.

## Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

## Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

	projekcie np. moduł, gra)	
	Wprowadzenie do zajęć	Wyjaśnienie zasad organizacji zajęć. Następnie przeprowadzenie gry w parach dotyczącej znalezienia najkrótszej drogi łączącej dwa punkty na różnych powierzchniach (płaskich, walca, stożkowych).
	Przebieg zajęć ( <i>pełna wersja</i> )	Po wprowadzeniu do zajęć w postaci gry nastąpiła wspólna dyskusja nad wynikami gry, przypomnienie pojęcia i własności katów wierzchołkowych. Wynikiem dyskusji była następnie pogadanka na temat optymalizacji. Potem nastąpiło przedstawienie pojęć i zapoznanie się z definicją: linii śrubowej (helisy), ortodromy, loksodromy. Zaprezentowano słynne loksodromy w stylu Eschera. Na koniec omówiono, gdzie w przyrodzie i życiu codziennym „objawiają” się omawiane krzywe;
	Podsumowanie zajęć	Podsumowanie zajęć z uwzględnieniem odniesienia zdobytej wiedzy do życia codziennego.
	Uwagi metodyczne do realizacji	Wdrożona została ścieżka edukacyjna polegająca na wprowadzeniu do omawianego tematu poprzez grę edukacyjną, której istotą były omówione później pojęcia linii optymalnych w sensie długości; pomogło to uczniom zrozumieć istotę wprowadzonych następnie pojęć.

## Załączniki do scenariusza nr 19

Źródła:

<http://pl.wikipedia.org/wiki/Loksodroma>

[http://pl.wikipedia.org/wiki/Linia\\_%C5%9Brubowa](http://pl.wikipedia.org/wiki/Linia_%C5%9Brubowa)

<http://pl.wikipedia.org/wiki/Ortodroma>




Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

## Scenariusz nr 20: Przykłady konstrukcji dynamicznych z programem C.a.R.: miejsca geometryczne punktów

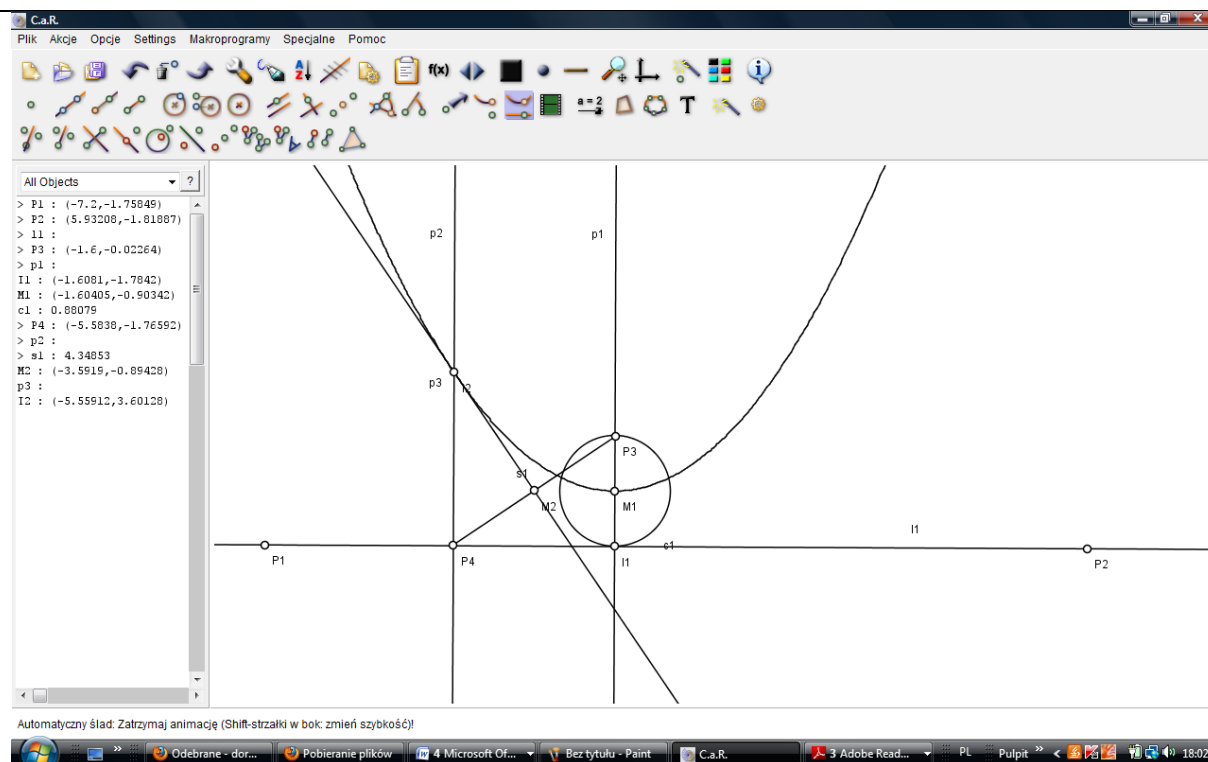
Temat zajęć		Przykłady konstrukcji dynamicznych z programem C.a.R.: miejsca geometryczne punktów
Dział		Matematyka
Klasa (poziom edukacyjny)		
Czas trwania zajęć		90 min.
Lp.	Element scenariusza (należy dostosować do potrzeb)	Treść zajęć
	Cel ogólny	Wspomaganie nauczania geometrii poprzez użytkowe programy komputerowe.
	Cele szczegółowe	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Zapoznanie uczniów z pojęciem dynamicznej konstrukcji geometrycznej.</li> <li>• Kształtowanie pojęcia miejsce geometryczne punktów.</li> <li>• Zapoznania z krzywymi na płaszczyźnie.</li> <li>• Kształtowanie umiejętności wykorzystania komputera do rozwiązywania problemów matematycznych.</li> <li>• Rozwijanie umiejętności opisu konstrukcji.</li> <li>• Rozwijanie umiejętności samokontroli działania.</li> <li>• Wzrost zainteresowania matematyką i jej zastosowaniami.</li> <li>• Umiejętność samodzielnej pracy oraz współdziałania w zespole.</li> </ul>
	Formy i metody	Metody pracy: ćwiczenia z komputerem stymulowane instrukcją multimedialną. Formy organizacyjne: praca z całą grupą, praca indywidualna.
	Środki dydaktyczne	rzutnik multimedialny, ekran, komputery: minimum jedno stanowisko na 2 osoby (preferowane jedna



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
**Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”**

	(ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	osoba przy komputerze), biały papier, cyrkle, ołówki, linijki
	Wprowadzenie do zajęć	Przypomnienie lub wprowadzenie podstawowych funkcjonalności w programie C.a.R.
	Przebieg zajęć	<p><b>12)</b> Zajęcia rozpoczną się od zadania.  <b>Zadanie: Dana jest prosta i punkt A nie leżący na niej. Narysuj okrąg styczny do danej prostej i przechodzący przez punkt A. Wyznacz zbiór środków wszystkich takich okręgów.</b></p> <p>Opis konstrukcji w programie C.a.R.:</p> <p>a) Wykonaj konstrukcję:</p> <p>a1) na prostej obieramy dowolny punkt (na rys. P4);</p> <p>a2) wyznaczamy punkt przecięcia (I4 na rysunku) prostopadłej do prostej w punkcie P4 z symetralną odcinka A.</p>  <p>b) Wybieramy opcję „Automatyczny ślad” i po kolei wskazujemy:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-punkt do śledzenia: punkt I4;</li> <li>- prosta lub odcinek: dana prosta;</li> <li>- punkt do przesunięcia P4.</li> </ul>

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”



- 13)** Próba analitycznego opisu powstałej linii paraboli. Zasady jej tworzenia i pojęcia miejsca geometrycznego środków okręgów stycznych to danej prostej i przechodzących przez zadany punkt jako zbioru tych punktów, których odległość od prostej (kierownicy) jest taka sama jak od danego punktu (ogniska).
- 14) Zadanie (kardioida):** Niech dany będzie dowolny okrąg, a na nim punkty A i S. Z punktu S prowadzimy średnicę okręgu SR. Punkt A' jest rzutem prostokątnym punktu A na średnicę SR. Wykreślić miejsce geometryczne punktów leżących na środku odcinka SA', gdy punkt S krąży po okręgu.

**Konstrukcja:**

- a) Rysujemy okrąg;

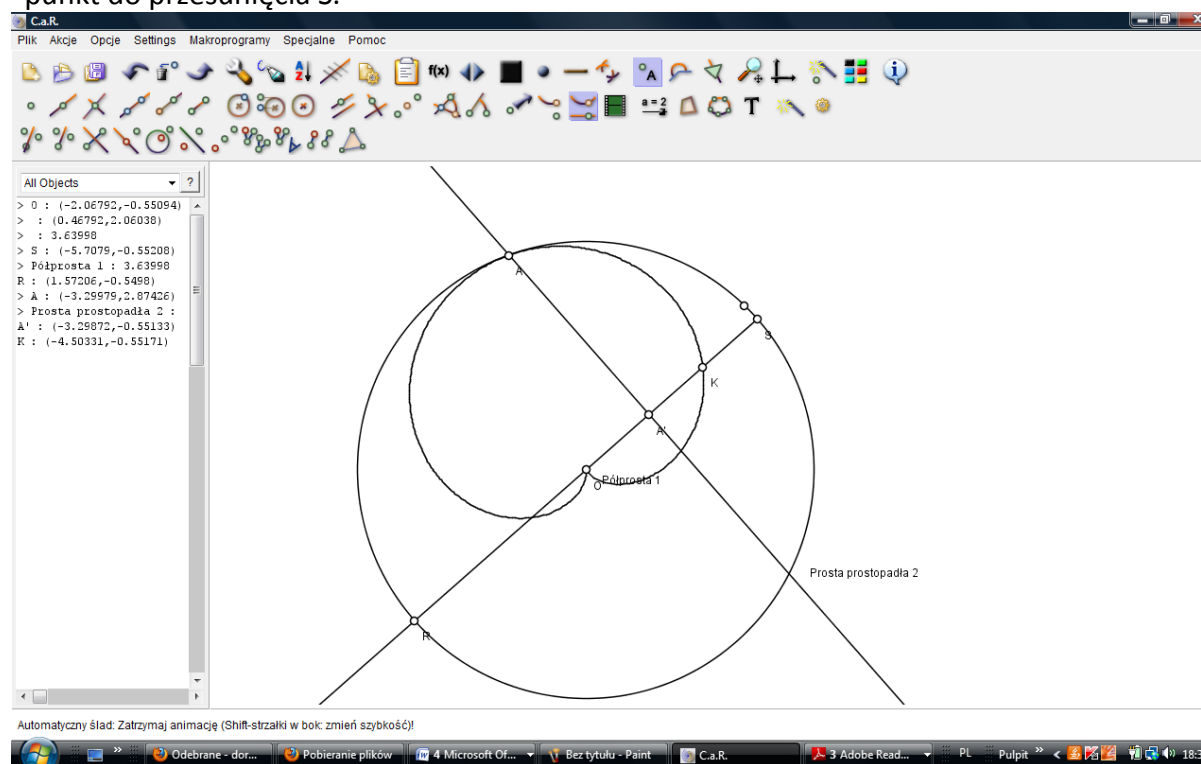


Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

- b) Zaznaczamy dwa punkty (A,S);
- c) Rysujemy średnicę SR;
- d) Wyznaczamy A'- rzut prostopadły punkt A na średnicę SR;
- e) Znajdujemy K- środek odcinka SA';

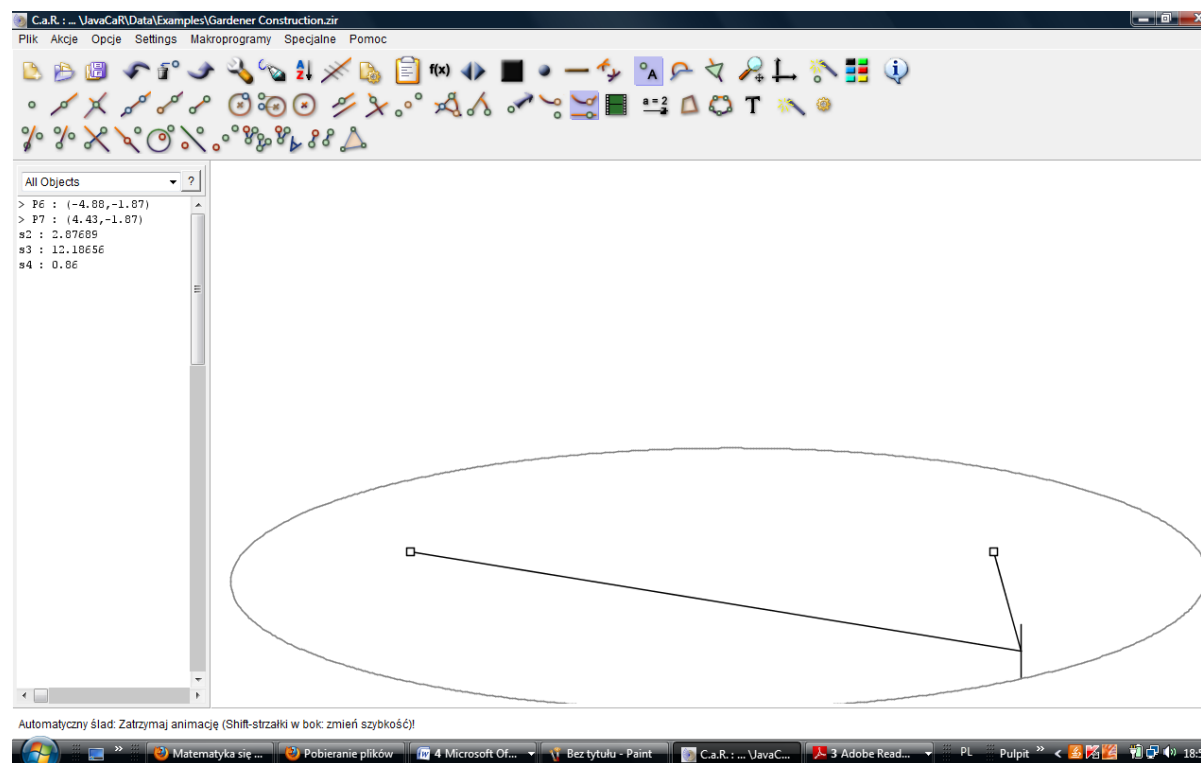


- f) Wybieramy opcję „Automatyczny ślad” i po kolei wskazujemy:
  - punkt do śledzenia: punkt K;
  - prosta lub odcinek: okrąg;
  - punkt do przesunięcia S.



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”

- 15) Załadowanie pliku z Pomoc/Examples: GardenerConstruction.zir. Obserwacja konstrukcji. Definicja powstałej krzywej, jako miejsca geometrycznego punktów, których suma odległości od dwóch wskazanych punktów (ognisk) jest stała i większa od odległości od tych punktów.



- 16) Postawienie problemu do pracy indywidualnej: konstrukcja elipsy.

Podsumowanie zajęć

Powtórzenie słowne tworzonych konstrukcji.

**Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy****Zbiór scenariuszy „Zajęcia na wyższych uczelniach”**

Uwagi metodyczne do realizacji	Można dodać w dalszym etapie zadania praktyczne, połączyć z projektem do wykonania. Warto pamiętać o tym, aby nie wyręczać uczniów, pozwalać na swobodną dyskusję i eksperyment. Zajęcia mogą być realizowane w ciągu 90 minut, przy zachowaniu 45 minut jest mało czasu, biorąc po uwagę konieczność wprowadzenia do programu C.a.R.
--------------------------------	---

