Wstęp

Zbiór „Mój przedmiot matematyka” jest zestawem 132 scenariuszy przeznaczonych dla uczniów szczególnie zainteresowanych matematyką. Scenariusze mogą być wykorzystywane przez nauczycieli zarówno na typowych zajęciach lekcyjnych wpisanych w zakres podstawowy, jak też w ramach dodatkowych zajęć poszerzających wiedzę uczniów, np. koła zainteresowań. Scenariusze wymagają zastosowania komputerów z dostępem do internetu. Takie wyposażenie pozwoli na wykorzystanie środków dydaktycznych przewidzianych w projekcie „Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy” takich jak moduły e-learningowe: „Elementy statystyki i rachunek prawdopodobieństwa”, „Funkcja kwadratowa”, „Równania i nierówności liniowe i kwadratowe”, „Wielomiany”, gry strategiczne „Wyprawa Nasreddina”, „Herbatka u królowej Anglii”, „Wyprawa na grzyby”, „Matemafia” oraz „Międzykontynentalna szkoła”, poradniki „Ciągi”, „Planimetria”, „Trygonometria”, „Geometria analityczna”. Scenariusze mogą być realizowane na zajęciach lekcyjnych jako całość lub nauczyciel dokonuje wyboru określonych materiałów zgodnie z zaplanowanymi przez siebie tematami – zwiększa to elastyczność stosowania pakietu np. w sytuacji braku zapewnienia w placówce odpowiednich warunków technicznych do realizacji materiału w oparciu o cały pakiet.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Spis scenariuszy

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Scenariusz nr 1: Liczby rzeczywiste

Temat zajęć		**Liczby rzeczywiste**
Dział		
Klasa (poziom edukacyjny)		
Czas trwania zajęć		**90 min**
Lp.	**Element scenariusza**	**Treść zajęć**
1	Cel ogólny	• Kształcenie samodzielności pracy • Rozwijanie umiejętności czytania ze zrozumieniem • Ćwiczenie umiejętności wykonywania działań na liczbach rzeczywistych
2	Cele szczegółowe	Uczeń: • oblicza potęgi o wykładnikach naturalnych, całkowitych i wymiernych; • potrafi wykonywać działania na potęgach; • potrafi obliczać pierwiastki; • zna działania na pierwiastkach i potrafi je zastosować; • posługuje się pojęciem wartości bezwzględnej i potrafi określić wartość bezwzględną liczby; • posługuje się pojęciem procentu, potrafi wyznaczyć procent z liczby, oblicza liczbę gdy dany jest jej procent oraz wyznacza procent;
3	Formy i metody	• Praca w grupie
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków	Lekcja jest prowadzona z wykorzystaniem zadań z I i II poziomu gry „Wyprawa Nasreddina”, które zostają przedstawione na tablicy interaktywnej.

	opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Wyjaśnienie uczniom, że wszystkie zadania są zamknięte i w każdym dokładnie jedna odpowiedź jest poprawna. Wszystkim uczniom udostępnione będą tablice wzorów matematycznych, z których uczniowie mogą korzystać w czasie egzaminu maturalnego z matematyki.
6	Przebieg zajęć *(pełna wersja)*	**DZIAŁANIA NA POTĘGACH** ***Zadanie 1.*** Przedstaw liczbę $(2^{-3}:2^{-2})\cdot 2^{-4}$ w postaci potęgi liczby 2: A. 2^{-5} B. 2^{-9} C. 2^{-1} D. 2^{3} ***Zadanie 2.*** Przedstaw liczbę $(2\cdot\sqrt{8}):4^{-1,5}$ w postaci potęgi liczby 2: A. 2^{1} B. 2^{4} C. $2^{\frac{11}{2}}$ D. 2^{-4} ***Zadanie 3.*** Liczba $\left(-2\sqrt{3}\right)^{-3}$ jest równa: A. $-\frac{1}{24}$ B. $-24\sqrt{3}$ C. $-\frac{1}{12}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{72}$ ***Zadanie 4.*** Liczba $\frac{2^{-2}}{3^{-3}}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{2}$ jest równa: A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{8^{-4}}{27}$ D. $\frac{6^{-4}}{12^{-1}}$ ***Zadanie 5.*** Czwarta część liczby 4^{198}, to: A. 1^{198} B. 4^{197} C. 4^{184} D. 1^{99}

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

PIERWIASTKI I DZIAŁANIA NA PIERWIASTKACH

Zadanie 6.

Liczbą wymierną jest:

A. $\sqrt{12}$ B. $\sqrt{1\frac{7}{9}}$ C. $\sqrt{9\frac{4}{9}}$ D. $\sqrt[3]{49}$

Zadanie 7.

Liczba $\sqrt{28}+\sqrt{63}$ jest równa:

A. $\sqrt{91}$ B. $5\sqrt{7}$ C. $7\sqrt{5}$ D. $5\sqrt{14}$

Zadanie 8.

Jeżeli $a=\sqrt[3]{-15\frac{5}{8}}$ i $b=\sqrt[3]{-4\frac{17}{27}}$, to:

A. $a=b$ B. $a<b$ C. a i b są liczbami niewymiernymi D. $a>b$

Zadanie 9.

Ile liczb niewymiernych znajduje się w zbiorze liczb: $\left\{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}, \sqrt{1\frac{4}{25}}, \sqrt{12}\cdot\sqrt{75}, \sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{49}, \sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{125}\right\}$:

A. Jedna B. dwie C. trzy D. cztery

Zadanie 10.

Liczba $81^{-\frac{3}{4}}$ jest równa:

A. 27 B. $\frac{1}{27}$ C. -27 D. $-\frac{1}{27}$

LOGARYTMY

Zadanie 11.

Liczba $log_3(log20+log50)$ jest równa:

A. 50 B. $log_3 1000$ C. 1 D. 0

Zadanie 12.

Wartość wyrażenia: $3log_5 2+log_5 3$ jest równa:

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

A. $log_{25}24$ B. $log_5 24$ C. $3\ log_5 6$ D. $log_5 11$

Zadanie 13.

Jeżeli $x = 3log_8 4$, to x wynosi:

A. 64 B. 2 C. 81 D. 512

Zadanie 14.

Jeżeli $x = log_{\sqrt{7}}1,\ \ y = log_{\sqrt{7}}\frac{1}{7}, z = \sqrt{7}^{log_{\sqrt{7}}\frac{3}{2}}$

A. $x < y < z$ B. $z < x < y$ C. $y < x < z$ D. $z < y < x$

Zadanie 15.

Przyjmij, że $log3 \approx 0{,}5$ i $\log 7 \approx 0.8$. Wtedy liczba $\log\left(4\frac{2}{7}\right)$ jest równa:

A. 0,7 B. 9,7 C. $3log2 - 0{,}9$ D. $log8 - log7$

LICZBY NIEWYMIERNE

Zadanie 16.

Liczba $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ jest równa:

A. $\frac{1+\sqrt{15}}{2}$ B. 2 C. $\frac{11+3\sqrt{15}}{2}$ D. -2

Zadanie 17.

Liczba $\sqrt{4+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ jest:

A. mniejsza od 2 B. większa od 2 C. wymierna D. niewymierna

Zadanie 18.

Liczba $\frac{1}{\sqrt{5}-2}$ jest:

A. odwrotnością liczby $2+\sqrt{5}$ B. równa $\sqrt{5}+2$ C. mniejsza od $\sqrt{5}-2$

D. równa $\sqrt{5}-2$

Zadanie 19.

Liczba $\left(\sqrt{6}-2\sqrt{3}\right)^2$ to:

A. 18 B. -6 C. $18-12\sqrt{2}$ D. $-6-6\sqrt{2}$

Zadanie 20.

Liczba $\left[\left(1+\sqrt{5}\right)^2-\left(1-\sqrt{5}\right)^2\right]^2$ jest równa:

A. 0 B. 80 C. 100 D. 20

WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA

Zadanie 21.

Liczba $\left|1,(41)-\sqrt{2}\right|$ jest równa:

A. $1,(41)-\sqrt{2}$ B. $1,(41)+\sqrt{2}$ C. $-1,(41)+\sqrt{2}$ D. $-1,(41)-\sqrt{2}$

Zadanie 22.

Liczba $\sqrt{5}-\sqrt{\left(1-\sqrt{5}\right)^2}$ jest równa:

A. $1+2\sqrt{5}$ B. -1 C. 1 D. $-1+2\sqrt{5}$

Zadanie 23.

Liczba $\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}$ jest równa:

A. 2 B. $2\sqrt{3}$ C. $-2\sqrt{3}$ D. -2

Zadanie 24.

Wartość bezwzględna liczby $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$ wynosi:

A. $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{2}$ C. $-\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$ D. $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}$

Zadanie 25.

Liczba $\sqrt{\left(\sqrt{7}-7\right)^2}+\left(2+\sqrt{7}\right)^2$, to:

A. $18+3\sqrt{7}$ B. $18-\sqrt{7}$ C. $4+\sqrt{7}$ D. $18-5\sqrt{7}$

PROCENTY

Zadanie 26.

Liczba y to 150% liczby x. Wynika stąd, że:

A. $y = x + 0{,}5$ B. $y = x + 0{,}5x$ C. : $x = y - 0{,}5$ D. : $x = y - 0{,}5y$

Zadanie 27.

Liczba a stanowi 40% liczby b. Wówczas:

A. $a = b - 0{,}6$ B. $b = 2{,}5a$ C. $a = b - 0{,}4b$ D. $b = 1{,}8a$

Zadanie 28.

12% liczby $x = \left(\sqrt{11} + 4\right)\left(\sqrt{11} - 4\right) - 3^{-1} + 2^0 \cdot 3^3 - \frac{1}{3}\sqrt{81} + 8\frac{1}{3}$, to liczba:

A. 1,62 B. 3,24 C. 255 D. 31,05

Zadanie 29.

8% liczby $x = \frac{1}{6}\sqrt{81} - \left(\sqrt{7}\right)^0 \cdot 2^{-2} + 2{,}5 - 2\left(\sqrt{10} - 3\right)\left(\sqrt{10} + 3\right)$, to liczba:

A. 21,875 B. 1,75 C. 1,4 D. 0,14

Zadanie 30.

15% liczby $x = \frac{2}{3} - \left(\frac{4}{2^4} \cdot 0{,}8 - \frac{2^2}{5}\right) : \frac{3}{\sqrt[3]{64}}$, to liczba:

A. 1 B. 9,8 C. $\frac{22}{15}$ D. 0,22

OBLICZANIE PROCENTU

Zadanie 31.

Liczba $\frac{\sqrt[3]{64} - \left(\sqrt{7} - 2\right)\left(\sqrt{7} + 2\right)}{(0{,}75)^{-2} + (-1{,}5)^{-2}}$ stanowi x procent liczby 1,8. Wtedy:

A. $x = 400\%$ B. $x = 25\%$ C. $x = 75\%$ D. $x > 80\%$

Zadanie 32.

Cenę pewnego towaru obniżono o 20%. O jaki procent należałoby podwyższyć nową cenę, aby towar kosztował tyle samo co przed obniżką.

A. 20% B. 25% C. 30% D. więcej niż 30%

Zadanie 33.
W tabeli przedstawiono liczbę chłopców w 400 rodzinach mających po troje dzieci.

Liczba chłopców	0	1	2	3
Liczba rodzin	47	175	145	33

Jaki procent badanych rodzin ma wszystkie dzieci tej samej płci?

A. 8,25% B. 11,75% C. 80% D. 20%

Zadanie 34.
Cena brutto komputera jest równa cenie netto plus 23% podatku VAT. Cena netto wynosi 2500 zł. Jaki procent ceny brutto stanowi podatek VAT?

A. 23% B. 24% C. ok. 19% D. 77%

Zadanie 35.
Liczba $\left[\left(\sqrt{2}\right)^4+\left(\sqrt[3]{2}\right)^0-\sqrt{\frac{1}{4}}\right]\cdot\left[1{,}4-\left(-1\frac{3}{5}\right)\right]$ stanowi x procent liczby 18. Wtedy x wynosi:

A. 75% B. 25% C. 133% D. 33%

OBLICZANIE LICZBY, GDY DANY JEST JEJ PROCENT

Zadanie 36.
Wskaż liczbę, której 4% to liczba 8:

A. 3,2 B. 32 C. 100 D. 200

Zadanie 37.
Pan Artur i pan Marcin kupili do spółki kosiarkę do trawy. Pan Artur pokrył 55% kosztów zakupu. Pan Marcin zapłacił 142,20 zł, więc kosiarka kosztowała:

A. 316 zł B. 151,8 zł C. 255,8 zł D. 250 zł

Zadanie 38.
Liczba, której $0{,}2\%$ wynosi $1\frac{2}{5}$, to:

A. 70 B. 0,028 C. 0,0028 D. 700

Zadanie 39.

Liczba, której 128% wynosi 512, to liczba:

A. 400 B. 655,36 C. 4000 D. 65,53

Zadanie 40.

Liczba, której 25% jest równe $\frac{\left(2{,}2-1\frac{2}{3}\right)\cdot(-0{,}9)}{\frac{2}{25}-0{,}12}$, to:

A. 12 B. 48 C. 3 D. 24

O ILE PROCENT WIĘCEJ, O ILE PROCENT MNIEJ?

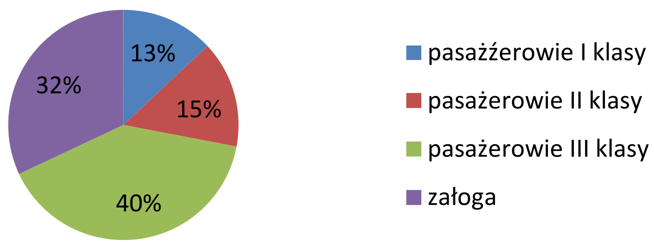
Zadanie 41.

Cenę pewnego towaru obniżono najpierw o 20%, a następnie jeszcze o 30%. Zatem obniżka wyniosła:

A. 50% B. 60% C. 56% D. 44%

Zadanie 42.

Wśród 2200 pasażerów Titanica, którzy płynęli 10.04.1912 r. do Nowego Jorku byli pasażerowie I, II i III klasy oraz załoga. Diagram kołowy pokazuje procentowy skład osobowy Titanica (z dokładnością do 1%). O ile procent liczba podróżujących III klasą była większa od liczby członków załogi?



A. 8% B. 25% C. 17% D. 125%

Zadanie 43.

W klasie jest 35 uczniów, w tym 15 dziewcząt. O ile procent więcej jest chłopców niż dziewcząt w tej klasie?

A. o 25% B. około 33% C. około 123% D. około 57%

Zadanie 44.

Rada Polityki Pieniężnej podwyższyła stopy procentowe z 8% na 9,5%. O ile procent wzrosła stopa procentowa?

A. 18,75% B. 1,5% C. 84% D. 16%

Zadanie 45.

Cenę pewnego towaru zwiększono o 20%. W następnym tygodniu obniżono ją o 10%, a w kolejnym tygodniu obniżono o 30%. Ile wynosiła cena początkowa, jeżeli ostatecznie wyniosła $1058{,}40\ zł$?

A. 1400 zł B. 1008 zł C. 1500 zł D. 1185 zł

ZADANIA DOTYCZĄCE STĘŻEŃ PROCENTOWYCH

Zadanie 46.

Ile kilogramów wody należy odparować z $25\ kg$ roztworu 12 % solanki, aby otrzymać roztwór 16%?

A. 18,75 kg B. 6, 25 kg C. 4 kg D. 5 kg

Zadanie 47.

Zmieszano 2 kg stopu o zawartości 25% miedzi z 3 kg stopu o zawartości miedzi 40%. W powstałym stopie znajduje się miedzi:

A. 65% B. 32,5% C. 34% D. 37%

Zadanie 48.

Stężenie pewnego roztworu wodnego soli wynosi 5%. Ile kilogramów czystej wody należy dolać do $40\ kg$ tego roztworu, aby stężenie w otrzymanej mieszaninie wynosiło 2%?

A. 2 kg B. 8 kg C. 100 kg D. 60 kg

Zadanie 49.

Ile soli należy dosypać do 24 kg solanki dwuprocentowej, aby otrzymać solankę czteroprocentową?

A. 0,3 kg B. 0,4 kg C. 0,5 kg D. 0,6 kg

		Zadanie 50. Z solanki 6% odparowano 2 kg wody i otrzymano solankę 8%. Na początku była następująca ilość solanki: A. 6 kg B. 8 kg C. 10 kg D. 12 kg
7	Podsumowanie zajęć	Omówienie najczęściej występujących problemów i zagadnień sprawiających największe trudności.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	

Załączniki do scenariusza nr 1

Zbiór testów do wydruku – zal3_Liczby_rzeczywiste_scenariusz_nr1

Scenariusz nr 2: Pierwiastki. Prawa działań na pierwiastkach.

Temat zajęć		**Pierwiastki. Prawa działań na pierwiastkach.**
Dział		**Liczby rzeczywiste**
Klasa (poziom edukacyjny)		**Klasa I (IV poziom edukacyjny)**
Czas trwania zajęć		**90 minut**
Lp.	**Element scenariusza**	**Treść zajęć**
1	Cel ogólny	• Usystematyzowanie wiadomości dotyczących pojęcia pierwiastka arytmetycznego stopnia n oraz praw działań na pierwiastkach • Kształtowanie umiejętności selekcjonowania i wykorzystania poznanych własności działań na pierwiastkach do rozwiązywania zadań • Doskonalenie umiejętności wykonywania działań w zbiorze liczb rzeczywistych • Kształtowanie umiejętności korzystania z programów multimedialnych
2	Cele szczegółowe	Uczeń: • zna i umie zastosować definicję pierwiastka; • zna i umie zastosować prawa działań na pierwiastkach.
3	Formy i metody	• Dyskusja kierowana • Ćwiczenia • Praca indywidualna lub parami
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków	Załącznik „Liczby rzeczywiste”, tablica interaktywna, komputer.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

	opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Nauczyciel omawia organizację pracy na lekcji, zajęcia przeznaczone głównie dla uczniów klas maturalnych.
6	Przebieg zajęć *(pełna wersja)*	Nauczyciel przypomina i uwrażliwia uczniów na kilka podstawowych zasad podczas rozwiązywania zadań (uważne przeczytanie polecenia; analiza pojęć matematycznych, czy też informacji występujących w zadaniu, zaplanowanie wykonywanych czynności, powołanie się na właściwe prawa działań na pierwiastkach, korzystanie z wzorów matematycznych, sprawdzanie wyników, przypominanie, że pośpiech nie jest wskazany, a dokładność obliczeń jest bardzo istotna). Na tablicy interaktywnej wyświetlonych zostaje kilka zasad, o których uczeń zawsze powinien pamiętać podczas rozwiązywania zadań: **Podczas rozwiązywania zadań pamiętaj o kilku podstawowych zasadach:** 1. Przeczytaj uważnie każde zadanie. 2. Dokonaj analizy informacji dostarczonych z tekstu. 3. Zaplanuj rozwiązanie zadania. 4. Zapisuj potrzebne obliczenia w zeszycie. 5. Sprawdzaj otrzymane wyniki. 6. Nie spiesz się, pracuj powoli i dokładnie. W dalszej części lekcji uczniowie przypominają prawa działań na pierwiastkach korzystając z tematu nr 5 załącznika nr 1. Jeśli n i m są liczbami naturalnymi większymi od 1 oraz $a \geq 0 \ i \ b \geq 0$, to zachodzą następujące równości: 1. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ 2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0$

3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$
4. $\sqrt[n]{a^m}\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

Nauczyciel na przykładach ilustruje zastosowanie tych praw.
Przykłady:
$\sqrt{16\cdot 81} = \sqrt{16}\cdot\sqrt{81} = 4\cdot 9 = 36$
$\sqrt[3]{125:8} = \sqrt[3]{125}:\sqrt[3]{8} = 5:2 = 2{,}5$
$(\sqrt{3})^6 = \left[\left(\sqrt{3}\right)^2\right]^3 = 3^3 = 27$

W dalszej części uczniowie wykonują działania na pierwiastkach, które zamieszczone zostały w przykładach załącznika nr 1:
__Przykład 1__.
Oblicz:

- $2\sqrt{48} - 8\sqrt{24} + \sqrt{75} = 2\sqrt{16\cdot 3} - 8\sqrt{4\cdot 6} + \sqrt{25\cdot 3} = 8\sqrt{3} - 16\sqrt{6} + 5\sqrt{3} = 13\sqrt{3} - 16\sqrt{6}$
- $\left(\sqrt{5-\sqrt{3}} - \sqrt{5+\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\sqrt{5-\sqrt{3}}\right)^2 - 2\cdot\sqrt{5-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{5+\sqrt{3}} + \left(\sqrt{5+\sqrt{3}}\right)^2 =$
  $5-\sqrt{3} - 2\sqrt{\left(5-\sqrt{3}\right)\left(5+\sqrt{3}\right)} + 5 + \sqrt{3} = 10 - 2\sqrt{25-3} = 10 - 2\sqrt{22}$

__Przykład 2.__
W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych ma długość $3+\sqrt{5}$, a przeciwprostokątna ma długość $3\sqrt{5}+1$. Oblicz długość drugiej przyprostokątnej tego trójkąta.
Rozwiązanie: Niech x oznacza długość drugiej przyprostokątnej trójkąta. Wówczas z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie prostokątnym o danych długościach boków zachodzi związek: $x^2 + \left(3+\sqrt{5}\right)^2 = \left(3\sqrt{5}+1\right)^2$. Wyznaczając x z tego równania mamy:

		$x^2 = 45 + 6\sqrt{5} + 1 - (9 + 6\sqrt{5} + 5)$ $x^2 = 32,\ x > 0$ $x = 4\sqrt{2}$ Odp. Długość drugiej przyprostokątnej jest równa $4\sqrt{2}$. W dalszej części uczniowie rozwiązują samodzielnie zadania zaproponowane przez nauczyciela: **Zad.1.** Oblicz wartość wyrażenia $a^2 - b\sqrt{2}$ dla $a = 2\sqrt{3} - 5,\ b = \sqrt{8} - 2\sqrt{6}$. **Zad.2.** Wykaż, że odwrotnością liczby $3 - \sqrt{10}$ jest liczba $-3 - \sqrt{10}$. **Zad.3.** Oblicz: a) $5\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{128} + 2\sqrt[3]{16}$ b) $7 \cdot \left(\sqrt{\sqrt[3]{7^2}}\right)^3$ c) $\sqrt{24^2 + 10^2}$ Uczniowie (chętni) prezentują na tablicy rozwiązania zadań, wspólnie dyskutujemy nad poprawnością tych rozwiązań. Na zakończenie uczniowie rozwiązują jeden z wybranych przez nauczyciela testów dołączonych do zbioru scenariuszy w załączniku nr 2.
7	Podsumowanie zajęć	Nauczyciel ocenia pracę uczniów na lekcji, ich aktywność; zwraca uwagę, by być czujnym i nie popełniać błędów, które zostały zauważone podczas rozwiązywania zadań.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	Zadania zaproponowane przez nauczyciela uczniowie mogą rozwiązywać indywidualnie lub w parach.

Scenariusz nr 3: Potęgi o wykładnikach wymiernych. Prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych.

Temat zajęć		**Potęgi o wykładnikach wymiernych. Prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych.**
Dział		**Liczby rzeczywiste**
Klasa (poziom edukacyjny)		**Klasa I (IV poziom edukacyjny)**
Czas trwania zajęć		**90 minut**
Lp.	**Element scenariusza**	**Treść zajęć**
1	Cel ogólny	• Usystematyzowanie wiadomości dotyczących pojęcia potęgi o wykładniku wymiernym oraz praw działań na nich. • Doskonalenie umiejętności wykonywania działań w zbiorze liczb rzeczywistych • Kształtowanie umiejętności korzystania z programów multimedialnych
2	Cele szczegółowe	Uczeń: • zna i umie zastosować definicję potęgi o wykładniku wymiernym; • zna i umie zastosować prawa działań na potęgach o wykładniku wymiernym.
3	Formy i metody	• Dyskusja kierowana • Ćwiczenia • Praca indywidualna lub parami
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków	Komputer, tablica interaktywna, gra „Wyprawa Nasreddina”.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

	opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Nauczyciel na wstępie informuje o celach lekcji, omawia organizację pracy na lekcji.
6	Przebieg zajęć *(pełna wersja)*	Uczniowie korzystają z załącznika nr 1 – temat nr 4, przypominają część teoretyczną dotyczącą potęg oraz analizują przykłady zamieszczone w temacie 4: Przypomnijmy podstawowe pojęcia związane z potęgą o wykładniku naturalnym. Niech *a* będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Przyjmujemy, że: $a^0 = 1, dla\ a \neq 0$ $a^1 = a$ $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ czynników}$ Liczbę *a* nazywamy podstawą potęgi*, n* jest wykładnikiem potęgi. Dla dowolnej liczby *a* różnej od zera oraz dowolnej liczny naturalnej n zachodzi: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Zatem rozszerzyliśmy pojęcie potęgi o wykładniki całkowite. **Potęgę o wykładniku wymiernym** określamy następująco: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, dla\ a \geq 0\ i\ m,n \in N_+$ $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}, dla\ a > 0\ i\ m,n \in N_+$ W szczególności zachodzi: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}\ , dla\ a \geq 0\ i\ m,n \in N_+$ **Prawa działań na potęgach:** Jeśli $a > 0\ i\ b > 0\ oraz\ r,s \in R$, to prawdziwe są następujące równości:

1. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
2. $a^r : b^s = a^{r-s}$
3. $\left(a^r\right)^s = a^{r\cdot s}$
4. $a^r \cdot b^r = (a\cdot b)^r$
5. $a^r : b^r (a:b)^r$

A teraz kilka przykładów ilustrujących wykorzystanie opisanych wcześniej pojęć:
Uwaga: poniższe przykłady rozwiązane są jednym ze sposobów, co nie oznacza, że jest to tylko ten jeden możliwy! Zachęcam do radosnej własnej twórczości w tym zakresie☺.

Przykład 1.
Oblicz:

- $16^{-\frac{3}{4}} - 32^{-\frac{1}{5}} = \left(2^4\right)^{-\frac{3}{4}} - \left(2^5\right)^{-\frac{1}{5}} = 2^{-3} - 2^{-1} = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{8}$
- $\frac{7\cdot 2^{16} - 3\cdot 2^4\cdot 2^{15}}{17\cdot 2^{17}} = \frac{2^{16}(7-3\cdot 2^3)}{17\cdot 2^{17}} = \frac{7-24}{17\cdot 2} = \frac{-17}{17\cdot 2} = -\frac{1}{2}$

Przykład 2.
Zapisz wyrażenie w prostszej postaci:

$$\sqrt{\frac{x^3}{y^{-3}}}\cdot\left(\frac{x^2\cdot y^{-2}}{x^{-1}}\right)^3 = \left(\frac{x^3}{y^{-3}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(x^3\cdot y^{-2}\right)^3 = \left(x^3\cdot y^3\right)^{\frac{1}{2}}\cdot x^9\cdot y^{-6} = x^{\frac{3}{2}+9}\cdot y^{\frac{3}{2}-6} = x^{\frac{21}{2}}\cdot y^{-\frac{9}{2}}$$

W dalszej części uczniowie rozwiązują zadania zaproponowane przez nauczyciela (konieczne obliczenia wykonują na kartkach, następnie chętni uczniowie przedstawiają rozwiązania na tablicy interaktywnej dyskutując nad poprawnością tych rozwiązań.

		Zad.1. Przedstaw liczbę $\frac{25^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}\cdot 125^{\frac{1}{3}}}{\left(\sqrt{5}\right)^{-2}}$ w postaci a^n, gdzie a jest liczbą naturalną. **Zad.2.** Oblicz: $\left(7^{\frac{1}{2}}-5\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)\left(7^{\frac{1}{2}}+5\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)$ **Zad.3.** Wykaż, że liczba $6^{20}+2\cdot 6^{19}-8\cdot 6^{18}$ jest wielokrotnością liczby 4. Na zakończenie uczniowie rozwiązują testy z gry „Wyprawa Nasreddina” na poziomie pierwszym, ćwicząc w ten sposób działania w zbiorze liczb rzeczywistych. W przypadku braku dostępu do gry rozwiązują zadania z załącznika do scenariusza.
7	Podsumowanie zajęć	Nauczycie ocenia aktywność uczniów, wspólnie omawiamy najczęściej popełniane błędy i usterki podczas rozwiązywania zadań.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	Zadania zaproponowane przez nauczyciela uczniowie mogą rozwiązywać indywidualnie lub w parach.

Załączniki do scenariusza nr 3

Zadania:

1. Liczba $5^{-2}+5^{-3}$ jest równa:

   A. 0,0375 B. 0,048 C. 0,375 D. 0,48

2. Ile liczb wymiernych należy do zbioru $A=\left\{4^{-2},4^{\frac{1}{4}},4^{\frac{1}{2}},4^{\frac{3}{2}}\right\}$?

   A. Jedna B. dwie C. trzy D. cztery

3. Liczba $\sqrt{2}:2$ jest równa:

   A. 2^{-2} B. 2^{-1} C. $2^{-0,5}$ D. $2^{0,5}$

4. Po wykonaniu działań w wyrażeniu $W=\dfrac{a^5\cdot(a^2)^3}{\left(a^{-4}\right)^{\frac{1}{2}}}$ otrzymamy

   A. a^8 B. a^9 C. a^{12} D. a^{13}

5. Czwarta cześć liczby 4^{200} to:

   A. 1^{200} B. 3^{298} C. 4^{198} D. 4^{201}

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

6. Liczbę $\sqrt{3\sqrt{3}}$ można zapisać w postaci:

A. $3^{\frac{1}{4}}$ B. $3^{\frac{2}{3}}$ C. $3^{\frac{3}{4}}$ D. $3^{\frac{5}{4}}$

7. Dane są liczby: $a=-17\cdot\left(4\frac{1}{4}\right)^{-1}$, $b=\sqrt[3]{-\left(6\sqrt{6}\right)^{2}}$ i $c=\frac{\left(3^{-1}-4^{-1}\right)^{-1}}{2}$.

Prawdziwa jest zależność:

A. a < b < c B. c < b < a C. b < a < c D. b < c < a

8. Oblicz wartość wyrażenia $\left(5^5:5^2\right):\left(5^3:5^2\right)$.

9. Znajdź liczbę odwrotną do liczby $\left(0{,}125\cdot\sqrt[4]{128}\right)^{-2}$.

10. Uzasadnij, że liczba $a=25^{16}$ jest 5 razy mniejsza od liczby $b=5^{10}\cdot5^{11}\cdot5^{12}$.

11. Dane są dwie liczby $x=9^{200}$ i $y=5^{300}$. Sprawdź, która liczba jest większa.

12. Sprawdź, czy liczba $x=\frac{\left(0{,}4\cdot5^{2,5}\right)}{\sqrt{5}}$ jest liczbą naturalną?

13. Znajdź liczbę, której 4% jest równe liczbie $a=\left(\frac{1}{6}\right)^{-2}+12^{0}-125^{\frac{2}{3}}$.

14. Oblicz $x=\frac{1}{6}\cdot\frac{7^{43}+49^{21}}{7^{42}-\left[\left(\sqrt{7}\right)^{22}\right]^{4}}$. Wyznacz $(-x)^{-\frac{1}{2}}$.

15. Podaj najmniejsza liczbę całkowitą spełniającą nierówność $\left(4\sqrt{2}\right)^{12}\cdot x<\left(\sqrt[3]{16}\right)^{27}+\frac{32^{6}}{0{,}125}\cdot x$.

Scenariusz nr 4: Logarytm liczby rzeczywistej. Logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym.

Temat zajęć		**Logarytm liczby rzeczywistej. Logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym.**
Dział		**Liczby rzeczywiste**
Klasa (poziom edukacyjny)		**Klasa I (IV poziom edukacyjny)**
Czas trwania zajęć		**90 minut**
Lp.	**Element scenariusza**	**Treść zajęć**
1	Cel ogólny	• Usystematyzowanie wiadomości dotyczących pojęcia logarytmu liczby dodatniej oraz przypomnienie praw działań na logarytmach (logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi) • Doskonalenie umiejętności wykonywania działań w zbiorze liczb rzeczywistych • Kształtowanie umiejętności korzystania z programów multimedialnych
2	Cele szczegółowe	Uczeń: • zna i umie zastosować definicję logarytmu liczby dodatniej; • zna i umie zastosować prawa działań na logarytmach (logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi).
3	Formy i metody	• Dyskusja kierowana • Ćwiczenia • Praca indywidualna lub parami
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym	Gra „Wyprawa Nasreddina", komputer, tablica interaktywna.

	wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Nauczyciel informuje o celach lekcji, omawia organizację pracy na lekcji.
6	Przebieg zajęć *(pełna wersja)*	Uczniowie korzystają z gry „Wyprawa Nasreddina” – poziom 1, przypominają pojęcie logarytmu liczby rzeczywistej: Logarytm związany jest z potęgą. Logarytmem liczby dodatniej b przy podstawie a nazywamy wykładnik x potęgi, do której należy podnieść liczbę a, aby otrzymać liczbę b: $a^x = b$. Zapisujemy: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ przy czym **podstawa a** jest liczbą dodatnią różną od jedności ($a > 0\ i\ a \neq 1$), zaś **liczba logarytmowana b** jest dodatnia ($b > 0$, jak wynika z wcześniejszego określenia). ***<u>Zapamiętaj!</u>*** **Logarytmować można tylko liczby dodatnie, a podstawa jest liczbą dodatnią różną od jedności!!!** Logarytmowanie jest operacją odwrotną do potęgowania (podobnie jak pierwiastkowanie) *<u>Przykłady:</u>* ➢ $\log_2 32 = 5\ bo\ 2^5 = 32$ ➢ $\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}\ bo\ 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ ➢ $\log_{\sqrt{2}} 1 = 0\ bo\ (\sqrt{2})^0 = 1$ Zapamiętaj! Dla $a > 0\ i\ a \neq 1$ oraz $b > 0$ zachodzą równości:

- $\log_a a = 1 \; bo \; a^1 = a$ np. $\log_3 3 = 1$
- $\log_a 1 = 0 \; bo \; a^0 = 1$ np. $\log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$
- $\log_a \frac{1}{a} = -1 \; bo \; a^{-1} = \frac{1}{a}$ np. $\log_6 \frac{1}{6} = -1$
- $\log_a a^b = b \; bo \; a^b = a^b$ np. $\log_2 2^{16} = 16$

Szczególny logarytm to logarytm dziesiętny (logarytm przy podstawie 10):
wówczas zamiast $\log_{10} b$ piszemy $\log b$.

Niech $a > 0 \; i \; a \neq 1, \; x > 0, \; y > 0, \; n \in N_+$. Wówczas prawdziwe są następujące własności logarytmów:

1. **Logarytm iloczynu**

$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

Przykład: $\log_{\sqrt{2}} 4 + \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{4} = \log_{\sqrt{2}} (4 \cdot \frac{1}{4}) = \log_{\sqrt{2}} 1 = 0$

2. **Logarytm ilorazu**

$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

Przykład: $\log_5 4 - \log_5 20 = \log_5 \frac{4}{20} = \log_5 \frac{1}{5} = -1$

3. **Logarytm potęgi o wykładniku naturalnym**

$\log_a (b^n) = n \log_a b$

Przykład: $\log_4 4^9 = 9 \log_4 4 = 9 \cdot 1 = 9$

Przykład 1:

Oblicz wartość wyrażenia $a = \log_3 \frac{1}{27} \cdot \log_9 3$.

Rozwiązanie:

Obliczmy oddzielnie każdy czynnik . I tak:

		$\log_3 \frac{1}{27} = \log_3 3^{-3} = -3$ oraz $\log_9 3 = x \Leftrightarrow 9^x = 3$ $3^{2x} = 3^1 \Rightarrow 2x = 1$, stąd $x = \frac{1}{2}$ Obliczamy wartość wyrażenia $a = -3 \cdot \frac{1}{2}$ $a = -\frac{3}{2}$ ($a = -1{,}5$). *Przykład 2:* Oblicz $\sqrt{ab}$, wiedząc, że $\log_2 a = 5$ *oraz* $\log_2 b = 2$. *Rozwiązanie:* Z danych informacji najpierw obliczymy- korzystając z definicji logarytmu - a oraz b. $\log_2 a = 5 \Rightarrow a = 2^5$ $\log_2 b = 2 \Rightarrow b = 2^2$ Zatem mamy: $\sqrt{ab} = \sqrt{2^5 \cdot 2^2} = \sqrt{2^6 \cdot 2} = \sqrt{(2^3)^2 \cdot 2} = 2^3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ W dalszej części zajęć uczniowie indywidualnie rozwiązują wskazane przez nauczyciela testy dołączone do scenariusza. Stanowią one doskonałe ćwiczenie utrwalające działania w zbiorze liczb rzeczywistych.
7	Podsumowanie zajęć	Nauczyciel na zakończenie podsumowuje pracę uczniów, omawia wyniki testów.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	Zajęcia przeznaczone głównie dla uczniów klas maturalnych.

Załączniki do scenariusza nr 4

Zadania

1. Jeżeli $\log_3 m = -1$, to

   A. m = - 3 B. $m = -\frac{1}{3}$ C. $m = \frac{1}{3}$ D. $m = \sqrt{3}$

2. Jeżeli $\log_2 p = 2$ i $\log_3 q = 1$, to liczba $\sqrt{p^2 + q^2}$ jest równa

   A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

3. Liczba $\log 0{,}2 + \log 0{,}5$ jest równa

   A. -3 B. -2 C. -1 D. 1

4. Liczba $\log\sqrt{5} + \log 2\sqrt{5}$ nie jest

   A. niewymierna B. wymierna C. dodatnia D. mniejsza od $\sqrt{5}$

5. Prawdziwa jest równość:

   A. $\log_6 18 = 2 + \log_6 2$ B. $\log_6 3 = 2 + \log_6 12$ C. $\log_6 72 = 2 + \log_6 3$ D. $\log_6 144 = 2 + \log_6 4$

6. Liczba $\log^2 500 - \log^2 2$ jest równa

   A. $2\log 250$ B. $3\log 250$ C. $\log^2 125$ D. $\log^2 250$

7. Liczba $\log 16 \cdot \log 32$ jest równa

A. $9\log 2$ B. $10\log 2$ C. $(3\log 2)^2$ D. $20\log^2 2$

8. Jeżeli $\log_2 3 = a$ i $\log_2 5 = b$, to liczba $\log_2 45$ jest równa

A. 2ab B. 2a + b C. $a^2 + b$ D. $a^2 b$

9. Oblicz średnią arytmetyczną liczb: $\log_4 12, \ -\log_4 3, \quad 2.$

10. Uzasadnij, że liczba $(2\log_{0,1} 3 - \log_{0,1} 27) + (2\log_{0,1} 6 - \log_{0,1} 12)$ jest liczba wymierną.

11. Która z liczb a, b, c jest największa? $\log_a 0{,}1 = -1,$ $\log_{2,5} b = 2,$ $c = \log_{\sqrt{2}} 2$

12. Niech $a = \log_2 3.$ Uzasadnij równość $\log_2 18 = 1 + 2a.$

13. Znajdź wszystkie liczby rzeczywiste p spełniające równość $9^{\log_3 (p-3)} = 4.$

14. O ile procent liczba $\log 8$ jest mniejsza od liczby $\log^2 4 + \log 25 \cdot \log 4$?

15. Wykaż, że równanie $x^2 + \sqrt{\log_3 12} \cdot x + \log_2 \sqrt{6} = 0$ nie ma rozwiązań.

Scenariusz nr 5: Przybliżenie i zaokrąglenie liczby rzeczywistej. Błąd przybliżenia.

Temat zajęć		**Przybliżenie i zaokrąglenie liczby rzeczywistej. Błąd przybliżenia.**
Dział		**Liczby rzeczywiste**
Klasa (poziom edukacyjny)		**Klasa I (IV poziom edukacyjny)**
Czas trwania zajęć		**45 minut**
Lp.	**Element scenariusza**	**Treść zajęć**
1	Cel ogólny	• Kształcenie umiejętności logicznego wnioskowania • Ćwiczenie sprawności językowej
2	Cele szczegółowe	Uczeń: • poprawnie wyznacza przybliżenie dowolnej liczby rzeczywistej z zadaną dokładnością; • poprawnie oblicza błąd przybliżenia; • rozpoznaje błąd względny i błąd bezwzględny.
3	Formy i metody	• Dyskusja kierowana z wykorzystaniem załącznika nr 1 • Ćwiczenia • Praca z całą grupą • Praca w parach
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł,	Komputer, tablica interaktywna, kalkulatory.

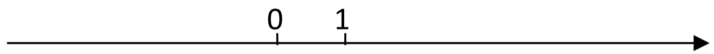
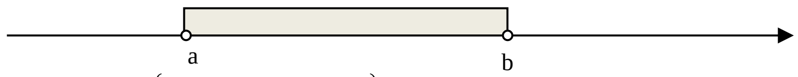
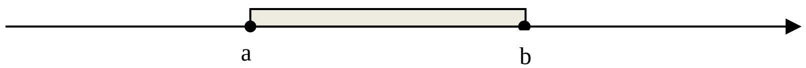
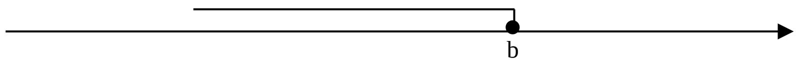
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

	gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Nauczyciel informuje co będzie przedmiotem zajęć, omawia organizację pracy na lekcji.
6	Przebieg zajęć *(pełna wersja)*	Uczniowie zapoznają się z materiałem, dotyczącym zaokrąglenia liczby rzeczywistej, analizują przykłady zamieszczone w lekcji. W zeszycie przedmiotowym zapisują własny przykład zaokrąglenia liczby, nauczyciel prosi o przeczytanie tych przykładów kilku uczniów. W życiu codziennym bardzo często używamy zaokrągleń. Są one istotne w pomiarach różnych wielkości fizycznych czy chemicznych. Jeśli chcemy zaokrąglić pewien ułamek dziesiętny, to odrzucamy pewną liczbę cyfr końcowych i stosujemy poniższe zasady: 1. jeśli pierwszą odrzuconą cyfrą jest któraś z cyfr od 0 do 4, to zaokrąglamy z niedomiarem (czyli pozostawiamy bez zmian) 2. natomiast jeśli pierwsza odrzucana jest którąś z cyfr od 5 do 9, to zaokrąglamy z nadmiarem. Często zaokrąglając liczbę określamy jej rząd. I tak np.: Zaokrąglenia do tysięcy: Zaokrąglenia do setek: $4321 \approx 4000$ $7{,}01487 \approx 7{,}01$ $8999 \approx 9000$ $3{,}925 \approx 3{,}93$ $127743 \approx 128000$ $16{,}4988 \approx 16{,}50$ W dalszej części uczniowie poznają pojęcie błędu (z nadmiarem i niedomiarem), błędu względnego i błędu bezwzględnego. Jeżeli zakupimy np. odkurzacz za 398, 90 zł, to powiemy, że zakupiliśmy go za ok 400 zł lub za około 390 zł uznając, że nie popełniliśmy istotnego błędu. Kalkulator wynik działania 2:3 przedstawia z dokładnością do więcej niż dwóch miejsc po przecinku. I tak mamy np.: $\frac{2}{3} = 0{,}6666...$

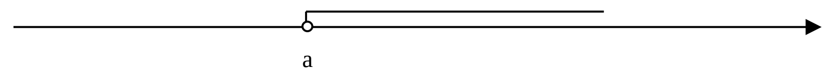
		Liczba ta w przybliżeniu będzie równa 0,666 (z niedomiarem) lub 0,667 (z nadmiarem). Aby obliczyć **błąd przybliżenia** pewnej liczby x odejmujemy przybliżenie tej liczby *a* od naszej liczby czyli: $x - a$. **Błędem bezwzględnym** przybliżenia nazywamy wartość bezwzględną różnicy liczby x i jej przybliżenia *a*, czyli: $\|x-a\|$. **Błędem względnym** przybliżenia nazywamy stosunek błędu bezwzględnego do wartości bezwzględnej liczby x, czyli: $\frac{\|x-a\|}{\|x\|}$. Na zakończenie zajęć uczniowie rozwiązują dwa zadania. Jedno z nich zamieszczone jest w załączniku nr 1, treść drugiego nauczyciel wyświetla na tablicy. Uczniowie rozwiązują w parach, następnie prezentują odpowiedzi na tablicy. **Zadanie 1:** Dane liczby 0,4817 ; 5,0378 ; 14,2998 zaokrąglij z dokładnością do: a) jednego miejsca po przecinku b) dwóch miejsc po przecinku c) trzech miejsc po przecinku **Zadanie 2:** Liczba 150 jest przybliżeniem pewnej liczby z niedomiarem. Błąd bezwzględny tego przybliżenia jest równy 4,5. Oblicz błąd względny tego przybliżenia i wyraź go w procentach.
7	Podsumowanie zajęć	Nauczyciel prosi uczniów o przypomnienie poznanych pojęć, ocenia aktywność uczniów na lekcji.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	Zajęcia można przeprowadzić jako lekcja wprowadzająca pojęcia błędu, jak również powtórzeniowa w klasie czwartej.

Scenariusz nr 6: Zbiory liczbowe. Przedziały liczbowe i działania na nich.

Temat zajęć		**Zbiory liczbowe. Przedziały liczbowe i działania na nich.**
Dział		**Liczby rzeczywiste**
Klasa (poziom edukacyjny)		**Klasa I (IV etap edukacyjny)**
Czas trwania zajęć		**45 minut**
Lp.	**Element scenariusza**	**Treść zajęć**
1	Cel ogólny	• Usystematyzowanie wiadomości dotyczących działań na zbiorach, w szczególności na przedziałach liczbowych • Doskonalenie rozumienia pojęcia zbioru, podzbioru
2	Cele szczegółowe	• Uczeń: • zna i umie wyznaczyć sumę, iloczyn i różnicę zbiorów; • zna i rozumie określenie przedziału liczbowego; • wykonuje działania na przedziałach liczbowych; • dostrzega, formułuje i zapisuje warunki definiujące odpowiednie przedziały.
3	Formy i metody	• Rozmowa dydaktyczna • Ćwiczenia • Praca z klasą lub indywidualna
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w	Komputer, tablica interaktywna.

	projekcie np. moduł, gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Nauczyciel informuje o celach lekcji, prosi o podanie przykładu zbioru oraz zwraca uwagę na to iż zbiór jest pojęciem pierwotnym, którego nie definiujemy. Następnie wskazuje na szczególny rodzaj zbiorów tj. na przedziały liczbowe.
6	Przebieg zajęć *(pełna wersja)*	W dalszej części lekcji nauczyciel skupia się na rozróżnianiu przedziałów liczbowych i działaniach na nich wykorzystując do tego celu załącznik nr 1 „Liczby rzeczywiste” temat nr 7. Wraz z uczniami analizują część teoretyczną oraz zamieszczone w załączniku nr 1 ćwiczenia: Oś liczbowa to prosta, na której zaznaczono zwrot dodatni, punkt zerowy i jednostkę:  Przedziały liczbowe to szczególne podzbiory zbioru liczb rzeczywistych. Dzielimy je na przedziały ograniczone i nieograniczone (nieskończone). Niech $a,b \in R \text{ i } a < b$. Wówczas: • $(a;b) = \{x \in R : a < x < b\}$ - przedział ograniczony, obustronnie otwarty  • $\langle a;b\rangle = \{x \in R : a \le x \le b\}$ - przedział ograniczony, obustronnie domknięty (zamknięty)  • $(-\infty;b\rangle = \{x \in R : x \le b\}$ - przedział nieograniczony domknięty od minus nieskończoności 

- $(a;+\infty)=\{x\in R: x>a\}$- przedział nieograniczony otwarty od a do plus nieskończoności



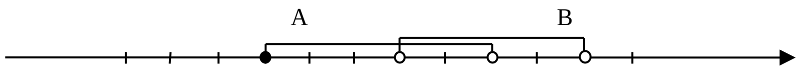
(-∞; +∞) = R cała oś liczbowa.
Zwróćmy uwagę na równoważne zapisy:

$$x\in(a;b)\Leftrightarrow a<x<b\Leftrightarrow\begin{cases}x>a\\x<b\end{cases}\Leftrightarrow x>a\ i\ x<b$$

Skoro przedziały są podzbiorami zbioru liczb rzeczywistych, to można na nich wykonywać działania jak na zbiorach. Bardzo pomocne jest przedstawienie przedziałów na osi liczbowej i wyznaczanie ich sumy, części wspólnej i różnicy.

Przykład 1:
Wyznacz zbiory $A\cup B,\ A\cap B,\ A\setminus B,\ B\setminus A$, gdy $A=\langle -3;2),\ B=(0;4)$.

<u>Rozwiązanie:</u>
Wykorzystajmy ilustrację graficzną danych przedziałów liczbowych:



Mamy wówczas:

$A\cup B=\langle -3,4)$

$A\cap B=(0,2)$

$A\setminus B=\langle -3,0\rangle$

$B\setminus A=\langle 2,4)$.

Przykład 2:
Rozważmy dwa zbiory:
 A- zbiór dzielników naturalnych liczby 16
 B- zbiór liczb pierwszych mniejszych od 16

Wypisz wszystkie elementy zbiorów: $A\cup B;\quad A\cap B;\quad A\setminus B.$

Rozwiązanie:

Wypiszmy elementy zbiorów A i B. Mamy zatem:

$A = \{1,2,4,8,16\}$ oraz $B = \{2,3,5,7,11,13\}$

Wówczas:

$A \cup B = \{1,2,3,4,5,7,8,11,13,16\}$

$A \cap B = \{2\}$

$A \setminus B = \{1,4,8,16\}$

Na zakończenie uczniowie samodzielnie rozwiązują zadania (z wykorzystaniem tablicy interaktywnej) przygotowane przez nauczyciela:

Zadanie 1.

Uzupełnij tabelkę podając własny przykład danego przedziału:

Nazwa przedziału	**Zapis symboliczny**	**Warunek definiujący**	**Ilustracja na osi liczbowej**
Ograniczony, obustronnie otwarty			
Ograniczony, obustronnie domknięty			
Ograniczony, lewostronnie domknięty			
Nieograniczony otwarty od minus nieskończoności			
Nieograniczony zamknięty do plus nieskończoności			

		Zadanie 2. Dane są zbiory A i B. Wyznacz $A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B,\ B \setminus A$ jeśli $A = (-\infty, 6\rangle$, $B = \langle 4, 8)$. *Część końcowa:* Uczniowie prezentują wyniki swojej pracy, nauczyciel omawia poprawność rozwiązań i ocenia pracę uczniów na lekcji.
7	Podsumowanie zajęć	Uczniowie prezentują wyniki swojej pracy, nauczyciel omawia poprawność rozwiązań i ocenia pracę uczniów na lekcji.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	Zajęcia można przeprowadzić w klasie I technikum lub liceum, także jako lekcja powtórzeniowa w klasie kończącej naukę.

Scenariusz nr 7: Wyrażenia arytmetyczne i ich wartości liczbowe

Temat zajęć		**Wyrażenia arytmetyczne i ich wartości liczbowe**
Dział		**Liczby rzeczywiste**
Klasa (poziom edukacyjny)		**Klasa I (IV poziom edukacyjny)**
Czas trwania zajęć		**45 minut**
Lp.	**Element scenariusza**	**Treść zajęć**
1	Cel ogólny	• Utrwalenie wiadomości i umiejętności związanych z wyrażeniami algebraicznymi
2	Cele szczegółowe	• Uczeń: • podstawia do danego wyrażenia algebraicznego w miejsce zmiennych ich wartości liczbowe; • upraszcza wyrażenia algebraiczne; • stosuje prawa działań i kolejność wykonywanych działań w zbiorze liczb rzeczywistych; • prowadzi proste rozumowanie matematyczne.
3	Formy i metody	• Pogadanka powtórzeniowa z wykorzystaniem załącznika nr 1 • Ćwiczenia utrwalające • Praca z całą grupą • Praca indywidualna
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł,	Załącznik nr 1 „Liczby rzeczywiste”, komputer, tablica interaktywna.

	gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Nauczyciel informuje co będzie przedmiotem zajęć, omawia organizację pracy na lekcji, wprowadza w pojęcie wyrażenia algebraicznego.
6	Przebieg zajęć *(pełna wersja)*	Uczniowie zapoznają się z lekcją nr 3 załącznika nr 1 „ Wyrażenia algebraiczne i ich wartości liczbowe”, analizują przykłady zamieszczone w lekcji. W zeszycie przedmiotowym rozwiązują samodzielnie zadania z lekcji nr 3, następnie sprawdzają poprawność rozwiązania: nauczyciel udostępnia rozwiązania zamieszczone w załączniku. Tok lekcji jest zgodny z treścią lekcji nr 3 załącznika nr 1: Najczęściej w zadaniach matematycznych pojawia się pojęcie wyrażenia algebraicznego rozumianego jako wyrażenia, w którym występują liczby i litery połączone znakami działań matematycznych np. $x+y,\ 2a-7b,\ \frac{a-b}{c+d},\ \sqrt{x^2-5y+1},\ d^{-1}.$ Litery w wyrażeniach algebraicznych nazywamy zmiennymi. Jeżeli w miejsce liter podstawimy odpowiednie liczby i wykonamy wskazane działania, to otrzymamy liczbę określaną jako wartość „ liczbowa wyrażenia algebraicznego”. Wyrażenie arytmetyczne jest często utożsamiane z wyrażeniem algebraicznym. Przy obliczaniu wartości wyrażeń algebraicznych pamiętajmy o kolejności wykonywanych działań, stosowaniu wzorów skróconego mnożenia i bądźmy bardzo uważni jeśli chodzi o znaki liczb! *Przykład 1.* Oblicz wartość liczbową wyrażenia: a) $\frac{3x-2y^2}{x+z}$ dla $x=2{,}5;\ y=-0{,}5;\ z=-6$ Rozwiązanie: $\frac{3\cdot 2{,}5-2\cdot(-0{,}5)^2}{2{,}5+(-6)}=\frac{7{,}5-2\cdot 0{,}25}{2{,}5-6}=\frac{7{,}5-0{,}5}{-3{,}5}=\frac{7}{-3{,}5}=-2$ Uwaga!

Oczywiście powyższe obliczenia uczeń mógłby wykonać znacznie szybciej, niemniej jednak pośpiech nie jest wskazany, gdyż najdrobniejsza pomyłka może trochę „kosztować”. Niech każdy sam odpowie sobie na pytanie, czy liczę w pamięci wykonując kilka działań jednocześnie, czy powoli i dokładnie wykonam to zadanie….

b) $\frac{x^2-y}{2}$ dla $x=1-\sqrt{2};\ y=4\sqrt{2}+1$

Rozwiązanie: $\frac{\left(1-\sqrt{2}\right)^2-\left(4\sqrt{2}+1\right)}{2}=\frac{1-2\sqrt{2}+2-4\sqrt{2}-1}{2}=\frac{2-6\sqrt{2}}{2}=1-3\sqrt{2}$

c) $\frac{-3}{x+2}+4$ dla $x=-\sqrt{3}$. Wynik przedstaw w postaci $a+b\sqrt{3}$, gdzie $a,b\in R$.

Rozwiązanie: $\frac{-3}{-\sqrt{3}+2}=\frac{3}{\sqrt{3}-2}=\frac{3\left(\sqrt{3}+2\right)}{\left(\sqrt{3}-2\right)\left(\sqrt{3}+2\right)}=\frac{3\left(\sqrt{3}+2\right)}{3-4}=-6-3\sqrt{3}$.

Przykład 2.[*]

Uprość i oblicz wartość otrzymanego wyrażenia:

a) $(x-1)^3+2(x+1)(x^2-x+1)-3x(x-1)(x+1)$ dla $x=-\frac{1}{2}$

Rozwiązanie:

$(x-1)^3+2(x+1)(x^2-x+1)-3x(x-1)(x+1)=x^3-3x^2+3x-1+2(x^3+1)-3x(x^2-1)=$

$=x^3-3x^2+3x-1+2x^3+2-3x^3+3x=-3x^2+6x+1$

dla $x=-\frac{1}{2}$ mamy:

b) $\frac{a^3-b^3}{a^2+b^2+ab}$ dla $a=\sin 30^0-1,\ b=\left(1\frac{1}{2}\right)^{-1}$

		Rozwiązanie: $\frac{a^3-b^3}{a^2+b^2+ab}=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a^2+b^2+ab}=a-b$ Dla $a=\sin 30^0-1=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$ oraz $b=\left(1\frac{1}{2}\right)^{-1}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{1}=\frac{2}{3}$ mamy: $a-b=-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=\frac{-3-4}{6}=-\frac{7}{6}=-1\frac{1}{6}$. *<u>Przykład 3</u>*. Oblicz wartość wyrażenia: $\left(a+\sqrt{a+1}\right)\left(a-\sqrt{a+1}\right)$dla $a=-\sqrt{5}$. Rozwiązanie: $\left(a+\sqrt{a+1}\right)\left(a-\sqrt{a+1}\right)=a^2-(a+1)=a^2-a-1$. Dla $a=-\sqrt{5}$ mamy: $\left(-\sqrt{5}\right)^2-\left(-\sqrt{5}\right)-1=5+\sqrt{5}-1=4+\sqrt{5}$. Na zakończenie uczniowie rozwiązują zadania zamieszczone na końcu lekcji nr 3: ***<u>Zadanie 1:</u>*** Dane są liczby: $x=\frac{\sqrt{2}+1}{3}$, $y=\frac{\sqrt{2}-1}{3}$. a) Sprawdź, czy $x^2-y^2=\frac{4\sqrt{2}}{9}$. b) Oblicz $\left\|\frac{x}{y}-7\right\|$. ***<u>Zadanie 2:</u>*** Wykaż, że wartość wyrażenia $\left(a-3\sqrt{2}\right)\left(a+3\sqrt{2}\right)-\left(a-3\sqrt{2}\right)^2+\left(a+3\sqrt{2}\right)^2$ dla $a=(0{,}5)^{-\frac{1}{2}}$ jest liczbą dodatnią.

7	Podsumowanie zajęć	Nauczyciel ocenia aktywność uczniów na lekcji, wskazuje na konieczność eliminacji najczęściej popełnianych błędów, zachęca do uważnych działań w zbiorze liczb rzeczywistych.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	Lekcja typowo powtórzeniowa, szczególnie polecana do realizacja w klasach kończących naukę.

Scenariusz nr 8: Podzbiory zbioru liczb rzeczywistych. Rozwinięcie dziesiętne liczby rzeczywistej

Temat zajęć		**Podzbiory zbioru liczb rzeczywistych. Rozwinięcie dziesiętne liczby rzeczywistej**
Dział		**Liczby rzeczywiste**
Klasa (poziom edukacyjny)		**Klasa I (IV poziom edukacyjny)**
Czas trwania zajęć		**45 minut**
Lp.	**Element scenariusza**	**Treść zajęć**
1	Cel ogólny	• Doskonalenie umiejętności związanych z rozróżnianiem podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych • Wyrabianie umiejętności rozróżniania liczb wymiernych i niewymiernych na podstawie rozwinięcia dziesiętnego liczby rzeczywistej • Rozwijanie zdolności abstrakcyjnego myślenia i kojarzenia
2	Cele szczegółowe	• Uczeń: • zna i rozróżnia liczby naturalne, całkowite, wymierne, niewymierne; • zna i stosuje w zadaniach pojęcie liczby nieparzystej, parzystej; • wskazuje liczby przeciwne i odwrotne do danej; • sprawnie wykonuje działania w zbiorze liczb wymiernych.
3	Formy i metody	• Pogadanka powtórzeniowa z wykorzystaniem załącznika nr 1, • Ćwiczenia utrwalające • Praca z całą grupą • Praca indywidualna lub w parach
4	Środki dydaktyczne	Załącznik „Liczby rzeczywiste”, komputer, tablica interaktywna.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

	(ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Nauczyciel informuje co będzie przedmiotem zajęć, omawia organizację pracy na lekcji.
6	Przebieg zajęć *(pełna wersja)*	Nauczyciel wspólnie z uczniami w oparciu o treści zawarte w załączniku nr 1 „Liczby rzeczywiste" temat nr 1, systematyzuje wiedzę i umiejętności związane z podzbiorami zbioru R, wskazuje na wzajemną relację między nimi (inkluzja zbiorów), zwraca uwagę na rozwinięcie dziesiętne liczby rzeczywistej. Tok lekcji przebiega zgodnie z zapisami w załączniku nr 1, lekcji nr 1: Liczby rzeczywiste to jeden z najważniejszych zbiorów w całej matematyce. Zbiór liczb rzeczywistych (R) jest sumą zbioru liczb wymiernych (W) oraz zbioru licz niewymiernych (NW), co zapisujemy: $R = W \cup NW$. Szczególne miejsce zajmują **liczby naturalne**, o których się mówi, że stworzył je sam Pan Bóg do liczenia kamieni. Przyjmujemy oznaczenia: N – zbiór liczb naturalnych C – zbiór liczb wymiernych W – zbiór liczb wymiernych NW – zbiór liczb niewymiernych Elementy zbioru N oznaczamy małą literą n. Mamy zatem: $n \in N,\ N = \{0,1,2,3,...\}$ **Liczbą pierwszą** nazywamy każdą liczbę naturalną większą od 1 podzielną przez 1 i samą siebie. **Liczbą złożoną** nazywamy liczbę naturalną większą od 1, która nie jest liczbą pierwszą. Liczby: 0 oraz 1 nie są ani pierwsze ani złożone. Liczby naturalne wraz z liczbami do nich przeciwnymi tworzą **zbiór liczb całkowitych**, czyli $C = \{...,-2,-1,0,1,2,...\}$

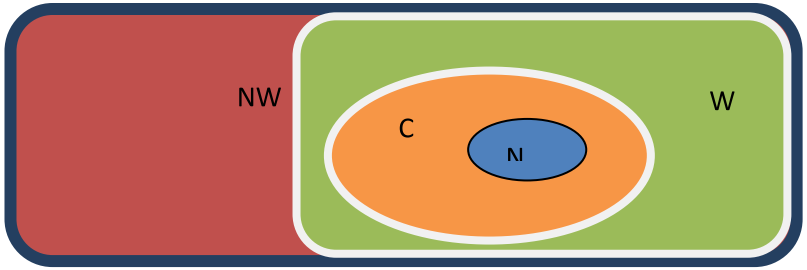
Liczbą parzystą nazywamy każdą liczbę całkowitą podzielną przez 2, natomiast **liczby nieparzyste** to liczby całkowite, które nie są podzielne przez 2.
Liczba 0 jest liczbą parzystą.
Liczbą wymierną nazywamy liczbę, którą można przedstawić w postaci ilorazu dwóch liczb całkowitych, tzn. w postaci $\frac{m}{n}$, *gdzie* $m, n \in C$ *i* $n \neq 0$. Pozostałe liczby to **liczby niewymierne.**
Każda liczba rzeczywista ma rozwinięcie dziesiętne:

- skończone lub nieskończone okresowe, gdy jest liczbą wymierną,

lub

- nieskończone nieokresowe, gdy jest liczbą niewymierną

Liczbą przeciwną do a nazywamy liczbę –a. Zachodzi wówczas: a+(-a) = 0
Odwrotnością liczby *a* różnej od zera jest liczba $\frac{1}{a}$. Zachodzi wówczas: $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.
Pomiędzy liczbami naturalnymi, całkowitymi , wymiernymi i niewymiernymi można zauważyć następujące związki:
$N \subset C \subset W \subset R \supset NW$
Zapis: $N \subset C$ czytamy:
Zbiór liczb naturalnych jest podzbiorem zbioru liczb całkowitych
lub
Zbiór liczb naturalnych zawiera się w zbiorze liczb całkowitych.



Po części teoretycznej, przypomnieniu i usystematyzowaniu wiadomości o podzbiorach zbioru R, uczniowie w parach lub indywidualnie rozwiązują dwa zadania zamieszczone na końcu lekcji nr 1

		(zadanie 1, 2) oraz zadania zaproponowane przez nauczyciela (zadanie 3,4): ***Zadanie 1.*** Ze zbioru $Z=\left\{-3\frac{1}{4},\sqrt{8},\left(-\frac{2}{3}\right)^2,-3^2,\sqrt{81},0;\ 2,(7);\ \frac{\pi}{2}\right\}$ wybierz liczby a) naturalne b) całkowite c) wymierne d) niewymierne. ***Zadanie 2.*** Wyznacz wszystkie liczby całkowite a, które spełniają warunek: $-2\sqrt{5}<a<\sqrt{5}$. ***Zadanie 3:*** Oblicz wartość wyrażenia: $\sqrt{\frac{3}{4}-a}+\sqrt{2a}-\frac{3}{2}\sqrt{1-4a},\ dla\ a=\frac{1}{12}$, a następnie oceń, czy otrzymany wynik jest liczbą wymierną czy niewymierną. ***Zadanie 4:*** $\dfrac{\sqrt{5\frac{4}{9}-\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}}:4{,}5}{\left(8-3\cdot2\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}}$
7	Podsumowanie zajęć	Nauczyciel ocenia pracę uczniów na lekcji, ich zaangażowanie, zwraca uwagę na istotne elementy lekcji.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	Bez uwag

Scenariusz nr 9: Logarytm potęgi i wzór na zmianę podstawy logarytmu

Temat zajęć		**Logarytm potęgi i wzór na zmianę podstawy logarytmu**
Dział		**Liczby rzeczywiste**
Klasa (poziom edukacyjny)		**Klasa I (IV poziom edukacyjny)**
Czas trwania zajęć		**90 minut**
Lp.	**Element scenariusza**	**Treść zajęć**
1	Cel ogólny	• Usystematyzowanie wiadomości dotyczących logarytmu • Rozwijanie umiejętności logicznego rozumowania i twórczego myślenia • Ćwiczenie jednoznacznego, jasnego formułowania myśli
2	Cele szczegółowe	• Uczeń: • zna i umie stosować w obliczeniach definicję logarytmu, wzory na logarytm potęgi oraz wzór na zmianę podstawy logarytmu.
3	Formy i metody	• Dyskusja kierowana • Ćwiczenia • Praca indywidualna lub parami
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł,	Załącznik „Liczby rzeczywiste”, komputer, tablica interaktywna.

	gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Nauczyciel wprowadza do tematyki zajęć, może nawiązać do tematu nr 9 załącznika.
6	Przebieg zajęć *(pełna wersja)*	Uczniowie przypominają wiadomości związane z pojęciem logarytmu liczby dodatniej oraz przypominają wzory na logarytm iloczynu oraz logarytm ilorazu. Można w tym celu wykorzystać przykłady z lekcji nr 9 załacznika lub wykonać kilka przykładów podanych przez nauczyciela: Oblicz: a) $\log_8 \sqrt{8} = ...$ b) $\log_{\sqrt{27}} 81 = ...$ c) $\log_7^9 7 = ...$ W dalszej części lekcji uczniowie pracują wykorzystując temat nr 10 załacznika nr 1 „Logarytm potęgi i wzór na zmianę podstawy logarytmu”: W temacie 9 poznaliśmy wzór na logarytm potęgi o wykładniku naturalnym. Wzór ten jest prawdziwy także w przypadku logarytmu potęgo o dowolnym wykładniku rzeczywistym: $\log_a b^c = c\log_a b$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1,\ b > 0,\ c \in R$ *__Przykład 1:__* Ustal, wykonując odpowiednie obliczenia, która z liczb a czy b mniejsza, a która większa, jeśli: $a = \log_5 \sqrt[3]{5}$, $b = \log \sqrt[4]{100}$ *__Rozwiązanie:__* $a = \log_5 5^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log_5 5 = \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3}$ $b = \log 100^{\frac{1}{4}} = \log(10^2)^{\frac{1}{4}} = \log 10^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log 10 = \frac{1}{2}$

Stąd $a < b$, bo $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$.

I jeszcze zadanie utrwalające poznane wcześniej własności logarytmów:
Zadanie:
Niech $\log_4 a = 3$. Oblicz wartość wyrażenia: $\log_4 16a^2$.
W niektórych sytuacjach istnieje potrzeba zamiany podstawy logarytmu. Zwracamy uwagę, iż wzory na sumę i różnicę logarytmów wymagają , aby logarytmy miały tę samą podstawę! Korzystamy z dalszej części tematu nr 10 załącznika nr 1 poznając przydatne wzory:

I. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

II. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

dla $a > 0$ i $a \neq 1$, $b > 0$ i $b \neq 1$ oraz $x > 0$.

Przykład 2:
Oblicz:
a) $\log_{16} 64$
b) $\log_2 3(\log_3 16 - \log_3 4)$
Rozwiązanie:
Ad a) zauważamy, że liczby 16 i 64 są potęgami liczby 4. Możemy zatem zapisać korzystając ze wzoru na zmianę podstawy logarytmu:

$$\log_{16} 64 = \frac{\log_4 64}{\log_4 16} = \frac{3}{2}$$

Ad b) $\log_2 3(\log_3 16 - \log_3 4) = \log_2 3 \cdot \log_3 \frac{16}{4} = \log_2 3 \cdot \log_3 4 = \frac{1}{\log_3 2} \cdot \log_3 4 = \frac{\log_3 4}{\log_3 2} = \log_2 4 = 2$

		Po dokładnym przeanalizowaniu rozwiązań przedstawionych w załączniku nr 1 zadań, uczniowie otrzymują kartę pracy z zadaniami wykorzystującymi poznane wzory: (Uczniowie pracują indywidualnie lub w parach, nauczyciel ocenia poprawność rozwiązanych zadań po zaprezentowaniu ich na tablicy) *Karta pracy ucznia* **Zad. 1.** Oblicz: $\log_9 27$ (Odp. $\frac{3}{2}$). **Zad. 2.** Oblicz: $\frac{1}{\log_4 8}+\frac{1}{\log_2 8}$ (Odp. 1) **Zad. 3.** Oblicz: $\frac{\log_4 7}{\log_2 7}$ (Odp. $\frac{1}{2}$)
7	Podsumowanie zajęć	Nauczyciel podsumowuje pracę uczniów na lekcji, ocenia ich zaangażowanie, zwraca uwagę na istotne fragmenty rozwiązywanych zadań.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	Bez uwag

Scenariusz nr 10: Procenty i punkty procentowe

Temat zajęć		**Procenty i punkty procentowe**
Dział		**Liczby rzeczywiste**
Klasa (poziom edukacyjny)		**IV poziom edukacyjny**
Czas trwania zajęć		**90 minut**
Lp.	**Element scenariusza**	**Treść zajęć**
1	Cel ogólny	• Usystematyzowanie wiadomości dotyczących obliczeń procentowych • Wyrabianie umiejętności sprawnego wykonywania obliczeń procentowych • Kształtowanie umiejętności korzystania z programów multimedialnych
2	Cele szczegółowe	Uczeń: • zna i umie zastosować trzy typy obliczeń procentowych; • odróżnia zmiany wyrażone w punktach procentowych od zmian wyrażonych w procentach; • rozwiązuje zadania wykorzystujące obliczenia procentowe w życiu codziennym.
3	Formy i metody	• Pogadanka dydaktyczna • Ćwiczenia • Praca indywidualna • Praca z całą klasą
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w	Załącznik nr 1 „Liczby rzeczywiste”, komputer, tablica interaktywna.

	projekcie np. moduł, gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Nauczyciel informuje o celach lekcji, omawia organizację pracy na lekcji.
6	Przebieg zajęć *(pełna wersja)*	Uczniowie przypominają pojęcie procentu, punktu procentowego, analizują zamieszczone tam przykłady, korzystając z załącznika nr 1 – temat nr 6: Niezwykle ważną umiejętnością współczesnego człowieka jest posługiwanie się procentami, a od polityków czy ekonomistów słyszymy o punktach procentowych. **Procent** 1% pewnej wielkości to setna część tej wielkości, zatem $p\%\ liczby\ a\ to\ \frac{p}{100}\cdot a$. **Punkt procentowy** to różnica między dwiema wartościami jednej wielkości podanymi w procentach. **Przykład 1:** Jeśli nastąpił wzrost jakiejś wielkości z 10% do 15% to wielkość ta wzrosła o 5 punktów procentowych. **Przykład 2**: Jeśli bank podniósł oprocentowanie kredytu z 8% na 10% to podniósł o 2 punkty procentowe. Jednocześnie wysokość oprocentowania wzrosła o 25% (za podstawę przyjmujemy wysokość przed podwyżką ($\frac{2}{8}\cdot 100\% = 25\%$) Uczniowie zagadnienia związane z obliczeniami procentowymi znają (a przynajmniej powinni znać) z wcześniejszych etapów edukacyjnych. Niemniej jednak należy dążyć do tego, aby obliczenia te były wykonywane bardzo sprawnie, szczególnie w kontekście umiejętności praktycznych. W dalszej części lekcji uczniowie utrwalają zagadnienia związane z obliczeniami procentowymi i punktami procentowymi rozwiązując indywidualnie zadania przygotowane przez nauczyciela:

Karta pracy ucznia – zadania utrwalające związane z obliczeniami procentowymi

Zadanie. 1.

Zosia na koniec roku szkolnego w klasie I miała średnią ocen 3,45 a na koniec klasy II poprawiła tę średnią na 3,80. Ania zaś poprawiła swoją średnią z klasy I na koniec roku szkolnego z 4,60 na 5,05 w klasie drugiej. Która z dziewcząt procentowo poprawiła bardziej swoje oceny i o ile?

Zadanie. 2.

Globalny wskaźnik alfabetyzacji (umiejętności czytania i pisania ze zrozumieniem) wzrósł z 76% w latach 1985-94 do 84% w latach 2000-2008.

a) O ile punktów procentowych wzrósł wskaźnik alfabetyzacji?

b) O ile procent wzrósł ten wskaźnik?

Zadanie 3.

Na lekcji matematyki 8% uczniów nie rozwiązało zadania , 24% uczniów rozwiązało je błędami, a 17 uczniów rozwiązało zadanie poprawnie. Ilu uczniów było w klasie?

Zadanie 4.

Cenę pewnego towaru obniżono o $x\%$. O ile procent należy podwyższyć nową cenę, aby cena końcowa była równa cenie początkowej?

Zadanie 5.

W czasie suszy poziom strumyka o głębokości 1 m obniżył się o 25 cm, a poziom rzeki o głębokości 5 m obniżył się o 1 m. Który spadek poziomu wody, wyrażony w procentach, jest większy?

Odpowiedzi do zadań z Karty pracy ucznia:

Zad. 1

Przyrost ocen Zosi: 0,35; procentowy przyrost: $\frac{0,35}{3,45}\cdot 100\% \approx 10,1\%$

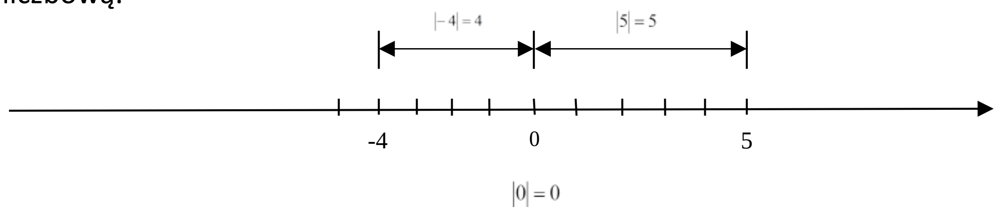
Przyrost ocen Ani: 0,45; procentowy przyrost: $\frac{0,45}{4,60}\cdot 100\% \approx 9,8\%$

Odp. Zosia bardziej poprawiła swoje oceny końcowe w klasie drugiej niż Zosia, więcej o około 0,3%.

		Zad. 2. a) Wskaźnik alfabetyzacji wzrósł o 84-76=8 punktów procentowych b) Wskaźnik ten wzrósł o około 10,5% $(\frac{8}{76}\cdot 100\% \approx 10{,}5\%)$. **Zad. 3.** Odp. 25 uczniów **Zad. 4.** Odp. Cenę należy podwyższyć o $\frac{100x}{100-x}\%$. **Zad.5.** Odp. Większy jest spadek wody w strumyku (25%) niż w rzece (20%). Chętne osoby przedstawiają swoje rozwiązania na tablicy interaktywnej. Nauczyciel wybiera wśród rozwiązań różne sposoby zaproponowane przez uczniów, przedstawiane są na dwudzielnej tablicy interaktywnej. (istnieje wówczas możliwość porównania różnych sposobów rozwiązań).
7	Podsumowanie zajęć	Nauczyciel podsumowuje pracę uczniów na lekcji, zwraca uwagę na istotne zagadnienia, szczególnie jeśli chodzi o zastosowanie obliczeń procentowych w życiu codziennym.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	Bez uwag

Scenariusz nr 11: Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej i jej interpretacja geometryczna

Temat zajęć		**Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej i jej interpretacja geometryczna**
Dział		**Liczby rzeczywiste**
Klasa (poziom edukacyjny)		**IV poziom edukacyjny**
Czas trwania zajęć		**90 minut**
Lp.	**Element scenariusza**	**Treść zajęć**
1	Cel ogólny	• Kształtowanie pojęcia wartości bezwzględnej liczby i jej interpretacji geometrycznej • Kształcenie logicznego myślenia • Formułowanie definicji i własności wartości bezwzględnej na podstawie przykładów
2	Cele szczegółowe	Uczeń: • zna i umie zastosować definicję wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej; • zna i umie zastosować własności wartości bezwzględnej; • potrafi rozróżnić pojęcia „wartość bezwzględna” i „liczba przeciwna”; • umie opisywać i zaznaczać zbiory z użyciem wartości bezwzględnej.
3	Formy i metody	• Dyskusja kierowana • Rozwiązywanie zadań problemowych • Ćwiczenia • Praca z całą klasą • Praca indywidualna
4	Środki dydaktyczne	Załącznik nr 1 „Liczby rzeczywiste”, komputer, tablica interaktywna.

	(ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Nauczyciel informuje o celach lekcji, omawia organizację pracy na lekcji, wprowadza do pojęcia odległości na osi liczbowej.
6	Przebieg zajęć *(pełna wersja)*	Uczniowie korzystają z załącznika nr 1 – temat nr 8 „Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej i jej interpretacja geometryczna”. Zapoznają się z tematem analizując przedstawione treści matematyczne, analizują przykłady oraz rozwiązują zaproponowane przez nauczyciela zadania. Czy wiesz, drogi Uczniu, jaka jest odległość liczby 5 od zera? A jaka jest odległość liczby (-4) od zera? Jaka jest odległość zera od zera? Zapewne bez problemu bezbłędnie odpowiesz na te pytania. A teraz przedstawimy dane zagadnienie bardziej „profesjonalnie” wykorzystując do tego celu oś liczbową.  **Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej (nazywana także modułem liczby) w interpretacji geometrycznej jest jej odległością od punktu zerowego.** *Zapamiętaj!* Skoro wartość bezwzględną traktujemy jako odległość, zatem dla każdej liczby rzeczywistej jej wartość bezwzględna jest **liczbą nieujemną**! Kilka ważnych własności wartości bezwzględnej: Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi: 1. $\lvert x \rvert \geq 0$

2. $|x| = |-x|$
3. $\sqrt{x^2} = |x|$; zauważ, że dla $x \geq 0$ zachodzi: $(\sqrt{x})^2 = x$
4. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
5. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, $y \neq 0$

Algebraicznie wartość bezwzględną definiujemy następująco:

$$|x| = \begin{cases} x, & dla \ \ x \geq 0 \\ -x & dla \ x < 0 \end{cases}$$

Czyli dla liczb nieujemnych moduł liczby jest tą samą liczbą, zaś dla liczb ujemnych – liczbą do niej przeciwną.

__Przykład 1:__

Zapisz bez użycia symbolu wartości bezwzględnej:

a) $|\sqrt{5} - 2|$

b) $|1 - \sqrt{2}|$

__Rozwiązanie:__

Ad a) zauważmy, że $\sqrt{5} - 2 \geq 0$, zatem $|\sqrt{5} - 2| = \sqrt{5} - 2$ (jest tą samą liczbą)

Ad b) zauważamy, że $1 - \sqrt{2} < 0$, czyli $|1 - \sqrt{2}| = -(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$ (jest liczbą przeciwną do niej)

__Przykład 2:__

Oblicz $\sqrt{(4 - \sqrt{17})^2}$

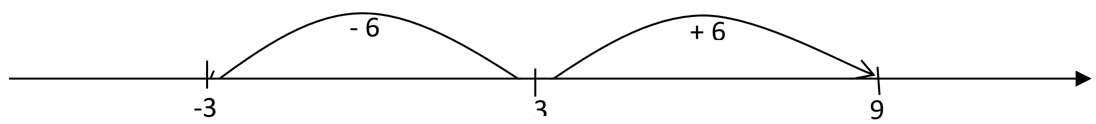
Rozwiązanie:

Z własności 3) mamy: $\sqrt{(4-\sqrt{17})^2} = |4-\sqrt{17}| = -(4-\sqrt{17}) = \sqrt{17}-4, \; bo \; 4-\sqrt{17} < 0$

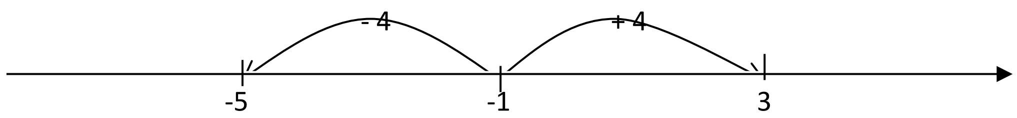
Następny problem:

- Jakie liczby rzeczywiste są odległe od liczby 3 o 6 jednostek?
- Jakie liczby rzeczywiste są odległe od liczby (-1) o 4 jednostki?

Szukając odpowiedzi na te pytania zilustrujemy sytuacje na osi liczbowej.



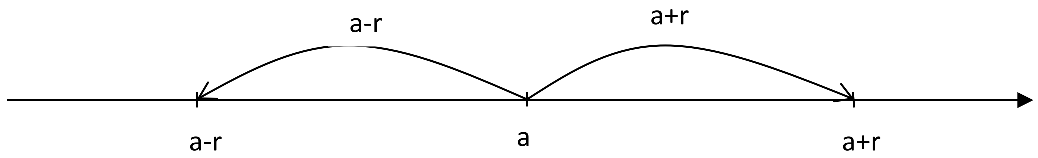
Zatem od liczby 3 o sześć jednostek odległe są dwie liczby: (-3) oraz 9.
Zapiszemy wówczas:
$|x-3| = 6$ (zbiór liczb rzeczywistych x, których odległość na osi liczbowej od liczby 3 jest równa 6).



Od liczby (-1) odległe o cztery jednostki są dwie liczby: (-5) oraz 3.
Zapiszemy wówczas: $|x+1| = 4$ (zbiór liczb rzeczywistych x, których odległość na osi liczbowej od liczby (-1) jest równa 4).

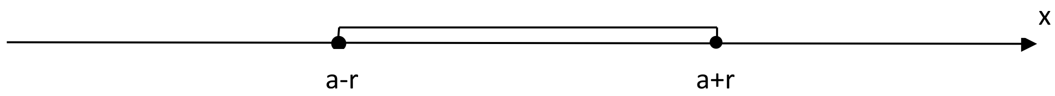
Uogólnijmy:

Zapis: $|x-a|=r$ w interpretacji geometrycznej oznacza zbiór liczb rzeczywistych, których odległość od liczby a jest równa r.

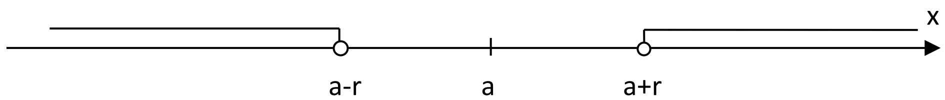


Teraz z łatwością zinterpretujemy nierówności:

- $|x-a|\le r$ oznacza zbiór liczb, których odległość na osi liczbowej od liczby a jest nie większa niż r



- $|x-a|>r$ oznacza zbiór li $x \in \langle a-r, a+r\rangle$ ść na osi liczbowej od liczby a jest większa niż r



$$x \in (-\infty, a-r) \cup (a+r, +\infty)$$

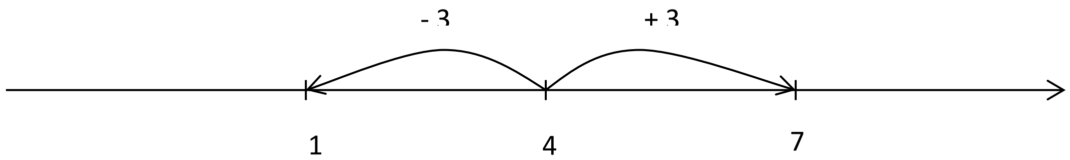
Przykład 3:

Zbiorem liczb spełniających nierówność $|x-4|<3$ jest przedział liczbowy:

A. (-3,3) B. (1,7) C. (1,5) D. (-4,3)

Rozwiązanie:

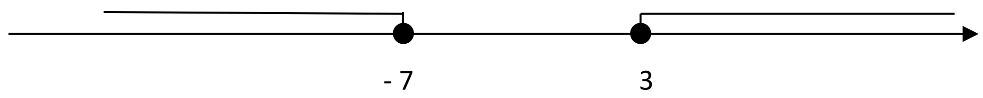
W powyższej nierówności a = 4 oraz r = 3. Wykorzystując omówioną wcześniej interpretację geometryczną tego typu nierówności otrzymujemy:



Zatem daną nierówność spełniają liczby z przedziału (1,7). Odp. B.

Przykład 4:

Zbiór liczb rzeczywistych x przedstawiony poniżej na osi liczbowej jest zbiorem rozwiązań nierówności:



A. $|x-2|\geq 5$ B. $|x+2|\leq 5$ C. $|x-2|\leq 5$ D. $|x-2|\geq 5$

Rozwiązanie:

Należy zauważyć, że liczba (-2) jest odległa od liczby (-7) oraz od liczby 3 o pięć jednostek. Na osi liczbowej zaznaczono liczny rzeczywiste, które są w odległości niemniejszej niż pięć od liczby (-2), zatem są to liczby spełniające warunek: $|x-2|\geq 5$. Odp. D.

Na zakończenie proponuję zadania utrwalające:

Zad. 1.

Używając symbolu wartości bezwzględnej zapisz następujące zbiory:

$A=\langle -3,3\rangle,\ B=(-\infty,-4)\cup(4,+\infty),\ C=(-2,7)$

Zad. 2.

Przedstaw na osi liczbowej oraz zapisz w postaci przedziału lub sumy przedziałów zbiór rozwiązań równania lub nierówności:

		a) $\lvert x+3\rvert = 6$ b) $\lvert 1-x\rvert < 3$ c) $\lvert x+5\rvert \geq 2$ d) $\lvert 2x-1\rvert = 6$
7	Podsumowanie zajęć	Nauczyciel podsumowuje pracę uczniów na lekcji, ocenia ich zaangażowanie, podkreśla jakie istotne umiejętności związane z wartością bezwzględną są niezbędne do dalszego kształcenia matematycznego, szczególnie przydatne w kontynuowaniu tego tematu na poziomie rozszerzonym.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	Bez uwag