

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

## Wstęp

Zbiór „Mój przedmiot matematyka” jest zestawem 132 scenariuszy przeznaczonych dla uczniów szczególnie zainteresowanych matematyką. Scenariusze mogą być wykorzystywane przez nauczycieli zarówno na typowych zajęciach lekcyjnych wpisanych w zakres podstawowy, jak też w ramach dodatkowych zajęć poszerzających wiedzę uczniów, np. koła zainteresowań. Scenariusze wymagają zastosowania komputerów z dostępem do internetu. Takie wyposażenie pozwoli na wykorzystanie środków dydaktycznych przewidzianych w projekcie „Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy” takich jak moduły e-learningowe: „Elementy statystyki i rachunek prawdopodobieństwa”, „Funkcja kwadratowa”, „Równania i nierówności liniowe i kwadratowe”, „Wielomiany”, gry strategiczne „Wyprawa Nasreddina”, „Herbatka u królowej Anglii”, „Wyprawa na grzyby”, „Matemafia” oraz „Międzykontynentalna szkoła”, poradniki „Ciągi”, „Planimetria”, „Trygonometria”, „Geometria analityczna”. Scenariusze mogą być realizowane na zajęciach lekcyjnych jako całość lub nauczyciel dokonuje wyboru określonych materiałów zgodnie z zaplanowanymi przez siebie tematami – zwiększa to elastyczność stosowania pakietu np. w sytuacji braku zapewnienia w placówce odpowiednich warunków technicznych do realizacji materiału w oparciu o cały pakiet.



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

## Spis scenariuszy

Wstęp .....	1
Scenariusz nr 1: Proste równania wymierne .....	3
Scenariusz nr 2: Działania na liczbach rzeczywistych. Rozwiązywanie równań i nierówności .....	8
Scenariusz nr 3*: Graficzna interpretacja nierówności liniowej z dwiema niewiadomymi oraz układy takich nierówności.....	10



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

## Scenariusz nr 1: Proste równania wymierne

<b>Temat zajęć</b>		Proste równania wymierne
<b>Dział</b>		Funkcja wymierna
<b>Klasa (poziom edukacyjny)</b>		Klasa III (IV poziom edukacyjny)
<b>Czas trwania zajęć</b>		45 minut
Lp.	Element scenariusza	Treść zajęć
1	Cel ogólny	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Kształcenie umiejętności rozwiązywania prostych równań wymiernych (tzn., równań prowadzących do równań liniowych i kwadratowych)</li> </ul>
2	Cele szczegółowe	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• umie ustalić dziedzinę równania wymiernego</li> <li>• zna metody rozwiązywania równań wymiernych</li> <li>• potrafi rozwiązać proste równania wymierne</li> <li>• umie „docenić” dziedzinę równania i właściwie wybrać prawidłowe rozwiązanie</li> </ul>
3	Formy i metody	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Praca indywidualna</li> <li>• Praca w parach</li> <li>• Ćwiczenia</li> </ul>
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł,	Tablica interaktywna, karty pracy ucznia.

**Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy**  
**Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”**

	gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Nauczyciel informuje o celach lekcji, wprowadza w realizowany temat.
6	Przebieg zajęć ( <i>pełna wersja</i> )	<p>Nauczyciel przypomina określenie równania wymiernego, podaje zasady obowiązujące przy rozwiązywaniu równań wymiernych, uczniowie podzieleni w pary rozwiązują zadanie z załącznika nr 1 (treść zadania wyświetlona na tablicy). Rozwiązanie jest także na tablicy (ale nie pokazane całe od razu). Uczniowie sprawdzają siebie w czasie, gdy nauczyciel wyświetla kolejne części rozwiązania zadania. Nauczyciel obserwuje, które zespoły radzą sobie z problemem, które mają kłopoty. W taki sam sposób uczniowie rozwiązują zadania z zał. nr 2, nr 3. Na zakończenie krótki test składający się z zadań zamkniętych jako samokontrola i ustalenie stopnia opanowania zdobytej wiedzy – zał. nr 4.</p> <p><u>Wprowadzenie:</u>  Równaniem wymiernym nazywamy każde równanie postaci:  <math display="block">\frac{W(x)}{P(x)} = 0</math> gdzie <math>W(x)</math> i <math>P(x)</math> są wielomianami oraz <math>P(x) \neq 0</math>.</p> <p>Nauczyciel wyjaśnia temat: „Proste równania wymierne” tzn. równania w/w postaci, które sprowadzić można do równania liniowego lub kwadratowego. (Wynika to z realizowanych treści obowiązujących na poziomie podstawowym).  Rozwiązując równanie wymierne, uczeń może stosować różne sposoby. Poniżej proponuję metodę najmniej – wg mnie - kłopotliwą.  Otóż rozwiązując równanie wymierne pamiętajmy o następujących etapach/czynnościach:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Ustalamy dziedzinę równania, jeśli to konieczne rozkładamy wielomian występujący w mianowniku na czynniki</li> <li>• Ustalamy wspólny mianownik dla wszystkich wyrażeń wymiernych występujących w równaniu</li> <li>• Mnożymy obie strony równania przez wspólny mianownik</li> <li>• Rozwiązujemy otrzymane równanie (które nie jest już wymierne, lecz liniowe lub kwadratowe, oczywiście wcześniej je porządkując)</li> <li>• Sprawdzamy, które z otrzymanych rozwiązań spełnia to równanie (czyli czy należy do dziedziny</li> </ul>

## Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

## Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

równania)

- Formułujemy wyraźnie odpowiedź

W/W zasady można uczniom wyświetlić na tablic, lub przypomnieć je ustnie, w zależności od poziomu reprezentowanego przez daną klasę.

W dalszej części lekcji przechodzimy do zadań zamieszczonych w załącznikach poniżej:

**Zał. nr 1**

Rozwiąż równanie  $\frac{x+4}{x-6} = 3$

Rozwiązanie:

- Dziedzina równania  $D = R \setminus \{6\}$
- Mnożymy obie strony przez mianownik  $(x - 6)$  otrzymując:  $x + 4 = 3x - 18$
- Rozwiązuję otrzymane równanie liniowe:  $-2x = -22 \Rightarrow x = 11$
- Otrzymana liczba należy do dziedziny równania, jest zatem jego rozwiązaniem
- Odp.  $x = 11$

**Zał. nr 2**

Rozwiąż równanie  $\frac{-4}{x-3} = x + 2$

Rozwiązanie:

- Dziedzina równania  $D = R \setminus \{3\}$
- Obie strony równania mnożymy przez  $(x - 3)$  otrzymując:  $-4 = x^2 - 3x + 2x - 6$
- Porządkując otrzymujemy równanie kwadratowe postaci np.  $x^2 - x - 2 = 0$
- Rozwiązując to równanie otrzymuję liczby  $x_1 = -1$  lub  $x_2 = 2$
- Stwierdzamy, że obie liczby należą do dziedziny, zatem są rozwiązaniem równania
- Odp.  $x_1 = -1$  lub  $x_2 = 2$

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

		<p><b>Zał. nr 3</b></p> <p>Rozwiąż równanie <math>\frac{3x^2 - 3}{2x^2 - x - 1} = 0</math></p> <p><u>Rozwiązanie:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Dziedzina równania: <math>D = R \setminus \left\{ -\frac{1}{2}, 1 \right\}</math></li> <li>• Mnożymy obie strony równania przez <math>(2x^2 - x - 1)</math> otrzymując <math>3x^2 - 3 = 0</math></li> <li>• Rozwiązujemy równanie kwadratowe: <math>x^2 - 1 = 0</math> otrzymując <math>x_1 = -1</math> oraz <math>x_2 = 1</math></li> <li>• Zauważamy, że do dziedziny <b>nie</b> należy <math>x = 1</math>, zatem rozwiązaniem danego równania jest <math>x = -1</math></li> <li>• Odp. <math>x = -1</math></li> </ul> <p><b>Zał. nr 4 Zadania zamknięte:</b></p> <p>1. Iloraz liczb naturalnych <math>x + 1</math> oraz <math>x - 1</math> jest równy 3. Wobec tego liczba <math>x</math> jest równa: A. 1      <b>B. 2</b>      C. 3      D. 4</p> <p>2. Równanie <math>\frac{5}{x} = \frac{x}{5}</math> ma: A. Jedno rozwiązanie ujemne B. Jedno rozwiązanie dodatnie <b>C. Dwa rozwiązania</b> D. Nieskończenie wiele rozwiązań</p> <p>3. Rozwiązaniem równania <math>\frac{2-x}{x-4} = \frac{1}{3}</math> jest liczba: A. <math>-\frac{5}{2}</math>      B. <math>-\frac{2}{5}</math>      C. <math>\frac{2}{5}</math>      <b>D. <math>\frac{5}{2}</math></b></p>
7	Podsumowanie zajęć	Na zakończenie zajęć nauczyciel podsumowuje pracę uczniów, zwraca uwagę na typ równań wymiernych zapisanych w postaci proporcji, wyraźnie wskazując na możliwość rozwiązania innym

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
**Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”**

		sposobem, niemniej jednak muszą być uwzględnione istotne założenia charakteryzujące równania wymierne (dziedzina!)
8	Uwagi metodyczne do realizacji	Bez uwag

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

## Scenariusz nr 2: Działania na liczbach rzeczywistych. Rozwiązywanie równań i nierówności

Temat zajęć		Działania na liczbach rzeczywistych. Rozwiązywanie równań i nierówności
Dział		Algebra
Klasa (poziom edukacyjny)		
Czas trwania zajęć		90 min.
Lp.	Element scenariusza	Treść zajęć
1	Cel ogólny	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Kształcenie samodzielności pracy</li> <li>• Rozwijanie umiejętności czytania zadań ze zrozumieniem</li> <li>• Ćwiczenie umiejętności rozwiązywania zadań dotyczących działań na liczbach rzeczywistych</li> <li>• Ćwiczenie umiejętności rozwiązywania zadań dotyczących rozwiązywania równań i nierówności</li> </ul>
2	Cele szczegółowe	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• wykazuje się umiejętnością działań na potęgach i pierwiastkach;</li> <li>• potrafi obliczać logarytmy;</li> <li>• poprawnie posługuje się pojęciem wartości bezwzględnej i wyznacza wartość bezwzględną liczby;</li> <li>• poprawnie stosuje działania na liczbach rzeczywistych i zna kolejność wykonywania działań;</li> <li>• potrafi wykonywać obliczenia procentowe;</li> <li>• rozwiązuje zadania z treścią dotyczące obliczeń procentowych;</li> <li>• rozwiązuje równania i nierówności liniowe;</li> <li>• rozwiązuje układy równań liniowych;</li> <li>• rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe;</li> <li>• rozwiązuje równania wielomianowe i wymierne.</li> </ul>



**Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy**  
**Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”**

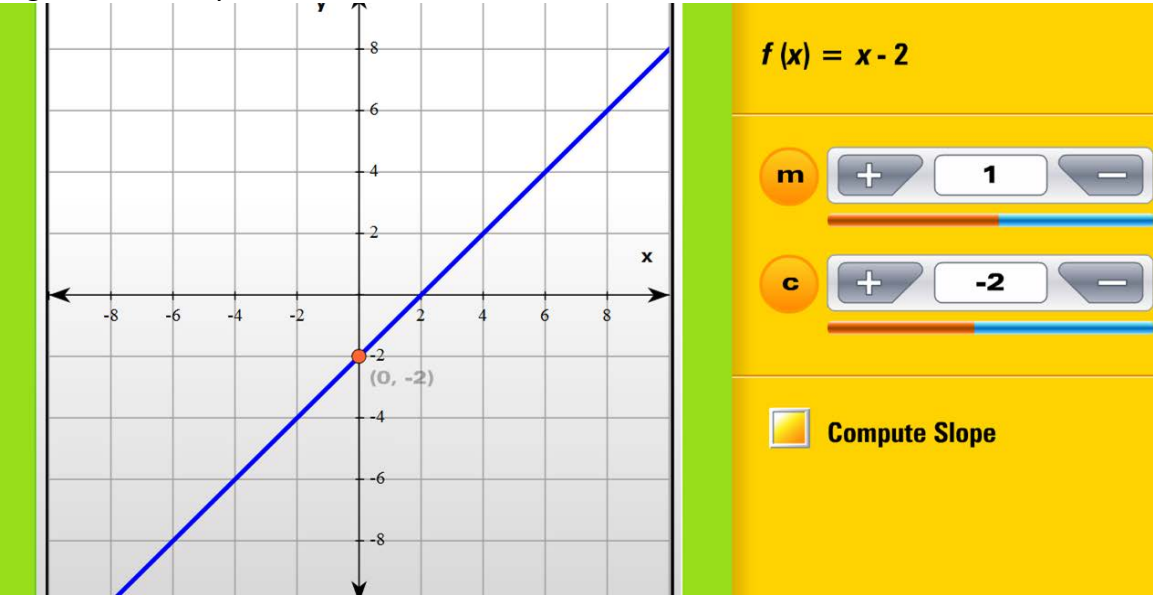
3	Formy i metody	<ul style="list-style-type: none"> <li>Praca indywidualna</li> </ul>
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	Gra „Wyprawa Nasreddina”.
5	Wprowadzenie do zajęć	<p>Wszystkim uczniom udostępnione będą tablice wzorów matematycznych, z których uczniowie mogą korzystać w czasie egzaminu maturalnego z matematyki.</p> <p>Uczniowie zostają zapoznani z zasadami gry “Wyprawa Nasreddina”, w której pokonując kolejne poziomy muszą rozwiązywać zadania z zakresu działań na liczbach rzeczywistych oraz rozwiązywania równań i nierówności.</p>
6	Przebieg zajęć ( <i>pełna wersja</i> )	<p>Grający pokonuje pięć poziomów gry.</p> <p>Na każdym poziomie znajduje się 5 grup zadań. Każdy poziom będzie wymagał rozwiązania po jednym zadaniu z każdej grupy.</p> <p>Gracz przechodzi poziom po uzyskaniu 80% punktów możliwych do zdobycia na tym poziomie.</p>
7	Podsumowanie zajęć	Po zakończeniu gry nastąpi podsumowanie wyników i omówienie występujących problemów.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

### Scenariusz nr 3\*: Graficzna interpretacja nierówności liniowej z dwiema niewiadomymi oraz układy takich nierówności

<b>Temat zajęć</b>		Graficzna interpretacja nierówności liniowej z dwiema niewiadomymi oraz układy takich nierówności
<b>Dział</b>		Algebra
<b>Klasa (poziom edukacyjny)</b>		Klasa I (IV poziom edukacyjny)
<b>Czas trwania zajęć</b>		90 minut
Lp.	Element scenariusza	Treść zajęć
1	Cel ogólny	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Kształtowanie umiejętności rozróżniania i zaznaczania w układzie współrzędnych zbioru rozwiązań nierówności liniowej z dwiema niewiadomymi</li> <li>• Kształtowanie u uczniów postawy dociekliwości, dokładności</li> <li>• Kształtowanie umiejętności wyznaczania części wspólnej zbioru rozwiązań dwóch nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi</li> </ul>
2	Cele szczegółowe	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• potrafi przedstawiać graficznie zbiór rozwiązań nierówności liniowej z dwiema niewiadomymi</li> <li>• poprawnie wyznacza graficznie rozwiązanie układu nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi</li> </ul>
3	Formy i metody	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Dyskusja kierowana</li> <li>• Wykład połączony z pokazem</li> <li>• Ćwiczenia</li> <li>• Praca z klasą</li> <li>• Praca indywidualna</li> </ul>

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

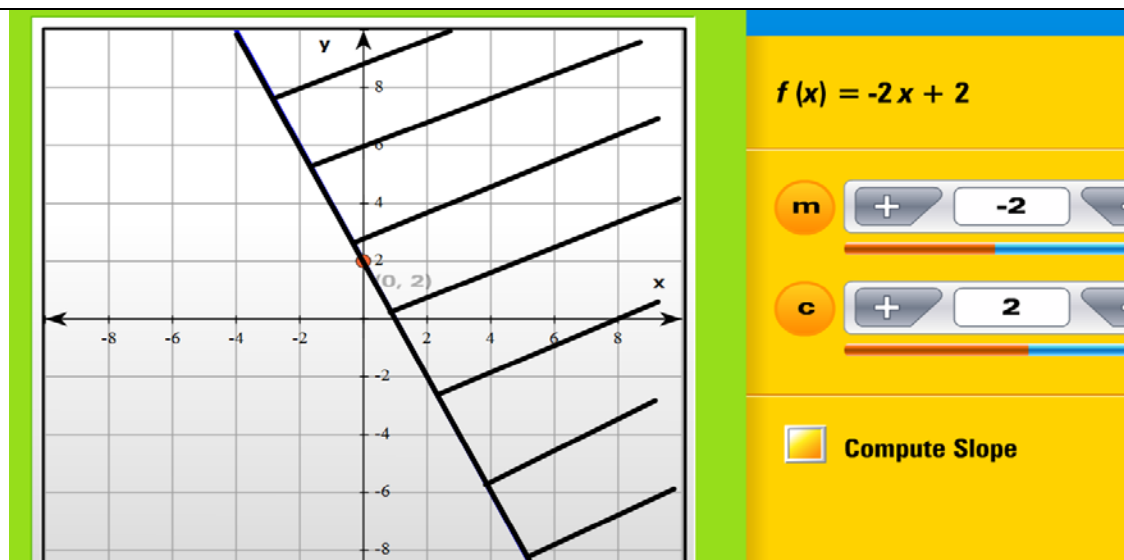
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	Komputer, tablica interaktywna.
5	Wprowadzenie do zajęć	Uczniowie przypominają, co wiedzą na temat graficznej interpretacji równania $y = ax + b$ lub $Ax + By + C = 0$ . Następnie nauczyciel przedstawia temat i cele lekcji.
6	Przebieg zajęć ( <i>pełna wersja</i> )	<p>Nauczyciel prowadzi dyskusję kierowaną: przyjrzyjmy się prostej <math>y = x - 2</math> w układzie współrzędnych. Wykorzystamy w tym celu zasoby tablicy interaktywnej: Zasadnicze składniki galerii-Matematyka-Algebra-Interaktywne i multimedia</p>  <p>Dalsze pytania kierowane do uczniów powinny spowodować, iż zauważą oni podział płaszczyzny na dwie półpłaszczyzny. Formułujemy wspólny wniosek:</p>

## Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

## Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

	<p>Prosta <math>y = x - 2</math> wyznacza w układzie współrzędnych dwie półpłaszczyzny, których krawędzią jest ta prosta.</p> <p>Uczniowie mają za zadanie zaznaczyć kilka punktów, których współrzędne spełniają warunek: <math>y &gt; x - 2</math> oraz <math>y \leq x - 2</math>. Uczniowie zauważają, że pierwszą nierówność spełniają współrzędne punktów, które leżą „nad” prostą, drugą zaś te, które leżą „pod” oraz „na” danej prostej.</p> <p>Stąd też wnioskujemy, iż zbiór rozwiązań nierówności liniowej z dwiema niewiadomymi określa półpłaszczyzna z krawędzią (półpłaszczyzna zamknięta) lub półpłaszczyzna bez krawędzi (półpłaszczyzna otwarta).</p> <p><b>Ćwiczenie 1</b></p> <p>Rozwiąż nierówność: <math>2x + y - 2 \geq 0</math></p> <p><b>Rozwiązanie:</b> Pamiętamy, że zadanie sprowadza się do sporządzenia wykresu tej nierówności. Zatem najpierw przedstawiamy tę nierówność w postaci: <math>y \geq -2x + 2</math>, następnie rysujemy linią ciągłą prostą <math>y = -2x + 2</math> i zaznaczamy zbiór punktów, który leży „nad” tą prostą. Współrzędne tych punktów są rozwiązaniem danej nierówności.</p> <p>Uwaga: W przypadku nierówności ostrej, prostą kreślimy linią przerywaną (umownie: współrzędne punktów leżących na prostej nie spełniają danej nierówności).</p>
--	---

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”



Kolejne pytanie dotyczy zbioru rozwiązań układu dwóch takich nierówności. Naturalną sprawą jest szukanie części wspólnej zbiorów rozwiązań nierówności. Klamerka zapisana w układzie równań oznacza dokładnie spójnik „i”.

**Zadanie 1**

Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów, których współrzędne spełniają warunek:

$$\text{a) } \begin{cases} y \leq 2x \\ x + y - 1 < 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x \leq 3 \\ y \geq -2 \\ 2x - y + 2 \leq 0 \end{cases}$$

**Zadanie 2**

Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór  $A \cap B$ , jeśli  $A = \{(x, y) : x \in R \wedge y \in R \wedge 2x - y < 3\}$  oraz  $B = \{(x, y) : x \in R \wedge y \in R \wedge x + y \geq 0\}$ .



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy  
**Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”**

		<b>Zadanie 3</b> Przedstaw ilustrację graficzną nierówności: $3x - y - 2 < 0$ .
7	Podsumowanie zajęć	Nauczyciel podsumowuje omawiane w czasie lekcji zagadnienia, zwraca uwagę na posługiwanie się poprawnym językiem matematycznym. Podkreśla, iż graficzną interpretacją nierówności liniowej z dwiema niewiadomymi są współrzędne punktów, które tę nierówność spełniają.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	Bez uwag