Wstęp

Zbiór „Mój przedmiot matematyka” jest zestawem 132 scenariuszy przeznaczonych dla uczniów szczególnie zainteresowanych matematyką. Scenariusze mogą być wykorzystywane przez nauczycieli zarówno na typowych zajęciach lekcyjnych wpisanych w zakres podstawowy, jak też w ramach dodatkowych zajęć poszerzających wiedzę uczniów, np. koła zainteresowań. Scenariusze wymagają zastosowania komputerów z dostępem do internetu. Takie wyposażenie pozwoli na wykorzystanie środków dydaktycznych przewidzianych w projekcie „Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy” takich jak moduły e-learningowe: „Elementy statystyki i rachunek prawdopodobieństwa”, „Funkcja kwadratowa”, „Równania i nierówności liniowe i kwadratowe”, „Wielomiany”, gry strategiczne „Wyprawa Nasreddina”, „Herbatka u królowej Anglii”, „Wyprawa na grzyby”, „Matemafia” oraz „Międzykontynentalna szkoła”, poradniki „Ciągi”, „Planimetria”, „Trygonometria”, „Geometria analityczna”. Scenariusze mogą być realizowane na zajęciach lekcyjnych jako całość lub nauczyciel dokonuje wyboru określonych materiałów zgodnie z zaplanowanymi przez siebie tematami – zwiększa to elastyczność stosowania pakietu np. w sytuacji braku zapewnienia w placówce odpowiednich warunków technicznych do realizacji materiału w oparciu o cały pakiet.

Spis scenariuszy

Scenariusz nr 1: Pojęcie ciągu. Wzór ogólny ciągu.

Temat zajęć		**Pojęcie ciągu. Wzór ogólny ciągu.**
Dział		**Ciągi liczbowe**
Klasa (poziom edukacyjny)		
Czas trwania zajęć		**90 min**
Lp.	**Element scenariusza**	**Treść zajęć**
1	Cel ogólny	• Kształcenie samodzielności pracy • Rozwijanie umiejętności czytania ze zrozumieniem • Ćwiczenie umiejętności rozwiązywania zadań dotyczących ciągów liczbowych
2	Cele szczegółowe	Uczeń • rozumie pojęcie ciągu i ciągu liczbowego; • posiada umiejętność szkicowania wykresu ciągu; • wskazuje wyrazy ciągu spełniające określony warunek; • rozumie pojęcie ciągu skończonego i nieskończonego; • oblicza określony wyraz ciągu opisanego wzorem; • wyznacza wyrazy ciągu opisanego wzorem, spełniające określony warunek; • wykazuje się umiejętnością zapisywania w prostych sytuacjach wzoru ciągu, którego dane są kolejne wyrazy.
3	Formy i metody	• Praca indywidualna • Praca w grupie
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym	Poradnik multimedialny „Ciągi liczbowe”.

	wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Zapoznanie z poradnikiem multimedialnym oraz wyjaśnienie zasad pracy na lekcji. Lekcja jest prowadzona z wykorzystaniem poradnika multimedialnego „Ciągi liczbowe” (temat 1 i 2) Wspólnie z uczniami omawiamy potrzebną teorię i rozwiązujemy przykłady zawarte w poradniku. Wyjaśniane są problemy i pojawiające się niejasności. W czasie lekcji korzystamy z tablicy interaktywnej.
6	Przebieg zajęć *(pełna wersja)*	**POJĘCIE CIĄGU** W życiu codziennym często dokonuje się porządkowania zbiorów. Odbywa się to według pewnych ustalonych kryteriów. Np. lista uczniów w klasie jest porządkowana w kolejności alfabetycznej, w szkole sporządza się ranking klas według osiąganych przez nie średnich ocen lub frekwencji. W katalogach bibliotecznych porządkuje się księgozbiór. W ten sposób numerujemy elementy zbioru. Wiadomo wówczas, który element jest pierwszy, który drugi, itd. Mówimy wówczas, że utworzyliśmy ciąg. Z punktu widzenia matematyki tworzymy funkcję, przyporządkowującą kolejnym liczbom naturalnym dodatnim elementy takiego zbioru. **Definicja** Ciąg to funkcja określona na zbiorze liczb naturalnych dodatnich lub na jego skończonym podzbiorze $\{1, 2, 3, \dots, k\}$. Ponumerowane elementy zbioru nazywamy wyrazami ciągu. ***Przykład 1*** Poniższa tabela przedstawia 16 najdłuższych rzek Europy. <table><tr><td>Lp.</td><td>Rzeka</td></tr><tr><td>1.</td><td>Wołga</td></tr><tr><td>2.</td><td>Dunaj</td></tr></table>

3.	Ural
4.	Dniepr
5.	Don
6.	Peczora
7.	Kama
8.	Oka
9.	Bieła
10.	Dniestr
11.	Ren
12.	Wiatka
13.	Desna
14.	Łaba
15.	Doniec
16.	Wisła

Można ją interpretować jako ciąg, w którym nazwy rzek są wyrazami ciągu.
Na podstawie tabeli możemy stwierdzić, że:
- piątym wyrazem jest Don,
- Oka jest ósmym wyrazem ciągu,
- pomiędzy Dnieprem, a Łabą znajduje się dziewięć wyrazów ciągu.

Definicja
Ciągiem skończonym nazywamy ciąg, który ma skończona liczbę wyrazów.
Ciągiem nieskończonym nazywamy ciąg utworzony z nieskończenie wielu wyrazów.

Ciąg opisany w przykładzie 1 jest więc ciągiem skończonym.
Jako przykład ciągu nieskończonego może posłużyć ciąg kolejnych liczb naturalnych parzystych: $0, 2, 4, 6, 8, \ldots.$

		Wyrazy ciągu oznaczamy zwykle za pomocą małych liter z indeksem, np. a_1, a_2, a_3, a_n. I tak a_2 oznacza drugi wyraz cigu, a_n wyraz n −ty. Ciąg z tak ponumerowanymi wyrazami oznaczamy symbolem (a_n). **Definicja** Ciągiem liczbowym nazywamy ciąg, w którym wszystkie wyrazy są liczbami. ***Przykład 2*** Niech (a_n) oznacza ciąg kolejnych liczb pierwszych: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$. Możemy opisać kilka własności tego ciągu: - jest to ciąg liczbowy nieskończony, - $a_1 = 2$ pierwszym wyrazem ciągu jest liczba 2, $a_2 = 3$ drugim wyrazem ciągu jest liczba 3, itd., - w ciągu tym istnieje tylko jeden wyraz parzysty, - w ciągu tym istnieje pięć wyrazów mniejszych od 12. Jak wiemy wszystkie wyrazy ciągu są ponumerowane. Po wyrazie pierwszym jest wyraz drugi, po wyrazie drugim jest wyraz trzeci,…, po wyrazie n −tym jest wyraz $n + 1$. ***Przykład 3*** Zapiszemy dwa kolejne wyrazy ciągu (a_n) występujące po wyrazie a) a_n są to: a_{n+1}, a_{n+2} b) a_{n+2} są to: a_{n+3}, a_{n+4} c) a_{2n} są to: a_{2n+1}, a_{2n+2} ***Przykład 4*** Zapisz symbolicznie: a) Sumę trzech kolejnych wyrazów ciągu b) Iloczyn dwóch kolejnych wyrazów ciągu

c) Sumę dwóch kolejnych wyrazów ciągu występujących bezpośrednio po wyrazie a_{n-4}.

Ad a) $a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$

Ad b) $a_n \cdot a_{n+1}$

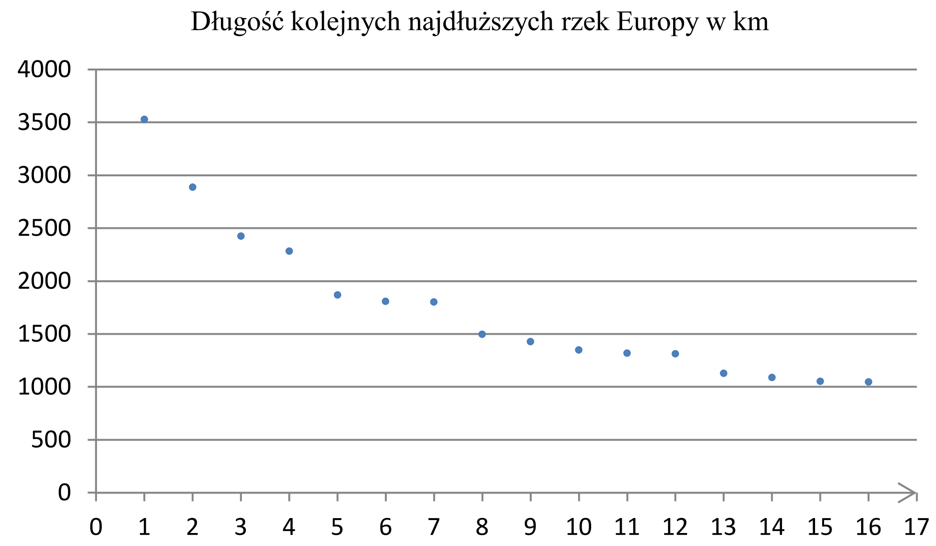
Ad c) $a_{n-3} + a_{n-2}$

Dane liczbowe wpisane w tabeli wygodnie jest czasem potraktować jako funkcję i przedstawić w postaci wykresu.

Przykład 5

Narysujemy wykres ciągu przedstawiającego długości najdłuższych16 najdłuższych rzek Europy

Lp.	Rzeka	Długość w km
1	Wołga	3531
2	Dunaj	2888
3	Ural	2428
4	Dniepr	2285
5	Don	1870
6	Peczora	1809
7	Kama	1805
8	Oka	1500
9	Bieła	1430
10	Dniestr	1352
11	Ren	1320
12	Wiatka	1314
13	Desna	1130
14	Łaba	1091
15	Doniec	1053
16	Wisła	1047



WZÓR OGÓLNY CIĄGU

Niektóre reguły powstawania kolejnych wyrazów ciągu można opisać za pomocą **wzoru ogólnego**.

Przykład 1

Przedstawimy tu kilka ciągów liczbowych i wzory opisujące te ciągi:

Ciąg	Wzór ogólny
a) 3, 6, 9, 12, 15,…	$a_n = 3n$
b) $-1, 1, -1, 1, \ldots$	$b_n = (-1)^n$
c) $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$	$c_n = \frac{1}{n+2}$

Przykład 2

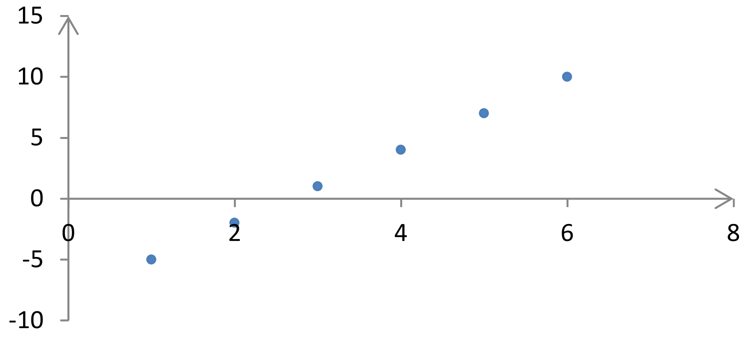
Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = n^2 - 2$. Wyznaczymy trzy początkowe wyrazy ciągu.

$a_1 = 1^2 - 2 = -1$
$a_2 = 2^2 - 2 = 2$
$a_3 = 3^2 - 2 = 7$

Przykład 3
Zapiszemy wyrazy a_{n-1} i a_{n+2} ciągów określonych wzorami:
a) $a_n = \sqrt{n+3}$
b) $a_n = 2^n$
c) $a_n = n^2 - 3n$

Ad a) $a_{n-1} = \sqrt{(n-1)+3} = \sqrt{n+2}$
$a_{n+2} = \sqrt{(n+2)+3} = \sqrt{n+5}$
Ad b) $a_{n-1} = 2^{n-1}$
$a_{n+2} = 2^{n+2}$
Ad c) $a_{n-1} = (n-1)^2 - 3(n-1) = n^2 - 2n + 1 - 3n + 3 = n^2 - 5n + 4$
$a_{n+2} = (n+2)^2 - 3(n+2) = n^2 + 4n + 4 - 3n - 6 = n^2 + n - 2$

Przykład 4.
Narysujemy wykres ciągu określonego wzorem $a_n = 3n - 8$.
Obliczymy kilka początkowych wyrazów tego ciągu:
$a_1 = 3 - 8 = -5$
$a_2 = 6 - 8 = -2$
$a_3 = 9 - 8 = 1$
$a_4 = 12 - 8 = 4$
$a_5 = 15 - 8 = 7$
$a_6 = 18 - 8 = 10$



Przykład 5.

Dany jest ciąg (a_n) opisany wzorem $a_n = \frac{4n-11}{2}$.

a) Ile wyrazów ujemnych ma ten ciąg.

b) Którym wyrazem ciągu jest liczba $12{,}5$?

c) Czy w ciągu tym jest liczba $15\frac{1}{2}$?

d) Które wyrazy ciągu są mniejsze od 18?

Ad a) Wyrazy ujemne ciągu, tzn. $a_n < 0$.

Otrzymujemy warunek $\frac{4n-11}{2} < 0$ i go rozwiązujemy, najpierw mnożąc obustronnie nierówność przez 2.

$$4n - 11 < 0$$
$$4n < 11 \quad |:4$$

$n < \frac{11}{4}$ i $n \in N^+$, czyli $n \in \{1,2,3\}$

Odpowiedź: Wyrazami ujemnymi są a_1, a_2, a_3.

Ad b) $a_n = 12{,}5$ i otrzymujemy równanie $\frac{4n-11}{2} = 12{,}5 \quad |\cdot 2$

$4n - 11 = 25$

$4n = 36 \quad |:4$

		$n = 9$ Odpowiedź: Liczba 12,5 jest dziewiątym wyrazem ciągu , tzn. $a_9 = 12{,}5$. Ad c) Sprawdzając, czy $16\frac{1}{2}$ jest wyrazem ciągu rozwiązujemy równanie $\frac{4n-11}{2} = 15\frac{1}{2} \quad |\cdot 2$ $4n - 11 = 31$ $4n = 42 \quad |:4$ $n = 10{,}5$ Nie jest to liczba naturalna, zatem w ciągu nie ma wyrazu równego 15,5. Ad d) Wyrazy te spełniają warunek $\frac{4n-11}{2} < 18 \quad |\cdot 2$ $4n - 11 < 36$ $4n < 47$ $n < 11{,}75$ i $n \in N^+$. Takich liczb jest 11 ,$n \in \{1, 2, \ldots .11\}$. Odpowiedź: Wyrazami mniejszymi od 18 są wyrazy od pierwszego do jedenastego. *W lekcji znajduje się lista zadań doskonalących umiejętność rozwiązywania zadań dotyczących określenia i własności ciągów. Zadania te mogą być wydrukowane, zaprezentowane na ekranie lub tablicy interaktywnej. Są one rozwiązywane przez uczniów pod kierunkiem nauczyciela.* **Zadanie 1.** Ile wyrazów dodatnich posiada ciąg $a_n = -n^2 + 9n + 10$? Czy ciąg ten posiada wyraz największy? Jeżeli tak, to który wyraz jest największy. **Zadanie 2.** Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = \frac{7n-6}{5}$. Które wyrazy ciągu należą do przedziału $\langle 15{,}6\,;22.6\rangle$?

Zadanie 3.
Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = \frac{2n+3}{n-1}$. Wyznacz: $a_{n-1}, a_{2n+3}, \frac{a_{n+1}}{a_n}, a_{n+3} - a_{n+1}$.
Zadanie 4.
Uzasadnij, że wszystkie wyrazy ciągu $a_n = \frac{-4n^2-11n+3}{4n-1}$ są liczbami całkowitymi ujemnymi.
Zadanie 5.
Dany jest ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = 32^{\frac{n+1}{5}}$. Oblicz siódmy i dziewiąty wyraz tego ciągu.
Zadanie 6.
Dany jest ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{3n+12}{n}$. Wyznacz wszystkie wyrazy tego ciągu, które są liczbami całkowitymi.
Zadanie 7.
Dany jest ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = (2n-3)(n+4)(7-n)$. Które wyrazy tego ciągu są równe 0.
Zadanie 8.
Dany jest ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = log_3(16n-15)$. Oblicz szósty wyraz tego ciągu.
Zadanie 9.
Podaj wzór opisujący ciąg liczb naturalnych dodatnich, które przy dzieleniu przez 6 dają resztę równą 5. Ile jest takich liczb trzycyfrowych?
Zadanie 10.
Sprawdź, czy liczba m jest wyrazem ciągu (a_n). Jeżeli tak, to którym?
a) $a_n = n^2 + 5n - 5, \quad m = 45$
b) $a_n = n^2 - 7n - 5, \quad m = 13$
c) $a_n = 4^n, \quad m = 256$
d) $a_n = (n-15)^2, \quad m = 100$
Zadanie 11.
Wykaż, że wszystkie wyrazy ciągu $a_n = \frac{n^3+8}{n+2}$ są większe lub równe 3.
Zadanie 12.
Wyznacz wzór ogólny nieskończonego ciągu liczbowego, którego początkowymi wyrazami są:

		a) $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{6}{27}, \frac{8}{81}, \ldots$ b) $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{2}{5}, \ldots$ c) $1, -2,\ 4. -8, \ldots$ **Zadanie 13.** Naszkicuj wykres ciągu określonego wzorem: a) $a_n = 3n - 2$ dla $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ b) $a_n = n^2 - 3$ dla $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ c) $a_n = \frac{2}{n+4}$ dla $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
7	Podsumowanie zajęć	Uczniowie przystępują do samodzielnego rozwiązywania zadań zamieszczonych w poradniku. Test 1 – zadania: 1, 2 Test 2 – zadania: 1, 5, 6 Test 3 – zadania: 1, 2, 9 Test 4 – zadania: 1, 2, 13 Test 5 – zadania: 1, 2, 6, 12
8	Uwagi metodyczne do realizacji	

Scenariusz nr 2: Ciągi arytmetyczne

Temat zajęć	**Ciągi arytmetyczne**
Dział	**Ciągi liczbowe**
Klasa (poziom edukacyjny)	
Czas trwania zajęć	**90 min**

Lp.	**Element scenariusza**	**Treść zajęć**
1	Cel ogólny	• Kształcenie samodzielności pracy • Rozwijanie umiejętności czytania ze zrozumieniem • Ćwiczenie umiejętności rozwiązywania zadań dotyczących ciągów arytmetycznych
2	Cele szczegółowe	Uczeń: • rozumie pojęcie ciągu arytmetycznego; • potrafi wyznaczyć różnicę ciągu arytmetycznego, gdy dane są kolejne jego wyrazy; • zna i potrafi zastosować wzór ogólny ciągu arytmetycznego; • potrafi wyznaczyć różnicę ciągu arytmetycznego opisanego wzorem; • potrafi sprawdzić, czy dany ciąg jest arytmetyczny; • potrafi sprawdzić, czy w określonym ciągu występuje dana liczba.
3	Formy i metody	• Praca indywidualna • Praca w grupie
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków	Poradnik multimedialny „Ciągi liczbowe”.

	opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Zapoznanie z poradnikiem multimedialnym oraz wyjaśnienie zasad pracy na lekcji. Lekcja jest prowadzona z wykorzystaniem poradnika multimedialnego „Ciągi liczbowe" (temat 5). Wspólnie z uczniami omawiamy potrzebną teorię i rozwiązujemy przykłady zawarte w poradniku. Wyjaśniane są problemy i pojawiające się niejasności. Wskazane zadania uczniowie rozwiązują samodzielnie. W czasie lekcji korzystamy z tablicy interaktywnej.
6	Przebieg zajęć *(pełna wersja)*	***Przykład 1*** Wyznaczymy reguły według, których powstają kolejne wyrazy poniższych ciągów: • 3, 7, 11, 15, 19,… • -3,-2,-1,0,1,2,3,… • 8, 6, 4, 2, 0, -2, Widzimy w nich pewne podobieństwo. We wszystkich każde dwa kolejne wyrazy różnią się o pewną stałą wartość. - W pierwszym ciągu wystarczy dodawać 4, aby uzyskiwać kolejne wyrazy. - W drugim stale dodajemy 1. - W trzecim ciągu należy odejmować liczbę 2. **Definicja** Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy arytmetycznym wtedy i tylko wtedy, gdy jest co najmniej trzywyrazowy, i którego każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego stałej liczby r, którą nazywamy różnicą ciągu. Wyrazy ciągu arytmetycznego spełniają więc warunek: $a_{n+1} = a_n + r$ dla każdej liczby $n \in N^+$. ***Uwaga***: Aby zbadać czy ciąg (a_n) jest arytmetyczny wystarczy zbadać, czy różnica jego dwóch kolejnych

		wyrazów $a_{n+1} - a_n$ jest wielkością stałą dla dowolnego $n \in N^+$ ***Przykład 2.*** Sprawdzimy, czy dane ciągi są arytmetyczne: a) $a_n = 3n - 4$ b) $b_n = n^2 + 2$ Ad a) $a_{n+1} - a_n = 3(n+1) - 4 - (3n-4) = 3n + 3 - 4 - 3n + 4 = 3$ Jest to wielkość stała. Wobec tego ciąg jest arytmetyczny o różnicy $r = 3$. Ad b) $b_{n+1} - b_n = (n+1)^2 + 2 - (n^2+2) = n^2 + 2n + 1 + 2 - n^2 - 2 = 2n + 1$ Ponieważ różnica nie jest wielkością stałą (zależy od zmiennej n), więc badany ciąg nie jest arytmetyczny. Można też szybciej uzasadnić, że nie jest on arytmetyczny, wyznaczając trzy kolejne wyrazy np. $b_1 = 3, b_2 = 6, b_3 = 11$. Wtedy $b_2 - b_1 \neq b_3 - b_2$. **Własność:** O monotoniczności ciągu arytmetycznego możemy powiedzieć, że: • ciąg jest rosnący, gdy różnica $r > 0$, • ciąg jest stały, gdy różnica $r = 0$, • ciąg jest malejący, gdy różnica $r < 0$. **Własność:** W ciągu arytmetycznym każdy wyraz (który nie jest ani pierwszym, ani ostatnim wyrazem) jest równy średniej arytmetycznej dwóch sąsiednich wyrazów: $$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$$ Załóżmy, że dla pewnego ciągu arytmetycznego (a_n) wiemy ile wynosi a_1 oraz znamy różnicę r. Wtedy:

$$a_2 = a_1 + r$$
$$a_3 = a_2 + r = (a_1 + r) + r = a_1 + 2r$$
$$a_4 = a_3 + r = (a_1 + 2r) + r = a_1 + 3r$$
$$a_5 = a_4 + r = (a_1 + 3r) + r = a_1 + 4r$$

itd.
Z równości tych wynika wzór ogólny ciągu arytmetycznego.

Twierdzenie
Wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) o wyrazie pierwszym a_1 i różnicy r ma postać:
$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

Przykład 3.
Wyznaczymy pięćdziesiąty wyraz ciągu arytmetycznego, w którym wyraz pierwszy $a_1 = 20$ oraz $r = -3$.

Korzystając ze wzoru ogólnego mamy:

$$a_{50} = a_1 + (50-1)r$$
$$a_{50} = 20 + 49 \cdot (-3) = -127$$

Przykład 4.
Sprawdzimy, czy w ciągu arytmetycznym $2, 9, 16, 23, 30, \ldots$ występuje liczba 233.

Oznaczmy ten ciąg (b_n) i wówczas $b_1 = 2$ oraz $r = 7$. Musimy sprawdzić, czy istnieje taka liczba naturalna n, dla której $b_n = 233$.
Korzystając ze wzoru ogólnego: $b_n = b_1 + (n-1)r$ możemy zapisać równanie
$$233 = 2 + (n-1) \cdot 7$$
$$233 = 2 + 7n - 7$$
$$7n = 233 + 5$$

$$7n = 238$$
$$n = 34$$

Odpowiedź: Liczba 233 jest trzydziestym czwartym wyrazem danego ciągu ($a_{34} = 233$).

Przykład 5.

W ciągu arytmetycznym dane są $a_5 = 10$ i $a_{12} = -4$. Obliczymy a_{30}.

Najpierw wyznaczymy wyraz pierwszy i różnicę ciągu, korzystając ze wzoru ogólnego.
Korzystając z równości $a_5 = 10$ i $a_{12} = -4$ mamy układ równań:

$$\begin{cases} 10 = a_1 + 4r \\ -4 = a_1 + 11r \end{cases}$$

Który rozwiązujemy metodą przeciwnych współczynników

$$\begin{cases} -10 = -a_1 - 4r \\ -4 = a_1 + 11r \end{cases}$$
$$-14 = 7r$$

$r = -2$

$$10 = a_1 - 8$$
$$a_1 = 18$$

I dalej $a_{30} = a_1 + 29r = 18 + 29 \cdot (-2) = -40$.

W lekcji znajduje się lista zadań doskonalących umiejętność rozwiązywania zadań dotyczących definicji oraz wzoru na $n-ty$ wyraz ciągu arytmetycznego. Zadania te mogą być wydrukowane, zaprezentowane na ekranie lub tablicy interaktywnej. Są one rozwiązywane przez uczniów pod kierunkiem nauczyciela.

Zadanie 1.

Sprawdź, które z poniższych ciągów są arytmetyczne. W przypadku ciągów arytmetycznych określ, ile wynosi ich różnica.

a) $a_n = \frac{1}{5}n - \frac{2}{3}$

b) $a_n = \frac{3}{n} + 2$

c) $a_n = \frac{n^2+2n-3}{n+3}$

d) $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$.

Zadanie 2.

Wyznacz $n - ty$ wyraz ciągu arytmetycznego, wiedząc, że:

a) $a_1 = 7, \quad r = -2, \quad n = 14$

b) $a_1 = -\frac{7}{4}, \quad r = \frac{5}{2}, \quad n = 20$

c) $a_1 = 10\frac{1}{3}, \quad r = -1\frac{2}{3}, \quad n = 7$

d) $a_1 = 3 - 2\sqrt{5}, \quad r = \sqrt{5} - 2, \quad n = 12$

Zadanie 3.

Wyznacz pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego wiedząc, że:

a) $a_{15} = -2\frac{3}{7}, \quad r = -\frac{4}{7}$

b) $a_6 = -2 + \sqrt{5}, \quad r = 1 - 3\sqrt{5}$

c) $a_{17} = 3, \quad a_{18} = -1$

d) $a_3 - a_2 = -3, \quad a_5 = 23$

Zadanie 4.

Którym wyrazem ciągu arytmetycznego jest liczba a_n, gdy:

a) $a_1 = 4. \quad a_n = -101, \quad r = -7$

b) $a_1 = -5. \quad a_n = 157, \quad r = 6$

c) $a_1 = -37. \quad a_n = -373, \quad r = -8$

Zadanie 5.

Między liczby 6 i 74 wstaw trzy liczby tak, aby wraz z danymi tworzyły ciąg arytmetyczny.

Zadanie 6.

Między liczby 23 i (-25) wstaw pięć liczb tak, aby wraz z danymi tworzyły ciąg arytmetyczny.

Zadanie 7.

Wyznacz wyraz pierwszy oraz różnicę ciągu arytmetycznego, w którym:

		a) $a_4 + a_9 = 43, \quad a_7 + a_{10} = 55$ b) $a_2 + a_5 = 4, \quad a_6 - 2a_3 = -16$ c) $a_2 + a_4 + a_6 = 18. \quad a_3 + a_7 = a_5 + 10$ d) $a_4 + a_7 = 42, \quad a_4 \cdot a_7 = 405$ **Zadanie 8.** Dla jakich wartości a liczby: $4a - 10, a^2 - 4, a + 5$ tworzą (w podanej kolejności) ciąg arytmetyczny. **Zadanie 9.** Dla jakich wartości a liczby: $a^2 - 2, a - 2, 7a + 4$ tworzą (w podanej kolejności) ciąg arytmetyczny. **Zadanie 10.** Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz długości boków trójkąta wiedząc, że jego obwód wynosi $48\ cm$.
7	Podsumowanie zajęć	Uczniowie przystępują do samodzielnego rozwiązywania zadań zamieszczonych w poradniku. Test 1 – zadania: 4, 5, 6, 7, 11 Test 2 – zadania: 4 Test 3 – zadania: 4, 5, 8, 11 Test 4 – zadania: 4, 7, 8, 11 Test 5 – zadania: 5, 7, 9
8	Uwagi metodyczne do realizacji	

Scenariusz nr 3: Suma n-początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

Temat zajęć		**Suma n-początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego**
Dział		**Ciągi liczbowe**
Klasa (poziom edukacyjny)		
Czas trwania zajęć		**90 min**
Lp.	**Element scenariusza**	**Treść zajęć**
1	Cel ogólny	• Kształcenie samodzielności pracy • Rozwijanie umiejętności czytania ze zrozumieniem • Ćwiczenie umiejętności rozwiązywania zadań dotyczących sum początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego
2	Cele szczegółowe	Uczeń: • rozumie pojęcie sumy n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego; • potrafi obliczyć sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.
3	Formy i metody	• Praca indywidualna • Praca w grupie
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	Poradnik multimedialny „Ciągi liczbowe”.

5	Wprowadzenie do zajęć	Zapoznanie z poradnikiem multimedialnym oraz wyjaśnienie zasad pracy na lekcji Lekcja jest prowadzona z wykorzystaniem poradnika multimedialnego „Ciągi liczbowe” (temat 6). Wspólnie z uczniami omawiamy potrzebną teorię i rozwiązujemy przykłady zawarte w poradniku. Wyjaśniane są problemy i pojawiające się niejasności. Wskazane zadania uczniowie rozwiązują samodzielnie. W czasie lekcji korzystamy z tablicy interaktywnej.
6	Przebieg zajęć *(pełna wersja)*	Niech (a_n) oznacza ciąg arytmetyczny o różnicy r. Niech $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ Korzystając z przemienności dodawania możemy tę sumę zapisywać w dowolnej kolejności. $$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$ $$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1$$ Sumy te przedstawimy poniżej w innej postaci i dodamy stronami: $$\boldsymbol{S_n} = a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + \cdots + a_n$$ $$\boldsymbol{S_n} = a_n + (a_n - r) + (a_n - 2r) + \cdots + a_1$$ Wtedy: $2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n)$ $$2S_n = n \cdot (a_1 + a_n)$$ Stąd: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ **Twierdzenie** Suma $n -$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) wyraża się wzorem: $$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$ ***Przykład 1.*** Obliczymy sumę wszystkich liczb naturalnych od 1 do 50. Liczby te stanowią ciąg arytmetyczny o wyrazie pierwszym $a_1 = 1$, ostatnim $a_{50} = 50$. Szukana suma, to $S_{50} = \frac{a_1 + a_{50}}{2} \cdot 50 = \frac{1+50}{2} \cdot 50 = 1275$.

Przykład 2.
Obliczymy sumę stu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego danego wzorem $a_n = 3n - 25$.

W ciągu tym $a_1 = 3 \cdot 1 - 25 = -22$ oraz $a_{100} = 3 \cdot 100 - 25 = 275$
Wtedy $S_{100} = \frac{a_1 + a_{100}}{2} \cdot 100 = \frac{-22+275}{2} \cdot 100 = 12650$

Przykład 3.
Oblicz sumę wyrazów od dwudziestego do czterdziestego dla ciągu arytmetycznego, w którym $a_1 = -8$ i $r = \frac{1}{2}$.

Musimy obliczyć $a_{20} + a_{21} + \cdots + a_{40}$

$$S_{40} = \underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_{19}}_{S_{19}} + a_{20} + a_{21} + \cdots + a_{40}$$

Więc $a_{20} + a_{21} + \cdots + a_{40} = S_{40} - S_{19}$
Obliczamy: $a_{19} = a_1 + 18r = -8 + 18 \cdot \frac{1}{2} = 1$ i $S_{19} = \frac{-8+1}{2} \cdot 19 = -66\frac{1}{2}$
$a_{40} = a_1 + 39r = -8 + 39 \cdot \frac{1}{2} = 11\frac{1}{2}$ i $S_{40} = \frac{-8+11,5}{2} \cdot 40 = 70$
Więc $a_{20} + a_{21} + \cdots + a_{40} = 70 - \left(-66\frac{1}{2}\right) = 136\frac{1}{2}$

Przykład 4.
Lewa strona równania $9 + 13 + 17 + \cdots + x = 555$ jest sumą wyrazów ciągu arytmetycznego. Rozwiążemy to równanie, czyli wyznaczymy x.

x jest n-tym wyrazem ciągu arytmetycznego, zatem możemy oznaczyć $x = a_n$ i wtedy $x = 9 + (n-1) \cdot 4 = 9 + 4n - 4 = 4n + 5$.
Korzystając ze wzoru na sumę początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego mamy:

$$\frac{9 + (4n+5)}{2} \cdot n = 555$$

$$\frac{4n+14}{2}\cdot n = 555$$
$$(2n+7)\cdot n = 555$$
$$2n^2 + 7n - 555 = 0$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie kwadratowe:

$\Delta = 7^2 - 4\cdot 2\cdot(-555) = 4489$ i $\sqrt{\Delta} = 67$

Wtedy: $n_1 = \frac{-7-67}{4} = -\frac{74}{4} = -18{,}5$ i nie jest to liczba naturalna

$$n_2 = \frac{-7+67}{4} = \frac{60}{4} = 15 \in N^+$$

Zatem $x = 4\cdot 15 + 5 = 65$.

Przykład 5.

Marcin uczył się słówek z języka niemieckiego. Pierwszego dnia nauczył się 40 słówek i każdego następnego dnia zmniejszał liczbę słówek o 2. Którego dnia mógł powiedzieć, że ma opanowanych 310 słówek?

Mamy tutaj ciąg arytmetyczny, w którym $a_1 = 40$ i $r = -2$. Jeżeli Marcin ma nauczyć się 310 słówek tzn. że $S_n = 310$ i $a_n > 0$.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)r}{2}\cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)\cdot r}{2}\cdot n$$

$$310 = \frac{2\cdot 40 + (n-1)\cdot(-2)}{2}\cdot n$$
$$310 = \frac{80 - 2n + 2}{2}\cdot n$$

		$$310 = \frac{82-2n}{2} \cdot n$$ $$310 = (41-n) \cdot n$$ $$310 = 41n - n^2$$ $$n^2 - 41n + 310 = 0$$ $$\Delta = (-41)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 310 = 1681 - 1240 = 441$$ $$\sqrt{\Delta} = 21$$ $n_1 = \frac{41-21}{2} = 10$ i $n_2 = \frac{41+21}{2} = 31$ Dla $n_1 = 10$ wyraz dziesiąty to $a_{10} = 40 + 9 \cdot (-2) = 22$ Dla $n_2 = 31$ wyraz dziesiąty to $a_{10} = 40 + 30 \cdot (-2) = -20 < 0$, więc sprzeczność. Odpowiedź: Marcin będzie miał opanowanych 310 słówek dziesiątego dnia. *W lekcji znajduje się lista zadań doskonalących umiejętność rozwiązywania zadań dotyczących sumy $n-$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego . Zadania te mogą być wydrukowane, zaprezentowane na ekranie lub tablicy interaktywnej. Są one rozwiązywane przez uczniów pod kierunkiem nauczyciela.* **Zadanie 1.** Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych parzystych mniejszych od 150. **Zadanie 2.** Oblicz sumę stu dwudziestu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego: a) O pierwszym wyrazie równym 6 i różnicy 2 b) O pierwszym wyrazie równym 8 i wyrazie czwartym równym (-1) c) Określonego wzorem $a_n = 5 - 2n$ d) Określonego wzorem $a_n = 3n - 1$ **Zadanie 3.** Wyznacz różnicę r wyrazów ciągu arytmetycznego, mając dane: a) $a_1 = 20, \quad S_{15} = 1035$ b) $a_n = -7, \quad S_n = 851, \quad n = 23$

		c) $a_n = 4, \quad S_n = -696, \quad n = 29$ **Zadanie 4.** Wyznacz liczbę n wyrazów ciągu arytmetycznego mając dane: a) $S_n = 420, \; r = 3, \quad a_1 = 7$ b) $S_n = 1804, \; r = 8, \quad a_1 = -2$ c) $S_n = -340, \; r = -9, \quad a_1 = 52$ **Zadanie 5.** Oblicz sumę wszystkich dodatnich wyrazów ciągu $a_n = 62 - 3n$. **Zadanie 6.** Oblicz sumę wszystkich wyrazów ciągu $a_n = 4n - 3$, które są mniejsze od 125. **Zadanie 7.** Rozwiąż równanie: $7 + 11 + 15 + \cdots + x = 1272$, w którym lewa strona jest suma kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego. **Zadanie 8.** Rozwiąż równanie $8 + 5 + 2 + \cdots + x = -232$, w którym lewa strona jest suma kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego. **Zadanie 9.** Wyznacz wzór na $n - ty$ wyraz ciągu arytmetycznego, którego suma n początkowych wyrazów wyraża się wzorem: a) $S_n = 3n^2 - n$ b) $S_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{7}{2}n$ c) $S_n = \frac{5}{2}n - \frac{1}{2}n^2$
7	Podsumowanie zajęć	Uczniowie samodzielnie rozwiązują zadania zamieszczone w poradniku. Test 1 – zadania: 12 Test 2 – zadania: 10, 13, 14 Test 3 – zadania: 3 Test 4 – zadanie 9

		Test 5 – zadania: 11, 13
8	Uwagi metodyczne do realizacji	

Scenariusz nr 4: Ciągi geometryczne

Temat zajęć		**Ciągi geometryczne**
Dział		**Ciągi liczbowe**
Klasa (poziom edukacyjny)		
Czas trwania zajęć		**90 min**
Lp.	**Element scenariusza**	**Treść zajęć**
1	Cel ogólny	• Kształcenie samodzielności pracy • Rozwijanie umiejętności czytania ze zrozumieniem • Ćwiczenie umiejętności rozwiązywania zadań dotyczących ciągów geometrycznych
2	Cele szczegółowe	Uczeń • rozumie pojęcie ciągu geometrycznego • wykazuje się znajomością wzoru ogólnego ciągu geometrycznego • potrafi wyznaczyć iloraz ciągu geometrycznego, gdy dane są dwa jego wyrazy • potrafi wyznaczyć iloraz ciągu geometrycznego na podstawie wzoru ciągu
3	Formy i metody	• Praca indywidualna • Praca w grupie
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł,	Poradnik multimedialny „Ciągi liczbowe”.

	gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Zapoznanie z poradnikiem multimedialnym oraz wyjaśnienie zasad pracy na lekcji Lekcja jest prowadzona z wykorzystaniem poradnika multimedialnego „Ciągi liczbowe” (temat 7). Wspólnie z uczniami omawiamy potrzebną teorię i rozwiązujemy przykłady zawarte w poradniku. Wyjaśniane są problemy i pojawiające się niejasności. Wskazane zadania uczniowie rozwiązują samodzielnie. W czasie lekcji korzystamy z tablicy interaktywnej.
6	Przebieg zajęć *(pełna wersja)*	***Przykład 1*** Wyznaczymy reguły według, których powstają kolejne wyrazy poniższych ciągów: • 3, 6, 12, 24, 48,… • -3,3,-3,3,-3,3,-3,… • 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$,$\frac{1}{4}$,… Widzimy w nich pewne podobieństwo. We wszystkich kolejny wyraz powstaje z poprzedniego po pomnożeniu go przez pewną wartość stałą dla każdego ciągu. - W pierwszym ciągu wystarczy mnożyć przez 2 - W drugim stale mnożymy przez -1 - W trzecim ciągu należy mnożyć przez $\frac{1}{2}$. **Definicja** Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy geometrycznym wtedy i tylko wtedy, gdy jest co najmniej trzywyrazowy, i którego każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez stałą liczbę q, którą nazywamy ilorazem ciągu. Wyrazy ciągu geometrycznego spełniają więc warunek: $a_{n+1} = a_n \cdot q$ dla każdej liczby $n \in N^+$. ***Uwaga***: Aby zbadać czy ciąg (a_n) jest geometryczny wystarczy zbadać, czy iloraz jego dwóch kolejnych wyrazów $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest wielkością stałą dla dowolnego $n \in N^+$

Przykład 2.
Sprawdzimy, czy dane ciągi są geometryczne:
a) $a_n = \frac{2}{3^n}$
b) $b_n = n^2$

Ad a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2}{3^{n+1}}}{\frac{2}{3^n}} = \frac{2}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{2} = \frac{1}{3}$
Jest to wielkość stała. Wobec tego ciąg jest geometryczny o ilorazie $q = \frac{1}{3}$.

Ad b) $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$
Ponieważ iloraz nie jest wielkością stałą (zależy od zmiennej n), więc badany ciąg nie jest geometryczny. Można też szybciej uzasadnić, że nie jest on geometryczny, wyznaczając trzy kolejne wyrazy np. $b_1 = 1, b_2 = 4, b_3 = 9$. Wtedy $\frac{b_2}{b_1} \neq \frac{b_3}{b_3}$.

Własność:
Niech (a_n) będzie ciągiem geometrycznym o ilorazie q. Jeśli:
1) $a_1 > 0$ i $q > 1$, to (a_n) jest ciągiem rosnącym;
2) $a_1 > 0$ i $q \in (0.1)$, to (a_n) jest ciągiem malejącym;
3) $a_1 < 0$ i $q > 1$, to (a_n) jest ciągiem malejącym;
4) $a_1 < 0$ i $q \in (0.1)$, to(a_n) jest ciągiem rosnącym;
5) q < 0, to (a_n) nie jest ciągiem monotonicznym.

Własność:
Między trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego (a_n)zachodzi równość:
$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

Załóżmy, że dla pewnego ciągu geometrycznego (a_n) wiemy ile wynosi a_1 oraz znamy iloraz q. Wtedy:

$$a_2 = a_1 \cdot q$$
$$a_3 = a_2 \cdot q = (a_1 \cdot q) \cdot q = a_1 \cdot q^2$$
$$a_4 = a_3 \cdot q = (a_1 \cdot q^2) \cdot q = a_1 \cdot q^3$$
$$a_5 = a_4 \cdot q = (a_1 \cdot q^3) \cdot q = a_1 \cdot q^4$$

itd.
Z równości tych wynika wzór ogólny ciągu geometrycznego.

Twierdzenie
Wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) o wyrazie pierwszym a_1 i ilorazie q ma postać:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Przykład 3.
Wyznaczymy ósmy wyraz ciągu geometrycznego, w którym wyraz pierwszy $a_1 = 24$ oraz $q = -\frac{1}{2}$.

Korzystając ze wzoru ogólnego mamy:

$a_8 = a_1 \cdot q^7$,
$a_8 = 24 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^7 = 24 \cdot \left(-\frac{1}{128}\right) = -\frac{3}{16}$.

Przykład 4.
Między liczby -5 i -405 wstawimy takie trzy liczby x, y, z , aby ciąg $-5, x, y, z, -405$ był ciągiem geometrycznym.

Możemy przyjąć, że jest to ciąg (a_n), w którym $a_1 = -5, a_2 = x, a_3 = y, a_4 = z$ oraz $a_5 = -405$.
Wówczas $a_5 = a_1 \cdot q^4$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

$$-405 = -5 \cdot q^4 \quad |:(-5)$$
$$q^4 = 81$$

Zatem $q = 3$ lub $q = -3$.

Istnieją dwa ciągi spełniające warunki zadania: $-5, -15, -45, -135, -405$ oraz $-5, 15, -45, 135, -405$.

Przykład 5.

Wyznacz ciąg geometryczny (tzn. wyznacz jego wyraz pierwszy a_1 i iloraz q), wiedząc, że wyraz trzeci jest równy 6, a siódmy 96.

Wyraz pierwszy i różnicę ciągu, wyznaczymy korzystając ze wzoru ogólnego.

Mając równości $a_3 = 6$ i $a_7 = 96$ otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} 6 = a_1 \cdot q^2 \\ 96 = a_1 \cdot q^6 \end{cases}.$$

Rozwiązujemy go metodą podstawiania:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{6}{q^2} \\ 96 = \frac{6}{q^2} \cdot q^6 \end{cases}.$$

Rozwiązujemy drugie równanie układu: $96 = 6 \cdot q^4 \quad |:6$

$q^4 = 16$, czyli $q = 2$ lub $q = -2$.

Mamy dwa ciągi spełniające warunki zadania:

$$\begin{cases} q = 2 \\ a_1 = \frac{6}{4} \end{cases} \text{ oraz } \begin{cases} q = -2 \\ a_1 = \frac{6}{4} \end{cases}.$$

W lekcji znajduje się lista zadań doskonalących umiejętność rozwiązywania zadań dotyczących wzoru ogólnego ciągu geometrycznego i jego własności. Zadania te mogą być wydrukowane, zaprezentowane na ekranie lub tablicy interaktywnej. Są one rozwiązywane przez uczniów pod kierunkiem nauczyciela

Zadanie 1.
Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego:
a) $8, 24, 72, \ldots$
b) $\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{27}$
c) $\sqrt{5}, 5, 5\sqrt{5}, \ldots$
Zadanie 2.
Zapisz wzór ogólny i oblicz szósty wyraz ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q, gdy:
a) $a_1 = -5, \ \ q = \frac{2}{5}$
b) $a_1 = 27, \ \ q = -\frac{1}{3}$
c) $a_1 = -\frac{9}{64}, \ \ q = \frac{2}{3}$
Zadanie 3.
Wyznacz pierwszy wyraz ciągu geometrycznego a_1, jeżeli:
a) $a_7 = \frac{5}{512}, \ \ \ q = \frac{1}{2}$
b) $a_8 = \frac{32}{81}, \ \ \ q = -\frac{2}{3}$
c) $a_4 = -0{,}192, \ \ \ q = -0{,}2$
Zadanie 4.
Sprawdź, które z poniższych ciągów są geometryczne. W przypadku ciągów geometrycznych określ, ile wynosi ich iloraz.
a) $a_n = 3^{n+4}$
b) $a_n = \frac{2^{n+3}}{5^{n-4}}$
c) $a_n = \frac{7}{n}$
d) $a_n = n^2 + 3$
Zadanie 5.
Wyznacz $n - ty$ wyraz ciągu geometrycznego, wiedząc, że:
a) $a_1 = \frac{1}{7}, \qquad q = \sqrt{7}, \qquad n = 5$

		b) $a_1 = 5, \quad q = 2, \quad n = 7$ c) $a_1 = \frac{1}{81}, \quad q = \frac{3}{2}, \quad n = 9$ d) $a_1 = \frac{9}{125}, \quad q = 5, \quad n = 8$ **Zadanie 6.** Między liczby $-\frac{3}{8}$ oraz -96 wstaw trzy liczby tak, aby wraz z danymi tworzyły ciąg geometryczny. **Zadanie 7.** Dla jakiej wartości x liczby $3\sqrt{5} + 6\,, x, \frac{\sqrt{5}-2}{3}$ tworzą ciąg geometryczny. **Zadnie 8.** Wyznacz pierwszy wyraz i iloraz ciągu geometrycznego (a_n) mając dane: a) $a_3 = \frac{100}{24}, \quad a_5 = \frac{125}{96}$ b) $a_7 = -1, \quad a_{11} = -\frac{1}{16}$ c) $a_4 = 8, \quad a_8 = \frac{128}{625}$ **Zadanie 9.** Którym wyrazem podanego ciągu geometrycznego jest liczba x: a) $\frac{9}{16}, \frac{3}{4}, \dots, \quad x = \frac{256}{81}$ b) $\frac{9}{16}, \frac{3}{4}, \dots, \quad x = \frac{256}{81}$ c) $1\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \dots, \quad x = \frac{1}{1701}$ **Zadanie 10.** Dla jakiej wartości x podane liczby tworzą ciąg geometryczny? a) $3, x + 1, x + 19$ b) $-25, 3x + 2, -16$ c) $5x + 1, 4, x - 2$
7	Podsumowanie zajęć	Uczniowie samodzielnie rozwiązują zadania zamieszczone w poradniku. Test 1 – zadania: 9, 10, 14

		Test 2 – zadania: 3, 12 Test 3 – zadania: 6, 7, 10, 12 Test 4 – zadania: 3, 5, 10 Test 5 – zadania: 3, 4, 8, 10
8	Uwagi metodyczne do realizacji	

Scenariusz nr 5: Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

Temat zajęć		**Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego**
Dział		**Ciągi liczbowe**
Klasa (poziom edukacyjny)		
Czas trwania zajęć		**90 min**
Lp.	**Element scenariusza**	**Treść zajęć**
1	Cel ogólny	• Kształcenie samodzielności pracy • Rozwijanie umiejętności czytania ze zrozumieniem • Ćwiczenie umiejętności rozwiązywania zadań dotyczących obliczania sum wyrazów ciągu geometrycznego
2	Cele szczegółowe	Uczeń: • doskonali umiejętności dotyczące rozwiązywania zadań dotyczących ciągu geometrycznego; • wykazuje się znajomością zastosowania wzoru na sumę n-początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.
3	Formy i metody	• Praca indywidualna • Praca w grupie
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł,	Poradnik multimedialny „Ciągi liczbowe”.

	gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Zapoznanie z poradnikiem multimedialnym oraz wyjaśnienie zasad pracy na lekcji Lekcja jest prowadzona z wykorzystaniem poradnika multimedialnego „Ciągi liczbowe” (temat 8). Wspólnie z uczniami omawiamy potrzebną teorię i rozwiązujemy przykłady zawarte w poradniku. Wyjaśniane są problemy i pojawiające się niejasności. Wskazane zadania uczniowie rozwiązują samodzielnie. W czasie lekcji korzystamy z tablicy interaktywnej.
6	Przebieg zajęć *(pełna wersja)*	Wyprowadzenie wzoru na sumę n-początkowych wyrazów ciągu geometrycznego Niech (a_n) oznacza ciąg geometryczny o ilorazie q oraz $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Mnożąc obie strony powyższej równości przez q otrzymamy: $$qS_n = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + \cdots + a_n \cdot q$$ więc $$qS_n = a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n+1}$$ wobec tego $S_n - qS_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - (a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n+1})$ $$S_n(1-q) = a_1 - a_{n+1}$$ $S_n = \frac{a_1 - a_1 \cdot q^n}{1-q}$ dla $q \neq 1$. **Twierdzenie** Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) wyraża się wzorem: • $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ dla $q \neq 1$ • $S_n = na_1$ dla $q = 1$. Zastosowanie powyższego twierdzenia do rozwiązywania zadań ***Przykład 1.*** Obliczymy sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, w którym wyraz pierwszy $a_1 = 3\sqrt{2}$ oraz $q = \sqrt{2}$.

Na podstawie wzoru $S_{10}=\frac{a_1(1-q^{10})}{1-q}=\frac{3\sqrt{2}\left(1-(\sqrt{2})^{10}\right)}{1-\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}(1-32)}{1-\sqrt{2}}=\frac{-93\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}=\frac{-93\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{1-2}=\frac{-93\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{-1}=93\sqrt{2}(1+\sqrt{2})$.

Przykład 2.
Obliczymy sumę ciągu geometrycznego $6+3+\cdots+\frac{3}{32}$.

Najpierw ustalimy ile wyrazów jest w tej sumie. $q=\frac{1}{2}$ oraz $a_n=\frac{3}{32}$, zatem $6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{3}{32}$.
Rozwiązując to równanie mamy: $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{3}{32}\cdot\frac{1}{6}$
$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{64}$,
Czyli $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{6}$ i stąd $n=7$.
Mamy zatem $S_7=\frac{a_1(1-q^7)}{1-q}=\frac{6\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^7\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{6\left(1-\frac{1}{128}\right)}{\frac{1}{2}}=12\cdot\frac{127}{128}=\frac{381}{32}$.

Przykład 3.
Obliczymy sumę wszystkich dodatnich dzielników liczby 2048.

Takich dzielników mamy dwanaście: $1,2,2^2,2^3,2^4,\cdots.2^{11}$. Stanowią one ciąg geometryczny o ilorazie 2. Wobec tego ich suma wynosi:

$$S_{12}=\frac{a_1\cdot(1-q^{12})}{1-q}$$

$$S_{12}=\frac{1\cdot(1-2^{12})}{1-2}=\frac{1-4096}{-1}=4095.$$

Przykład 4.

Obliczymy iloraz ciągu geometrycznego, w którym $a_1 = -5$ oraz $S_3 = -\frac{15}{4}$.

Korzystając ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego mamy:

$S_3 = \frac{a_1 \cdot (1-q^3)}{1-q}$,

$-\frac{15}{4} = \frac{-5 \cdot (1-q^3)}{1-q} \quad |:(-5)$,

$\frac{3}{4} = \frac{(1-q)(1+q+q^2)}{1-q}$,

$\frac{3}{4} = 1 + q + q^2 \quad |\cdot 4$,

$3 = 4 + 4q + 4q^2$ i otrzymujemy równanie kwadratowe.

$4q^2 + 4q + 1 = 0$

$(2q+1)^2 = 0$

I dlatego $2q + 1 = 0$ i mamy $q = -\frac{1}{2}$.

Przykład 5.

W ciągu geometrycznym o ilorazie $q = \sqrt{3}$ dany jest wyraz drugi $a_2 = 3\sqrt{3}$ oraz $S_n = 3(40 + 13\sqrt{3})$. Wyznaczymy ile wyrazów tworzy tę sumę.

Najpierw ustalimy wyraz pierwszy tego ciągu: $a_1 = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3$

Wiemy, że $S_n = \frac{a_1 \cdot (1-q^n)}{1-q}$, zatem po podstawieniu danych z zadnia mamy

$3(40 + 13\sqrt{3}) = \frac{3 \cdot \left(1 - \sqrt{3}^n\right)}{1-\sqrt{3}} \quad |:3$

$40+13\sqrt{3}=\frac{\left(1-\sqrt{3}^{n}\right)}{1-\sqrt{3}}$

$(40+13\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=1-\sqrt{3}^{n}$

$40-40\sqrt{3}+13\sqrt{3}-39=1-\sqrt{3}^{n}$

$-27\sqrt{3}=-\sqrt{3}^{n}$

$\sqrt{3}^{n}=27\sqrt{3}$

$n=7$

Odpowiedź: Sumę tę tworzy siedem wyrazów.

W lekcji znajduje się lista zadań doskonalących umiejętność rozwiązywania zadań dotyczących sumy $n-$ początkowych wyrazów ciągu geometrycznego . Zadania te mogą być wydrukowane, zaprezentowane na ekranie lub tablicy interaktywnej. Są one rozwiązywane przez uczniów pod kierunkiem nauczyciela.

Zadanie 1.

Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, określonego wzorem $a_n=\frac{10}{5^n}$.

Zadanie 2.

Oblicz sumę ośmiu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, w którym $a_1=3$ i $q=1\frac{1}{2}$.

Zadanie 3.

Oblicz sumę wyrazów ciągu geometrycznego:

a) $5+\frac{5}{2}+\cdots+\frac{5}{64}$

b) $\frac{5}{3}+1+\cdots+\left(\frac{3}{5}\right)^4$

c) $12-6+\cdots-\frac{3}{32}$

Zadanie 4.

Oblicz sumę ośmiu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, w którym wyraz trzeci jest równy $\frac{9}{2}$,

		zaś wyraz szósty wynosi $\left(-\frac{9}{16}\right)$, **Zadanie 5.** Suma pewnej liczby wyrazów ciągu geometrycznego wynosi 26. Pierwszy wyraz to liczba -16, zaś ostatni 54 Wyznacz iloraz tego ciągu oraz liczbę wyrazów, które zsumowano. **Zadanie 6.** Oblicz ile początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o wyrazie pierwszym równym 8 oraz ilorazie $\left(-\frac{1}{2}\right)$ należy dodać, aby otrzymać sumę równą $\frac{85}{16}$. **Zadanie 8.** Oblicz ile początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o wyrazie ostatnim równym $\frac{5}{16}$ oraz ilorazie $\frac{1}{2}$ należy dodać, aby otrzymać sumę równą $19\frac{11}{16}$. Wyznacz pierwszy wyraz tego ciągu.
7	Podsumowanie zajęć	Uczniowie przystępują do samodzielnego rozwiązywania zadań zawartych w poradniku Test 1 – zadania: 8 Test 2 – zadania: 8 Test 3 – zadanie 13 Test 4 – zadania: 14
8	Uwagi metodyczne do realizacji	

Scenariusz nr 6: Procent prosty i procent składany

Temat zajęć		**Procent prosty i procent składany**
Dział		**Ciągi liczbowe**
Klasa (poziom edukacyjny)		
Czas trwania zajęć		**90 min**
Lp.	**Element scenariusza**	**Treść zajęć**
1	Cel ogólny	• Kształcenie samodzielności pracy • Rozwijanie umiejętności czytania ze zrozumieniem • Ćwiczenie umiejętności rozwiązywania zadań dotyczących procentu prostego i składanego
2	Cele szczegółowe	Uczeń: • rozumie pojęcia procentu prostego i składanego; • wykazuje się znajomością zastosowania wzoru na procent prosty; • wykazuje się znajomością zastosowania wzoru na procent składany.
3	Formy i metody	• Praca indywidualna • Praca w grupie
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	Poradnik multimedialny „Ciągi liczbowe”.

5	Wprowadzenie do zajęć	Zapoznanie z poradnikiem multimedialnym oraz wyjaśnienie zasad pracy na lekcji Lekcja jest prowadzona z wykorzystaniem poradnika multimedialnego „Ciągi liczbowe” (temat 9 i 10). Wspólnie z uczniami omawiamy potrzebną teorię i rozwiązujemy przykłady zawarte w poradniku. Wyjaśniane są problemy i pojawiające się niejasności. Wskazane zadania uczniowie rozwiązują samodzielnie. W czasie lekcji korzystamy z tablicy interaktywnej.
6	Przebieg zajęć *(pełna wersja)*	***Analiza zagadnień związanych z procentem prostym*** ***Przykład 1.*** Pan Marek wpłacił na konto pewnego banku 5000 zł. Po każdym roku oszczędzania bank dopisze do jego oszczędności 10% wartości wpłaty, czyli 500 zł. Jaki będzie stan konta pana Marka po roku, dwóch latach, trzech latach, czterech latach, pięciu latach. A jaki po 15 latach oszczędzania. Niech K_n oznacza stan oszczędności po n-tym roku. Wtedy: $K_1 = 5000 + 500 = 5500$ zł $K_2 = 5500 + 500 = 6000$ zł $K_3 = 6000 + 500 = 6500$ zł $K_4 = 6500 + 500 = 7000$ zł $K_5 = 7000 + 500 = 7500$ zł Jak widać kolejne wartości tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 500 zł. Zatem $K_{15} = 5000 + 15 \cdot 500 = 12500$ zł. **Procent prosty** - to sposób oprocentowania wkładu pieniężnego, polegający na tym, że dochód w postaci odsetek nie jest doliczany do wkładu (nie podlega kapitalizacji) - nie procentuje więc wraz z nim w następnym okresie rozliczeniowym. Odsetki są tu płatne z dołu - po zakończeniu okresu. Wprowadzimy oznaczenia: K_0 – kapitał początkowy $p\%$ - oprocentowanie n – ilość okresów odsetkowych K_n – kapitał końcowy Wtedy:

$$K_n = K_0 + \frac{p}{100} \cdot K_0 \cdot n$$

Przykład 2.
Telewizor w pewnym sklepie kosztował 2500 zł. Właściciel sklepu postanowił co tydzień obniżać jego cenę o 4% początkowej wartości. Jaka będzie cena telewizora po sześciu tygodniach.

Jak widać mamy tutaj do czynienia z procentem prostym. Cena jest obniżana za każdym razem o tę samą stałą wartość.
Korzystając z podanego wyżej wzoru mamy:
$K_6 = 2500 - \frac{4}{100} \cdot 2500 \cdot 6 = 2500 - 600 = 1900$ zł

Przykład 3.
Do pustej skarbonki wkładamy w pierwszym miesiącu 100 zł. W każdym kolejnym miesiącu dokładamy tam więcej niż w poprzednim o kwotę 10 % pierwszej wpłaty. Ile pieniędzy znajdzie się w skarbonce po upływie roku?

Co miesiąc będziemy do skarbonki wkładać o $10\% \cdot 100 = 10$ zł więcej niż w poprzednim.
Mamy więc do czynienia z procentem prostym. W dwunastym miesiącu wpłata wyniesie:
$K_{12} = 100 + 10 \cdot 11 = 100 + 110 = 210$ zł.
Ponieważ mamy tu do czynienia z ciągiem arytmetycznym, więc suma wszystkich wpłat wynosi: $S_{12} = \frac{100+210}{2} \cdot 12 = 1860$ zł

Przykład 4.
Pewna firma, kupując maszynę, może uzyskać $1\ \%$ rabatu lub zapłacić za maszynę całą kwotę za trzy miesiące. Który sposób zawarcia zapłaty jest dla firmy korzystniejszy, jeśli aktualna stopa procentowa dla lokat jest równa $6\ \%$. (Nie uwzględniamy podatku od odsetek)

Niech K oznacza cenę maszyny.

W przypadku natychmiastowej płatności uzyskamy rabat i zapłacimy $0{,}99K$, więc zyskujemy $0{,}01K$.
W przypadku odroczonej płatności, odsetki od lokaty wyniosą:
$\frac{3}{12} \cdot 0{,}06 \cdot K = 0{,}015K$, czyli kapitał będzie wynosił $1{,}015K$, co oznacza, ze po zapłaceniu za maszynę zostaje $0{,}015K$.
Zatem drugi sposób jest dla firmy korzystniejszy.

Przykład 5.
Składamy w banku kwotę 40 000 zł na jeden rok. Przez pierwsze trzy miesiące stopa procentowa od lokat była równa 5,6 %, przez następne sześć miesięcy była równa 5,4 %, a przez ostatnie trzy miesiące 4,8 %. Obliczymy kwotę odsetek po upływie roku. (Odsetki są cały czas naliczane od kwoty początkowej 40 000zł)

$$\frac{3}{12} \cdot 0{,}056 \cdot 40000 + \frac{6}{12} \cdot 0{,}054 \cdot 40000 + \frac{3}{12} \cdot 0{,}048 \cdot 40000 = 560 + 1080 + 480 =$$
$$= 2120 \text{ zł}$$

Odpowiedź: Odsetki wyniosą 2120 zł

Analiza zagadnień związanych z procentem składanym
Przykład 1.
Pani Marta wpłaciła na konto pewnego banku 5000 zł. Po każdym roku oszczędzania bank dopisze odsetki w wysokości 5% aktualnego stanu konta, tzw. oczna kapitalizacja. Jaki będzie stan konta pani Marty po roku, dwóch latach, trzech latach, czterech latach, pięciu latach. A jaki po 15 latach oszczędzania.

Niech K_n oznacza stan oszczędności po n-tym roku. Wtedy:
$K_1 = 5000 \cdot 1{,}05 = 5250$ zł
$K_2 = K_1 \cdot 1{,}05 = 5000 \cdot 1{,}05^2 = 5512{,}5$ zł
$K_3 = K_2 \cdot 1{,}05 = 5000 \cdot 1{,}05^3 = 5788{,}13$ zł
$K_4 = K_3 \cdot 1{,}05 = 5000 \cdot 1{,}05^4 = 6077{,}53$ zł
$K_5 = K_4 \cdot 1{,}05 = 5000 \cdot 1{,}05^5 = 6381{,}41$ zł

Jak widać kolejne wartości tworzą ciąg geometryczny o ilorazie 1,05.
Zatem $K_{15} = 5000 \cdot 1{,}05^{15} = 10394{,}64$ zł.

Procent składany – sposób oprocentowania wkładu pieniężnego, polegający na tym, że odsetki są doliczane do wkładu (podlegają kapitalizacji) i procentują wraz z nim w okresie następnym.

Wprowadzimy oznaczenia:
K_0 – kapitał początkowy
$p\%$ - oprocentowanie
n – ilość okresów odsetkowych
K_n – kapitał końcowy
Wtedy:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Przykład 2.
O ile procent wzrośnie cena akcji pewnej spółki, jeżeli na kolejnych pięciu sesjach giełdowych wzrastała ona o 10 %.

Oznaczmy jako x cenę początkową akcji.
Po kolejnych pięciu sesjach wyniesie ona $x \cdot (1 + 0{,}1)^5 = x \cdot 1{,}61051$
Zatem wzrost ceny będzie o ponad 61 %.

Przykład 3.
W pewnym mieście mieszka 25 000 mieszkańców. Po ilu latach liczba mieszkańców przekroczy 30 000, jeśli roczny przyrost naturalny będzie przez następne lata równy 2,3 %?

Na podstawie danych z zadania widać, że musimy rozwiązać nierówność:

$$25000 \cdot (1 + 0{,}023)^n > 30000 \quad |: 25000$$

$$(1{,}023)^n > 1{,}2$$

Najmniejszą liczbą naturalną, dla której jest spełniona nierówność jest $n = 9$.
Odpowiedź: Liczba ludności miasta przekroczy 30 000 dziewięciu latach.

Przykład 4.

Komputer taniał pięciokrotnie o 10% i obecnie kosztuje 1771,47 zł.

a) Jaka była początkowa cena komputera?
b) O ile procent łącznie potaniał komputer?

Ad a) Niech K oznacza początkową cenę komputera. Ponieważ jego cena spada za każdym razem o 10 % wartości bieżącej, więc mamy do czynienia z procentem składanym. Wykorzystując dane z zadania otrzymujemy równanie:

$$K \cdot (1 - 0{,}1)^5 = 1771{,}47$$
$$K \cdot (0{,}9)^5 = 1771{,}47$$
$$K \cdot 0{,}59049 = 1771{,}47 \qquad |: 0{,}59049$$
$$K = 3000$$

Komputer przed obniżkami kosztował 3000 zł.

Ad b) Obniżka ceny komputera wyniosła $3000 - 1771{,}47 = 1228{,}53$ (zł)

$$\frac{1228{,}53}{3000} \cdot 100\% = 40{,}951\%$$

Całkowita obniżka ceny wyniosła prawie 41%.

Przykład 5.

Na lokatę trzymiesięczną, oprocentowaną 4 % w stosunku rocznym, wpłacono 6 000 zł. Jaki będzie stan tej lokaty po dwóch latach oszczędzania?

Oprocentowanie lokaty w stosunku rocznym wynosi 4 %, więc na jeden okres odsetkowy (3 miesiące) przypada: $\frac{3}{12} \cdot 4\% = 1\%$.

W ciągu dwóch lat odsetki będą naliczane 8 razy (czterokrotnie w ciągu każdego roku).
Zatem wartość lokaty po dwóch latach wyniesie:
$K_8 = 6000 \cdot (1 + 0{,}01)^8 = 6497{,}14$ zł

W lekcji znajduje się lista zadań doskonalących umiejętność rozwiązywania zadań dotyczących procentu prostego oraz składanego . Zadania te mogą być wydrukowane, zaprezentowane na ekranie lub tablicy interaktywnej. Są one rozwiązywane przez uczniów pod kierunkiem nauczyciela.

Zadanie 1.
W banku, który oferuje roczną stopę procentową 6% i kapitalizację prostą, złożono 15 000 zł. Oblicz odsetki jakie naliczy bank:
a) po 8 miesiącach, stosując kapitalizację miesięczną
b) po 1,5 roku stosując kapitalizację półroczną.

Zadanie 2.
Pan X wpłacił ma lokatę 10 000 zł . Bank stosuje kapitalizację prostą z roczną stopą procentową $5{,}4\%$ i dopisuje odsetki co roku. Oblicz, jaki będzie stan lokaty pana X po czterech latach oszczędzania.

Zadanie 3.
Pan Y po czterech latach oszczędzania ma na koncie 2556,4 zł. Oprocentowanie tej lokaty przez cały czas wynosiło 5% i była stosowana kapitalizacja prosta. Po zakończeniu lokaty bank odliczył $19\ \%$ podatku. Jaką kwotę wpłacił pan Y przed czterema laty?

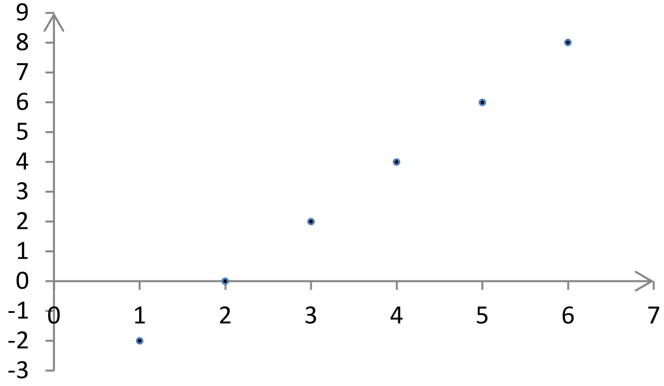
Zadanie 4.
Pan Z planuje za pół roku remont domu. Potrzebuje na ten cel kwotę 23 000 zł. Jednak w tej chwili dysponuje kwotą 21 500 zł.
a) Określ, czy wpłata do banku tej kwoty wystarczy, by za pół roku pan Z otrzymał oczekiwaną kwotę, jeżeli bank zastosuje oprocentowanie $1\ \%$ w skali miesiąca i miesięczną kapitalizację prostą.
b) Jakie oprocentowanie w skali miesiąca powinien zaoferować panu Z bank, aby po wpłacie kwoty 21 000 zł otrzymał po pól roku kwotę potrzebną na remont?

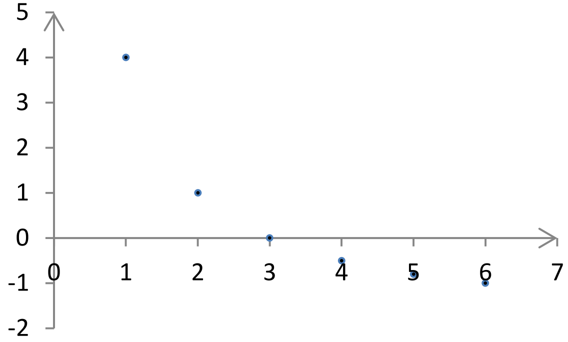
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

		Zadanie 5. Pani A założyła lokatę o wartości 6000 zł na okres 4 lat, w banku który oferuje roczną stopę procentową 4 % w skali roku i kapitalizacją złożoną. Oblicz kapitał na koncie pani A i podaj jej zysk po czterech latach. (zakładamy, że w tym czasie bank nie zmieniał oprocentowania i nie uwzględniamy podatku od odsetek) **Zadanie 6.** Pani B złożyła w banku 5000 zł na lokacie, której oprocentowanej 6% w stosunku rocznym. Odsetki kapitalizowane są co pół roku. Jaki będzie stan jej lokaty po 5 latach oszczędzania? **Zadanie 7.** Jak długo należałoby oszczędzać na lokacie trzymiesięcznej, której oprocentowanie wynosi 8% w stosunku rocznym, aby kwota na lokacie wzrosła o 45%? **Zadanie 8.** Na lokatę dwumiesięczną, której oprocentowanie wynosi 6% wpłacono 2000 zł. Po ilu miesiącach stan tej lokaty wyniesie 2166 zł. **Zadanie 9.** O ile procent wzrośnie po czterech latach kwota wpłacona na lokatę kwartalną, jeżeli jej oprocentowanie wynosi 4% w stosunku rocznym? **Zadanie 10.** Na lokatę trzymiesięczną wpłacono 5000 zł i po trzech latach oszczędzania kwota ta wzrosła o 978 zł. Jakie było oprocentowanie tej lokaty.
7	Podsumowanie zajęć	Uczniowie przystępują do samodzielnego rozwiązywania zadań zawartych w poradniku. Test 1 – zadania: 15 Test 2 – zadania: 8, 15 Test 3 – zadania: 15 Test 4 – zadania: 6, 15
8	Uwagi metodyczne do realizacji	

Scenariusz nr 7*: Monotoniczność ciągu

Temat zajęć		**Monotoniczność ciągu**
Dział		**Ciągi liczbowe**
Klasa (poziom edukacyjny)		
Czas trwania zajęć		**90 min**
Lp.	**Element scenariusza**	**Treść zajęć**
1	Cel ogólny	• Kształcenie samodzielności pracy • Rozwijanie umiejętności czytania ze zrozumieniem • Ćwiczenie umiejętności rozwiązywania zadań dotyczących monotoniczności ciągu
2	Cele szczegółowe	Uczeń • wykazuje się umiejętnością określania monotoniczności ciągu na podstawie wykresu; • wykazuje się umiejętnością określania monotoniczności ciągu na podstawie definicji.
3	Formy i metody	Praca indywidualna Praca w grupie
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	Poradnik multimedialny.
5	Wprowadzenie do zajęć	Zapoznanie z poradnikiem multimedialnym.

6	Przebieg zajęć *(pełna wersja)*	**MONOTONICZNOŚĆ CIĄGU** Jak wiemy ciągi są szczególnym rodzajem funkcji. Zatem dla ciągów liczbowych możemy zdefiniować monotoniczność. ***Przykład 1*** Narysujemy wykres ciągu $a_n = 2n - 4$ i na tej podstawie określimy jego monotoniczność  Patrząc na wykres ciągu możemy stwierdzić, że jest on rosnący. Każdy $n - ty$ wyraz jest mniejszy od wyrazu następnego, czyli $n + 1$ −go. **Definicja** Ciąg (a_n) jest rosnący wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $n \in N^+$ spełniony jest warunek $a_n < a_{n+1}$. ***Przykład 2*** Narysujemy wykres ciągu $a_n = \frac{6}{n} - 2$ i na tej podstawie określimy jego monotoniczność



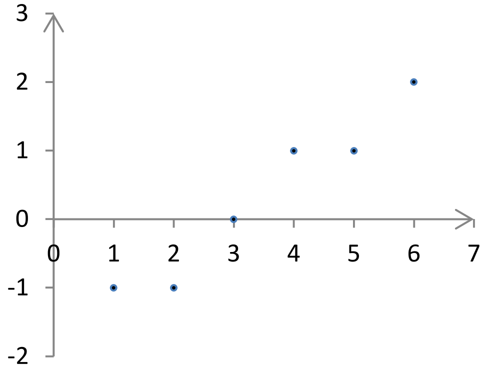
Jak widać jest to ciąg malejący. Każdy $n-ty$ wyraz jest większy od wyrazu następnego, czyli $n+1$ –go.

Definicja
Ciąg (a_n) jest malejący wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $n \in N^+$ spełniony jest warunek $a_n > a_{n+1}$.

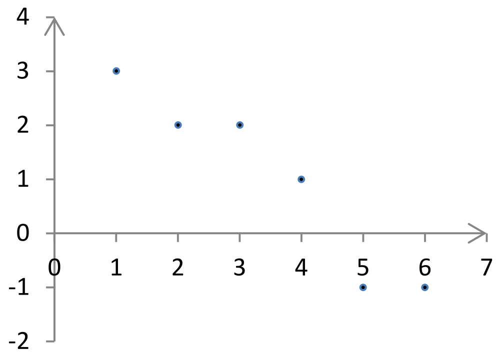
Definicja
Ciąg (a_n) jest niemalejący wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $n \in N^+$ spełniony jest warunek $a_n \leq a_{n+1}$.

Definicja
Ciąg (a_n) jest nierosnący wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $n \in N^+$ spełniony jest warunek $a_n \geq a_{n+1}$.

Przykład 3
Na wykresach przedstawimy przykłady ciągu niemalejącego (wykres 1.) i nierosnącego (wykres 2.).



wykres 1.



wykres 2.

Uwaga:
W praktyce częściej badamy znak wyrażenia $a_{n+1} - a_n$. Jeżeli dla dowolnego $n \in N^+$ mamy:
- $a_{n+1} - a_n > 0$ – wtedy ciąg jest rosnący
- $a_{n+1} - a_n < 0$ – wtedy ciąg jest malejący
- $a_{n+1} - a_n \geq 0$ – wtedy ciąg jest niemalejący
- $a_{n+1} - a_n \leq 0$ – wtedy ciąg jest nierosnący

Definicja
Ciąg (a_n), którego wszystkie wyrazy są równe nazywamy ciągiem stałym.

Przykład 4.
Zbadamy monotoniczność ciągów:
a) $a_n = \frac{n-3}{n+1}$
b) $b_n = 3^{n+1} - 7 \cdot 3^n$

Ad a) Ponieważ $a_{n+1} = \frac{(n+1)-3}{(n+1)+1} = \frac{n-2}{n+2}$, więc

$$a_{n+1}-a_n=\frac{n-2}{n+2}-\frac{n-3}{n+1}=\frac{(n-2)(n+1)}{(n+1)(n+2)}-\frac{(n-3)(n+2)}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n^2\mp n-2n-2)-(n^2+2n-3n-6)}{(n+1)(n+2)}=$$
$$\frac{n^2+n-2n-2-n^2-2n+3n+6}{(n+1)(n+2)}=\frac{4}{(n+1)(n+2)}$$

Dla każdego $n \in N^+$ wyrażenie to jest dodatnie (licznik jest liczbą dodatnią i mianownik jest zawsze dodatni). Zatem ciąg (a_n) jest rosnący.

Ad b) Aby zbadać monotoniczność ciągu (b_n) przekształcimy jego wzór do prostszej postaci:

$$b_n = 3^{n+1} - 7 \cdot 3^n = 3^n \cdot (3-7) = -4 \cdot 3^n, \text{ wtedy } b_{n+1} = -4 \cdot 3^{n+1}$$

Badamy znak różnicy $b_{n+1} - b_n = -4 \cdot 3^{n+1} + 4 \cdot 3^n = -4 \cdot 3^n \cdot (3-1) = -8 \cdot 3^n$
Ponieważ dla dowolnego $n \in N^+$, $3^n > 0$, to zawsze prawdziwe jest $b_{n+1} - b_n < 0$.
Zatem ciąg (b_n) jest malejący.

Przykład 5.
Wykażemy, że ciąg $a_n = n^2 - 11n + 3$ nie jest monotoniczny.

Najpierw wyznaczymy wyraz $n+1$:
$a_{n+1} = (n+1)^2 - 11 \cdot (n+1) + 3 = n^2 + 2n + 1 - 11n - 11 + 3 = n^2 - 9n - 7$
Badamy znak różnicy $a_{n+1} - a_n = n^2 - 9n - 7 - (n^2 - 11n + 3) =$
$= n^2 - 9n - 7 - n^2 + 11n - 3 = 2n - 10$

Dla $n < 5$ wyrażenie $a_{n+1} - a_n$ jest ujemne, zaś dla $n > 5$ wyrażenie $a_{n+1} - a_n$ jest dodatnie. Ciąg (a_n) jest więc niemonotoniczny.

W lekcji znajduje się lista zadań doskonalących umiejętność badania monotoniczności ciągów Zadania te mogą być wydrukowane, zaprezentowane na tablicy interaktywnej. Są one rozwiązywane przez uczniów pod kierunkiem nauczyciela.

		Zadanie 1. Zbadaj monotoniczność ciągu: a) $a_n = 3 - \frac{3}{n}$ b) $a_n = \frac{5}{2-4n}$ c) $a_n = \frac{n+5}{n+2}$ d) $a_n = \frac{1}{3+3n}$ e) $a_n = 3 - \frac{1}{5-6n}$ f) $a_n = 2 + \frac{1}{3+2n}$ **Zadanie 2.** Zbadaj monotoniczność ciągu: a) $a_n = n^2 + 5n$ b) $a_n = 6n - n^2$ c) $a_n = 5^{b-2}$ d) $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1}$ e) $a_n = n^2 - 6n + 10$ **Zadanie 3.** Ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym o wyrazach dodatnich. Zbadaj monotoniczność ciągu (b_n) wiedząc, że: a) $b_n = -4a_n$ b) $b_n = \frac{2}{a_n}$ c) $b_n = \frac{2}{a_n^2}$
7	Podsumowanie zajęć	Omówienie wyników i najczęściej pojawiających się problemów.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Scenariusz nr 8*: Ciąg arytmetyczny i ciąg geometryczny

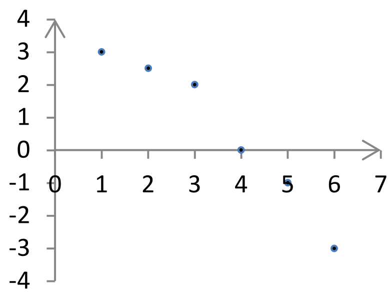
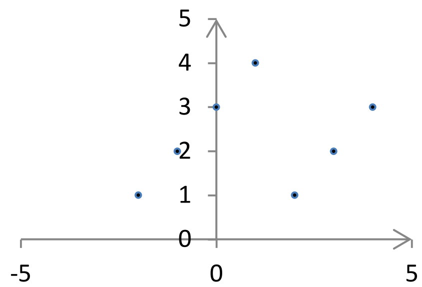
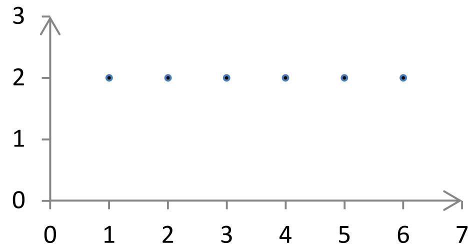
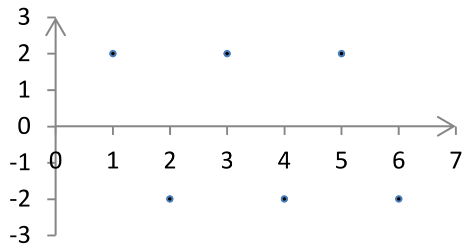
<table>
<tr><td colspan="2">Temat zajęć</td><td>Ciąg arytmetyczny i ciąg geometryczny</td></tr>
<tr><td colspan="2">Dział</td><td>Ciągi liczbowe</td></tr>
<tr><td colspan="2">Klasa (poziom edukacyjny)</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Czas trwania zajęć</td><td>90 min.</td></tr>
<tr><td>Lp.</td><td>Element scenariusza</td><td>Treść zajęć</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Cel ogólny</td><td>• Kształcenie samodzielności pracy
• Rozwijanie umiejętności czytania ze zrozumieniem
• Ćwiczenie umiejętności rozwiązywania zadań dotyczących własności ciągów arytmetycznych i ciągów geometrycznych</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Cele szczegółowe</td><td>Uczeń
• wykazuje się umiejętnością korzystania z definicji ciągu arytmetycznego i geometrycznego;
• potrafi wykorzystywać własności ciągów arytmetycznych i geometrycznych do rozwiązywania zadań;
• wykazuje się umiejętnością stosowania w zadaniach wzorów na sumę n-początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i geometrycznego.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Formy i metody</td><td>• Praca indywidualna
• Praca w grupie</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków</td><td>Poradnik multimedialny</td></tr>
</table>

	opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Zapoznanie z poradnikiem multimedialnym
6	Przebieg zajęć *(pełna wersja)*	Lekcja jest prowadzona z wykorzystaniem poradnika multimedialnego z zakresu ciągów liczbowych, którego rozdziały V i VI mówią o ciągach arytmetycznych, zaś VII i VIII o ciągach geometrycznych. Dzięki wykorzystaniu mobilnej pracowni komputerowej - uczniowie na podstawie poradnika przypominają sobie potrzebną teorię. Mogą z niej korzystać przez całe zajęcia, jak również wzorować się na rozwiązanych tam przykładach. W lekcji znajduje się lista zadań doskonalących umiejętność rozwiązywania zadań dotyczących ciągów arytmetycznych i geometrycznych. Zadania te mogą być wydrukowane, zaprezentowane na tablicy interaktywnej. Są one rozwiązywane przez uczniów pod kierunkiem nauczyciela. **Zadanie 1.** Trzy liczby, których suma wynosi 9 tworzą ciąg arytmetyczny. Jeśli do pierwszej z nich dodamy $3\frac{1}{8}$, a dwóch pozostałych nie zmienimy, to otrzymamy ciąg geometryczny. Znajd te liczby. **Zadanie 2.** Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego i pierwszy wyraz ciągu geometrycznego równa się 8. Drugie wyrazy tych ciągów też są równe. Jakie mogą być te ciągi, jeżeli trzeci wyraz ciągu geometrycznego stanowi $\frac{25}{16}$ trzeciego wyrazu ciągu arytmetycznego. **Zadanie 3.** Trzy liczby x, y, z , których suma wynosi 24 tworzą ciąg arytmetyczny. Liczby $x+1$, $y-2, z-2$ tworzą ciąg geometryczny. Znajdź liczby x, y, z. **Zadanie 4.** Trzy liczby $a, b, 1$ tworzą ciąg arytmetyczny, a liczby $a, b, a+b+1$ tworzą ciąg geometryczny. Wyznacz wyrazy ciągu geometrycznego. **Zadanie 5.** Środkowy wyraz arytmetycznego ciągu pięciowyrazowego wynosi 5. Wyrazy pierwszy, drugi i piąty tego ciągu wyznaczają ciąg geometryczny. Wyznacz wyrazy ciągu geometrycznego. **Zadanie 6.** Trzy różne liczby a, b, ctworzą ciąg arytmetyczny, natomiast liczby a, d, c tworzą ciąg geometryczny. Wyrazy obu tych ciągów są dodatnie. Suma wyrazów którego ciągu jest większa? **Zadanie 7.** Liczby a, b, ctworzą ciąg arytmetyczny, natomiast liczby $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{a+b+c}$ tworzą ciąg

		geometryczny. Wyznacz iloraz ciągu geometrycznego. **Zadanie 8.** Trzy liczby $a, b, 1$ tworzą ciąg arytmetyczny, a liczby $1, a, b$, tworzą ciąg geometryczny. Znajdź te liczby. **Zadanie 9.** Jaki warunek musza spełniać liczby a, b, c, aby tworzyły jednocześnie ciąg arytmetyczny i geometryczny? **Zadanie 10.** Znajdź trzy liczby tworzące ciąg geometryczny, który ma własność: jeżeli do drugiej liczby dodamy 8, ciąg zmieni się na arytmetyczny, jeżeli do ostatniego wyrazu nowego ciągu dodamy 64, ciąg znowu stanie się geometryczny. **Zadanie 11.** Z czterech liczb trzy początkowe tworzą ciąg geometryczny, a trzy końcowe – ciąg arytmetyczny. Znajdź te liczby, jeżeli suma liczb pierwszej i ostatniej równa się 14, suma drugiej i trzeciej 12. **Zadanie 12.** Trzy liczby, które tworzą ciąg arytmetyczny, dają w sumie 39. Jeżeli od pierwszej i trzeciej liczby odjąć 3, a od drugiej 5, to otrzymane różnice utworzą ciąg geometryczny. Znajdź liczby tworzące ciąg arytmetyczny. **Zadanie 13.** Trzy liczby, które tworzą ciąg geometryczny, dają w sumie 35. Jeżeli do pierwszej liczby dodać 4, do drugiej 5, a do trzeciej 1, to otrzymane sumy utworzą ciąg arytmetyczny. Znajdź liczby tworzące ciąg geometryczny.
7	Podsumowanie zajęć	Omówienie wyników i najczęściej pojawiających się problemów.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	

Scenariusz nr 9*: Ciągi liczbowe -powtórzenie wiadomości

Temat zajęć		**Ciągi liczbowe -powtórzenie wiadomości**
Dział		**Ciągi liczbowe**
Klasa (poziom edukacyjny)		
Czas trwania zajęć		**90 min.**
Lp.	**Element scenariusza**	**Treść zajęć**
1	Cel ogólny	• Kształcenie samodzielności pracy • Rozwijanie umiejętności czytania zadań ze zrozumieniem • Ćwiczenie umiejętności praktycznego zastosowania wiedzy
2	Cele szczegółowe	Uczeń • rozumie pojęcie ciągu; • potrafi określić wyznaczyć kolejne wyrazy ciągu, mając jego wzór; • potrafi sporządzić wykres ciągu; • potrafi wskazać ciągi arytmetyczne i geometryczne; • potrafi wykorzystać wzór ogólny i wzór na sumę n-początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego; • potrafi wykorzystać wzór ogólny i wzór na sumę n-początkowych wyrazów ciągu geometrycznego; • wykazuje się umiejętnością wykonywania obliczeń wymagających użycia procentu prostego i składanego.
3	Formy i metody	Praca indywidualna
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym	Poradnik multimedialny „Ciągi liczbowe”.

	wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Do przeprowadzenia lekcji wykorzystam mobilną pracownię komputerową, tak aby każdy uczeń mógł indywidualnie pracować przy komputerze. Do dyspozycji będzie miał poradnik multimedialny zawierający teorię wraz rozwiązanymi przykładami dotyczącymi ciągów liczbowych.
6	Przebieg zajęć *(pełna wersja)*	Uczniowie zostaną zapoznani z zawartością poradnika, a następnie przystąpią do samodzielnego rozwiązywania zadań zawartych w teście I tego poradnika. Przez cały czas mogą korzystać z pomocy i wskazówek nauczyciela. Uczniowie samodzielnie rozwiązują testy zawarte na końcu poradnika. **TEST 1** 1. Wykresem ciągu (a_n) nie jest wykres przedstawiony na rysunku: A.  B.  C.  D. 

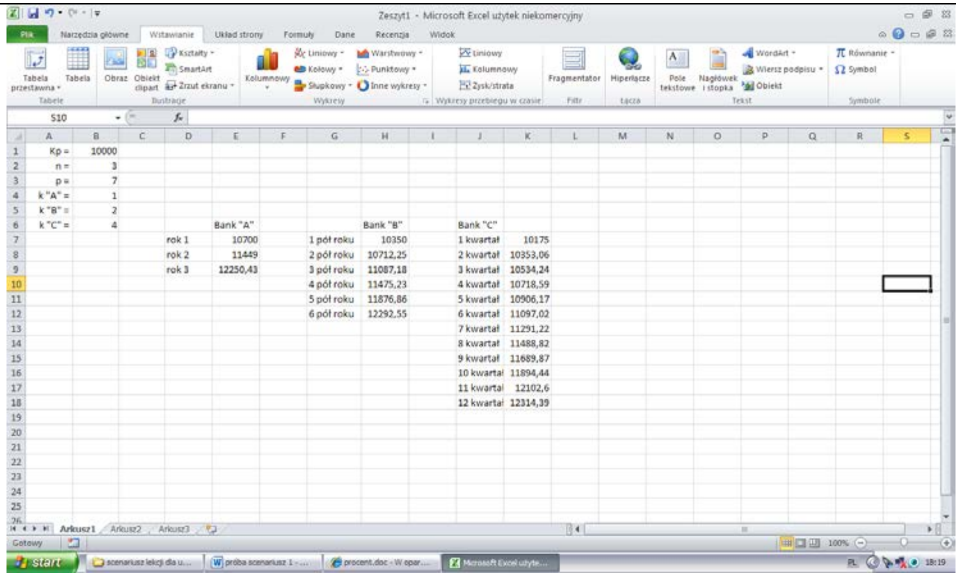
2. Jeżeli ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = (-2)^n(9 - n^2)$, to trzeci wyraz tego ciągu jest równy:
   A. 3 B. -8 C. 0 D. 8
3. Czterema początkowymi wyrazami ciągu (a_n), dla którego suma n początkowych wyrazów wyraża się wzorem $S_n = 2n^2$, są liczby:
   A. 0, 2, 8, 18 B. 2,8,18,32 C. 1,4, 9, 16 D. 2, 6, 10, 14
4. Ciąg arytmetyczny (a_n) określony jest wzorem $a_n = \frac{4-2n}{3}$. Różnica r tego ciągu wynosi:
   A. $-\frac{2}{3}$ B. $\frac{4}{3}$ C. -2 D. 3
5. Jeżeli w ciągu arytmetycznym dwoma początkowymi wyrazami są odpowiednio liczby (-3) i 4, to do przedziału $(10, 32)$ należą:
   A. dwa wyrazy B. trzy wyrazy C. cztery wyrazy D. pięć wyrazów
6. W ciągu arytmetycznym wyraz pierwszy to 3, zaś różnica wynosi 6. Jednym z wyrazów tego ciągu jest liczba:
   A. 32 B. 50 C. 45 D. 28
7. Liczby $8, 5, x - 9$ w podanej kolejności są trzema wyrazami ciągu arytmetycznego. Liczba x jest równa:
   A. 2 B. -7 C. 12 D. 11
8. Suma ośmiu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, w którym $a_3 = 4$ i $a_6 = -32$ jest równa:
   A. -85 B. 85 C. 124 D.-124
9. Ciągiem geometrycznym o ilorazie (-2) jest ciąg określony wzorem:
   A. $a_n = -2 \cdot 4^n$ B. $a_n = -2^n$ C. $a_n = 2^{-n}$ D. $a_n = 4 \cdot (-2)^n$
10. Liczby $(3, x, 27)$ tworzą ciąg geometryczny, który nie jest monotoniczny. Wówczas:
    A. $x = 9$ B. $x = 15$ C. $x = -9$ D. $x = 9$ lub $x = -9$
11. Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) spełniającego warunki: $a_1 + a_4 = 12$ i $a_2 + a_4 + a_6 = 27$. Który wyraz tego ciągu jest równy 0?
12. Oblicz sumę wszystkich liczb dwucyfrowych podzielnych przez 7.
13. Oblicz x i y, jeśli wiadomo, że ciąg $\left(\frac{3}{4}x, y, 12\right)$ jest ciągiem geometrycznym, zaś $(x, y, 8)$ jest

		ciągiem arytmetycznym. Wyznacz różnicę ciągu arytmetycznego i iloraz ciągu geometrycznego. Który z otrzymanych ciągów jest jednocześnie ciągiem arytmetycznym i geometrycznym. 14. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = 3^{n+1} + 3^n + 3^{n-1}$. a) Oblicz drugi i czwarty wyraz tego ciągu. b) Uzasadni, korzystając z definicji ciągu geometrycznego, że ciąg (a_n) jest geometryczny. 15. Jak długo należałoby oszczędzać na lokacie trzymiesięcznej, której oprocentowanie wynosi 8% w stosunku rocznym, aby kwota na lokacie wzrosła o 50%.
7	Podsumowanie zajęć	Pod koniec zajęć nastąpi podsumowanie wyników i omówienie występujących problemów.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	

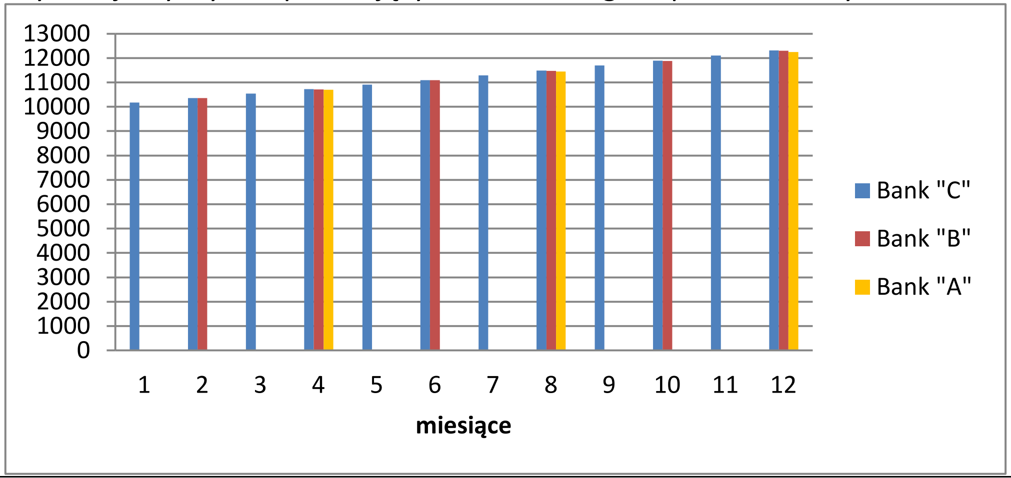
Scenariusz nr 10: Procent składany – obliczenia bankowe

Temat zajęć		**Procent składany – obliczenia bankowe**
Dział		**Ciągi**
Klasa (poziom edukacyjny)		**Klasa druga lub jako materiał powtórzeniowy do matury w klasie trzeciej lub czwartej**
Czas trwania zajęć		**90 min.**
Lp.	**Element scenariusza**	**Treść zajęć**
1	Cel ogólny	• Poznanie podstawowych pojęć związanych z oprocentowaniem lokat i kredytów • Kształcenie umiejętności wyboru optymalnego rozwiązania
2	Cele szczegółowe	Uczeń: • zna pojęcie procentu składanego; • zna podstawowe pojęcia matematyki finansowej: kapitał początkowy, odsetki, stopa procentowa, kapitalizacja odsetek, okres kapitalizacji; • potrafi zastosować wiadomości o ciągu geometrycznym do obliczania procentu składanego; • potrafi rozwiązywać elementarne zadania z matematyki finansowej dotyczące oprocentowania lokat i kredytów; • potrafi wybrać optymalny sposób oprocentowania lokaty czy kredytu.
3	Formy i metody	• Pogadanka • Praca z zespołem klasowym • Praca samodzielna
4	Środki dydaktyczne	Lekcję prowadzimy wykorzystując mobilną pracownię komputerową aby każdy uczeń miał samodzielny

	(ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	dostęp do komputera. Wykorzystujemy tablicę interaktywną. Zajęcia prowadzone przy użyciu tablicy interaktywnej mogą zostać zapisane, dzięki czemu mogą być wykorzystane w dowolnej chwili. Dodatkowo można je umieścić na serwerze szkolnym lub rozesłać uczniom pocztą e-mail. Korzystamy z arkusza kalkulacyjnego EXCEL.
5	Wprowadzenie do zajęć	Na początek nawiązujemy do temu lekcji - przypominamy podstawowe wiadomości o ciągu geometrycznym i o pojęciu procentu. Definiujemy takie pojęcia jak procent składany, kapitał początkowy, odsetki, stopa procentowa, kapitalizacja odsetek, okres kapitalizacji. Podajemy wzór $K_n = K_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^{k\cdot n}$, gdzie K_n – kapitał końcowy K_0 – kapitał początkowy p – oprocentowanie w stosunku rocznym k – ilość okresów kapitalizacji w ciągu roku n - ilość lat Przechodzimy do tego aby pokazać uczniom jak zastosować poznany wzór do obliczeń bankowych, a także jak do tego wykorzystać arkusz kalkulacyjny. Wykorzystujemy tablicę interaktywną. ***<u>Ćwiczenie 1</u>*** Pan Nowak chce założyć w banku lokatę ze stałym oprocentowaniem na kwotę 10000 zł. Do wyboru ma trzy banki. Oprocentowanie w tych bankach wynosi 7 procent w stosunku rocznym. W banku „A” kapitalizacja odsetek następuje co rok, w banku „B” co pół roku, a w banku „C” co kwartał. Który bank ma wybrać pan Nowak aby po trzech latach mieć największy kapitał. Wykonaj wykres swoich obliczeń. *<u>Rozwiązanie</u>* W celu rozwiązania tego ćwiczenia wykonujemy obliczenia w excelu stosując odpowiednie formuły:



Z naszych obliczeń wynika, że najkorzystniejszy jest bank „C".
Wykonujemy wykres pokazujący wzrost naszego kapitału w każdym z banków:

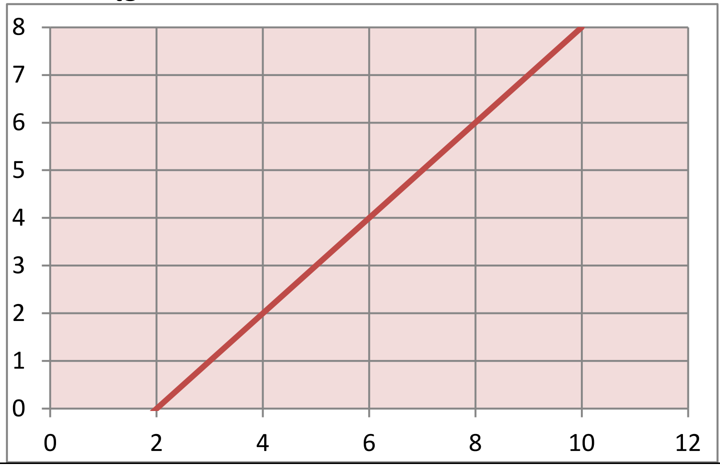


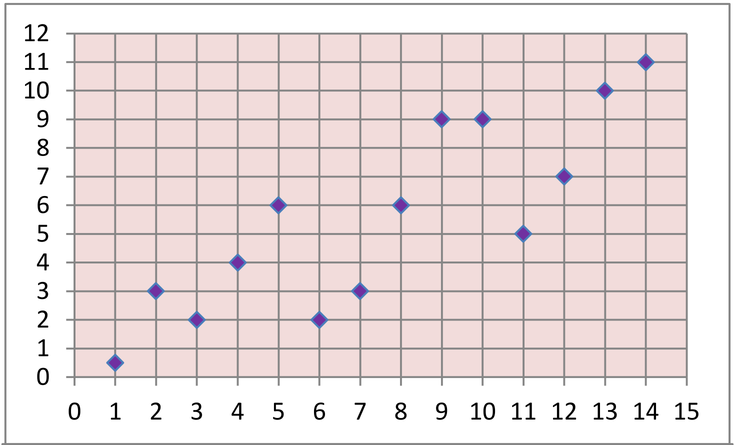
6	Przebieg zajęć *(pełna wersja)*	Zadania do samodzielnego wykonania. ***Zadanie 1*** Bank „City” oferuje oprocentowanie 5% z roczną kapitalizacją odsetek, a bank „Home” oprocentowanie 4% z miesięczną kapitalizacją odsetek. Do którego z tych banków bardziej opłaca się wpłacić oszczędności. Czy odpowiedź zmieniła by się , gdyby wpłacić oszczędności na 5 lat? Wykonaj wykres pokazujący oszczędności. ***Zadanie 2*** Wyobraź sobie, że twoi przodkowie złożyli 1000 lat temu w banku 1 grosz na lokatę, której oprocentowanie wynosiło 3% rocznie. Czy byłbyś bogaty, gdybyś mógł dysponować nagromadzonym kapitałem? Jaki to byłby kapitał? Zilustruj na wykresie wartość kapitału po każdych stu latach. ***Zadanie 3*** Pan Oszczędny wpłacił cztery lata temu 5000 zł na lokatę, której oprocentowanie wynosiło 5%. Jego sąsiad pan Sprytny wpłacił w tym samym czasie do innego banku 4000 zł. Okazało się, że maja teraz na koncie taką samą kwotę. Jakie było oprocentowanie lokaty pana Sprytnego i ile zarobił on na tej transakcji. ***Zadanie 4*** Kwotę 50000 zł wpłacono na lokatę trzymiesięczną, której oprocentowanie wynosi 6%. a) Jaka kwota będzie na koncie po dwóch latach, jeżeli od naliczonych odsetek należy odprowadzić do skarbu państwa 20% podatek? b) O ile wzrósłby kapitał początkowy, gdyby podatek od setek został naliczony po dwóch latach od całej kwoty uzyskanych odsetek? Zmiany zilustruj na wykresie. ***Zadanie 5*** Tomek znalazł dwie oferty pracy dodatkowej. W pierwszej firmie zarobi w pierwszym miesiącu 300 zł, a w każdym następnym o 10% pierwszej wypłaty więcej niż w poprzednim miesiącu. W drugiej firmie w pierwszym miesiącu zarobi 200 zł, ale w każdym następnym o 10% więcej niż w poprzednim miesiącu. a) W której firmie Tomek szybciej zarobi 2000zł? W którym miesiącu to nastąpi? b) Ile zarobi Tomek pracując dwa lata w pierwszej, a ile w drugiej firmie?

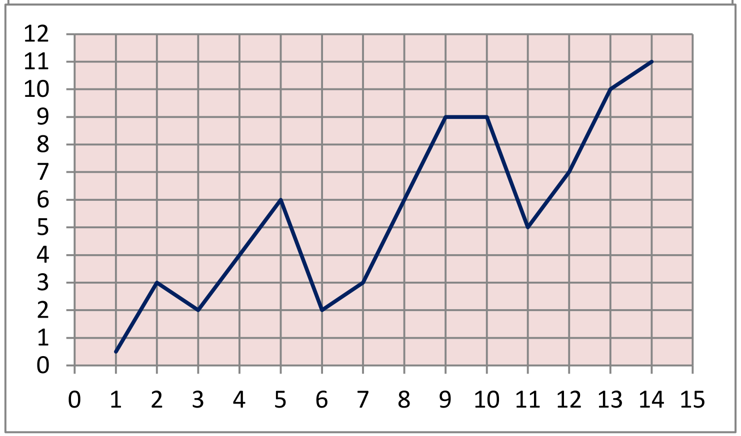
		Zadanie 6 Pan Antoni wpłacił 65000 zł na lokatę, której oprocentowanie wynosi 6%, a odsetki kapitalizowane są co miesiąc. Postanowił, że co miesiąc bank z odsetek będzie przelewał kieszonkowe w wysokości 250zł na konto syna. a) Jaka kwota będzie na tej lokacie po roku? b) O ile więcej byłoby na koncie pana Antoniego, gdyby nie wykonywał wypłat?
7	Podsumowanie zajęć	Nauczyciel ocenia najbardziej zaangażowanych uczniów za poprawne rozwiązanie zadań i trafne wnioski.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	

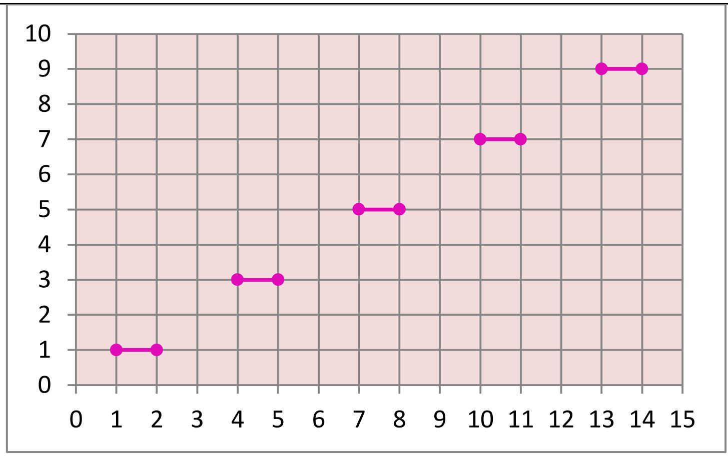
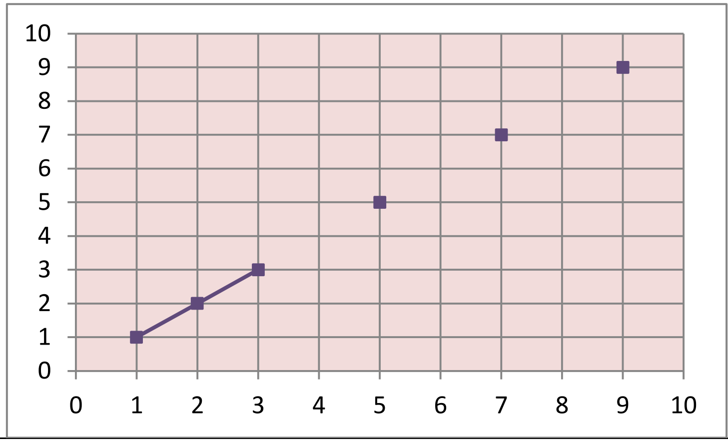
Scenariusz nr 11: Sposoby opisywania ciągów. Własności ciągów.

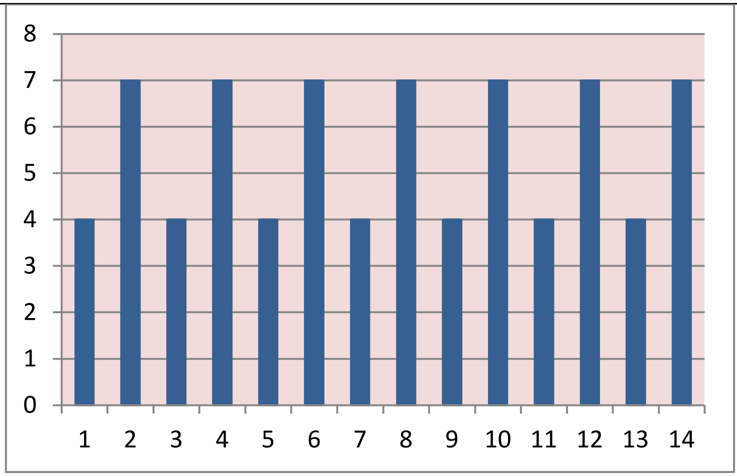
Temat zajęć		**Sposoby opisywania ciągów. Własności ciągów.**
Dział		**Ciągi liczbowe**
Klasa (poziom edukacyjny)		**Klasa druga lub jako materiał powtórzeniowy do matury w klasie trzeciej lub czwartej**
Czas trwania zajęć		**90 min.**
Lp.	**Element scenariusza**	**Treść zajęć**
1	Cel ogólny	• Poznanie różnych sposobów opisywania ciągów liczbowych • Odczytywanie niektórych ich własności na podstawie wzorów, wykresów, grafów.
2	Cele szczegółowe	Uczeń: • zna pojęcie ciągu liczbowego i dobrze nim operuje; • potrafi odczytać, analizować i interpretować dane ciągi przedstawione w postaci tabeli, wykresu czy diagramu; • potrafi wykonać tabelę, wykres, diagram ciągu posługując się programem Microsoft Excel; • kształci pojęcie ciągu liczbowego oraz sposoby jego opisywania i niektóre własności.
3	Formy i metody	• Pogadanka • Praca z zespołem klasowym • Praca samodzielna
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków	Zajęcia odbywają się z użyciem mobilnej pracowni komputerowej aby każdy uczeń miał samodzielny dostęp do komputera. Korzystamy z arkusza kalkulacyjnego EXCEL. Wykorzystujemy tablicę interaktywną.

	opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Na początek nawiązujemy do temu lekcji - przypominamy definicję ciągu.
6	Przebieg zajęć *(pełna wersja)*	Treści zadań wyświetlamy uczniom używając tablicy interaktywnej. Uczniowie rozwiązują zadania wykorzystując program EXCEL oraz mobilną pracownię komputerową. ***Zadanie 1*** Który z wzorów funkcji przedstawia ciąg liczbowy? a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$, gdzie $x \in (0,12)$ b) $g(x) = 3x - 1$, gdzie $x \in \{1,2,3,4,5,6\}$ c) $h(x) = -x + 2$, gdzie $x \in N_+$ d) $k(x) = -4x + x^2$, gdzie $x \in R_+$ e) $p(x) = x^3 + x$, gdzie $x \in C$ Wykonaj wykresy ciągów. Określ monotoniczność ciągów. Dlaczego pozostałe funkcje nie są ciągami? ***Zadanie 2*** Który z wykresów przedstawia ciąg? 


12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15


12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

			10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10



Zadanie 3

Wypisz 10 początkowych wyrazów ciągu opisanego następująco:

Ciąg reszt z dzielenia kolejnych liczb naturalnych przez 3. Wykonaj wykres tego ciągu i określ jego monotoniczność.

Zadanie 4

Narysuj wykres funkcji określonej tabelą:

n	1	2	3	4	5	6
a_n	1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6

Czy jest to ciąg?

Zadanie 5

Posługując się arkuszem kalkulacyjnym oblicz osiem początkowych wyrazów ciągu:

a) $a_n = (-1)^n$

b) $a_n = n + 2^n$

c) $a_n = \frac{23n+17}{(-2)^n}$

Zadanie 6

Oblicz trzeci, czwarty i szósty wyraz ciągu danego wzorem.

		a) $a_n = \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = na_n \end{cases}$ b) $b_n = \begin{cases} b_1 = -1 \\ b_{n+1} = (-3)^n b_n \end{cases}$ ***Zadanie 7*** Narysuj wykres ciągu danego wzorem $a_n = n^2 - 5n + 6$. Podaj wyrazy, które są równe 6. ***Zadanie 8*** Które wyrazy ciągu $a_n = 2^n$ są większe od 2400? ***Zadanie 9*** Oblicz pięćdziesiąt początkowych wyrazów ciągu $a_n = \frac{300-2n}{n}$. ***Zadanie 10*** Które wyrazy ciągu danego wzorem ogólnym $b_n = n^2 - 6n + 9$ są większe od 0? Czy liczba 154 jest wyrazem tego ciągu? Jeśli tak to którym? ***Zadanie 11*** Które wyrazy ciągu $a_n = n^2 - 2n + 1$ są równe 0? Czy liczba 324 jest wyrazem tego ciągu? Jeśli tak to którym? ***Zadanie 12*** Narysuj wykres ciągu i podaj wzór ogólny ciągu na podstawie danych kolejnych wyrazów: a) 1,41,91,161,... b) –1,1,-1,1,... c) 21,32,43,54,... ***Zadanie 13*** Która z podanych niżej funkcji przedstawia ciąg? Narysuj wykres funkcji będącej ciągiem. a) $f(x) = x^2 + 4x - 1 \quad x \in R_+$ b) $g(x) = x(x-1) \; x \in N$ i $0 < x < 120$ c) $h(x) = -x^3 + 2x - 8 \; x \in \{1, 2, 3, 4, \ldots \ldots 99, 100\}$
7	Podsumowanie zajęć	Nauczyciel ocenia najbardziej zaangażowanych uczniów za poprawne rozwiązanie zadań i trafne wnioski.

8	Uwagi metodyczne do realizacji	