Wstęp

Zbiór „Mój przedmiot matematyka” jest zestawem 132 scenariuszy przeznaczonych dla uczniów szczególnie zainteresowanych matematyką. Scenariusze mogą być wykorzystywane przez nauczycieli zarówno na typowych zajęciach lekcyjnych wpisanych w zakres podstawowy, jak też w ramach dodatkowych zajęć poszerzających wiedzę uczniów, np. koła zainteresowań. Scenariusze wymagają zastosowania komputerów z dostępem do internetu. Takie wyposażenie pozwoli na wykorzystanie środków dydaktycznych przewidzianych w projekcie „Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy” takich jak moduły e-learningowe: „Elementy statystyki i rachunek prawdopodobieństwa”, „Funkcja kwadratowa”, „Równania i nierówności liniowe i kwadratowe”, „Wielomiany”, gry strategiczne „Wyprawa Nasreddina”, „Herbatka u królowej Anglii”, „Wyprawa na grzyby”, „Matemafia” oraz „Międzykontynentalna szkoła”, poradniki „Ciągi”, „Planimetria”, „Trygonometria”, „Geometria analityczna”. Scenariusze mogą być realizowane na zajęciach lekcyjnych jako całość lub nauczyciel dokonuje wyboru określonych materiałów zgodnie z zaplanowanymi przez siebie tematami – zwiększa to elastyczność stosowania pakietu np. w sytuacji braku zapewnienia w placówce odpowiednich warunków technicznych do realizacji materiału w oparciu o cały pakiet.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Spis scenariuszy

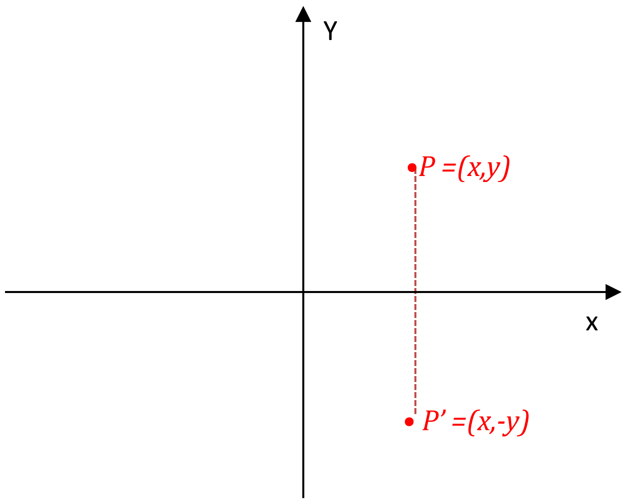
Scenariusz nr 1: Przekształcenia w układzie współrzędnych

Temat zajęć		**Przekształcenia w układzie współrzędnych**
Dział		**Geometria analityczna**
Klasa (poziom edukacyjny)		**druga technikum**
Czas trwania zajęć		**90 minut**
Lp.	**Element scenariusza**	**Treść zajęć**
1	Cel ogólny	• Kształcenie umiejętności samodzielnego dochodzenia do wiedzy • Rozwijanie umiejętności czytania zadań ze zrozumieniem • Wykształcenie umiejętności rozwiązywania podstawowych zadań dotyczących geometrii analitycznej
2	Cele szczegółowe	Uczeń: • potrafi znaleźć na rysunku punkt symetryczny do danego względem: osi, początku wkładu współrzędnych, danego punktu, prostej równoległej do danej osi; • potrafi rozwiązywać zadania dotyczące symetrii w układzie współrzędnych.
3	Formy i metody	• Praca indywidualna z komputerem – mobilna pracownia komputerowa • Ćwiczenia • Praca z tablicą interaktywną
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w	Tablica interaktywna, poradnik multimedialny.

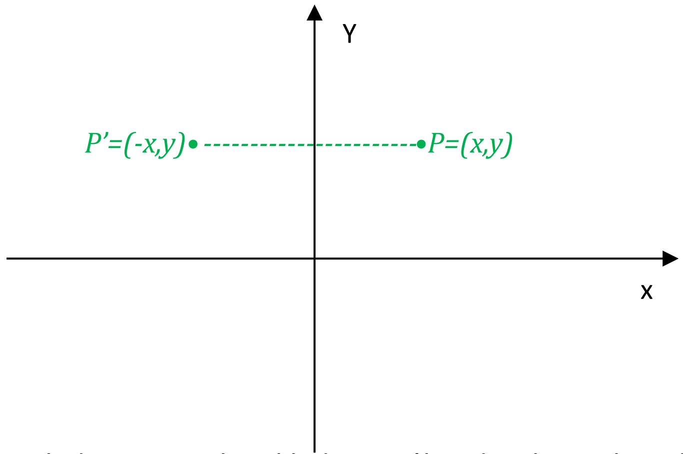
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

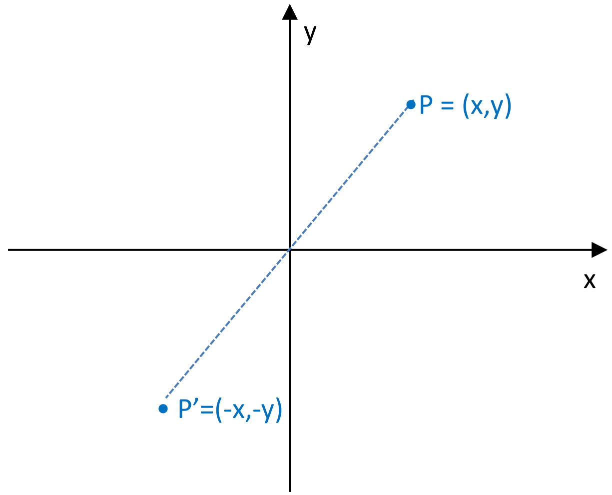
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

	projekcie np. moduł, gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Zalogowanie się w komputerze i włączenie poradnika multimedialnego.
6	Przebieg zajęć *(pełna wersja)*	Lekcję prowadzimy wykorzystując do tego „Poradnik multimedialny” (temat 1) oraz tablicę interaktywną. Zapoznajemy ucznia z teorią, analizujemy ćwiczenia, następnie uczniowie rozwiązują samodzielnie kolejne zadania. ➢ Symetria względem osi OX przekształca punkt $P = (x, y)$ na punkt $P' = (x, -y)$ 

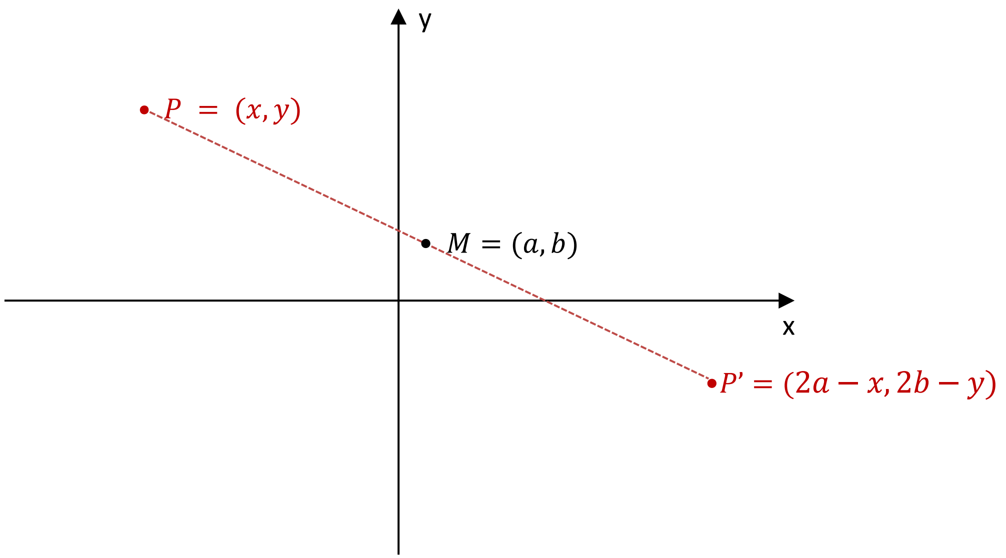
- Symetria względem osi OY przekształca punkt $P = (x, y)$ na punkt $P' = (-x, y)$



- Symetria względem początku układu współrzędnych przekształca punkt $P = (x, y)$ na punkt $P' = (-x, -y)$



- Symetria względem punktu $M = (a, b)$ przekształca punkt $P = (x, y)$ na punkt $P' = (2a - x, 2b - y)$



Przykład 1.

Wyznacz współrzędne punktu A' , który jest obrazem punktu $A = (-5,3)$ w:

a) Symetrii względem osi x;

b) Symetrii względem osi y.

Rozwiązanie:

a) $A' = (-5, -3)$

b) $A' = (5,3)$

Przykład 2.

Wyznacz współrzędne punktu B’ , który jest obrazem punktu $B = (2\sqrt{2}, -6)$ w:

a) Symetrii względem początku układu współrzędnych;

b) Symetrii względem punktu $P = (1{,}4)$.

Rozwiązanie:

a) $B' = (-2\sqrt{2}, 6)$

b) $B' = (2 \cdot 1 - 2\sqrt{2}, 2 \cdot 4 + 6)$ więc $B' = (2 - 2\sqrt{2}, 14)$

Przykład 3.

Wyznacz współrzędne punktu K’ , który jest obrazem punktu $K = (-3\sqrt{2}, \sqrt{2})$ w:

a) Symetrii względem prostej $y = 5$;

b) Symetrii względem prostej $x = -6$.

Rozwiązanie:

a) $K' = (x', y')$ $x' = -3\sqrt{2}$ $y' = 5 + (5 - \sqrt{2})$

b) $K'' = (x'', y'')$ $x'' = -6 - (6 - 3\sqrt{2}) = -12 + 3\sqrt{2}$ $y'' = \sqrt{2}$

Przykład 4.

Dla jakich wartości parametru $m\ i\ n$ punkty $A = (m + 3{,}7)\ i\ B = (5, n - 1)$ są symetryczne względem osi OY?

Rozwiązanie:

Punkty A i B są symetryczne względem osi x, gdy:

$$m + 3 = -5 \quad i \quad 7 = n - 1$$
$$m = -8 \quad i \quad n = 8$$

Przykład 5.

Dla jakich wartości parametru m i n punkty $P = (2m+3, \sqrt{2})$ i $Q = (6,3n-2)$ są symetryczne względem punktu M = (1,2)?

Rozwiązanie:

Punkty P i Q są symetryczne względem punktu M, gdy:

$$6 = 2 \cdot 1 - (2m+3) \quad i \quad 3n - 2 = 2 \cdot 2 - \sqrt{2}$$

$$m = -\frac{7}{2} \quad i \quad n = 2 - \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Zadania do samodzielnego wykonania na lekcji lub w domu:

1. Wyznacz współrzędne punktu A’ , który jest obrazem punktu A = (-5,3) w:

a) Symetrii osiowej względem osi x,
b) Symetrii osiowej względem osi y,
c) Symetrii osiowej względem prostej o równaniu y = -3,
d) Symetrii osiowej względem prostej o równaniu x = 1,
e) Symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych,
f) Symetrii środkowej względem punktu K = (2,4).

2. Punkt M’ jest obrazem punktu M w symetrii względem pewnej prostej. Znajdź równanie tej prostej:

a) M = (3,2) , M’ = (3,4)
b) M = (1918,-1) , M’ = (1918,4)
c) M = $(\frac{3}{2}, 1)$, M’ = $(-\frac{7}{2}, 1)$

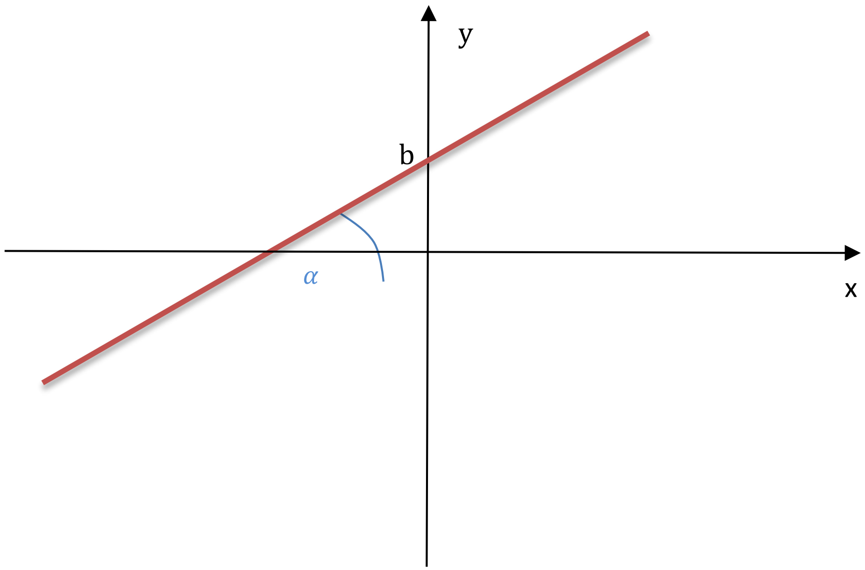
3. Znajdź obrazy punktów P= (2,3), Q = (0,-1), R = $(2 - \frac{\sqrt{2}}{4}, -2)$ w symetrii względem prostej:

a) $y = -2\sqrt{3}$
b) $y = 1 + \sqrt{5}$
c) $x = \sqrt{2}$

		d) $x = 3 - 2\sqrt{3}$ **4.** Dany jest trójkąt ABC o wierzchołkach A = (2,1) , B = (5,2) , C = (6,-1). Obrazem punktu A w symetrii względem pewnej prostej jest punkt A’ = (8,1). Znajdź obrazy pozostałych wierzchołków trójkąta w tej symetrii. **5.** Jedną z osi symetrii kwadratu jest prosta y = 4 , a jednym z jego wierzchołków punkt A = (2,-3). Znajdź współrzędne pozostałych wierzchołków kwadratu i równania pozostałych jego osi symetrii.
7	Podsumowanie zajęć	Ocena aktywności uczniów na lekcji i zadanie pracy domowej.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	Można wykorzystać program GeoGebra do rozwiązywania zadań lub sprawdzania prawidłowości rozwiązań.

Scenariusz nr 2: Równanie prostej na płaszczyźnie

Temat zajęć		**Równanie prostej na płaszczyźnie**
Dział		**Geometria analityczna**
Klasa (poziom edukacyjny)		**Druga technikum**
Czas trwania zajęć		**90 minut**
Lp.	**Element scenariusza**	**Treść zajęć**
1	Cel ogólny	• Kształcenie umiejętności samodzielnego dochodzenia do wiedzy; • Rozwijanie umiejętności czytania zadań ze zrozumieniem; • Wykształcenie umiejętności rozwiązywania podstawowych zadań dotyczących geometrii analitycznej;
2	Cele szczegółowe	Uczeń: • potrafi rozróżniać postacie równania prostej; • potrafi przechodzić z jednej postaci równania prostej do drugiej; • potrafi podać równanie prostej mając dany jej punkt i współczynnik *a* w równaniu kierunkowym.
3	Formy i metody	• Praca indywidualna z komputerem – mobilna pracownia komputerowa • Ćwiczenia • Praca z tablicą interaktywną
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w	Tablica interaktywna, poradnik multimedialny.

	projekcie np. moduł, gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Zalogowanie się w komputerze i włączenie poradnika multimedialnego.
6	Przebieg zajęć *(pełna wersja)*	Lekcję prowadzimy wykorzystując do tego „Poradnik multimedialny" (temat 2) oraz tablicę interaktywną. Zapoznajemy ucznia z teorią, analizujemy ćwiczenia, następnie uczniowie rozwiązują samodzielnie kolejne zadania. **Równanie prostej w postaci kierunkowej**: $y = ax + b \;\; dla \; a, b \; \in R$ a - współczynnik kierunkowy prostej, b – wyraz wolny(wyznacza na osi OY punkt, w którym dana prosta ją przecina)  Z postaci kierunkowej prostej można odczytać tangens kąta α nachylenia prostej do osi OX: $tg\alpha = a$

		oraz współrzędne punktu przecięcia prostej z osią OY: $(0, b)$. **<u>Równanie prostej w postaci ogólnej</u>:** $Ax + By + C = 0, gdzie\ A^2 + B^2 > 0$ (współczynniki A i B nie są jednocześnie równe zeru). ***Przykład 1.*** Napisz równanie prostej o współczynniku kierunkowym a = 4 wiedząc, że do tej prostej należy punkt K = (-2,1). *Rozwiązanie:* Prosta ma postać $y = 4x + b$. Do prostej należy punkt K , zatem współrzędne tego punktu spełniają równanie tej prostej: $1 = 4 \cdot (-2) + b$ $b = 9$ Zatem równanie prostej ma postać $y = 4x + 9$ ***Przykład 2.*** Równanie w postaci kierunkowej $y = -\frac{1}{2}x + 6$ zapisz w postaci ogólnej. *Rozwiązanie:* Przenosimy wszystkie wyrazy na jedną stronę, porządkujemy ich kolejność: $\frac{1}{2}x + y - 6 = 0$ Możemy każdą ze stron równania pomnożyć przez wspólny mianownik (przez 2) otrzymując postać ogólną prostej: $x + 2y - 12 = 0$ ***Przykład 3.*** Równanie w postaci ogólnej $3x - y - 5 = 0$ zapisz w postaci kierunkowej.

Rozwiązanie:
Przenosimy stronami wyrazy równania tak, aby po jednej jego stronie został tylko wyraz zawierający *y:*

$$-y = -3x + 5 \quad /\cdot(-1)$$

$$y = 3x - 5$$ - *równanie prostej w postaci kierunkowej*

Przykład 4.
Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt P = (-3, 5) i nachylonej do osi OX pod kątem $\alpha = 60°$.

Rozwiązanie:
Ponieważ $tg60° = \sqrt{3}$, to równanie prostej ma postać: $y = \sqrt{3}x + b$.
Prosta przechodzi przez punkt P, zatem współrzędne tego punktu spełniają równanie tej prostej:

$$5 = \sqrt{3}\cdot(-3) + b$$

$$b = 5 + 3\sqrt{3}$$

Równanie prostej ma postać: $y = \sqrt{3}x + 5 + 3\sqrt{3}$

Przykład 5.
Wyznacz współrzędne punktów , w których prosta $6x - 2y + 5 = 0$ przecina osie układu współrzędnych.

Rozwiązanie:
Współrzędne punktu przecięcia prostej z osią OX : $(x_0, 0)$:

$$6x_0 - 2\cdot 0 + 5 = 0$$

$$6x_0 = -5 \;/:6$$

$$x_0 = -\frac{5}{6}$$

Zatem współrzędne tego punktu to: $\left(-\frac{5}{6}, 0\right)$
Współrzędne punktu przecięcia prostej z osią OY : $(0, y_0)$

$6 \cdot 0 - 2y_0 + 5 = 0$
$2y_0 = 5 \ /:2$
$y_0 = 2\frac{1}{2}$
Zatem współrzędne tego punktu to: $\left(0{,}2\frac{1}{2}\right)$.

Zadania do samodzielnego wykonania:
Zad. 1.
Równanie prostej$2x - 5y + 3 = 0$ zapisz w postaci kierunkowej, a równanie prostej $y = \frac{2}{5}x - \frac{1}{2}$ zapisz w postaci ogólnej o współczynnikach całkowitych.
Zad. 2.
Sprawdź, dla jakiej wartości k na prostej o równaniu $x - 2y + 2 = 0$ leży punkt:
a) $A = (-2, k)$
b) $B = (2k, \frac{1}{2k})$
c) $C = (2 - k, 3 + k)$
d) $D = (k^2, 4)$
Zad. 3.
Napisz równanie prostej, która:
a) Zawiera początek układu współrzędnych oraz punkt o współrzędnych (2,4);
b) Przecina oś OX w punkcie o współrzędnych (5,0) i oś OY w punkcie o współrzędnych (0.6);
c) Przecina oś OY w punkcie o współrzędnych (0,2) i zawiera punkt o współrzędnych (-4,2)
Zad. 4.
Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt Q i nachylonej do osi OX pod kątem α, gdy:
a) Q=(-4,5) $\alpha = 45°$
b) Q=(8,11) $\alpha = 75°$
c) Q=(-2,4) $\alpha = 135°$
d) Q=(7,16) $\alpha = 120°$

7	Podsumowanie zajęć	Ocena aktywności uczniów na lekcji i zadanie pracy domowej.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	Można wykorzystać program GeoGebra do rozwiązywania zadań lub sprawdzania prawidłowości rozwiązań.

Scenariusz nr 3: Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty

Temat zajęć		**Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty**
Dział		**Geometria analityczna**
Klasa (poziom edukacyjny)		**druga technikum**
Czas trwania zajęć		**90 minut**
Lp.	**Element scenariusza**	**Treść zajęć**
1	Cel ogólny	• Kształcenie umiejętności samodzielnego dochodzenia do wiedzy • Rozwijanie umiejętności czytania zadań ze zrozumieniem • Wykształcenie umiejętności rozwiązywania podstawowych zadań dotyczących geometrii analitycznej
2	Cele szczegółowe	• Uczeń: • potrafi wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty • potrafi zastosować wzór na równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty • potrafi zastosować zdobytą wiedzę w rozwiązywaniu zadań
3	Formy i metody	• Praca indywidualna z komputerem – mobilna pracownia komputerowa • Ćwiczenia • Praca z tablicą interaktywną
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł,	Tablica interaktywna, poradnik multimedialny.

	gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Zalogowanie się w komputerze i włączenie poradnika multimedialnego.
6	Przebieg zajęć *(pełna wersja)*	Lekcję prowadzimy wykorzystując do tego „Poradnik multimedialny” (temat 3) oraz tablicę interaktywną. Zapoznajemy ucznia z teorią, analizujemy ćwiczenia, następnie uczniowie rozwiązują samodzielnie kolejne zadania. Prosta o danym współczynniku kierunkowym ***a*** przechodząca przez dany punkt $P=(x_0,y_0)$ ma równanie postaci : $\boldsymbol{y-y_0=a(x-x_0)}$. Prosta przechodząca przez dane dwa różne punkty $A=(x_A,y_A)\ oraz\ B=(x_B,y_B)$ ma równanie postaci: $\boldsymbol{y-y_A=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x-x_A)}$. Współczynnik kierunkowy tej prostej : $\boldsymbol{a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}}$. ***Przykład 1.*** Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkty $C=\left(\sqrt{3},-2\sqrt{3}\right)$ i $D=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1,-4\right)$ *Rozwiązanie:* Podstawiamy współrzędne punktów do wzoru: $y+2\sqrt{3}=\frac{-4+2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+1-\sqrt{3}}(x-\sqrt{3})$ $y+2\sqrt{3}=\frac{-4+2\sqrt{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}(x-\sqrt{3})$ $y+2\sqrt{3}=\frac{-2(2-\sqrt{3})}{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}(x-\sqrt{3})$ $y+2\sqrt{3}=-4\left(x-\sqrt{3}\right)$ $y=-4x+4\sqrt{3}-2\sqrt{3}$

Więc szukane równanie to :

$$y = -4x + 2\sqrt{3}$$

Przykład 2.
Napisz równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty A = (7,3) i B = (-3,5).

Rozwiązanie:
Punkty A i B należą do prostej $y = ax + b$ więc spełniają jej równanie:

$$\begin{cases} 3 = 7a + b \\ 5 = -3a + b \end{cases}$$

Rozwiązujemy układ równań metodą przeciwnych współczynników:

$$\begin{cases} 3 = 7a + b \\ 5 = -3a + b \quad /\cdot(-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 = 7a + b \\ -5 = 3a - b \end{cases}$$

Dodajemy stronami $-2 = 10a$ więc $a = -\frac{1}{5}$, natomiast $b = 5 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = 4\frac{2}{5}$

Zatem szukana prosta ma równanie: $y = -\frac{1}{5}x + 4\frac{2}{5}$

Przykład 3.
Sprawdź, czy punkty $A = (1,0), B = (0,-3), C = (2,2)$ są współliniowe?

Rozwiązanie:
Wyznaczymy równanie prostej przechodzącej przez dwa z podanych punktów, a następnie sprawdzimy, czy współrzędne trzeciego punktu spełniają to równanie.
Wyznaczmy równanie prostej AB: $y = ax + b$

$$\begin{cases} -3 = a\cdot 0 + b \\ 0 = 1\cdot a + b \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -3 \\ a = 3 \end{cases}$$

Zatem prosta AB ma równanie $y = 3x - 3$.
Po podstawieniu współrzędnych punktu C otrzymujemy: $2 \neq 3\cdot 2 - 3$,
więc punkty A, B, C nie są współliniowe.

Przykład 4.

Punkty $P = (2,-1)$, $Q = \left(x,-\frac{3}{2}\right)$, $R = (-4,2)$ są współliniowe. Wyznacz x .

Rozwiązanie:

Wyznaczmy równanie prostej PR: $y = ax + b$

$y + 1 = \frac{2+1}{-4-2}(x-2)$

$y = -\frac{1}{2}(x-2) - 1$

$y = -\frac{1}{2}x + 1 - 1$

Zatem równanie prostej PR to: $y = -\frac{1}{2}x$.

Współrzędne punktu Q spełniają równanie $y = -\frac{1}{2}x$

Stąd $\quad -\frac{3}{2} = -\frac{1}{2}x$

$\underline{\boldsymbol{x = 3}}$

Przykład 5.

Wyznacz równania prostych, w których zawarte są przekątne czworokąta ABCD, wiedząc, że
$A = (-4,1)$, $B = (3,1)$, $C = (3,6)$, $D = (-4,4)$

Rozwiązanie:

Szukane proste to AC i BD.

- ✓ Wyznaczam równanie prostej AC: $\begin{cases} 1 = -4a + b \\ 6 = 3a + b \end{cases}$

$$\begin{cases} 1 = -4a + b \ /\cdot(-1) \\ 6 = 3a + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 = 4a - b \\ 6 = 3a + b \end{cases}$$

Dodajemy stronami : $5 = 7a$

$$a = \frac{5}{7}$$

$$b = 6 - 3 \cdot \frac{5}{7} = 6 - 2\frac{1}{7} = 3\frac{6}{7}.$$

Prosta AC ma równanie: $\boldsymbol{y = \frac{5}{7}x + 3\frac{6}{7}}$.

- ✓ Równanie prostej BD wyznaczam korzystając ze wzoru na prostą przechodzącą przez dwa punkty:

$$y - y_B = \frac{y_D - y_B}{x_D - x_B}(x - x_B)$$

$$y - 1 = \frac{4-1}{-4-3}(x - 3)$$

$$y = -\frac{3}{7}(x - 3) + 1$$

Prosta BD ma równanie: $\boldsymbol{y = -\frac{3}{7}x + 2\frac{2}{7}}$

Zadania do samodzielnego wykonania:

Zad. 1.

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkty K i L:

a) $K = (-2,6), \quad L = (8,4)$

b) $K = (-1,-4), \ L = (5,13)$

c) $K = \left(-4\sqrt{3},2\right), \ L = (\sqrt{3},2)$

d) $K = (-5,8), \quad L = (1,4)$

Zad. 2.

Napisz równanie prostej odcinającej na dodatnich półosiach osi OX oraz OY układu współrzędnych odcinki o miarach odpowiednio:

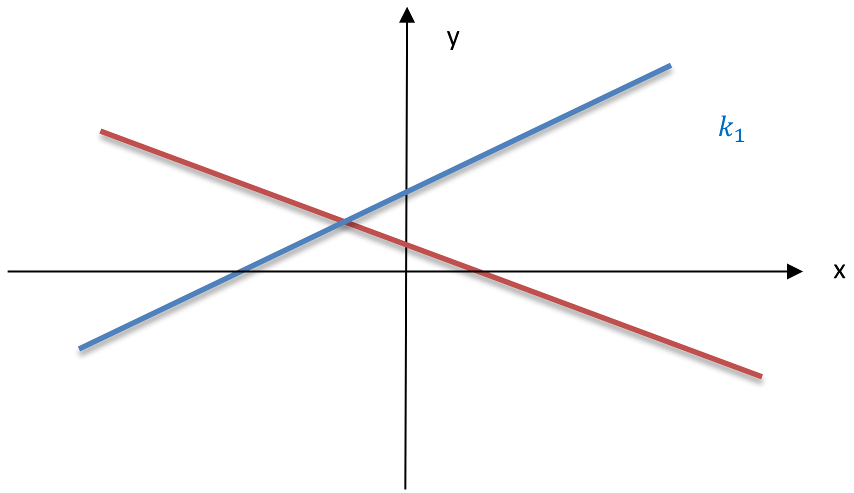
		a) 6, 2 b) 3, 4 c) 2, 7 d) 5, 8 **Zad. 3.** Zbadaj , czy punkty A, B, C są współliniowe: a) $A=(-3,-5), B=(0,3), C=(6,7)$ b) $A=(-6,-3), B=(1,-2), C=(7,-1)$ **Zad. 4.** Oblicz dla jakich wartości parametru m punkty *A, B, C* są współliniowe, gdy: a) $A=(3,0),\ B=(0,3),\ C=(3m+1,2m-3)$ b) $A=(-1,5m),\ B=(m,-1),\ C=(2,m)$ **Zad. 5.** Dany jest czworokąt ABCD, w którym $A=(-2,-4),\quad B=(7,-1),\quad C=(6,4),\quad D=(1,5)$. a) Wyznacz równania prostych , w których zawierają się boki tego czworokąta. b) Wyznacz równania prostych, w których zawarte są przekątne czworokąta ABCD.
7	Podsumowanie zajęć	Ocena aktywności uczniów na lekcji i zadanie pracy domowej.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	Można wykorzystać program GeoGebra do rozwiązywania zadań lub sprawdzania prawidłowości rozwiązań.

Scenariusz nr 4: Interpretacja geometryczna układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi

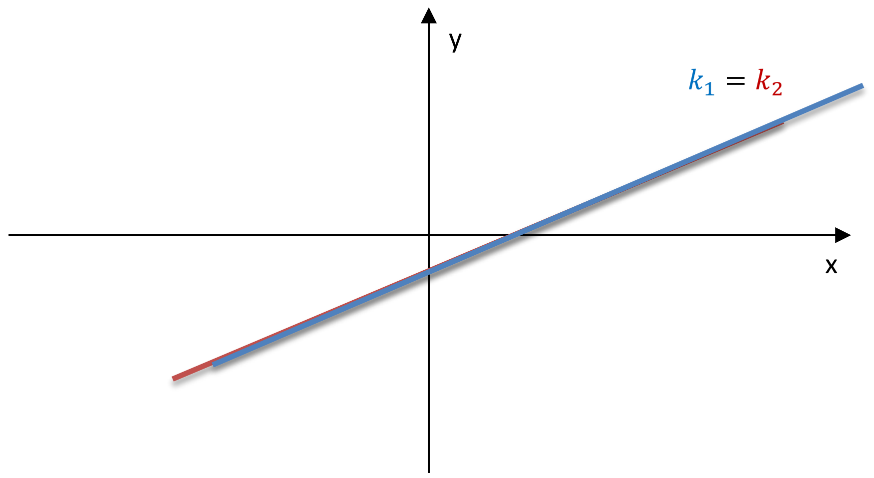
Temat zajęć	**Interpretacja geometryczna układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi**
Dział	**Geometria analityczna**
Klasa (poziom edukacyjny)	**druga technikum**
Czas trwania zajęć	**90 minut**

Lp.	**Element scenariusza**	**Treść zajęć**
1	Cel ogólny	• Kształcenie umiejętności samodzielnego dochodzenia do wiedzy • Rozwijanie umiejętności czytania zadań ze zrozumieniem • Wykształcenie umiejętności rozwiązywania podstawowych zadań dotyczących geometrii analitycznej
2	Cele szczegółowe	Uczeń: • potrafi rozwiązać układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi algebraicznie; • potrafi zinterpretować geometrycznie układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi; • potrafi zastosować zdobytą wiedzę w rozwiązywaniu zadań.
3	Formy i metody	• Praca indywidualna z komputerem – mobilna pracownia komputerowa • Ćwiczenia • Praca z tablicą interaktywną
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w	Tablica interaktywna, poradnik multimedialny.

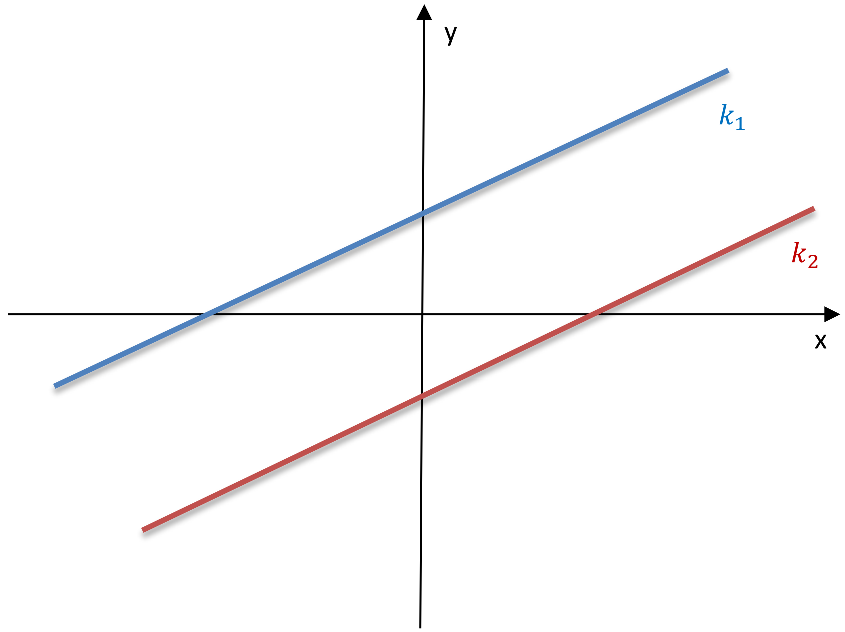
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

<table>
<tr><td></td><td>projekcie np. moduł, gra)</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>Wprowadzenie do zajęć</td><td>Zalogowanie się w komputerze i włączenie poradnika multimedialnego.</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Przebieg zajęć (pełna wersja)</td><td>Lekcję prowadzimy wykorzystując do tego „Poradnik multimedialny” (temat 4) oraz tablicę interaktywną. Zapoznajemy ucznia z teorią, analizujemy ćwiczenia, następnie uczniowie rozwiązują samodzielnie kolejne zadania.
Dane są dwie proste k_1 i k_2 określone równaniami:
$$k_1 : \ y = a_1x + b_1 \quad , \quad k_2 : \ y = a_2x + b_2$$
Aby wyznaczyć zbiór punktów wspólnych tych prostych rozwiązujemy układ równań:
$$\begin{cases} y = a_1x + b_1 \\ y = a_2x + b_2 \end{cases}$$
➢ Jeżeli układ ma dokładnie jedno rozwiązanie, to proste k_1 i k_2 przecinają się. Para liczb (x , y) będących rozwiązaniem układu stanowi współrzędne punktu przecięcia się tych prostych. Układ taki nazywamy układem oznaczonym.

</td></tr>
</table>

- Jeżeli układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, to proste k_1 i k_2 pokrywają się. Układ taki nazywamy układem nieoznaczonym.



- Jeżeli układ jest sprzeczny, to proste k_1 i k_2 są rozłączne. Częścią wspólną tych prostych jest zbiór pusty.



Przykład 1.

Wyznacz współrzędne punktu przecięcia prostych o równaniach $\begin{cases} y = -3x + 3 \\ y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \end{cases}$.

Rozwiązanie:

Układ równań rozwiązujemy metodą podstawiania:

$$\begin{cases} y = -3x + 3 \\ -3x + 3 = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 + 3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Proste o równaniach $y = -3x + 3$ i $y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$ przecinają się w punkcie (1,0).

Przykład 2.
Wyznacz część wspólną prostych o równaniach:

$$k:\ 2x - 3y + 4 = 0 \quad \text{i} \quad l:\ -2x + 3y + 5 = 0$$

Rozwiązanie:
Zapisujemy i rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4 = 0 \\ -2x + 3y + 5 = 0 \end{cases}$$
$$2x - 2x - 3y + 3y + 4 + 5 = 0$$
$$9 = 0$$

Układ równań jest sprzeczny, nie ma rozwiązania.
Proste o równaniach $k:\ 2x - 3y + 4 = 0$ i $l:\ -2x + 3y + 5 = 0$ są rozłączne.

Przykład 3.
Wyznacz część wspólną prostych o równaniach:

$$k:\ x - \frac{1}{3}y + 2 = 0 \quad \text{i} \quad l:\ -3x + y - 6 = 0$$

Rozwiązanie:
Zapisujemy i rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} x - \frac{1}{3}y + 2 = 0 \quad /\cdot 3 \\ -3x + y - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - y + 6 = 0 \\ -3x + y - 6 = 0 \end{cases}$$

$$3x - 3x - y + y + 6 - 6 = 0$$

$$0 = 0$$

Układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Proste o równaniach $k\colon\ x - \frac{1}{3}y + 2 = 0$ i $l\colon\ -3x + y - 6 = 0$ pokrywają się.

Przykład 4.

Sprawdź, czy proste o równaniach $4x - 2y + 8 = 0$, $y = 6x - 2$, $y = -x$ przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie:

Wyznaczymy część wspólną dwóch prostych ,a następnie sprawdzimy czy współrzędne tego punktu spełniają równanie trzeciej prostej.

$$\begin{cases} 4x - 2y + 8 = 0 \\ y = 6x - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 2y + 8 = 0 \\ 6x - y - 2 = 0 \quad /\cdot (-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 2y + 8 = 0 \\ -12x + 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$4x - 12x - 2y + 2y + 8 + 4 = 0$$

$$-8x + 12 = 0$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 6 \cdot \frac{3}{2} - 2 = 7 \end{cases}$$

Sprawdzamy, czy punkt o współrzędnej $(\frac{3}{2}, 7)$ należy do prostej $y = -x$: $7 \neq -\frac{3}{2}$
Dane trzy proste nie przecinają się w jednym punkcie.

Przykład 5.
Oblicz dla jakiej wartości parametru ***p*** proste $k: 3x - y - 2 = 0$, $l: 2x + y - 8 = 0$, m: $x + 4y + p = 0$ przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie:
Wyznaczymy część wspólną dwóch prostych:

$$\begin{cases} 3x - y - 2 = 0 \\ 2x + y - 8 = 0 \end{cases}$$
$$3x + 2x - y + y - 2 - 8 = 0$$
$$5x = 10$$
$$x = 2$$
$$\begin{cases} x = 2 \\ 3 \cdot 2 - y - 2 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

Ponieważ proste k, l , m mają przecinać się w jednym punkcie, zatem punkt o współrzednych (2,4) należy do prostej m: $x + 4y + p = 0$:
$$2 + 4 \cdot 4 + p = 0$$

Zatem dla $p = -18$ proste k, l, m przecinaja się w jednym punkcie.

Zadania do samodzielnego wykonania:

Zad. 1.

Dla jakich wartości parametru m układ równań jest oznaczony, nieoznaczony, sprzeczny?

a) $\begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ mx + 4y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + my = 4m \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2} \\ x - m^2 y = \frac{m}{2} \end{cases}$

Zad.2.

Narysuj równoległobok, którego boki zawierają się w podanych prostych.

$x - 2y + 6 = 0, \quad x - 2y - 4 = 0, \quad -2x - y - 7 = 0, \quad -2x - y + 8 = 0$

a) Wyznacz współrzędne wierzchołków tego równoległoboku.

b) Wyznacz współrzędne punktu przecięcia się przekątnych równoległoboku.

Zad. 3.

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} (k+2)x + y = 5 - p \\ 4x + \left(\frac{1}{2}k + 2\right) y = 1 - p \end{cases}$ jest para liczb $x = -1$ i $y = 2$.

Znajdź liczby *k* i *p*.

Zad. 4.

Układ równań z niewiadomymi x i y ma postać $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ mx + 4y = n \end{cases}$

a) Rozwiąż układ równań, gdy $m = 1$ i $n = -2$.

b) Dobierz współczynniki m i n tak, aby układ równań miał nieskończenie wiele rozwiązań.

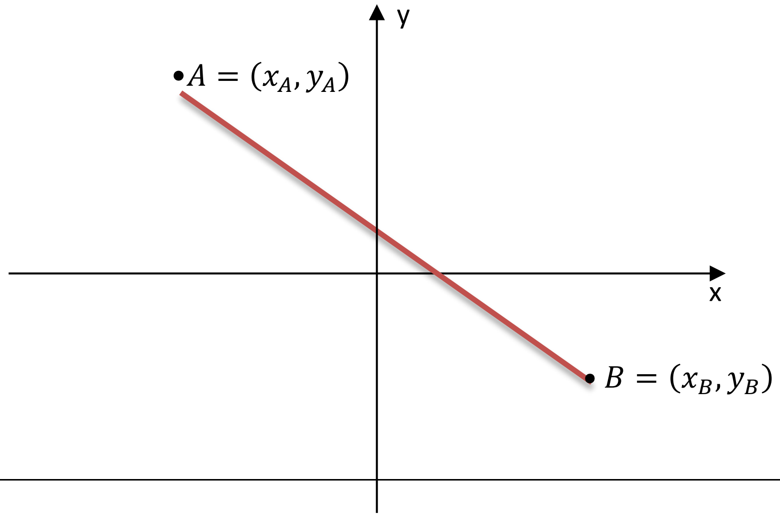
Rozwiąż otrzymany układ równań.

		Zad. 5*. Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 6\lvert x\rvert + 4y = 2 \\ x - \frac{1}{2}\lvert y\rvert = 2 \end{cases}$ **Zad. 6*.** Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań $\begin{cases} \lvert x\rvert - y = 1 \\ -x + \lvert y\rvert = 1 \end{cases}$
7	Podsumowanie zajęć	Ocena aktywności uczniów na lekcji i zadanie pracy domowej.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	Można wykorzystać program GeoGebra do rozwiązywania zadań lub sprawdzania prawidłowości rozwiązań.

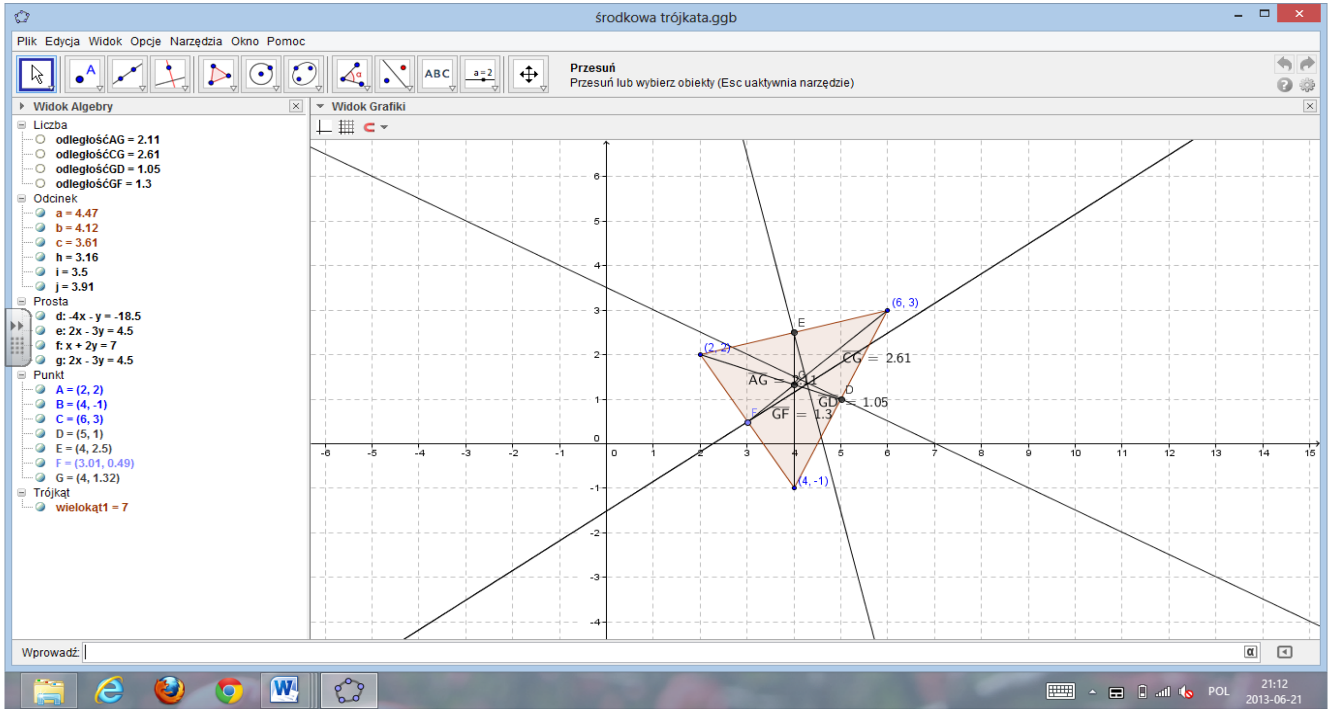
Scenariusz nr 5: Odległość między dwoma punktami w układzie współrzędnych

Temat zajęć		**Odległość między dwoma punktami w układzie współrzędnych**
Dział		**Geometria analityczna**
Klasa (poziom edukacyjny)		**druga technikum**
Czas trwania zajęć		**90 minut**
Lp.	**Element scenariusza**	**Treść zajęć**
1	Cel ogólny	• Kształcenie umiejętności samodzielnego dochodzenia do wiedzy • Rozwijanie umiejętności czytania zadań ze zrozumieniem • Wykształcenie umiejętności rozwiązywania podstawowych zadań dotyczących geometrii analitycznej
2	Cele szczegółowe	Uczeń: • potrafi obliczyć odległość punktów na płaszczyźnie kartezjańskiej; • potrafi wyznaczyć środkową w trójkącie; • potrafi wyznaczyć środek odcinka; • potrafi zastosować zdobytą wiedzę w rozwiązywaniu zadań z treścią.
3	Formy i metody	• Praca indywidualna z komputerem – mobilna pracownia komputerowa • Ćwiczenia • Praca z tablicą interaktywną
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w	Tablica interaktywna, poradnik multimedialny. Wykorzystanie oprogramowania edukacyjnego – ogólnie dostępnego programu GeoGebra do interaktywnego uczenia się.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

	projekcie np. moduł, gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Zalogowanie się w komputerze i włączenie poradnika multimedialnego oraz programu GeoGebra
6	Przebieg zajęć *(pełna wersja)*	Lekcję prowadzimy wykorzystując do tego „Poradnik multimedialny” (temat 5), tablicę interaktywną oraz program GeoGebra. Uczniowie zapoznają się z treścią lekcji z poradnika multimedialnego. Przy zagadnieniu środkowych trójkąta uczniowie zaczynają pracę z programem GeoGebra. Następnie uczniowie rozwiązują samodzielnie kolejne zadania. Odległość między punktami $A=(x_A,y_A)$ i $B=(x_B,y_B)$ wyraża się wzorem: $$\mathbf{\lvert AB\rvert=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}}$$ Środkiem odcinka o końcach A i B jest punkt $S=(x_S,y_S)$, gdzie $$\mathbf{x_S=\frac{x_A+x_B}{2},\quad y_s=\frac{y_A+y_B}{2}}$$ 

		Nauczyciel wprowadza uczniów w podstawowe, przydatne na lekcji, opcje programu GeoGebra. Uczniowie przy wykorzystaniu programu GeoGebra wyznaczają środek ciężkości dowolnego trójkąta oraz samodzielnie określają zależności między odpowiednimi odcinkami w tym trójkącie. Praca indywidualna uczniów z programem GeoGebra: 1. Uczniowie rysują trójkąt o wierzchołkach: A=(2,2) , B=(4,-1) , C=(6,3). 2. Uczniowie wyznaczają środki boków trójkąta ABC rysując symetralne jego boków. *Przypominamy pojęcie środkowej trójkąta:* ***Środkową trójkąta** nazywamy odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku tego trójkąta.* Uczniowie łączą : - wierzchołek A ze środkiem boku BC, czyli punktem E; - wierzchołek B ze środkiem boku AC, czyli punktem F; - wierzchołek C ze środkiem boku AB, czyli punktem D. Następnie formułują wnioski: - środkowe $\|AE\|$, $\|BF\|$, $\|CD\|$ przecinają się w jednym punkcie G, który jest środkiem ciężkości trójkąta ABC. - środek ciężkości trójkąta dzieli każdą środkową w stosunku 2:1 (zaznaczmy długości odcinka AD i GD) Na przykład: w środkowej AD , odcinek AG jest dwa razy dłuższy od odcinka GD. 3. Uczniowie mogą zmienić położenie jednego z wierzchołków tego trójkąta i zaobserwować, jak zmienia się położenie środka ciężkości danego trójkąta oraz jak zmienia się zależność między odpowiednimi odcinkami w tym trójkącie.



Następnie uczniowie kontynuują pracę z poradnikiem multimedialnym analizując kolejne przykłady.

Przykład 1.

Oblicz odległość między punktami $A = (-4,5)\ i\ B = (6,-2)$.

Rozwiązanie:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$|AB| = \sqrt{(6-(-4))^2 + ((-2)-5)^2} = \sqrt{100+49} = \sqrt{149}$$

Przykład 2.

Oblicz długości środkowej AD w trójkącie o wierzchołkach $A = (-2,3)$, $B = (2,5)$, $C = (4,1)$.

Rozwiązanie:

Punkt D jest środkiem odcinka BC:

$D = \left(\frac{2+4}{2}, \frac{5+1}{2}\right)$ $\qquad D = (3,3)$

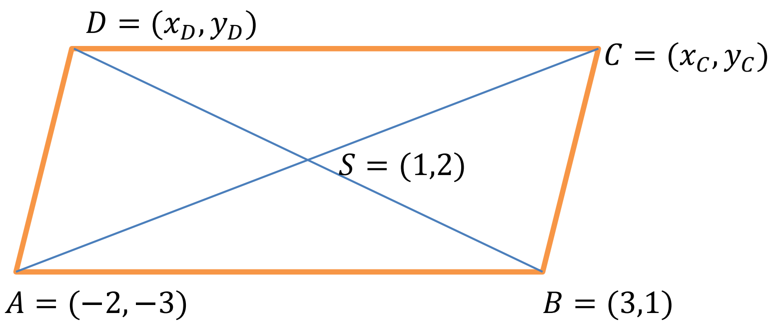
Obliczamy długość środkowej AD w trójkącie ABC:

$$|AD| = \sqrt{(3-(-2))^2 + (3-3)^2} = \sqrt{25+0} = 5$$

Przykład 3.

Punkty $A = (-2,-3)$ i $B = (3,1)$ są sąsiednimi wierzchołkami równoległoboku ABCD, a punkt $S = (1,2)$ jest środkiem symetrii tego równoległoboku. Oblicz współrzędne wierzchołków C i D.

Rozwiązanie:



Korzystamy ze wzoru na środek odcinka i wyznaczamy współrzędne wierzchołka C:

$x_S = \frac{x_A + x_C}{2}$ $\qquad y_S = \frac{y_A + y_C}{2}$

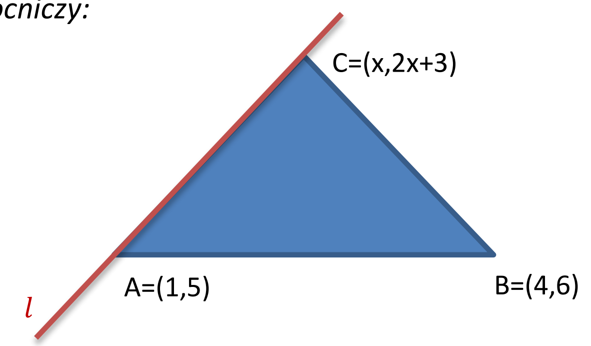
$1 = \frac{-2+x_C}{2}$ $\quad \boldsymbol{x_C = 4}$ $\qquad 2 = \frac{-3+y_C}{2}$ $\quad \boldsymbol{y_C = 7}$ $\quad$ Zatem $\boldsymbol{C = (4,7)}$

		Analogicznie wyznaczamy współrzędne wierzchołka D: $x_S = \frac{x_B + x_D}{2}$ $y_S = \frac{y_B + y_D}{2}$ $1 = \frac{3 + x_D}{2}$ $\boldsymbol{x_D = -1}$ $2 = \frac{1 + y_D}{2}$ $\boldsymbol{y_D = 3}$ Zatem $\boldsymbol{D = (-1, 3)}$ ***Przykład 4.*** Wykaż, że trójkąt o wierzchołkach $A = (-2,3)$, $B = (3,2)$, $C = (4,7)$ jest trójkątem prostokątnym i oblicz jego pole. *Rozwiązanie:* Obliczamy długości boków tego trójkąta: $\lvert AB \rvert = \sqrt{(3+2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$ $\lvert AC \rvert = \sqrt{(4+2)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$ $\lvert BC \rvert = \sqrt{(4-3)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$ Sprawdzamy, czy zachodzi twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa : *Tw. Trójkąt jest prostokątny, jeżeli kwadrat długości najdłuższego boku jest równy sumie kwadratów długości dwóch pozostałych boków.* $\lvert AB \rvert^2 + \lvert BC \rvert^2 = \left(\sqrt{26}\right)^2 + \left(\sqrt{26}\right)^2 = 26 + 26 = 52 = (\sqrt{52})^2 = \lvert AC \rvert^2$ Trójkąt jest prostokątny , więc jego pole można obliczyć ze wzoru: $P = \frac{1}{2} \cdot \lvert AB \rvert \cdot \lvert BC \rvert$ $P = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{26} \cdot \sqrt{26} = 13$ *Pole trójkąta jest równe 13.*

Przykład 5.

Jedno z ramion trójkąta równoramiennego ABC jest zawarte w prostej o równaniu $l\colon y = 2x + 3$. Podstawą trójkąta jest odcinek o końcach $A = (1,5)\ i\ \ B = (4,6)$. Oblicz współrzędne wierzchołka C tego trójkąta.

Rozwiązanie:
Rysunek pomocniczy:



Punkt C zawiera się w prostej $l\colon y = 2x + 3$, więc ma współrzędne $C = (x, 2x + 3)$.

Trójkąt ABC jest równoramienny zatem $|AC| = |BC|$:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (2x+3-5)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (2x+3-6)^2}$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (2x-2)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (2x-3)^2}$$

Podnosimy obustronnie do kwadratu:

$$(x-1)^2 + (2x-2)^2 = (x-4)^2 + (2x-3)^2$$

Stosując wzory skróconego mnożenia otrzymujemy:

$$x^2 - 2x + 1 + 4x^2 - 8x + 4 = x^2 - 8x + 16 + 4x^2 - 12x + 9$$

Po redukcji wyrazów podobnych otrzymujemy: $x = 2$.

Współrzędne punktu $C = (2,7)$.

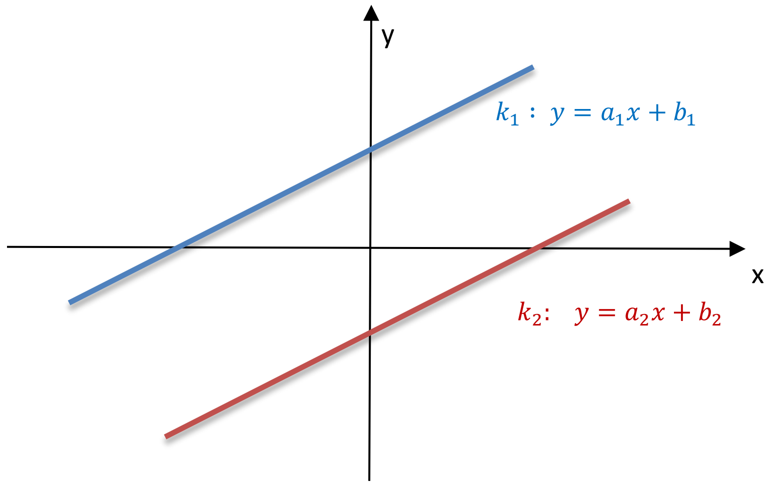
		Zadania do samodzielnego wykonania. Uczniowie przy rozwiązywaniu zadań mogą korzystać z programu GeoGebra . Nauczyciel jest osobą wspomagającą. **Zad. 1.** Wykaż, że trójkąt A,B, C jest prostokątny. Oblicz jego pole oraz miary kątów ostrych w trójkącie, gdy: a) $A=(3,-2),\ B=(1,2),\ C=(0,1)$ b) $A=(4,3),\ B=(7,4),\ C=(5,5)$ **Zad. 2.** Podstawą trójkąta ABC jest odcinek AB, gdzie $A=(3,5)\ i\ B=(9,-1)$. Oblicz współrzędne punktu C tak, aby trójkąt ABC był równoramienny, a jego pole było równe 30. **Zad. 3.** Punkty $A=(-5,-3)\quad i\quad B=(-1,9)$ są dwoma kolejnymi wierzchołkami kwadratu ABCD. a) Oblicz pole tego kwadratu. b) Wyznacz równanie prostej zawierającej przekątną BD. **Zad. 4**. Wyznacz odległość punktu przecięcia się prostych $k\colon y=3x+2$ i $l\colon y=-\frac{1}{2}x+5$ od osi OX. **Zad. 5.** Dane są punkty $A=(-2,4),\ B=(1,-5),\ C=(7,1)$. Wykaż, że trójkąt ABC jest równoramienny. **Zad. 6.** Punkty $A=(5,-2)\ i\ B=(17,2)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego ABC o kacie prostym przy wierzchołku A. Wierzchołek C należy do prostej o równaniu $y\ =2x+3$. a) Wyznacz współrzędne punktu C. b) Oblicz pole trójkąta ABC.
7	Podsumowanie zajęć	Ocena aktywności uczniów na lekcji i zadanie pracy domowej.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Scenariusz nr 6: Proste równoległe i prostopadłe w ujęciu analitycznym

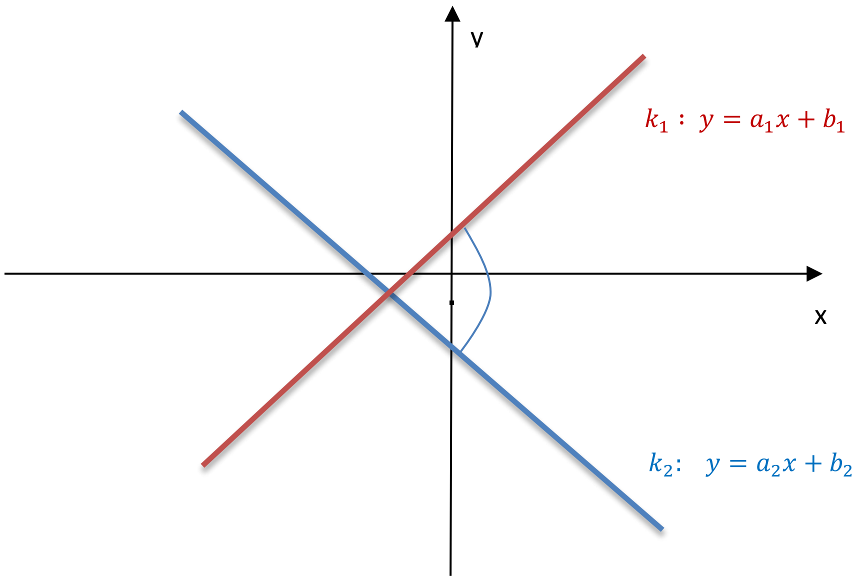
Temat zajęć		**Proste równoległe i prostopadłe w ujęciu analitycznym**
Dział		**Geometria analityczna**
Klasa (poziom edukacyjny)		**druga technikum**
Czas trwania zajęć		**90 minut**
Lp.	**Element scenariusza**	**Treść zajęć**
1	Cel ogólny	• Kształcenie umiejętności samodzielnego dochodzenia do wiedzy; • Rozwijanie umiejętności czytania zadań ze zrozumieniem; • Wykształcenie umiejętności rozwiązywania podstawowych zadań dotyczących geometrii analitycznej;
2	Cele szczegółowe	Uczeń: • potrafi zbadać równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych • potrafi wyznaczyć równanie prostej równoległej do danej prostej i przechodzącej przez punkt • potrafi wyznaczyć równanie prostej prostopadłej do danej prostej i przechodzącej przez punkt • potrafi zastosować zdobytą wiedzę w rozwiązywaniu zadań
3	Formy i metody	• Praca indywidualna z komputerem – mobilna pracownia komputerowa • Ćwiczenia • Praca z tablicą interaktywną
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w	Tablica interaktywna, poradnik multimedialny.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

	projekcie np. moduł, gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Zalogowanie się w komputerze i włączenie poradnika multimedialnego.
6	Przebieg zajęć *(pełna wersja)*	Lekcję prowadzimy wykorzystując do tego „Poradnik multimedialny" (temat 6) oraz tablicę interaktywną. Zapoznajemy ucznia z teorią, analizujemy ćwiczenia, następnie uczniowie rozwiązują samodzielnie kolejne zadania. **<u>Warunek równoległości prostych</u>:** $k_1 : y = a_1x + b_1$, $k_2: y = a_2x + b_2$ $\boldsymbol{k_1 \parallel k_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2}$  Uwaga. Jeżeli $a_1 = a_2$ i $b_1 = b_2$, to proste k_1 i k_2 pokrywają się. Jeżeli $a_1 = a_2$ i $b_1 \neq b_2$, to proste k_1 i k_2 są rozłączne.

Warunek prostopadłości prostych: $k_1 : y = a_1x + b_1$, $k_2 : y = a_2x + b_2$

$$\boldsymbol{k_1 \perp k_2 \Leftrightarrow a_1 \cdot a_2 = -1}$$



Przykład 1.

Znajdź równanie prostej równoległej do prostej $y = 3 - 4x$ i przechodzącej przez punkt P = (1,-2).

Rozwiązanie:

Niech k: $y = -4x + 3$

$l: y = ax + b$

$l \parallel k \Leftrightarrow a = -4$

$l: y = -4x + b$

$P \in l \Leftrightarrow -2 = -4 \cdot 1 + b$

$b = 2$

Szukana prosta to $\boldsymbol{y = -4x + 2}$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 2.

Znajdź równanie prostej prostopadłej do prostej $7x-3y+8=0$ i przechodzącej przez punkt Q = (0,4).

Rozwiązanie:

Niech $7x-3y+8=0$

$k\colon\ y=\frac{7}{3}x+\frac{8}{3}$

$l\colon\ y=ax+b$

$l\perp k \Leftrightarrow a\cdot\frac{7}{3}=-1$ więc $a=-\frac{3}{7}$

$l\colon y=-\frac{3}{7}x+b$

$Q\in l \Leftrightarrow\ 4=-\dfrac{3}{7}\cdot 0+b$

$b=4$

Szukana prosta to $\boldsymbol{y=-\frac{3}{7}x+4}$

Przykład 3.

Dla jakich wartości parametru *m* proste o równaniach $(m+2)x-4y+8=0$ i $6x-2y+1=0$ są prostopadłe?

Rozwiązanie:

Przekształcamy obie proste do postaci kierunkowej:

$4y=(m+2)x+8$ oraz $2y=6x+1$

$y=\frac{(m+2)}{4}x+2$ $y=3x+\frac{1}{2}$

Proste te są prostopadłe , gdy $\frac{(m+2)}{4}\cdot 3=-1$

$m+2=-\frac{4}{3}$

$\boldsymbol{m=-3\frac{1}{3}}$

Przykład 4.
Wyznacz równanie prostej zawierającej wysokość trójkąta ABC poprowadzoną z wierzchołka A, jeśli A = (3,7), B = (-3,-1), C = (4,1)

Rozwiązanie:

1) Wyznaczam współczynnik kierunkowy prostej BC: $y = a_1x + b_1$

   $a_1 = \frac{1-(-1)}{4-(-3)} = \frac{2}{7}$

2) Prosta zawierająca wysokość trójkąta ABC poprowadzoną z wierzchołka A jest prostopadła do prostej BC zatem jej współczynnik kierunkowy jest równy:

   $a \cdot \frac{2}{7} = -1$

   $a = -\frac{7}{2}$ więc równanie tej prostej to $y = -\frac{7}{2}x + b$

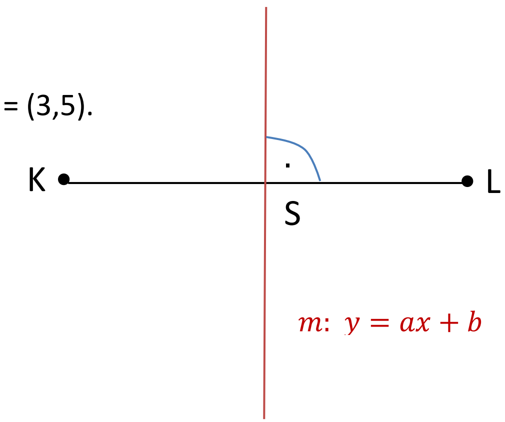
3) Punkt A należy do prostej $y = -\frac{7}{2}x + b$:

   $7 = -\frac{7}{2} \cdot 3 + b$

   $b = 7 + 10\frac{1}{2} = 17\frac{1}{2}$

Szukana prosta ma równanie $y = -\frac{7}{2}x + 17\frac{1}{2}$

Przykład 5.
Wyznacz równanie symetralnej odcinka KL, jeśli K = (9,2), L = (3,5).
Rozwiązanie:



Prosta m jest prostopadła do prostej przechodzącej przez punkty K i L.

1) Wyznaczam współczynnik kierunkowy prostej KL:

$$a_1 = \frac{5-2}{3-9} = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}$$

2) Wyznaczam współczynnik kierunkowy prostej m:

$$a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$a = 2$$

Zatem m: $y = 2x + b$

3) Wyznaczam współrzędne środka odcinka KL:

$$x_S = \frac{9+3}{2} = 6 \qquad y_S = \frac{2+5}{2} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$$

$$S = \left(6, 3\frac{1}{2}\right)$$

4) $S \in m \Longrightarrow 3\frac{1}{2} = 2 \cdot 6 + b$

$$b = -8\frac{1}{2}$$

Równanie symetralnej odcinka KL to $\boldsymbol{y = 2x - 8\frac{1}{2}}$

Zadania do samodzielnego wykonania:

Zad. 1.

Wiedząc, że punkt $A = (-1, -2)$ i prosta *k* ma równanie $4x + 3y - 2 = 0$, napisz:

a) Równanie prostej *l* równoległej do prostej *k* i przechodzącej przez punkt A;

b) Równanie prostej *m* prostopadłej do prostej *k* i przechodzącej przez punkt A;

Zad. 2.

Oblicz pole trójkąta ABC, gdy $A = (-3, -1), B = (-1,7), \ C = (3,1)$.

Zad. 3.

Wyznacz równanie symetralnej odcinka AB , jeśli $A = (4,1) \ i \ \ B = (2, -3)$.

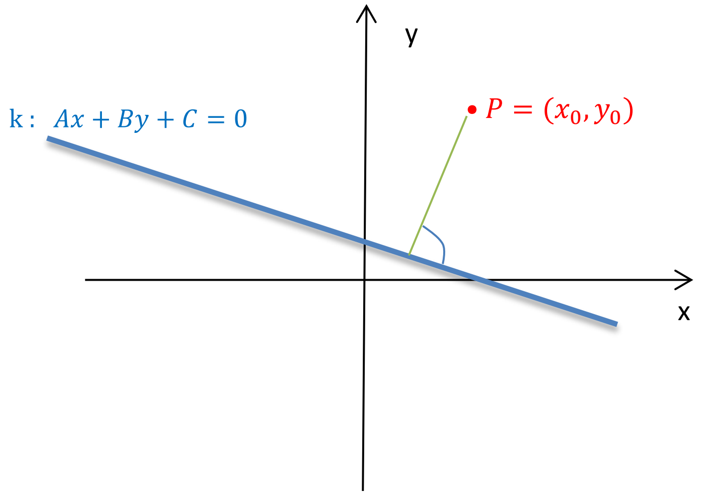
Zad. 4.

Punkty $K = (9, -1) \ i \ L = (-7,3)$ są dwoma kolejnymi wierzchołkami prostokąta KLMN. Na boku MN

		leży punkt $P=(4,-4)$. a) Napisz równanie prostej MN. b) Oblicz współrzędne wierzchołka M. c) Oblicz współrzędne środka S symetrii prostokąta KLMN. **Zad. 5.** Punkty $A=(-3,-4)$, $B=(9,1)$, $C=(14,13)$, $D=(2,8)$ są wierzchołkami czworokąta ABCD. a) Sprawdź, czy czworokąt jest rombem. b) Oblicz pole czworokąta ABCD. **Zad. 6.** Oblicz dla jakich wartości parametru k prosta o równaniu: a) $(k^2+2k-3)+(k+3)y+10=0$ jest równoległa do osi x b) $(k+6)x+(k^2-4k-12)y-5=0$ jest równoległa do osi y.
7	Podsumowanie zajęć	Ocena aktywności uczniów na lekcji i zadanie pracy domowej.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	Można wykorzystać program GeoGebra do rozwiązywania zadań lub sprawdzania prawidłowości rozwiązań.

Scenariusz nr 7: Odległość punktu od prostej

Temat zajęć		**Odległość punktu od prostej**
Dział		**Geometria analityczna**
Klasa (poziom edukacyjny)		**druga technikum**
Czas trwania zajęć		**90 minut**
Lp.	**Element scenariusza**	**Treść zajęć**
1	Cel ogólny	• Kształcenie umiejętności samodzielnego dochodzenia do wiedzy • Rozwijanie umiejętności czytania zadań ze zrozumieniem • Wykształcenie umiejętności rozwiązywania podstawowych zadań dotyczących geometrii analitycznej
2	Cele szczegółowe	• Uczeń: • potrafi wyznaczyć odległość punktu od prostej korzystając ze wzoru oraz bez jego użycia; • potrafi wyznaczyć współrzędne punktu przecięcia się prostych; • potrafi zastosować zdobytą wiedzę w rozwiązywaniu zadań.
3	Formy i metody	• Praca indywidualna z komputerem – mobilna pracownia komputerowa • Ćwiczenia • Praca z tablicą interaktywną
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w	Tablica interaktywna, poradnik multimedialny.

	projekcie np. moduł, gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Zalogowanie się w komputerze i włączenie poradnika multimedialnego.
6	Przebieg zajęć *(pełna wersja)*	Lekcję prowadzimy wykorzystując do tego „Poradnik multimedialny” (temat 7) oraz tablicę interaktywną. Zapoznajemy ucznia z teorią, analizujemy ćwiczenia, następnie uczniowie rozwiązują samodzielnie kolejne zadania. Odległość punktu $P = (x_0, y_0)$ od prostej k : $Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 > 0$ wyraża się wzorem: $$\boldsymbol{d(P,k)} = \frac{\lvert Ax_0+By_0+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$$  ***Przykład 1.*** Oblicz odległość punktu $P = (-3,1)$ od prostej k o równaniu $4x + 3y - 1 = 0$.

		Rozwiązanie: $$d(P,k)=\frac{\|4\cdot(-3)+3\cdot1-1\|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{\|-10\|}{\sqrt{16+9}}=\frac{10}{5}=2$$ **_Przykład 2._** Wyznacz odległość punktu $K=(4{,}2)$ od prostej przechodzącej przez punkty $A=(-5{,}4)$ i $B=(3,-2)$ *Rozwiązanie:* Wyznaczam równanie prostej AB: $$\begin{cases}4=-5a+b\\-2=3a+b\end{cases}$$ Po rozwiązaniu układu równań otrzymujemy: $a=-\frac{3}{4}$ $b=\frac{1}{4}$, więc prosta AB ma równanie w postaci kierunkowej: $y=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$, zaś w postaci ogólnej: $3x+4y-1=0$ Zatem odległość punktu K od prostej AB wynosi: $$d=\frac{\|3\cdot4+4\cdot2-1\|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{19}{5}=3\frac{4}{5}$$ **_Przykład 3._** Wyznacz odległość punktu przecięcia się prostych o równaniach $-2x+2y+10=0$ i $y=-2{,}5x+2$ od prostej $y=-x+3$ *Rozwiązanie:* Współrzędne punktu P przecięcia się prostych wyznaczamy z układu równań: $$\begin{cases}-2x+2y+10=0\\y=-2{,}5x+2\quad /\cdot(-2)\end{cases}$$ $$\begin{cases}-2x+2y+10=0\\-5x-2y+4=0\end{cases}$$ $-7x=-14$ $x=2$

$\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$ więc P=(2,-3)

Obliczamy odległość punktu p od prostej m: $y = -x + 3$

$m: x + y - 3 = 0$

$$d(P, m) = \frac{|2 + (-3) - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

Przykład 4.

Oblicz pole trójkąta ABC wiedząc, że $A(-4,2)$, $B = (0,4)$, $C = (6,-4)$.

Rozwiązanie:

Za podstawę trójkąta przyjmiemy odcinek AC, zaś wysokość ***h*** prowadzimy z wierzchołka B do prostej AC. Wyznaczamy równanie prostej AC:

$\begin{cases} 2 = -4a + b \\ -4 = 6a + b \end{cases}$ $po\ rozwiazaniu\ układu\ równań\ otrzymujemy: y = -\frac{3}{5}x - \frac{2}{5}$

Zamieniamy na postać ogólną: $3x + 5y + 2 = 0$

Mamy $h = d(B, pr. AC) = \frac{|3\cdot 0+5\cdot 4+2|}{\sqrt{3^2+5^2}} = \frac{22}{\sqrt{34}} = \frac{22\sqrt{34}}{34}$

Podstawa AC ma długość: $|AC| = \sqrt{(6+4)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{100 + 36} = \sqrt{136}$

Obliczamy pole trójkąta ABC: $P = \frac{1}{2}|AC| \cdot h$

$P = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{136} \cdot \frac{22\sqrt{34}}{34} = \frac{11\sqrt{136\cdot 34}}{34} = \frac{11\cdot 68}{34} = 22$

Pole trójkąta wynosi 22.

Przykład 5.

Punkt $V = (2,-5)$ jest wierzchołkiem kwadratu. Jeden z jego boków zawiera się w prostej o równaniu $x + 2y - 7 = 0$. Oblicz pole powierzchni tego kwadratu.

Rozwiązanie:

Punkt V nie należy do prostej $x + 2y - 7 = 0$, zatem odległość tego punktu od tej prostej jest długością

		boku kwadratu: Stąd $a = \frac{\lvert 2+2\cdot(-5)-7 \rvert}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}$ Obliczamy pole kwadratu: $P = a^2 = \left(3\sqrt{5}\right)^2 = 45$ **Zadania do samodzielnego wykonania:** **Zad. 1.** Oblicz długości wysokości oraz środkowych trójkąta o wierzchołkach: $A = (3,5), B = (-3,2), C = (1,1)$ **Zad. 2.** Wierzchołkami trójkąta ABC są punkty $A = (-4,-1)$, $B = (0,2), C = (-2,3)$. a) Oblicz długość wysokości opuszczonej z wierzchołka C. b) Oblicz pole trójkąta ABC. **Zad. 3**. Punkty A=(-2,-3), B=(4,-1), C=(6,3) są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku ABCD. a) Znajdź równanie prostej CD. b) Znajdź współrzędne wierzchołka D. c) Oblicz pole równoległoboku. **Zad. 4.** Punkty $A = (1,2), B = (7,8)$, $C = (1,5)$ są wierzchołkami trapezu równoramiennego ABCD, w którym bok AB jest równoległy do boku CD. a) Wyznacz współrzędne wierzchołka C b) Oblicz pole tego trapezu c) Napisz równanie osi symetrii tego trapezu
7	Podsumowanie zajęć	Ocena aktywności uczniów na lekcji i zadanie pracy domowej.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	Można wykorzystać program GeoGebra do rozwiązywania zadań lub sprawdzania prawidłowości rozwiązań.

Scenariusz nr 8: Odległość między prostymi równoległymi w układzie współrzędnych

Temat zajęć	**Odległość między prostymi równoległymi w układzie współrzędnych**
Dział	**Geometria analityczna**
Klasa (poziom edukacyjny)	**druga technikum**
Czas trwania zajęć	**90 minut**

Lp.	**Element scenariusza**	**Treść zajęć**
1	Cel ogólny	• Kształcenie umiejętności samodzielnego dochodzenia do wiedzy • Rozwijanie umiejętności czytania zadań ze zrozumieniem • Wykształcenie umiejętności rozwiązywania podstawowych zadań dotyczących geometrii analitycznej
2	Cele szczegółowe	• Uczeń: • potrafi wyznaczyć odległość punktu od prostej; • potrafi wyznaczyć współrzędne punktu należącego do prostej; • potrafi wyznaczyć odległość między prostymi równoległymi; • potrafi wykorzystać wcześniej zdobyte wiadomości w rozwiązywaniu zadań.
3	Formy i metody	• Praca indywidualna z komputerem – mobilna pracownia komputerowa • Ćwiczenia • Praca z tablicą interaktywną
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków	Tablica interaktywna, poradnik multimedialny.

	opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Zalogowanie się w komputerze i włączenie poradnika multimedialnego.
6	Przebieg zajęć *(pełna wersja)*	Lekcję prowadzimy wykorzystując do tego „Poradnik multimedialny” (temat 8) oraz tablicę interaktywną. Zapoznajemy ucznia z teorią, analizujemy ćwiczenia, następnie uczniowie rozwiązują samodzielnie kolejne zadania. ***<u>Odległością dwóch prostych równoległych</u>*** nazywamy odległość dowolnego punktu jednej z tych prostych od drugiej prostej. Odległość *d* prostych równoległych o równaniach $Ax+By+C_1=0$ i $Ax+By+C_2=0$ wyraża się wzorem: $\boldsymbol{d=\frac{\lvert C_1-C_2\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}}$ ***Przykład 1.*** Wyznacz odległość między prostymi $k\colon 3x+y-2=0$ i $l\colon 3x+y+4=0$. *Rozwiązanie:* Podstawiam do wzoru: $d=\frac{\lvert -2-4\rvert}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{10}}=\frac{6\sqrt{10}}{10}$ ***Przykład 2.*** Wyznacz odległość między prostymi $k\colon y=\frac{1}{2}x-2$ i $l\colon\ y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

Rozwiązanie:

<u>I sposób</u>

Przekształćmy dane równania prostych do postaci ogólnej:

$k\colon\ x - 2y - 4 = 0 \qquad l\colon\ :\ \ x - 2y + 1 = 0$

Określamy współczynniki: $A = 1 \quad B = -2 \quad C_1 = -4 \quad C_2 = 1$

Obliczamy odległość między prostymi: $d = \frac{|-4-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

<u>II sposób</u>

- Wyznaczmy współrzędne punktu należącego do prostej np. *k* : P=(2,-1).
- Wyznaczamy równanie prostej **m**: $y = ax + b$ przechodzącej przez punkt P oraz prostopadłej do prostej *l*: $a = -2$, więc podstawiając współrzędne punktu P do równania prostej m otrzymujemy: $-1 = -2 \cdot 2 + b,\ \ b = 3$, zatem prosta m ma równanie $m\colon y = -2x + 3$
- Obliczamy współrzędne punktu przecięcia się prostych *m* i *l*: $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ y = -2x + 3 \end{cases}$; rozwiązaniem układu równań jest para liczb: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$, współrzędne punktu przecięcia się prostych *m* i *l* oznaczamy $Q = (1,1)$
- Obliczamy odległość między punktami P i Q:

  $$|PQ| = \sqrt{(1-2)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{5}$$

Zatem odległość między prostymi równoległymi *k* i *l* wynosi $\sqrt{5}$.

Przykład 3.

Znajdź równania prostych równoległych do prostej o równaniu $\sqrt{3}x - y - 4 = 0$ i odległych od niej o 6.

Rozwiązanie:

Szukane proste mają równania: $\sqrt{3}x - y + C = 0$

d = 6 zatem $6 = \frac{|C-(-4)|}{\sqrt{\sqrt{3}^2+(-1)^2}}$

$6=\frac{|C+4|}{2}$

Rozwiązaniami równania $|C+4|=12$ są liczby $C=8$ lub $C=-16$.

Zatem szukane proste maja równania: $\sqrt{3}x-y+8=0 \quad lub \quad \sqrt{3}x-y-16=0$

Przykład 4.

Oblicz długości wysokości równoległoboku, którego boki zawarte są w prostych o równaniach:
$k_1:\ -2x+y-4=0,\ k_2:\ -2x+y+6=0$ oraz $l_1:\ x-3y-3=0,\ \ l_2:\ x-3y+12=0$

Rozwiązanie:

Wysokości równoległoboku związane są z odległościami prostych równoległych, w których zawarte są boki równoległoboku.

Zatem $\quad h_1=d(k_1,k_2)=\frac{|-4-6|}{\sqrt{(-2)^2+1^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$

$h_2=d(l_1,l_2)=\frac{|-3-12|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{15}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{2}$

Przykład 5.

Dla jakiej wartości parametru m odległość między prostymi $4x+3y+(m^2+3)=0$ i $4x+3y+7=0$ jest równa 4?

Rozwiązanie:

Korzystamy ze wzoru na odległość między prostymi: $4=\frac{|m^2+3-7|}{\sqrt{4^2+3^2}} \quad \rightarrow \quad 4=\frac{|m^2-4|}{\sqrt{16+9}}$

Rozwiązujemy równanie $|m^2-4|=20$

$m^2-4=20$ lub $m^2-4=-20$

$m^2=24$ lub $m^2=-16$

Pierwsze z równań ma rozwiązanie : $m=2\sqrt{6} \quad lub \quad m=-2\sqrt{6}$, drugie zaś nie ma rozwiązań.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

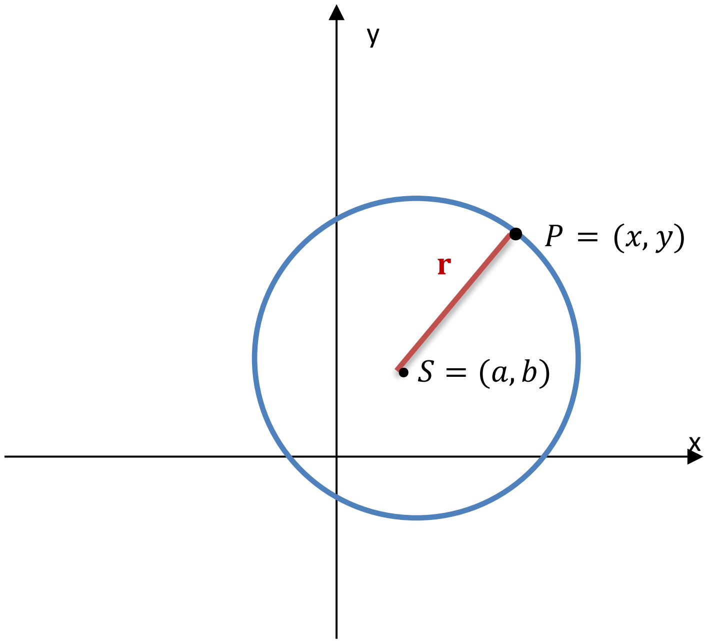
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

		Zadania do samodzielnego wykonania: **Zad. 1.** Oblicz odległość prostych równoległych o równaniach: a) $3x + 2y + 5 = 0\ i\ 3x + 2y - 4 = 0$ b) $y = 2x + 3$ i $4x - 2y + 7 = 0$ **Zad. 2.** Oblicz długość wysokości równoległoboku, wiedząc, że jego boki są zawarte w prostych o równaniach $3x - 4y + 1 = 0\ i\ 3x - 4y + 8 = 0$ oraz $-2x + 2y + 12 = 0\ i\ -2x + 2y - 4 = 0$. **Zad. 3.** Podstawy trapezu o długościach 5 i 7 zawierają się w prostych o równaniach $x - 2y + 8 = 0$ $i\ x - 2y + 7 = 0$. Oblicz pole tego trapezu. **Zad. 4.** Proste m i n są równoległe do prostej o równaniu $2x + 5y + 7 = 0$ i przechodzą przez punkty odpowiednio $A = (-30,12)\ i\ B = (-34,2)$. a) Znajdź równania prostych m i n. b) Oblicz odległość między prostymi m i n. c) Uzasadnij, że odcinek AB jest prostopadły do prostych m i n. **Zad. 5.** Oblicz pole czworokąta ograniczonego prostymi o równaniach: $y = \frac{1}{2}x - 3\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$, $y = -2x - 1$, $y = -2x + 4$
7	Podsumowanie zajęć	Ocena aktywności uczniów na lekcji i zadanie pracy domowej.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	Można wykorzystać program GeoGebra do rozwiązywania zadań lub sprawdzania prawidłowości rozwiązań.

Scenariusz nr 9: Równanie okręgu

Temat zajęć		Równanie okręgu
Dział		Geometria analityczna
Klasa (poziom edukacyjny)		druga technikum
Czas trwania zajęć		90 minut
Lp.	**Element scenariusza**	**Treść zajęć**
1	Cel ogólny	• Kształcenie umiejętności samodzielnego dochodzenia do wiedzy • Rozwijanie umiejętności czytania zadań ze zrozumieniem • Wykształcenie umiejętności rozwiązywania podstawowych zadań dotyczących geometrii analitycznej
2	Cele szczegółowe	Uczeń: • potrafi wyznaczyć odległość między punktami; • potrafi wyznaczyć współrzędne środka okręgu na podstawie jego wzoru; • potrafi zapisać równanie okręgu mając dane współrzędne jego środka i długość promienia; • potrafi wykorzystać wcześniej zdobyte wiadomości w rozwiązywaniu zadań.
3	Formy i metody	• Praca indywidualna z komputerem – mobilna pracownia komputerowa • Ćwiczenia • Praca z tablicą interaktywną
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w	Tablica interaktywna, poradnik multimedialny.

	projekcie np. moduł, gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Zalogowanie się w komputerze i włączenie poradnika multimedialnego.
6	Przebieg zajęć *(pełna wersja)*	Lekcję prowadzimy wykorzystując do tego „Poradnik multimedialny” (temat 9) oraz tablicę interaktywną. Zapoznajemy ucznia z teorią, analizujemy ćwiczenia, następnie uczniowie rozwiązują samodzielnie kolejne zadania. Korzystamy z tablicy interaktywnej. ***Okręgiem o środku S i promieniu r*** nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu S jest równa r.  $P \in o(S, r) \Leftrightarrow \lvert SP \rvert = r$

		Odległość punktu $P=(x,y)$ od środka okręgu $S=(a,b)$ obliczamy stosując wzór na odległość między punktami: $$\lvert SP\rvert=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$ $$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$$ *Zatem* $$\boldsymbol{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2}$$ Równanie okręgu o środku $S=(a,b)$ i promieniu $r>0$ **Postać kanoniczna** Równanie okręgu można zapisać w innej postaci: $$\boldsymbol{x^2+y^2-2ax-2by+c=0} \quad \textbf{gdy} \quad \boldsymbol{r^2=a^2+b^2-c>0}$$ ***Kołem o środku S i promieniu r*** nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu S jest mniejsza lub równa r. $$P\in k(S,r)\Leftrightarrow \lvert SP\rvert\le r$$ Nierówność $\boldsymbol{(x-a)^2+(y-b)^2\le r^2}$ (r > 0) opisuje na płaszczyźnie kartezjańskiej koło o środku $S=(a,b)$ i promieniu r. Nierówność $\boldsymbol{(x-a)^2+(y-b)^2> r^2}$ (r > 0) opisuje na płaszczyźnie kartezjańskiej zbiór punktów leżących na zewnątrz tego koła. ***Przykład 1.*** Zapisz równanie okręgu o środku $S=(2{,}5)$ i promieniu $r=4$.

		Rozwiązanie: Podstawiamy $a = 2$, $b = 5$, $r = 4$ do wzoru: $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 16$ ***Przykład 2.*** Napisz równanie okręgu o środku w punkcie $S = (-4,4)$ i przechodzącego przez punkt $P = (-2,1)$. *Rozwiązanie:* $(x+4)^2 + (y-4)^2 = r^2$ $P \in (x+4)^2 + (y-4)^2 = r^2$ *zatem:* $(-2+4)^2 + (1-4)^2 = r^2$ $r^2 = 13$, $r = \sqrt{13}$ Więc $(x+4)^2 + (y-4)^2 = 13$ ***Przykład 3.*** Napisz równanie okręgu o promieniu 6 i stycznego do obu osi układu współrzędnych. *Rozwiązanie:* Są cztery takie okręgi o środkach : $S_1 = (6,6)$, $S_2 = (-6,6)$, $S_3 = (-6,-6)$, $S_4 = (6,-6)$ Zatem równania okręgów to: $(x-6)^2 + (y-6)^2 = 36$ $(x+6)^2 + (y-6)^2 = 36$ $(x+6)^2 + (y+6)^2 = 36$ $(x-6)^2 + (y+6)^2 = 36$ ***Przykład 4.*** Napisz równanie okręgu o średnicy AB, wiedząc, że $A = (-3,7)\ i\ B = (5,1)$. *Rozwiązanie:* Wyznaczamy promień okręgu: $r = \frac{1}{2}\lvert AB \rvert$

gdzie $|AB| = \sqrt{(5+3)^2 + (1-7)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$, więc $r = 5$.
Środek okręgu jest środkiem odcinka AB: $x_s = \frac{-3+5}{2} = 1$, $y_s = \frac{7+1}{2} = 4$ stąd $S = (1,4)$.
Szukany okrąg ma równanie: $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 25$

Przykład 5.
Napisz równanie okręgu współśrodkowego z okręgiem o równaniu $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 4 = 0$ i przechodzącego przez punkt $M = (1,4)$.

Rozwiązanie:
Wyznaczmy współrzędne środka danego okręgu:
$-2a = -4 \quad więc \quad a = 2$
$-2b = 6 \quad więc \quad b = -3$
Współrzędne środka szukanego okręgu wynoszą $S = (2,-3)$, zatem
$(x-2)^2 + (y+3)^2 = r^2$
$M \in \ (x-2)^2 + (y+3)^2 = r^2$ stąd
$$(1-2)^2 + (4+3)^2 = r^2$$
otrzymujemy $r^2 = 50$, $r = 5\sqrt{2}$
Równanie szukanego okręgu to:
$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 50$$

Zadania do samodzielnego wykonania:
Zad. 1.
Napisz równanie okręgu o średnicy AB:
a) $A = (-2,1) \ i \ B = (-7,-7)$
b) $A = (6,-3) \ i \ B = (-1,1)$
c) $A = (\frac{1}{2},2) \ i \ B = (\frac{3}{2},-4)$
Zad. 2.
Zapisz w postaci kanonicznej równanie okręgu, podaj jego promień i współrzędne środka oraz narysuj

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

		ten okrąg. a) $x^2+y^2-10x+24y-56=0$ b) $x^2+4x+y^2-2y-20=0$ c) $x^2-2x+y^2-6y-3=0$ **Zad. 3.** Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC: a) $A=(1,2), B=(5,2), C=(1,5)$ b) $A=(5,5), B=(8,2), C=(2,2)$ c) $A=(-4,-3), B=(-2,-3), C=(-1,2)$ **Zad. 4.** Napisz równanie okręgu stycznego do osi y w punkcie $P=(0,4)$ i przechodzącego przez punkt $R=(3,7)$. **Zad. 5.** Do okręgu o środku $S=(1,1)$ należy punkt $V=(2,2)$. Oblicz pole trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg. **Zad. 6.** Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkty $A=(3,0)\ i\ B=(-1,2)$, którego środek leży na prostej o równaniu $x-y+2=0$. **Zad. 7.** Oblicz, dla jakich wartości parametru m proste o równaniach $3x+2y-m=0$ $i\ 2x+3y-m+1=0$ przecinają się w punkcie Q należącym do okręgu o środku w początku układu współrzędnych i promieniu długości 1. ***Praca domowa*** Rozwiązanie jednego z testów z poradnika multimedialnego.
7	Podsumowanie zajęć	Ocena aktywności uczniów na lekcji i zadanie pracy domowej.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	Można wykorzystać program GeoGebra do rozwiązywania zadań lub sprawdzania prawidłowości rozwiązań.

Scenariusz nr 10: Powtórzenie wiadomości z geometrii analitycznej - cz.1

Temat zajęć		**Powtórzenie wiadomości z geometrii analitycznej - cz.1**
Dział		**Geometria analityczna**
Klasa (poziom edukacyjny)		**druga technikum**
Czas trwania zajęć		**90 minut**
Lp.	**Element scenariusza**	**Treść zajęć**
1	Cel ogólny	• Kształcenie umiejętności samodzielnego dochodzenia do wiedzy • Rozwijanie umiejętności czytania zadań ze zrozumieniem • Wykształcenie umiejętności rozwiązywania podstawowych zadań dotyczących geometrii analitycznej • Rozwijanie umiejętności logicznego twórczego myślenia, wnioskowania, współpracy, współodpowiedzialności
2	Cele szczegółowe	• Uczeń: • potrafi zastosować zdobytą wiedzę w rozwiązywaniu różnych zadań; • potrafi rozwiązywać zadania zamknięte różnymi metodami(sprawdzania wyników, eliminacji i preferencji, odkrywania).
3	Formy i metody	• Praca indywidualna z komputerem – mobilna pracownia komputerowa • Ćwiczenia • Praca z tablicą interaktywną
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym	Tablica interaktywna, poradnik multimedialny.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

	wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Zalogowanie się w komputerze i włączenie poradnika multimedialnego.
6	Przebieg zajęć *(pełna wersja)*	Lekcję prowadzimy wykorzystując do tego „Poradnik multimedialny” - TEST 1 oraz tablicę interaktywną. Uczniowie rozwiązują samodzielnie kolejne zadania. **TEST 1** ***Geometria analityczna*** ***Zadania zamknięte.*** **1.** Proste $k: 4x-2y+1=0\ i\ l: y=ax+b$ są równoległe, wówczas: A. $a=-2$ B. $a=-\frac{1}{2}$ C. $a=\frac{1}{2}$ <u>D. $a=2$</u> **2.** Środek odcinka o końcach A=(1,2) i B=(3,-2) ma współrzędne: A. (-1,0) <u>B. (2,0)</u> C. (-1,-2) D. (2,-2) **3.** Punkty A=(-1,5) i B=(-3,2) są wierzchołkami trójkąta równobocznego ABC. Długość boku tego trójkąta wynosi: A. 5 <u>B. $\sqrt{13}$</u> C. $\sqrt{67}$ D. $\sqrt{61}$ **4.** Proste o równaniach $mx+3y-1=0$ i $(m+1)x+7y+1=0$ przecinają się w punkcie P = (2,-1), gdy: A. <u>m = 2</u> B. m = 1 C. m = -1 D. m = - 2 **5.** Środkiem okręgu $x^2+y^2-8x-6y=0$ jest punkt: A. S = (-8,6) B. S = (-4,-3) <u>C. S = (4,3)</u> D. S = (8,6) **6.** Na prostej AB, gdzie A = (0,-4) i B =(-1,4) leży punkt: A. N= (1,-4) B. N = (1,4) C. N = (-1,-4) <u>D. N = (-1,4)</u> **7.** Równanie symetralnej odcinka o końcach M = (1,2) i N = (3,-2) ma postać: A. <u>$x-2y-2=0$</u> B. $x-y=0$ C. $x-y+2=0$ D. $2x-y-2=0$ **8.** Proste k i l są prostopadłe oraz $k: y=-3x+1$. Wtedy prosta l ma równanie: A. $y=-3x+b$ <u>B. $y=\frac{1}{3}x+b$</u> C. . $y=-\frac{1}{3}x+b$ D. $y=3x+b$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

		9. Punkt przecięcia się prostych o równaniach $y = 3x + 5$ i $y = x + 1$ ma współrzędne: A. (2,-1) B. (-2,1) C. (-2,-1) D. (2,1) **10.** Przeciwległe wierzchołki kwadratu mają współrzędne A =(-1,-5) i C = (5,1). Bok kwadratu ma długość: A. $8\sqrt{2}$ B. $\sqrt{26}$ C. 4 D. 6 ***Zadania otwarte.*** **1.** Napisz równania prostych, w których zawierają się boki trójkąta ABC, jeśli $A = (-5,-2),\ B = (7,-2),\ C = (-5,3)$ Odp.: $y = -2,\ x = -5,\ y = -\frac{5}{12}x + \frac{11}{12}$ **2.** Dla jakiej wartości parametru m proste $k: y = 9mx + 5$ i $l: y = m^2x - 7$ są równoległe? Odp.: $m \in \{0,9\}$ **3.** Punkty A = (-5,-3), B = (2,3), C = (-3,6) są wierzchołkami trójkąta równoramiennego ABC. Oblicz długość ramienia tego trójkąta. Odp.: $\sqrt{85}$ **4.** Napisz równanie okręgu o środku S = (-2,5) i promieniu równym długości odcinka o końcach A = (3,-4) i B = (-4,-2). Odp.: $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 53$ **5.** W równoległoboku ABCD dane są wierzchołki A = (1,1), B = (6,-4), D = (0,8). Wyznacz współrzędne wierzchołka C i wykaż, że równoległobok ABCD jest rombem. Odp.: C = (5,3). Pozostałe testy są do wykorzystania do powtórzenia według uznania nauczyciela.
7	Podsumowanie zajęć	Ocena aktywności uczniów na lekcji i zadanie pracy domowej.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	Można wykorzystać program GeoGebra do rozwiązywania zadań lub sprawdzania prawidłowości rozwiązań.

Scenariusz nr 11*: Figury w układzie współrzędnych

Temat zajęć		**Figury w układzie współrzędnych**
Dział		**Geometria analityczna**
Klasa (poziom edukacyjny)		**Druga szkoły ponadgimnazjalnej**
Czas trwania zajęć		**90 minut**
Lp.	**Element scenariusza**	**Treść zajęć**
1	Cel ogólny	• Kształcenie umiejętności samodzielnego dochodzenia do wiedzy • Rozwijanie umiejętności czytania zadań ze zrozumieniem • Wykształcenie umiejętności rozwiązywania zadań dotyczących graficznego przedstawienia nierówności i układów nierówności • Rozwijanie umiejętności logicznego twórczego myślenia, wnioskowania, współpracy, współodpowiedzialności
2	Cele szczegółowe	Uczeń: • potrafi narysować koło o danym środku; • potrafi przekształcić równanie okręgu do postaci kanonicznej; • potrafi narysować w układzie współrzędnych rozwiązanie nierówności i układu nierówności; • potrafi opisać figurę za pomocą nierówności.
3	Formy i metody	• Praca indywidualna – mobilna pracownia komputerowa • Ćwiczenia • Praca z tablicą interaktywną
4	Środki dydaktyczne	Zadania z komputera, wykorzystanie programu do rysowania wykresów funkcji.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

	(ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Sprawdzenie obecności i powtórzenie zagadnień z poprzedniej lekcji
6	Przebieg zajęć *(pełna wersja)*	Temat lekcji realizujemy w oparciu o tablicę interaktywną. Nauczyciel przy wykorzystaniu tablicy interaktywnej rysuje trzy przykłady podzbiorów płaszczyzny. Współrzędne punktów należących do tego zbioru spełniają nierówności: • $x \geq -3$ • $y > -\frac{3}{4}x + 2$ • $y \leq \frac{1}{2}x - \frac{4}{3}$ ***Twierdzenie:*** *Każda z nierówności liniowych postaci* $Ax + By + C > 0$ *lub* $Ax + By + C < 0$ *opisuje jedną z półpłaszczyzn, na jakie dzieli płaszczyznę XOY prosta o równaniu* $Ax + By + C = 0$. Jeśli chcemy opisać część wspólną pewnych podzbiorów płaszczyzny, możemy to zrobić za pomocą koniunkcji równań lub nierówności. Za pomocą alternatywy możemy opisać sumę zbiorów. **Przykład 1.** Korzystamy z programu komputerowego służącego do rysowania wykresów funkcji. Zaznacz zbiór wszystkich punktów (x, y) takich, że: a) $3x - y + 1 < 0$ b) $y - x - 4 \geq 0$ c) $-2 \leq x < 6$ d) $\begin{cases} 0 < x < 3 \\ 0 < y < 3 \end{cases}$ e) $y < x - 1 \;\; lub \; 2 \leq y \leq 4$

f) $\begin{cases} y < x \\ y \geq x - 3 \end{cases} lub\ x \leq 2$

Następnie uczniowie wykonują kolejne zadania z użyciem tablicy interaktywnej.

Zadanie 1.

Zaznacz na płaszczyźnie współrzędnych zbiory punktów, których współrzędne spełniają podane układy nierówności:

a) $\begin{cases} x < 4 \\ 3x - 4 \geq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 4y + 8 \geq 0 \\ -2x - y + 3 > 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3 - y \leq 0 \\ -6x + 2y - 9 < 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y - 5 \geq 0 \\ -2x + y - 4 \leq 0 \\ 3x - y + 2 < 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y \geq x \\ 1 \leq y \leq 4 \end{cases} lub \begin{cases} y \leq 2x + 12 \\ y \leq -x \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x - y \geq 0 \\ (x-4)^2 + (y+3)^2 \leq 9 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3x + y - 5 < 0 \\ (x+3)^2 + (y+2)^2 > 1 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2|x| - 4 > 0 \\ 3x - y - 4 \geq 0 \end{cases}$

Zadanie 2.

Prosta l przechodzi przez punkty $P = (-1,9)\ i\ Q = (2,-3)$, zaś prosta k określona jest równaniem $2x - y + 3m - 1 = 0$. Wyznacz takie wartości parametru m , aby punkt przecięcia prostych l i k należał do wnętrza prostokąta o wierzchołkach $A = (1,-2), B = (3,-2), C = (3,1), D = (1,1)$.

Zadanie 3.

Oblicz, dla jakich wartości parametru m punkt przecięcia się prostych o równaniach

		$x-y=m^2+2m\ \ i\ \ x+y=m^2-4$ należy do prostokąta o wierzchołkach : $A=(0,-4), B=(10,-4)$, C=(10,1), D=(0,1) **Zadanie 4.** Narysuj figurę opisaną układem nierówności i oblicz jej pole: a) $\begin{cases} y\le \lvert x\rvert \\ x^2+y^2\le 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2-4y+y^2\le 0 \\ y-\lvert x-2\rvert \le 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2+y^2+2x\le 0 \\ y\le x+1 \end{cases}$ **Zadanie 5.** Oblicz dla jakich wartości parametru p prosta o równaniu x+y=p ma jeden punkt wspólny z wielokątem opisanym układem nierówności: a) $\begin{cases} 0\le x\le 4 \\ 0\le y\le 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x\ge 0 \\ 0\le y\le 3 \\ y\le -3x+6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -5\le x\le 0 \\ -7\le y\le 0 \\ x+y+6\ge 0 \end{cases}$
7	Podsumowanie zajęć	Ocena aktywności uczniów na lekcji i zadanie pracy domowej.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	Można wykorzystać program GeoGebra do rozwiązywania zadań lub sprawdzania prawidłowości rozwiązań.

Scenariusz nr 12*: Wektory w układzie współrzędnych

Temat zajęć		**Wektory w układzie współrzędnych.**
Dział		**Geometria analityczna**
Klasa (poziom edukacyjny)		**Druga szkoły ponadgimnazjalnej**
Czas trwania zajęć		**90 minut**
Lp.	**Element scenariusza**	**Treść zajęć**
1	Cel ogólny	• Kształcenie umiejętności samodzielnego dochodzenia do wiedzy • Rozwijanie umiejętności czytania zadań ze zrozumieniem • Wykształcenie umiejętności rozwiązywania podstawowych zadań dotyczących geometrii analitycznej • Rozwijanie umiejętności logicznego twórczego myślenia, wnioskowania, współpracy, współodpowiedzialności
2	Cele szczegółowe	• Uczeń: • potrafi obliczyć współrzędne wektora; • potrafi dodawać, odejmować wektory oraz mnożyć wektor przez liczbę; • potrafi wykorzystać warunek równoległości i prostopadłości wektorów; • potrafi zastosować wiadomości o wektorach do rozwiązywania zadań.
3	Formy i metody	• Praca indywidualna z komputerem – mobilna pracownia komputerowa • Ćwiczenia • Praca z tablicą interaktywną
4	Środki dydaktyczne	Prezentacja programu Power Point *”Wektory w układzie współrzędnych”*

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

	(ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Wprowadzenie tematu : Temat lekcji realizujemy w oparciu o tablicę interaktywną. Lekcję prowadzimy wykorzystując do tego prezentację programu Power Point *„”Wektory w układzie współrzędnych”.* PREZENTACJA W POWERPOINT w załączniku. Prezentacja zawiera między innymi: • Współrzędne wektora • Długość wektora • Równość wektorów • Wektory przeciwne • Działania na wektorach • Iloczyn skalarny wektorów • Wektory prostopadłe • Wektory równoległe • Kąt między wektorami
6	Przebieg zajęć *(pełna wersja)*	Rozwiązanie zadań z wykorzystaniem tablicy interaktywnej **Zadania do rozwiązywania na lekcji:** **Zad 1.** Podaj współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$ oraz wektora $\overrightarrow{BA}$, jeżeli: a) $A=\left(-2\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)\ i\ B=\left(\frac{3}{4},-1\frac{1}{3}\right)$ b) $A=\left(2-\sqrt{5},3-7\sqrt{5}\right)\ i\ B=\left(7-\sqrt{5},\sqrt{5}\right)$

Zad 2.

Dane są punkty A=(3,-2) , B = (7,8) , C=(-4,-7). Oblicz długości wektorów $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$.

Zad 3.

Niech $\vec{a}=[-5,0]$, $\vec{b}=[-1,-7]$, $\vec{c}=\left[-\frac{3}{2},1\right]$. Znajdź współrzędne wektora:

a) $10\left(4\vec{a}-\frac{2}{5}\vec{c}\right)-2\left(\overrightarrow{a-2b}\right)$

b) $2\vec{c}-\frac{1}{2}(4\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})$

c) $4\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{a}\right)-2(2\vec{a}-\vec{c})$

d) $-2\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}-4\vec{c}+2(\vec{b}+\vec{c})$

Zad 4.

Niech $K=(0,3)$, $L=(3,5)$, $M=(7,-2)$, $N=(2,0)$. Oblicz współrzędne wektora:

a) $\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{MN}$

b) $\overrightarrow{KN}-2\overrightarrow{LK}$

c) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{LM})$

Zad 5.

Znajdź takie liczby m i n , dla których $\vec{u}=m\vec{v}+n\vec{w}$, gdzie $\vec{v}=[-4,3]$, $\vec{u}=[-13,15]$, $\vec{w}=[5,-9]$.

Zad 6.

Oblicz , dla jakiej wartości k :

a) Wektor $\vec{a}=[4,-3]$ jest równoległy do wektora $\vec{b}=[k,4]$,

b) Wektor $\vec{c}=\left[-1\frac{2}{3},2\sqrt{3}\right]$ jest równoległy do wektora $\vec{d}=\left[\frac{3}{5},k\right]$.

Zad 7.

Dane są punkty $A=(-2,5)$, $B=(3,-4)$, $C=(1,-1)$. Wyznacz taki punkt P, aby $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{BP}+$ $+4\overrightarrow{CP}$.

Zad 8.

Dane są punkty $A=(6,0)$, $B=(2,7)$, $C=(-1,9)$, $D=(3,3)$, $E=(8,12)$. Oblicz współrzędne

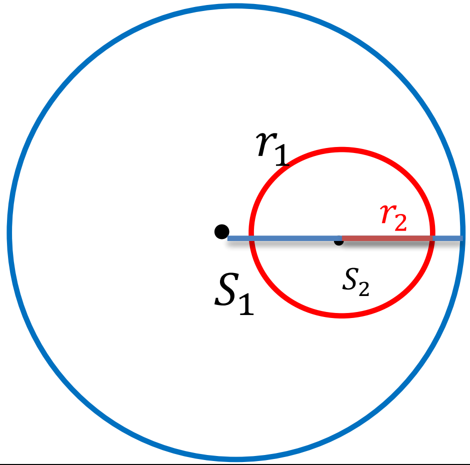
		i długość wektora: $2\overrightarrow{BA} - \frac{2}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CE}$. **Zad 9.** Dane są wektory $\vec{a} = [3p, 2]$, $\vec{b} = [8, -q]$, $\vec{c} = [3q, 2p]$. a) Dla jakich wartości p i q wektory $2\vec{a}$ i $-3\vec{b}$ są równe. b) Dla wyznaczonych wartości p i q podaj współrzędne wektora przeciwnego do wektora $\vec{u} = 3\vec{b} - \vec{c} + 2\vec{a}$. **Zad 10.** W trójkącie ABC dane są $A = (-5, -3)$, $\overrightarrow{AB} = [1, -6]$, $S = (-2,1)$, gdzie S jest środkiem boku BC. Wyznacz równanie prostej zawierającej wysokość CD tego trójkąta. **Zad 11**. Niech $A = (0, -2), B = (4,1)$, $C = (-2,4)$, $D = (-8,2)$. Czy czworokąt ABCD jest trapezem? Czy jest on równoległobokiem? **Zad 12**. Wykaż, czworokąt ABCD, gdzie $\overrightarrow{AD} = [5,4]$, $\overrightarrow{AC} = [9,3]$, $\overrightarrow{DB} = [1, -3]$ jest trapezem.
7	Podsumowanie zajęć	Ocena aktywności uczniów na lekcji i zadanie pracy domowej.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	Można wykorzystać program GeoGebra do rozwiązywania zadań lub sprawdzania prawidłowości rozwiązań.

Załączniki do scenariusza nr 12

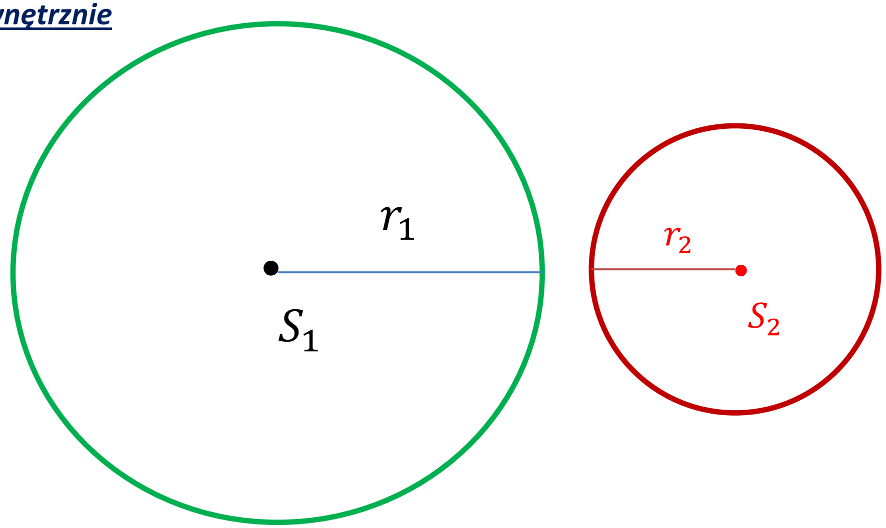
Prezentacja PowerPoint „Wektory w układzie współrzędnych”.

Scenariusz nr 13*: Wzajemne położenie dwóch okręgów

Temat zajęć		**Wzajemne położenie dwóch okręgów**
Dział		**Geometria analityczna**
Klasa (poziom edukacyjny)		**Druga szkoły ponadgimnazjalnej**
Czas trwania zajęć		**90 minut**
Lp.	**Element scenariusza**	**Treść zajęć**
1	Cel ogólny	• Kształcenie umiejętności samodzielnego dochodzenia do wiedzy • Rozwijanie umiejętności czytania zadań ze zrozumieniem • Wykształcenie umiejętności rozwiązywania podstawowych zadań dotyczących geometrii analitycznej • Rozwijanie umiejętności logicznego twórczego myślenia, wnioskowania, współpracy, współodpowiedzialności
2	Cele szczegółowe	• Uczeń: • potrafi wyznaczyć środek okręgu i jego promień; • potrafi wyznaczyć wzajemne położenie okręgów metodą syntetyczną; • potrafi wyznaczyć wzajemne położenie okręgów metodą analityczną; • potrafi rozwiązywać zadania z parametrem.
3	Formy i metody	• Praca indywidualna z komputerem – mobilna pracownia komputerowa • Ćwiczenia • Praca z tablicą interaktywną
4	Środki dydaktyczne	Prezentacja programu Power Point.

	(ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Wprowadzenie tematu z użyciem prezentacji programu Power Point.
6	Przebieg zajęć *(pełna wersja)*	Temat lekcji realizujemy w oparciu o tablicę interaktywną. Lekcję prowadzimy wykorzystując do tego prezentację programu Power Point *„Wzajemne położenie dwóch okręgów”:* **Niech dane będą dwa okręgi o_1: (S_1, r_1) i o_2: (S_2, r_2) ,** **gdzie $S_1 = (a_1, b_1)$, $S_2 = (a_2, b_2)$ – środki tych okręgów , zaś r_1, r_2 - promienie.** **Wówczas równania tych okręgów przedstawiają się wzorami:** $o_1\colon\ (x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1{}^2$ $o_2\colon\ (x-a_2)^2+(y-b_2)^2=r_2{}^2$ **Wzajemne położenie pary okręgów na płaszczyźnie zależy od dwóch wielkości:** ➢ **Sumy lub wartości bezwzględnej różnicy promieni obu okręgów:** $r_1 + r_2$ **lub** $\lvert r_1 - r_2 \rvert$ ➢ **Odległości między środkami tych okręgów:** $\lvert S_1S_2 \rvert$ **oraz wzajemnej relacji między tymi wielkościami** *Okręgi rozłączne* • ***Rozłączne wewnętrznie***  $\lvert S_1S_2 \rvert < \lvert r_1 - r_2 \rvert$

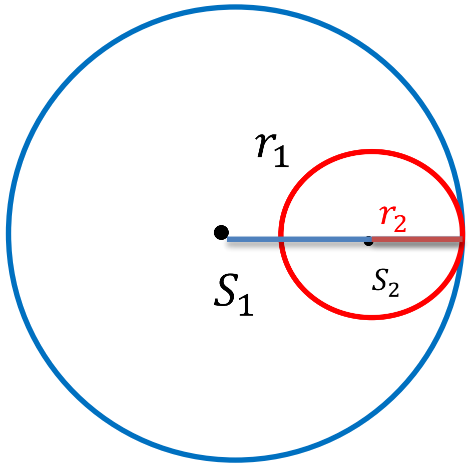
- ***Rozłączne zewnętrznie***



$|S_1S_2| > r_1 + r_2$

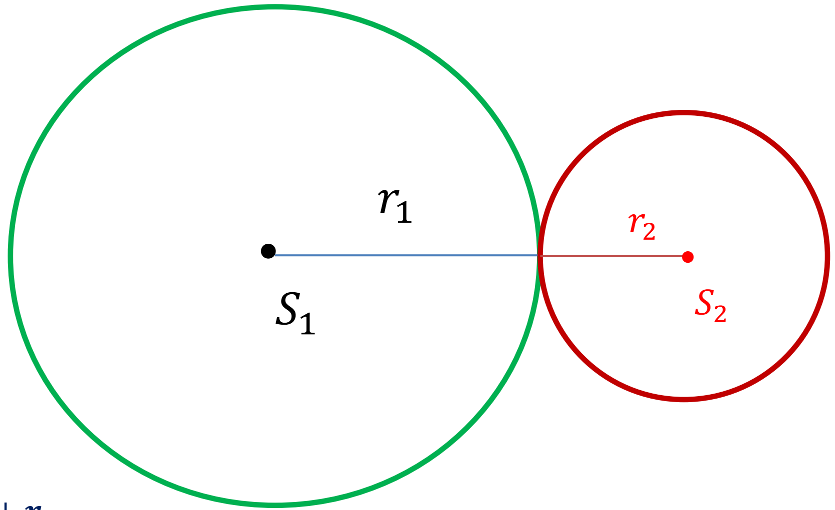
Okręgi styczne

- **Styczne wewnętrznie**



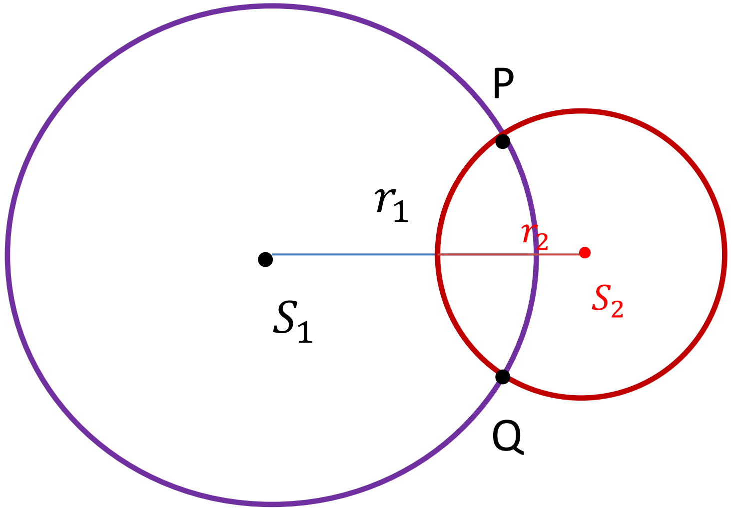
$|S_1S_2| = |r_1 - r_2|$

- **Styczne zewnętrznie**



$|S_1S_2| = r_1 + r_2$

Okręgi przecinające się w dwóch punktach



$|r_1 - r_2| < |S_1S_2| < r_1 + r_2$

Metoda analityczna

Rozwiązując problem wzajemnego położenia dwóch okręgów metodą analityczną, należy przeprowadzić dyskusję istnienia i liczby rozwiązań układu równań złożonego z równań obu okręgów:

$$\begin{cases}(x-a_1)^2+(y-b_1)^2={r_1}^2\\(x-a_2)^2+(y-b_2)^2={r_2}^2\end{cases}$$

Okręgi rozłączne

Układ równań

$$\begin{cases}(x-a_1)^2+(y-b_1)^2={r_1}^2\\(x-a_2)^2+(y-b_2)^2={r_2}^2\end{cases}$$

nie ma rozwiązania

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Okręgi styczne

Wewnętrznie : **Układ równań**

$$\begin{cases}(x-a_1)^2+(y-b_1)^2={r_1}^2\\(x-a_2)^2+(y-b_2)^2={r_2}^2\end{cases}$$

ma jedno rozwiązanie

$$(x_0, y_0)$$

Zewnętrznie : **Układ równań**

$$\begin{cases}(x-a_1)^2+(y-b_1)^2={r_1}^2\\(x-a_2)^2+(y-b_2)^2={r_2}^2\end{cases}$$

ma jedno rozwiązanie

$$(x_0, y_0)$$

Okręgi przecinające się w dwóch punktach

Układ równań

$$\begin{cases}(x-a_1)^2+(y-b_1)^2={r_1}^2\\(x-a_2)^2+(y-b_2)^2={r_2}^2\end{cases}$$

ma dwa rozwiązania:

(x_1, y_1) **i** (x_2, y_2)

Przykład 1

Określ wzajemne położenie okręgów o równaniach:

$(x-1)^2+(y-2)^2=4$ ***oraz*** $(x-4)^2+(y-2)^2=\frac{1}{4}$

Wyznaczamy współrzędne środków tych okręgów:

$S_1=(1,2)$, $S_2=(4,2)$

oraz długości ich promieni:

$r_1=2$, $r_2=\dfrac{1}{2}$

Następnie wyznaczmy:

- $|S_1S_2| = \sqrt{(4-1)^2 + (2-2)^2} = 3$

oraz

- $r_1 + r_2 = 2\frac{1}{2}$
- $|r_1 - r_2| = 1\frac{1}{2}$

Stąd $3 > 2\frac{1}{2}$ **, czyli spełniony jest warunek**

$$|S_1S_2| > r_1 + r_2$$

Zatem okręgi są rozłączne zewnętrznie.

Rozwiązanie zadań z wykorzystaniem tablicy interaktywnej

<u>Zadania do rozwiązywania na lekcji:</u>

Zad 1.

Sprawdź wzajemne położenie okręgów o równaniach $x^2 + y^2 + 6x = 0$ i $x^2 + y^2 - 4x + 10y - 7 = 0$.

Zad 2.

Dane są okręgi o równaniach $x^2 + y^2 - 14x - 8y + 49 = 0$ i $(x-6)^2 + (y+3)^2 = 16$.

a) Określ wzajemne położenie tych okręgów

b) Napisz równanie symetralnej odcinka łączącego środki tych okręgów.

Zad 3.

Punkty $A = (-3,-4)$, $B = (7,-4)$, $C = (7,4)$ są wierzchołkami trójkąta ABC.

a) Napisz równanie okręgu opisanego na tym trójkącie.

b) Określ wzajemne położenie znalezionego okręgu z okręgiem o równaniu $x^2 + y^2 - 12x + 6y = -42$.

Zad 4.

Dane są okręgi o równaniach $(x+2)^2 + (y-k)^2 = 18$ i $(x-2k)^2 + (y-2)^2 = 2$. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, aby te okręgi miały dokładnie jeden punkt wspólny.

		Zad 5. Oblicz , dla jakich wartości parametru m okręgi o równaniach $(x-m)^2+(y+4)^2=8$ i $(x-2)^2+(y+m)^2=2$ są : a) styczne wewnętrznie b) styczne zewnętrznie. **Zad 6.** Okręgi o równaniach $(x-4)^2+(y-5)^2=25$ $(x-7)^2+(y-9)^2=100$ są styczne wewnętrznie. a) Oblicz współrzędne punktu styczności. b) Napisz równanie okręgu o możliwie największym promieniu, który jest styczny do jednego z tych okręgów zewnętrznie, a do drugiego wewnętrznie.
7	Podsumowanie zajęć	Ocena aktywności uczniów na lekcji i zadanie pracy domowej.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	Można wykorzystać program GeoGebra do rozwiązywania zadań lub sprawdzania prawidłowości rozwiązań.

Załączniki do scenariusza nr 13

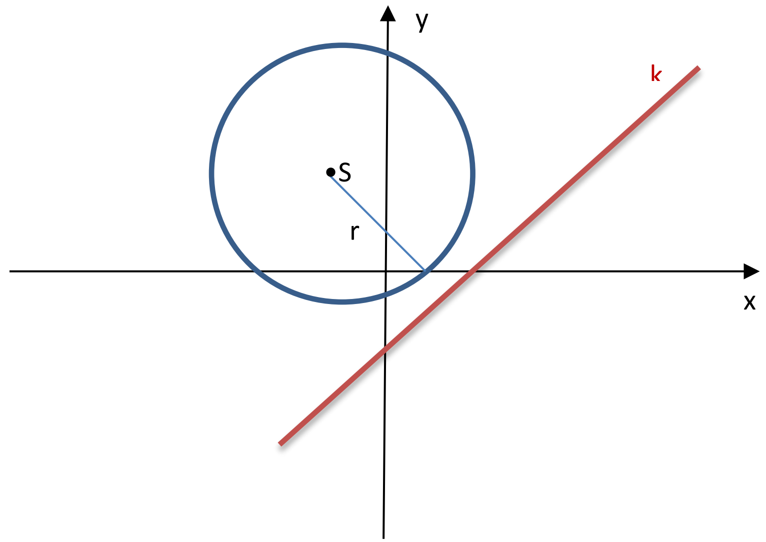
Prezentacja PowerPoint „Wzajemne położenie dwóch okręgów”.

Scenariusz nr 14*: Wzajemne położenie prostej i okręgu

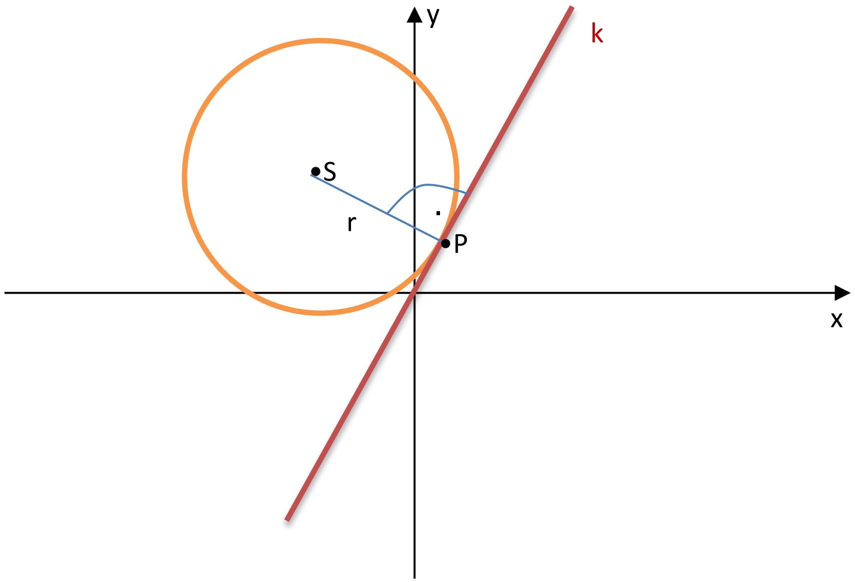
Temat zajęć		**Wzajemne położenie prostej i okręgu**
Dział		**Geometria analityczna**
Klasa (poziom edukacyjny)		**Klasa druga technikum**
Czas trwania zajęć		**90 minut**
Lp.	**Element scenariusza**	**Treść zajęć**
1	Cel ogólny	• Kształcenie umiejętności samodzielnego dochodzenia do wiedzy • Rozwijanie umiejętności czytania zadań ze zrozumieniem • Wykształcenie umiejętności rozwiązywania podstawowych zadań dotyczących geometrii analitycznej • Rozwijanie umiejętności logicznego twórczego myślenia, wnioskowania, współpracy, współodpowiedzialności
2	Cele szczegółowe	Uczeń: • potrafi algebraicznie i graficznie określić wzajemne położenie prostej i okręgu; • potrafi wyznaczyć równanie stycznej do danego okręgu; • potrafi wykorzystać dotychczasową wiedzę do rozwiązywania zadań z parametrem.
3	Formy i metody	• Praca indywidualna z komputerem – mobilna pracownia komputerowa • Ćwiczenia • Praca z tablicą interaktywną
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków	Poradnik multimedialny „ Geometria analityczna”.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

	opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Przygotowanie komputerów i włączenie poradnika multimedialnego.
6	Przebieg zajęć *(pełna wersja)*	Temat lekcji realizujemy w oparciu o tablicę interaktywną. Lekcję prowadzimy wykorzystując „Poradnik multimedialny" (temat 10*) Wzajemne położenie prostej $k: Ax + By + C = 0$ i okręgu $o(S, r): (x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$, gdzie $S = (a, b)$ na płaszczyźnie zależy od dwóch wielkości: ➢ Odległości środka okręgu S od prostej k: ➢ Długości promienia okręgu r oraz wzajemnej relacji między tymi wielkościami. Wzajemne położenie prostej i okręgu w ujęciu analitycznym polega na rozwiązaniu problemu istnienia i liczby rozwiązań układu równań złożonego z równania prostej i równania okręgu: $$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ (x-a)^2+(y-b)^2 = r^2 \end{cases}$$ ❖ **Prosta jest rozłączna z okręgiem,** jeżeli układ nie ma rozwiązania.



❖ **Prosta jest styczna do okręgu,** jeżeli układ ma jedno rozwiązanie.

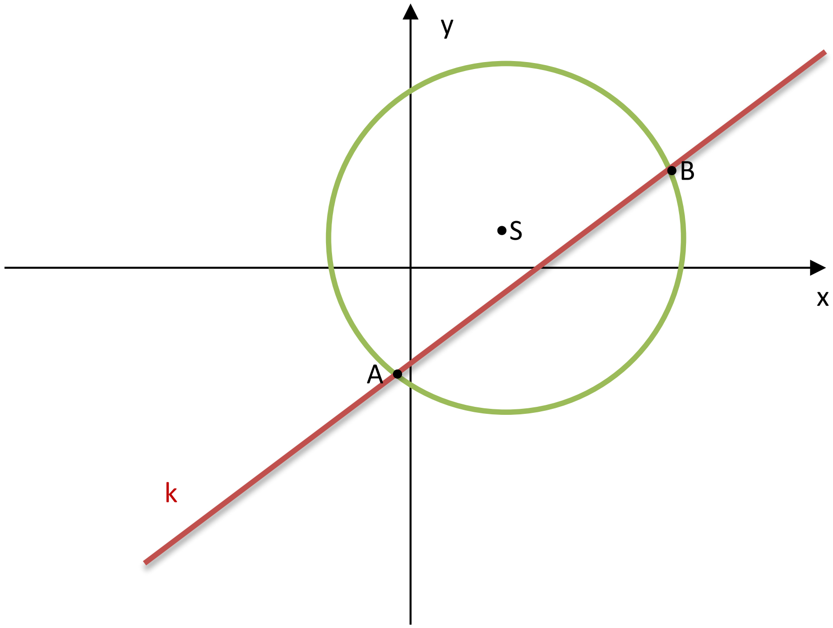


UWAGA

Styczna w punkcie $P = (x_0, y_0)$ do okręgu $o(S, r)$: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, gdzie $S = (a, b)$ ma równanie:

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})(\boldsymbol{x_0} - \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b})(\boldsymbol{y_0} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{r^2}$$

- **Prosta jest sieczną okręgu,** jeżeli układ ma dwa rozwiązania.



Przykład 1.

Określ wzajemne położenie prostej $k: y = x$ i okręgu $(x-1)^2+(y+3)^2 = 4$.

Rozwiązanie:

Rozwiązujemy układ równań: $\begin{cases} y = x \\ (x-1)^2+(y+3)^2 = 4 \end{cases}$

Po podstawieniu otrzymujemy: $x^2 + 2x + 6 = 0$

$$\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$$

Układ równań nie ma rozwiązania, zatem prosta i okrąg są rozłączne.

Przykład 2.
Określ wzajemne położenie prostej $k: y = x$ i okręgu $(x-1)^2+(y+3)^2 = 8$.

Rozwiązanie:
Rozwiązujemy układ równań: $\begin{cases} y = x \\ (x-1)^2+(y+3)^2 = 8 \end{cases}$
Po podstawieniu otrzymujemy: $x^2 + 2x + 1 = 0$
$\Delta = 4 - 4 = 0 \quad x_0 = \frac{-2}{2} = -1$
Układ ma jedno rozwiązanie $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$, zatem prosta i okrąg są styczne.

Przykład 3.
Określ wzajemne położenie prostej $k: y = x$ i okręgu $(x-1)^2+(y+3)^2 = 16$.

Rozwiązanie:
Po podstawieniu otrzymujemy: $x^2 + 2x - 3 = 0$
$\Delta = 4 + 12 = 16 \quad \sqrt{\Delta} = 4$
Równanie ma dwa rozwiązania: $x_1 = \frac{-2+4}{2} = 1 \ i \ x_2 = \frac{-2-4}{2} = -3$
Układ ma dwa rozwiązania $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = -3 \\ y = -3 \end{cases}$, zatem prosta i okrąg przecinają się w dwóch punktach (1,1) i (-3,-3).

Przykład 4.
Napisz równanie stycznej do okręgu $(x+2)^2+(y-3)^2 = 10$ przechodzącej przez punkt P = (-1,0).

Rozwiązanie:
Z równania okręgu odczytujemy współrzędne jego środka S = (-2,3).
Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty S i P:

$$a = \frac{y_P - y_S}{x_P - x_S} = \frac{0-3}{-1+2} = -3$$

Zatem prosta styczna ma równanie postaci: $y = \frac{1}{3}x + b$. Współrzędne punktu P spełniają równanie stycznej, więc : $0 = \frac{1}{3} \cdot (-1) + b$

$$b = \frac{1}{3}$$

Równanie stycznej do okręgu o równaniu $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 10$ i przechodzącej przez punkt P = (-1,0) leżący na tym okręgu ma postać: $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

Przykład 5.

Oblicz długość cięciwy okręgu o równaniu $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$ zawartej w prostej o równaniu $2y - x + 1 = 0$.

Rozwiązanie:

Aby znaleźć współrzędne punktów wspólnych prostej i okręgu, należy rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} 2y - x + 1 = 0 \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y + 1 \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 = 9 \end{cases}$$

Po podstawieniu i wykonaniu przekształceń otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$5y^2 - 2y - 7 = 0$$
$$\Delta = 144$$
$$y_1 = -1$$
$$y_2 = 1\frac{2}{5}$$

Rozwiązaniem układu są dwie pary liczb: $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 3\frac{4}{5} \\ y = 1\frac{2}{5} \end{cases}$

Zatem długość cięciwy, której końcami są punkty wspólne prostej i okręgu
A =(-1,-1) i B = $(3\frac{4}{5}, 1\frac{2}{5})$, jest równa:

$$|AB| = \sqrt{\left(3\frac{4}{5}+1\right)^2 + \left(1\frac{2}{5}+1\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{24}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{720}{25}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

Zadania do rozwiązywania na lekcji:

Zad 1.
Napisz równania stycznych do okręgu o równaniu $(x-3)^2 + (y-6)^2 = 16$ i przechodzących przez punkt $A = (0,2)$.

Zad 2.
Okrąg przechodzący przez punkt $A = (-1,1)$ jest styczny do prostej o równaniu $y = x - 2$ w punkcie $P = (4,2)$. Wyznacz równanie tego okręgu.

Zad 3.
Dany jest okrąg o równaniu$x^2 + y^2 + 4kx - 2ky + 5k^2 - 25 = 0$ i prosta $m\colon y = -\frac{3}{4}x + 1$. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, dla których prosta nie ma punktów wspólnych z okręgiem

Zad 4.
Prosta $k\colon\ \frac{1}{2}x - y + 1 = 0$ przecina okrąg $x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$ w punktach A i B.

a) Znajdź długość cięciwy AB
b) Wyznacz współrzędne punktu M należącego do danego okręgu tak, aby trójkąt ABM był prostokątny.

Zad 5.
Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których prosta $y = -x - p$ ma przynajmniej jeden punkt wspólny z okręgiem $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0$

Zad 6.
Dany jest okrąg o równaniu $x^2 + y^2 + 6y = 16$ i prosta $l\colon\ mx - y + 2m - 5 = 0$. Wykaż, że dla każdej wartości parametru m dana prosta ma z okręgiem dokładnie jeden punkt wspólny.

Zad 7.

		Oblicz, dla jakich wartości parametru k do prostej o równaniu $y = x + k$ należy punkt P , z którego styczne poprowadzone do okręgu o równaniu $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 6{,}25$ przecinają się pod kątem 60°. **Zad 8.** Wyznacz współrzędne wierzchołków kwadratu wpisanego w okrąg o równaniu $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 4$ wiedząc, że przekątna kwadratu zawiera się w prostej o równaniu $y = x - 3$.
7	Podsumowanie zajęć	Ocena aktywności uczniów na lekcji i zadanie pracy domowej.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	Można wykorzystać program GeoGebra do rozwiązywania zadań lub sprawdzania prawidłowości rozwiązań.