

Temat 1**Podzbiory zbioru liczb rzeczywistych.****Rozwinięcie dziesiętne liczby rzeczywistej.****„Liczby rzeczywiste rządzą światem”**

Pitagoras

Liczby rzeczywiste to jeden z najważniejszych zbiorów w całej matematyce. Zbiór liczb rzeczywistych (R) jest sumą zbioru liczb wymiernych (W) oraz zbioru liczb niewymiernych (NW), co zapisujemy: $R = W \cup NW$.

Szczególne miejsce zajmują **liczby naturalne**, o których się mówi, że stworzył je sam Pan Bóg do liczenia kamieni.

Przyjmujemy oznaczenia:

N – zbiór liczb naturalnych

C – zbiór liczb wymiernych

W – zbiór liczb wymiernych

NW – zbiór liczb niewymiernych

Elementy zbioru N oznaczamy małą literą n . Mamy zatem:

$$n \in N, N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Liczbą pierwszą nazywamy każdą liczbę naturalną większą od 1 podzielną przez 1 i samą siebie.

Liczbą złożoną nazywamy liczbę naturalną większą od 1, która nie jest liczbą pierwszą.

Liczby: 0 oraz 1 nie są ani pierwsze ani złożone.

Liczby naturalne wraz z liczbami do nich przeciwnymi tworzą **zbiór liczb całkowitych**, czyli $C = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

Liczby rzeczywiste – załącznik do zbioru scenariuszy

Liczbą parzystą nazywamy każdą liczbę całkowitą podzielną przez 2, natomiast **liczby nieparzyste** to liczby całkowite, które nie są podzielne przez 2.

Liczba 0 jest liczbą parzystą.

Liczbą wymierną nazywamy liczbę, którą można przedstawić w postaci ilorazu dwóch liczb całkowitych, tzn. w postaci $\frac{m}{n}$, gdzie $m, n \in C$ i $n \neq 0$. Pozostałe liczby to **liczby niewymierne**.

Każda liczba rzeczywista ma rozwinięcie dziesiętne:

- skończone lub nieskończone okresowe, gdy jest liczbą wymierną,
lub
- nieskończone nieokresowe, gdy jest liczbą niewymierną

Liczbą przeciwną do a nazywamy liczbę $-a$. Zachodzi wówczas: $a+(-a) = 0$

Odwrotnością liczby a różnej od zera jest liczba $\frac{1}{a}$. Zachodzi wówczas: $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

Pomiędzy liczbami naturalnymi, całkowitymi, wymiernymi i niewymiernymi można zauważyć następujące związki:

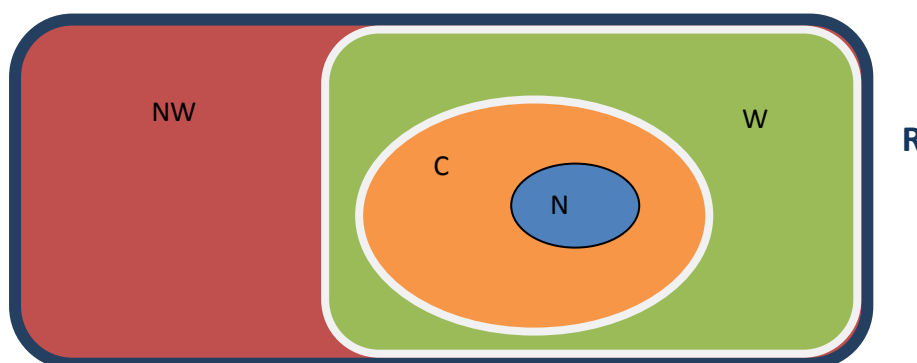
$$N \subset C \subset W \subset R \supset NW$$

Zapis: $N \subset C$ czytamy:

Zbiór liczb naturalnych jest podzbiorem zbioru liczb całkowitych

lub

Zbiór liczb naturalnych zawiera się w zbiorze liczb całkowitych.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



PROJEKT WSPÓŁFINANSOWANY PRZEZ UNIĘ EUROPEJSKĄ
W RAMACH EUROPEJSKIEGO FUNDUSZU SPOŁECZNEGO

Temat 2**Przybliżenie i zaokrąglenie liczby rzeczywistej. Błąd przybliżenia.**

W życiu codziennym bardzo często używamy zaokrągleń. Są one istotne w pomiarach różnych wielkości fizycznych czy chemicznych.

Jeśli chcemy zaokrąglić pewien ułamek dziesiętny, to odrzucamy pewną liczbę cyfr końcowych i stosujemy poniższe zasady:

1. jeśli pierwszą odrzuconą cyfrą jest któraś z cyfr od 0 do 4, to zaokrąglamy z niedomiarem (czyli pozostawiamy bez zmian)
2. natomiast jeśli pierwsza odrzucana jest któraś z cyfr od 5 do 9, to zaokrąglamy z nadmiarem.

Często zaokrąglając liczbę określamy jej rząd. I tak np.:

Zaokrąglenia do tysięcy:

$$4321 \approx 4000$$

$$8999 \approx 9000$$

$$127743 \approx 128000$$

Zaokrąglenia do setek:

$$7,01487 \approx 7,01$$

$$3,925 \approx 3,93$$

$$16,4988 \approx 16,50$$

Jeżeli zakupimy np. odkurzacz za 398,90 zł, to powiemy, że zakupiliśmy go za ok 400 zł lub za około 390 zł uznając, że nie popełniliśmy istotnego błędu.

Kalkulator wynik działania $2:3$ przedstawia z dokładnością do więcej niż dwóch miejsc po przecinku.

I tak mamy np.:

$$\frac{2}{3} = 0,6666\dots$$

Liczba ta w przybliżeniu będzie równa 0,666 (z niedomiarem) lub 0,667 (z nadmiarem).



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



**PROJEKT WSPÓŁFINANSOWANY PRZEZ UNIĘ EUROPEJSKĄ
W RAMACH EUROPEJSKIEGO FUNDUSZU SPOŁECZNEGO**

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

Liczby rzeczywiste – załącznik do zbioru scenariuszy

Aby obliczyć **błąd przybliżenia** pewnej liczby x odejmujemy przybliżenie tej liczby a od naszej liczby czyli: $x - a$.

Błędem bezwzględnym przybliżenia nazywamy wartość bezwzględną różnicy liczby x i jej przybliżenia a , czyli: $|x - a|$.

Błędem względnym przybliżenia nazywamy stosunek błędu bezwzględnego do wartości bezwzględnej liczby x , czyli: $\frac{|x - a|}{|x|}$.

Dane liczby 0,4817 ; 5,0378 ; 14,2998 zaokrąglaj z dokładnością do:

- a) jednego miejsca po przecinku
- b) dwóch miejsc po przecinku
- c) trzech miejsc po przecinku



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



PROJEKT WSPÓŁFINANSOWANY PRZEZ UNIĘ EUROPEJSKĄ
W RAMACH EUROPEJSKIEGO FUNDUSZU SPOŁECZNEGO

Temat 3***Rozkład liczby naturalnej na czynniki pierwsze. Największy wspólny dzielnik i najmniejsza wspólna wielokrotność pary liczb naturalnych.**

Każdą liczbę złożoną można przedstawić za pomocą iloczynu liczb pierwszych, czyli rozłożyć na czynniki pierwsze.

Wiedział już o tym Euklides w IV w. p. n. e., który w słynnym dziele Elementy w księdze IX stwierdza, że każdą liczbę można jednoznacznie przedstawić jako iloczyn liczb pierwszych.

Każda liczba naturalna ($n > 1$) jest albo liczbą pierwszą albo iloczynem liczb pierwszych.

Rozkładając na czynniki pierwsze dowolną liczbę naturalną wykonujemy kolejne dzielenie tej liczby przez znaną najmniejszą liczbę pierwszą ją dzielącą. Otrzymany iloraz jest nową liczbą, dla której szukamy następną liczbę pierwszą ją dzielącą i powtarzamy tę czynność aż do uzyskania w ilorazie liczby 1. W ten sposób otrzymujemy wszystkie dzielniki pierwsze szukanej liczby.

Rozkład na czynniki pierwsze można wykorzystać do wyznaczania największego wspólnego dzielnika (NWD) i najmniejszej wspólnej wielokrotności (NWW) pary liczb naturalnych.

Największy wspólny dzielnik dwóch dodatnich liczb naturalnych to największa liczba naturalna, przez którą są podzielne obie liczby.

Najmniejsza wspólna wielokrotność dwóch dodatnich liczb naturalnych to najmniejsza liczba naturalna, różna od zera, podzielna przez obie te liczby.

Przykład:

- NWD(108,162) szukamy w sposób następujący:

-rozkładamy obie liczby na czynniki pierwsze:

108	2	162	2	
54	2	81	3	
27	3	27	3	
9	3	9	3	
3	3	3	3	
1		1		1



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

Liczby rzeczywiste – załącznik do zbioru scenariuszy

- wybieramy wspólne czynniki, a ich iloczyn to $NWD(108,162) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 54$

- $NWW(315,420)$ szukamy w sposób następujący:

- rozkładamy obie liczby na czynniki pierwsze:

315	3		420	2
105	3		210	2
35	5		105	3
7	7		35	5
1			7	7
			1	

- wypisujemy czynniki pierwsze jednej z liczb i dopisujemy te, które nie wystąpiły w rozkładzie drugiej liczby i mnożymy je, czyli $NWW(315,420) = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 = 1260$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



**PROJEKT WSPÓŁFINANSOWANY PRZEZ UNIĘ EUROPEJSKĄ
W RAMACH EUROPEJSKIEGO FUNDUSZU SPOŁECZNEGO**

Temat 4**Potęgi o wykładnikach wymiernych. Prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych i rzeczywistych.**

Przypomnijmy podstawowe pojęcia związane z potęgą o wykładniku naturalnym.

Niech a będzie dowolną liczbą rzeczywistą.

Przyjmujemy, że: $a^0 = 1$, dla $a \neq 0$

$$a^1 = a$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ czynników}}$$

Liczbę a nazywamy podstawą potęgi, n jest wykładnikiem potęgi.

Dla dowolnej liczby a różnej od zera oraz dowolnej liczby naturalnej n zachodzi:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Zatem rozszerzyliśmy pojęcie potęgi o wykładniki całkowite.

Potęę o wykładniku wymiernym określamy następująco:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ dla } a \geq 0 \text{ i } m, n \in N_+$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}, \text{ dla } a > 0 \text{ i } m, n \in N_+$$

W szczególności zachodzi: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, dla $a \geq 0$ i $m, n \in N_+$



Prawa działań na potęgach:

Jeśli $a > 0$ i $b > 0$ oraz $r, s \in R$, to prawdziwe są następujące równości:

1. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

2. $a^r : b^s = a^{r-s}$

3. $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$

4. $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$

5. $a^r : b^r = (a : b)^r$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



**PROJEKT WSPÓŁFINANSOWANY PRZEZ UNIĘ EUROPEJSKĄ
W RAMACH EUROPEJSKIEGO FUNDUSZU SPOŁECZNEGO**

Temat 5**Pierwiastki. Prawa działań na pierwiastkach.**

Pierwiastkiem arytmetycznym $\sqrt[n]{a}$ stopnia n z liczby $a \geq 0$ nazywamy taką nieujemną liczbą b , dla której $b^n = a$.

Jeżeli $a < 0$ oraz liczba n jest nieparzysta, to $\sqrt[n]{a}$ oznacza liczbę ujemną b taką, że $b^n = a$.

Pierwiastki stopni parzystych z liczb ujemnych nie istnieją!

Prawa działań na pierwiastkach:

Jeśli n i m są liczbami naturalnymi większymi od 1 oraz $a \geq 0$ i $b \geq 0$, to zachodzą następujące równości:

$$1. \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$2. \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0$$

$$3. \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$4. \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$



Temat 6

Procenty i punkty procentowe.

Niezwykle ważną umiejętnością współczesnego człowieka jest posługiwanie się procentami, a od polityków czy ekonomistów słyszymy o punktach procentowych.

Procent

1% pewnej wielkości to setna część tej wielkości, zatem $p\%$ liczby a to $\frac{p}{100} \cdot a$.

Punkt procentowy

to różnica między dwiema wartościami jednej wielkości podanymi w procentach.

Przykład 1: Jeśli nastąpił wzrost jakiejś wielkości z 10% do 15% to wielkość ta wzrosła o 5 punktów procentowych.

Przykład 2: Jeśli bank podniósł oprocentowanie kredytu z 8% na 10% to podniósł o 2 punkty procentowe. Jednocześnie wysokość oprocentowania wzrosła o 25% (za podstawę przyjmujemy wysokość przed podwyżką ($\frac{2}{8} \cdot 100\% = 25\%$))



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

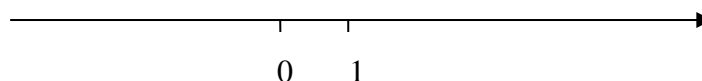
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



PROJEKT WSPÓŁFINANSOWANY PRZEZ UNIĘ EUROPEJSKĄ
W RAMACH EUROPEJSKIEGO FUNDUSZU SPOŁECZNEGO

Temat 7**Przedziały liczbowe i działania na nich.**

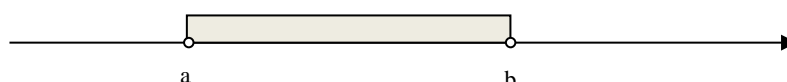
Oś liczbowa to prosta, na której zaznaczono zwrot dodatni, punkt zerowy i jednostkę:



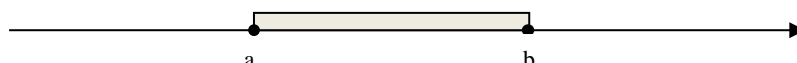
Przedziały liczbowe to szczególne podzbiory zbioru liczb rzeczywistych. Dzielimy je na przedziały ograniczone i nieograniczone (nieskończone).

Niech $a, b \in R$ i $a < b$. Wówczas:

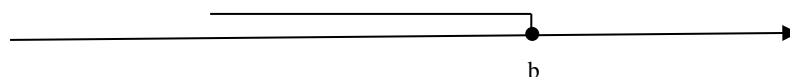
- $(a; b) = \{x \in R : a < x < b\}$ - przedział ograniczony, obustronnie otwarty



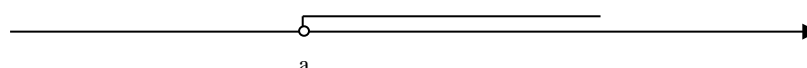
- $\langle a; b \rangle = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$ - przedział ograniczony, obustronnie domknięty (zamknięty)



- $(-\infty; b) = \{x \in R : x \leq b\}$ - przedział nieograniczony domknięty od minus nieskończoności



- $(a; +\infty) = \{x \in R : x > a\}$ - przedział nieograniczony otwarty od a do plus nieskończoności



$(-\infty; +\infty) = R$ cała oś liczbowa.



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

Liczby rzeczywiste – załącznik do zbioru scenariuszy

Zwróćmy uwagę na równoważne zapisy:

$$x \in (a; b) \Leftrightarrow a < x < b \Leftrightarrow \begin{cases} x > a \\ x < b \end{cases} \Leftrightarrow x > a \text{ i } x < b$$

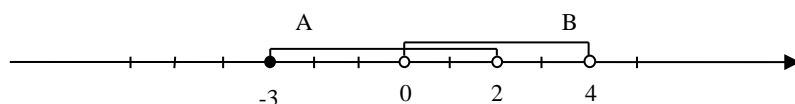
Skoro przedziały są podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych, to można na nich wykonywać działania jak na zbiorach. Bardzo pomocne jest przedstawienie przedziałów na osi liczbowej i wyznaczanie ich sumy, części wspólnej i różnicy.

Przykład 1:

Wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, gdy $A = \langle -3; 2 \rangle$, $B = (0; 4)$.

Rozwiązanie:

Wykorzystajmy ilustrację graficzną danych przedziałów liczbowych:



Mamy wówczas:

$$A \cup B = \langle -3, 4 \rangle$$

$$A \cap B = (0, 2)$$

$$A \setminus B = \langle -3, 0 \rangle$$

$$B \setminus A = \langle 2, 4 \rangle.$$

Przykład 2:

Rozważmy dwa zbiory:

A- zbiór dzielników naturalnych liczby 16

B- zbiór liczb pierwszych mniejszych od 16

Wypisz wszystkie elementy zbiorów: $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$.



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

Liczby rzeczywiste – załącznik do zbioru scenariuszy

Rozwiązanie:

Wypiszmy elementy zbiorów A i B. Mamy zatem:

$$A = \{1,2,4,8,16\} \text{ oraz } B = \{2,3,5,7,11,13\}$$

Wówczas:

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,7,8,11,13,16\}$$

$$A \cap B = \{2\}$$

$$A \setminus B = \{1,4,8,16\}$$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



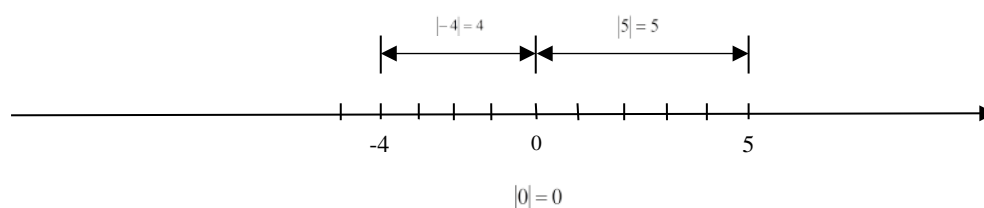
**PROJEKT WSPÓŁFINANSOWANY PRZEZ UNIĘ EUROPEJSKĄ
W RAMACH EUROPEJSKIEGO FUNDUSZU SPOŁECZNEGO**

Temat 8**Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej i jej interpretacja geometryczna.**

Czy wiesz, drogi Uczniu, jaka jest odległość liczby 5 od zera? A jaka jest odległość liczby (-4) od zera? Jaka jest odległość zera od zera?

Zapewne bez problemu bezbłędnie odpowiesz na te pytania.

A teraz przedstawimy dane zagadnienie bardziej „profesjonalnie” wykorzystując do tego cel oś liczbową.



Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej (nazywana także modulem liczby) w interpretacji geometrycznej jest jej odległością od punktu zerowego.

Zapamiętaj!

Skoro wartość bezwzględną traktujemy jako odległość, zatem dla każdej liczby rzeczywistej jej wartość bezwzględna jest **liczbą nieujemną!**

Kilka ważnych własności wartości bezwzględnej:

Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi:

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| = |-x|$
3. $\sqrt{x^2} = |x|$; zauważ, że dla $x \geq 0$ zachodzi: $(\sqrt{x})^2 = x$
4. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

Liczby rzeczywiste – załącznik do zbioru scenariuszy

$$5. \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad y \neq 0$$

Algebraicznie wartość bezwzględną definiujemy następująco:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Czyli dla liczb nieujemnych moduł liczby jest tą samą liczbą, zaś dla liczb ujemnych – liczbą do niej przeciwną.

Przykład 1:

Zapisz bez użycia symbolu wartości bezwzględnej:

a) $|\sqrt{5} - 2|$

b) $|1 - \sqrt{2}|$

Rozwiązanie:

Ad a) zauważmy, że $\sqrt{5} - 2 \geq 0$, zatem $|\sqrt{5} - 2| = \sqrt{5} - 2$ (jest tą samą liczbą)

Ad b) zauważamy, że $1 - \sqrt{2} < 0$, czyli $|1 - \sqrt{2}| = -(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$ (jest liczbą przeciwną do niej)

Przykład 2:

Oblicz $\sqrt{(4 - \sqrt{17})^2}$

Rozwiązanie:

Z własności 3) mamy: $\sqrt{(4 - \sqrt{17})^2} = |4 - \sqrt{17}| = -(4 - \sqrt{17}) = \sqrt{17} - 4$, bo $4 - \sqrt{17} < 0$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



PROJEKT WSPÓŁFINANSOWANY PRZEZ UNIĘ EUROPEJSKĄ
W RAMACH EUROPEJSKIEGO FUNDUSZU SPOŁECZNEGO

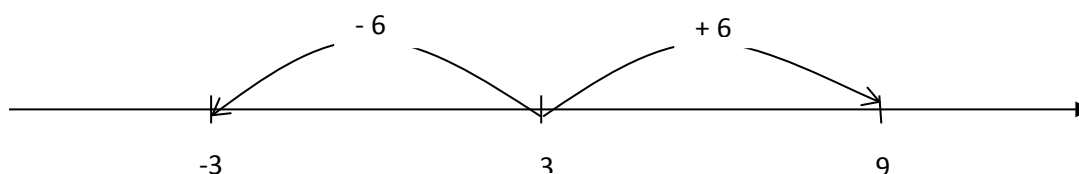
Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

Liczby rzeczywiste – załącznik do zbioru scenariuszy

Następny problem:

- Jakie liczby rzeczywiste są odległe od liczby 3 o 6 jednostek?
- Jakie liczby rzeczywiste są odległe od liczby (-1) o 4 jednostki?

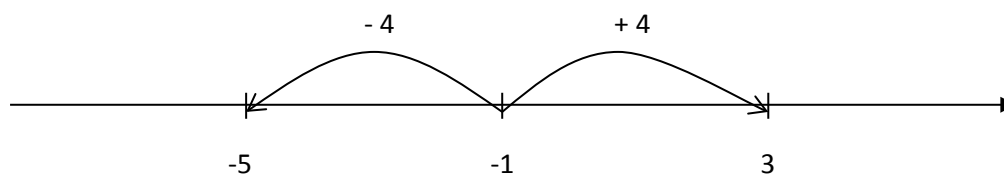
Szukając odpowiedzi na te pytania zilustrujemy sytuację na osi liczbowej.



Zatem od liczby 3 o sześć jednostek odległe są dwie liczby: (-3) oraz 9.

Zapiszemy wówczas:

$|x - 3| = 6$ (zbiór liczb rzeczywistych x , których odległość na osi liczbowej od liczby 3 jest równa 6).



Od liczby (-1) odległe o cztery jednostki są dwie liczby: (-5) oraz 3.

Zapiszemy wówczas: $|x + 1| = 4$ (zbiór liczb rzeczywistych x , których odległość na osi liczbowej od liczby (-1) jest równa 4).



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



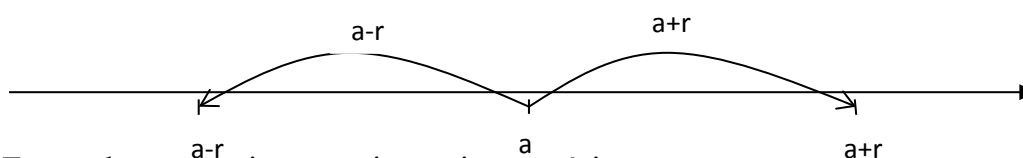
**PROJEKT WSPÓŁFINANSOWANY PRZEZ UNIĘ EUROPEJSKĄ
W RAMACH EUROPEJSKIEGO FUNDUSZU SPOŁECZNEGO**

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

Liczby rzeczywiste – załącznik do zbioru scenariuszy

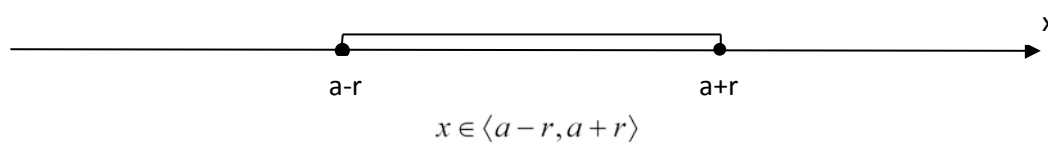
Uogólnijmy:

Zapis: $|x - a| = r$ w interpretacji geometrycznej oznacza zbiór liczb rzeczywistych, których odległość od liczby a jest równa r .

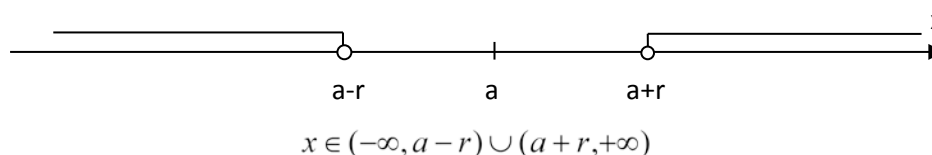


Teraz z łatwością interpretujemy nierówność:

- $|x - a| \leq r$ oznacza zbiór liczb, których odległość na osi liczbowej od liczby a jest nie większa niż r



- $|x - a| > r$ oznacza zbiór liczb, których odległość na osi liczbowej od liczby a jest większa niż r



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



PROJEKT WSPÓŁFINANSOWANY PRZEZ UNIĘ EUROPEJSKĄ
W RAMACH EUROPEJSKIEGO FUNDUSZU SPOŁECZNEGO

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

Liczby rzeczywiste – załącznik do zbioru scenariuszy

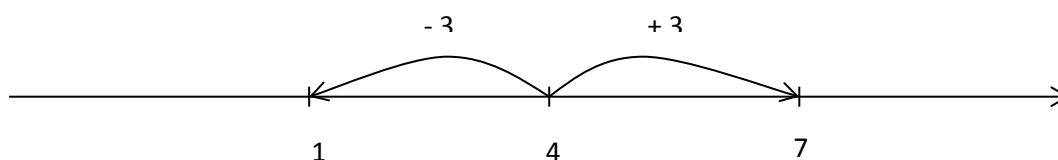
Przykład 3:

Zbiorem liczb spełniających nierówność $|x - 4| < 3$ jest przedział liczbowy:

- A. $(-3,3)$ B. $(1,7)$ C. $(1,5)$ D. $(-4,3)$

Rozwiązanie:

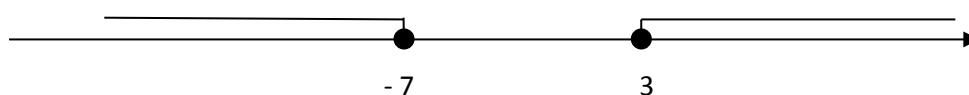
W powyższej nierówności $a = 4$ oraz $r = 3$. Wykorzystując omówioną wcześniej interpretację geometryczną tego typu nierówności otrzymujemy:



Zatem daną nierówność spełniają liczby z przedziału $(1,7)$. Odp. B.

Przykład 4:

Zbiór liczb rzeczywistych x przedstawiony poniżej na osi liczbowej jest zbiorem rozwiązań nierówności:



- A. $|x - 2| \geq 5$ B. $|x + 2| \leq 5$ C. $|x - 2| \leq 5$ D. $|x - 2| \geq 5$

Rozwiązanie:

Należy zauważyć, że liczba (-2) jest odległa od liczby (-7) oraz od liczby 3 o pięć jednostek. Na osi liczbowej zaznaczono liczby rzeczywiste, które są w odległości nie mniejszej niż pięć od liczby (-2) , zatem są to liczby spełniające warunek: $|x - 2| \geq 5$. Odp. D.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



PROJEKT WSPÓŁFINANSOWANY PRZEZ UNIĘ EUROPEJSKĄ
W RAMACH EUROPEJSKIEGO FUNDUSZU SPOŁECZNEGO

Temat 9

**Logarytm liczby rzeczywistej. Logarytm iloczynu, logarytm ilorazu
i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym.**

Logarytm związany jest z potęgą.

Logarytmem liczby dodatniej b przy podstawie a nazywamy wykładnik x potęgi, do której należy podnieść liczbę a , aby otrzymać liczbę b : $a^x = b$.

Zapisujemy:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

przy czym **podstawa a** jest liczbą dodatnią różną od jedności ($a > 0$ i $a \neq 1$), zaś **liczba logarytmowana b** jest dodatnia ($b > 0$, jak wynika z wcześniejszego określenia).

Zapamiętaj!

Logarytmować można tylko liczby dodatnie, a podstawa jest liczbą dodatnią różną od jedności!!!

Logarytmowanie jest operacją odwrotną do potęgowania (podobnie jak pierwiastkowanie)

Przykłady:

- $\log_2 32 = 5$ bo $2^5 = 32$
- $\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$ bo $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$
- $\log_{\sqrt{2}} 1 = 0$ bo $(\sqrt{2})^0 = 1$



Zapamiętaj!

Dla $a > 0$ i $a \neq 1$ oraz $b > 0$ zachodzą równości:

- $\log_a a = 1$ bo $a^1 = a$ np. $\log_3 3 = 1$
- $\log_a 1 = 0$ bo $a^0 = 1$ np. $\log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$
- $\log_a \frac{1}{a} = -1$ bo $a^{-1} = \frac{1}{a}$ np. $\log_6 \frac{1}{6} = -1$
- $\log_a a^b = b$ bo $a^b = a^b$ np. $\log_2 2^{16} = 16$

Szczególny logarytm to logarytm dziesiętny (logarytm przy podstawie 10):

wówczas zamiast $\log_{10} b$ piszemy $\log b$.

Niech $a > 0$ i $a \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$, $n \in N_+$. Wówczas prawdziwe są następujące własności logarytmów:

1. Logarytm iloczynu

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Przykład: $\log_{\sqrt{2}} 4 + \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{4} = \log_{\sqrt{2}} (4 \cdot \frac{1}{4}) = \log_{\sqrt{2}} 1 = 0$

2. Logarytm ilorazu

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Przykład: $\log_5 4 - \log_5 20 = \log_5 \frac{4}{20} = \log_5 \frac{1}{5} = -1$

3. Logarytm potęgi o wykładniku naturalnym

$$\log_a (b^n) = n \log_a b$$



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

Liczby rzeczywiste – załącznik do zbioru scenariuszy

Przykład: $\log_4 4^9 = 9 \log_4 4 = 9 \cdot 1 = 9$

Przykład 1:

Oblicz wartość wyrażenia $a = \log_3 \frac{1}{27} \cdot \log_9 3$.

Rozwiązanie:

Obliczmy oddzielnie każdy czynnik. I tak:

$$\log_3 \frac{1}{27} = \log_3 3^{-3} = -3 \text{ oraz}$$

$$\log_9 3 = x \Leftrightarrow 9^x = 3$$

$$3^{2x} = 3^1 \Rightarrow 2x = 1, \text{ stąd } x = \frac{1}{2}$$

Obliczamy wartość wyrażenia $a = -3 \cdot \frac{1}{2}$

$$a = -\frac{3}{2} \quad (a = -1,5).$$

Przykład 2:

Oblicz \sqrt{ab} , wiedząc, że $\log_2 a = 5$ oraz $\log_2 b = 2$.

Rozwiązanie:

Z danych informacji najpierw obliczymy- korzystając z definicji logarytmu - a oraz b.

$$\log_2 a = 5 \Rightarrow a = 2^5$$

$$\log_2 b = 2 \Rightarrow b = 2^2$$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



PROJEKT WSPÓŁFINANSOWANY PRZEZ UNIĘ EUROPEJSKĄ
W RAMACH EUROPEJSKIEGO FUNDUSZU SPOŁECZNEGO

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy**Liczby rzeczywiste – załącznik do zbioru scenariuszy**

Zatem mamy:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{2^5 \cdot 2^2} = \sqrt{2^6 \cdot 2} = \sqrt{(2^3)^2 \cdot 2} = 2^3 \sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



**PROJEKT WSPÓŁFINANSOWANY PRZEZ UNIĘ EUROPEJSKĄ
W RAMACH EUROPEJSKIEGO FUNDUSZU SPOŁECZNEGO**

Temat 10***Logarytm potęgi i wzór na zmianę podstawy logarytmu.**

W temacie 9 poznaliśmy wzór na logarytm potęgi o wykładniku naturalnym. Wzór ten jest prawdziwy także w przypadku logarytmu potęgi o dowolnym wykładniku rzeczywistym:

$$\log_a b^c = c \log_a b, \text{ gdzie } a > 0 \text{ i } a \neq 1, b > 0, c \in R$$

Przykład 1:

Ustal, wykonując odpowiednie obliczenia, która z liczb a czy b mniejsza, a która większa, jeśli:

$$a = \log_5 \sqrt[3]{5}, \quad b = \log^4 \sqrt{100}$$

Rozwiązanie:

$$a = \log_5 5^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log_5 5 = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

$$b = \log 100^{\frac{1}{4}} = \log (10^2)^{\frac{1}{4}} = \log 10^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log 10 = \frac{1}{2}$$

Stąd $a < b$, bo $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$.

Czasami w działaniach na logarytmach musimy sprowadzić je do wspólnej podstawy. Korzystamy wówczas ze wzorów:

$$\text{I. } \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\text{II. } \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

dla $a > 0$ i $a \neq 1$, $b > 0$ i $b \neq 1$ oraz $x > 0$.



Przykład 2:

Oblicz:

a) $\log_{16} 64$

b) $\log_2 3(\log_3 16 - \log_3 4)$

Rozwiązanie:

Ad a) zauważamy, że liczby 16 i 64 są potęgami liczby 4. Możemy zatem zapisać korzystając ze wzoru na zmianę podstawy logarytmu:

$$\log_{16} 64 = \frac{\log_4 16}{\log_4 64} = \frac{2}{3}$$

Ad b)

$$\log_2 3(\log_3 16 - \log_3 4) = \log_2 3 \cdot \log_3 \frac{16}{4} = \log_2 3 \cdot \log_3 4 = \frac{1}{\log_3 2} \cdot \log_3 4 = \frac{\log_3 4}{\log_3 2} = \log_2 4 = 2$$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



PROJEKT WSPÓŁFINANSOWANY PRZEZ UNIĘ EUROPEJSKĄ
W RAMACH EUROPEJSKIEGO FUNDUSZU SPOŁECZNEGO