

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Wstęp

Zbiór „Mój przedmiot matematyka” jest zestawem 132 scenariuszy przeznaczonych dla uczniów szczególnie zainteresowanych matematyką. Scenariusze mogą być wykorzystywane przez nauczycieli zarówno na typowych zajęciach lekcyjnych wpisanych w zakres podstawowy, jak też w ramach dodatkowych zajęć poszerzających wiedzę uczniów, np. koła zainteresowań. Scenariusze wymagają zastosowania komputerów z dostępem do internetu. Takie wyposażenie pozwoli na wykorzystanie środków dydaktycznych przewidzianych w projekcie „Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy” takich jak moduły e-learningowe: „Elementy statystyki i rachunek prawdopodobieństwa”, „Funkcja kwadratowa”, „Równania i nierówności liniowe i kwadratowe”, „Wielomiany”, gry strategiczne „Wyprawa Nasreddina”, „Herbatka u królowej Anglii”, „Wyprawa na grzyby”, „Matemafia” oraz „Międzykontynentalna szkoła”, poradniki „Ciągi”, „Planimetria”, „Trygonometria”, „Geometria analityczna”. Scenariusze mogą być realizowane na zajęciach lekcyjnych jako całość lub nauczyciel dokonuje wyboru określonych materiałów zgodnie z zaplanowanymi przez siebie tematami – zwiększa to elastyczność stosowania pakietu np. w sytuacji braku zapewnienia w placówce odpowiednich warunków technicznych do realizacji materiału w oparciu o cały pakiet.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Spis scenariuszy

Wstęp	1
Scenariusz nr 1: Przestrzeń zdarzeń elementarnych. Zdarzenia. Działania na zdarzeniach.....	3
Scenariusz nr 2: Klasyczna definicja prawdopodobieństwa	9
Scenariusz nr 3: „Drzewka” w rachunku prawdopodobieństwa	18
Scenariusz nr 4: Własności prawdopodobieństwa.....	30
Scenariusz nr 5: Rozwiązywanie zadań różnych z rachunku prawdopodobieństwa – powtórzenie wiadomości	37
Scenariusz nr 6: Podstawowe zasady kombinatoryki. Permutacje, wariacje, kombinacje.	43
Scenariusz nr 7*: Podstawowe zasady kombinatoryki. Permutacje, wariacje, kombinacje.	54
Scenariusz nr 8*: Zastosowanie wzorów kombinatorycznych do rozwiązywania zadań tekstowych	65

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Scenariusz nr 1: Przestrzeń zdarzeń elementarnych. Zdarzenia. Działania na zdarzeniach.

Temat zajęć		Przestrzeń zdarzeń elementarnych. Zdarzenia. Działania na zdarzeniach.
Dział		Probabilistyka
Klasa (poziom edukacyjny)		Klasa IV (IV poziom edukacyjny)
Czas trwania zajęć		90 minut
Lp.	Element scenariusza	Treść zajęć
1	Cel ogólny	<ul style="list-style-type: none"> • Usystematyzowanie wiadomości dotyczących pojęcia przestrzeni zdarzeń elementarnych, pojęcia zdarzenia losowego oraz działań na zdarzeniach • Rozwijanie umiejętności czytania tekstu matematycznego ze zrozumieniem • Wyrabianie umiejętności korzystania z platformy Moodle
2	Cele szczegółowe	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> • potrafi wyznaczyć zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych; • umiejętnie wyznacza zbiór zdarzeń elementarnych sprzyjających danemu zdarzeniu losowemu oraz potrafi określić liczbę tych zdarzeń; • operuje słownictwem matematycznym.
3	Formy i metody	<ul style="list-style-type: none"> • Dyskusja kierowana • Ćwiczenia • Praca indywidualna lub parami
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym	Komputer, tablica interaktywna, platforma Moodle.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

	wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Nauczyciel wprowadza w temat zajęć, informuje o zasobach na platformie Moodle stanowiących o przestrzeni zdarzeń elementarnych, zdarzeniach i działaniach na nich. Te zagadnienia probabilistyczne zamieszczone są w temacie nr 6, lekcja „Elementy statystyki i rachunek prawdopodobieństwa”.
6	Przebieg zajęć (<i>pełna wersja</i>)	Uczniowie przypominają zagadnienia występujące w probablistyce, analizują przykłady oraz rozwiązują zadania utrwalające, które zostały zamieszczone pod lekcją nr 6. W bardziej kłopotliwych sytuacjach, nauczyciel wspiera ucznia bądź to merytorycznie, bądź technicznie (np. wskazując edytor równań niezbędny do zapisywania oznaczeń matematycznych) Uczniowie pracują we własnym tempie, rozwiązują zadania otwarte zamieszczone pod tematem nr 6. Poniżej treści tych zadań:

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Zadanie 1.

Rzucamy trzy razy monetą.

- a) Określ przestrzeń wszystkich wyników tego doświadczenia losowego
- b) Wypisz wszystkie wyniki sprzyjające zdarzeniom:

A – wypadły dwa orły

B – wypadły co najmniej dwie reszki

C – wypadł co najwyżej jeden orzeł

D – wypadły cztery orły

Zadanie 2.

Rzucamy dwa razy symetryczną kostką do gry. Wypisz zdarzenia elementarne sprzyjające :

- a) Zdarzeniu A polegającemu na otrzymaniu sumy oczek podzielnej przez 4
- b) Zdarzeniu B polegającemu na wyrzuceniu sumy oczek nie mniejszej niż 8
- c) Zdarzeniu C polegającemu na otrzymaniu za pierwszym razem co najmniej czterech oczek

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Zadanie 3.

Rzucamy raz monetą i sześcienną kostką do gry. Określ przestrzeń Ω tego doświadczenia a następnie wypisz wszystkie wyniki sprzyjające zdarzeniom:

A – wypadła nieparzysta liczba oczek lub reszka

B – wypadła parzysta liczba oczek i reszka







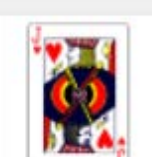



C – na kostce wypadło nie więcej niż sześć oczek

Zadanie 4.

Rzucamy cztery razy symetryczną monetą. Niech A oznacza zdarzenie polegające na otrzymaniu co najmniej trzech orłów, zaś B zdarzenie polegające na otrzymaniu czterech orłów lub czterech reszek. Wypisz zdarzenia sprzyjające zdarzeniom: A, B.

Przykładem doświadczenia losowego w rachunku prawdopodobieństwa jest także losowanie talii z karty. Przybliżając talię 52 kart nauczyciel wykorzystuje tablicę interaktywną. Przypomina uczniom cztery występujące kolory, blotki i figury. Przykładowy obraz z tablicy interaktywnej (wybieramy Zasadnicze składniki galerii-Matematyka-Statystyka i prawdopodobieństwo-Talia kart):

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

 10 - trefl	 10 - karo
 10 - kier	 10 - pik
 Walet - trefl	 Walet - karo
 Walet - kier	 Walet - pik
 Królowa - trefl	 Królowa - karo

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

		<p>Na zakończenie uczniowie rozwiązują zadanie z tym doświadczeniem związane: Zadanie: Z talii 52 kart losujemy jedną kartę.</p> <p>a) Podaj liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających</p> <ul style="list-style-type: none"> • Zdarzeniu A polegającemu na wylosowaniu króla • Zdarzeniu B polegającemu na wylosowaniu trefla lub dwójki • Zdarzeniu C polegającemu na wylosowaniu karty starszej od dziewiątki • Zdarzeniu D polegającemu na wylosowaniu blotki <p>b) Ze zdarzeń A, B, C, D wybierz pary zdarzeń wykluczających się.</p> <p>Nauczyciel podkreśla, iż istotną rolę w zadaniach z rachunku prawdopodobieństwa jest ustalenie (i to na początku rozwiązywanego zadania) przestrzeni wszystkich wyników zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego. Zadania z rachunku prawdopodobieństwa niejednokrotnie sprawiają wrażenie zadań „dziwnych”, rola nauczyciela w tym wypadku sprowadza się do uświadomienia uczniom, że tego typu zadania stawiają ucznia często w sytuacjach problemowych (niezależnie od przydatności tego zadania w danej chwili), które wymuszają stosowanie pewnych narzędzi matematycznych czy też matematycznej analizy sytuacji i twórczości m.in. w stosowaniu symboli i języka matematycznego.</p>
7	Podsumowanie zajęć	Ocena aktywności uczniów, prawidłowości rozwiązywanych zadań, stosowanie odpowiedniego języka matematycznego.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	Bez uwag

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Scenariusz nr 2: Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Temat zajęć		Klasyczna definicja prawdopodobieństwa
Dział		Rachunek prawdopodobieństwa
Klasa (poziom edukacyjny)		Klasa IV (IV poziom edukacyjny)
Czas trwania zajęć		90 minut
Lp.	Element scenariusza	Treść zajęć
1	Cel ogólny	<ul style="list-style-type: none"> • Usystematyzowanie wiadomości dotyczących klasycznej definicji prawdopodobieństwa • Wdrażanie do wykorzystania posiadanej wiedzy do rozwiązywania problemów probabilistycznych • Kształcenie umiejętności rozwiązywania zadań zamkniętych i otwartych • Kształtowanie umiejętności korzystania z programów multimedialnych, platformy Moodle
2	Cele szczegółowe	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> • zna i umie zastosować klasyczną definicję prawdopodobieństwa; • ma wyrobiony nawyk sprawdzania otrzymanych odpowiedzi i koryguje popełniane błędy; • kształci umiejętność samodzielnego zdobywania wiedzy, poszukiwania i selekcjonowania informacji zawartych w treści zadania; • umie wybrać odpowiednią strategię rozwiązywania zadań zamkniętych.
3	Formy i metody	<ul style="list-style-type: none"> • Obserwacja • Praca z komputerem – platforma Moodle • Ćwiczenia • Praca indywidualna
4	Środki dydaktyczne	Komputer, tablica interaktywna, platforma Moodle.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

	(ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Nauczyciel informuje co będzie przedmiotem zajęć, omawia organizację pracy na lekcji.
6	Przebieg zajęć (<i>pełna wersja</i>)	Uczniowie logują się na platformę Moodle, wpisują hasło, login. Po zalogowaniu się wybieramy lekcję „Elementy statystyki i rachunek prawdopodobieństwa”, temat nr 7: „Klasyczna definicja prawdopodobieństwa”. I tak uczniowie uporządkowują swoją wiedzę na temat prawdopodobieństwa w ujęciu klasycznym, zapoznając się z kolejnymi stronami tego tematu: Strona nr 1:

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

1. Prawdopodobieństwo w ujęciu klasycznym

Zapewne odpowiesz na pytanie: jaką mamy szansę otrzymania orła (czy też reszki) w rzucie monetą (jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania orła (czy też reszki) w rzucie monetą)?

Możemy spodziewać się odpowiedzi: 0,5 lub 50%.

Teraz sformalizujemy pojęcie prawdopodobieństwa zajścia zdarzenia np. A .

Otóż:

Jeżeli przestrzeń Ω jest skończona i wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo każdego zdarzenia jest ilorazem liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających temu zdarzeniu przez liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych.

Zapisujemy:
$$P(A) = \frac{\bar{A}}{\bar{\Omega}}$$

gdzie $\bar{\Omega}$ - liczba wszystkich zdarzeń elementarnych,

\bar{A} - liczba zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A .

Uczniowie na kolejnej stronie mają w bardzo czytelny sposób zapisaną „receptę” na rozwiązywanie pewnego typu zadań w rachunku prawdopodobieństwa:

Strona nr 2:

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

"Recepta" na zadania

W rachunku prawdopodobieństwa można pewną grupę zadań rozwiązywać według następującego schematu:

1. Określamy, na czym polega doświadczenie losowe oraz czym jest zdarzenie elementarne
2. Znajdujemy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych $\bar{\Omega}$
3. Nazywamy zdarzenie np. A (o którym mowa w zadaniu) oraz określamy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A, którego prawdopodobieństwo należy policzyć
4. Obliczamy $P(A) = \frac{\bar{A}}{\bar{\Omega}}$

W dalszej części uczniowie analizują dwa przykłady, by lepiej zrozumieć istotę rozwiązywania tego typu zadań.

Strona nr 3:



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

2. Przykłady zastosowania klasycznej definicji prawdopodobieństwa

Przykład 1:

W klasie liczącej 25 uczniów jest 10 dziewcząt i 15 chłopców. Na lekcji został zapytany jeden uczeń. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia, że był to chłopiec?

Rozwiązanie:

Mamy zatem:

$\bar{\Omega} = 25$, $\bar{A} = 15$ gdzie A oznacza zdarzenie: zapytany został chłopiec

Z klasycznej def. prawdopodobieństwa:

$$P(A) = \frac{\bar{A}}{\bar{\Omega}}, \text{ czyli } P(A) = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}.$$

Odp. Prawdopodobieństwo, że będzie odpowiadał chłopiec jest równe $\frac{3}{5}$

Strona nr 4:

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Przykład 2:

Dany jest zbiór liczb $\{1, 2, 3, \dots, 50\}$.

Ze zbioru wylosowano jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania:

- a) liczby nieparzystej,
- b) liczby podzielnej przez 2 lub 3

Rozwiązanie:

Zauważmy, że $\overline{\Omega} = 50$,

Niech A – wylosowano liczbę nieparzystą, $\overline{A} = 25$

B – wylosowano liczbę podzielną przez 2 lub przez 3, $\overline{B} = 32$

$$\text{Zatem: } P(A) = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{32}{50} = \frac{16}{25}$$

Utrwaleniu i sprawdzeniu posiadanych umiejętności posłużą zadania otwarte zamieszczone bezpośrednio pod tematem nr 7:

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

	<p style="text-align: center;">Zadanie 1</p> <p>W sześciokącie wypukłym wybieramy losowo dwa wierzchołki. Traktujemy je jako końce pewnego odcinka. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że odcinek ten nie jest bokiem sześciokąta.</p> <p style="text-align: center;">Zadanie 2</p> <p>W urnie znajduje się 6 kul białych i 4 czarne. Losujemy jednocześnie trzy kule. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosowane kule będą czarne.</p> <p style="text-align: center;">Zadanie 3</p> <p>Z pięciu prętów o długości odpowiednio: 1,2,3,4,5 jednostek długości wybrano losowo trzy. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że można z nich zbudować trójkąt prostokątny.</p>	
--	---	--

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Zadanie 4

Rzucamy cztery razy symetryczną monetę. Oblicz prawdopodobieństwo:

- a) że orzeł wypadnie parzystą ilość razy;
- b) że na pierwszych dwóch monetach wypadnie reszka;
- c) że reszka wypadnie, co najmniej dwa razy;
- d) że orzeł wypadnie, co najwyżej 3 razy.

Zadanie 5

W pewnej loterii na 100 losów 5 jest wygrywających. Oblicz prawdopodobieństwo, że wśród 3 kupionych losów tej loterii 2 są wygrywające i 1 przegrywający.

Zadanie 6

Rzucono monetą i kostką sześcienną do gry. Niech A oznacza zdarzenie: wypadł orzeł i parzysta liczba oczek, B – wypadł orzeł i liczba oczek podzielna przez 3. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń A , B , $A \cup B$.

Zadanie 7

Jakie jest prawdopodobieństwo, że ustawiając dwie dziewczyny i pięciu chłopców w rzędzie, dziewczęta nie będą stały obok siebie?

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

		<p style="text-align: center;">Zadanie 8</p> <p>Z talii 52 kart losujemy cztery karty. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania:</p> <ol style="list-style-type: none"> kart tego samego koloru; czterech asów; dwóch dam i dwóch królów; trzech dziesiątek i jednej czwórki; kart różnych kolorów. <p style="text-align: center;">Zadanie 9</p> <p>Ze zbioru cyfr $\{1,2,\dots,7\}$ wybieramy losowo bez zwracania trzy różne cyfry i zapisujemy je w kolejności losowania tworząc liczbę trzycyfrową. Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania liczby mniejszej od 465?</p> <p style="text-align: center;">Zadanie 10</p> <p>Rzucamy trzy razy kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo, że choć raz wypadnie szóstka?</p>
7	Podsumowanie zajęć	Uczniowie rozwiązują samodzielnie zadania, rozwiązania przesyłają wykorzystując platformę Moodle, o ocenie zadania nauczyciel informuje uczniów także wykorzystując platformę Moodle.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	Bez uwag

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Scenariusz nr 3: „Drzewka” w rachunku prawdopodobieństwa

Temat zajęć		„Drzewka” w rachunku prawdopodobieństwa
Dział		Rachunek prawdopodobieństwa
Klasa (poziom edukacyjny)		Klasa IV (IV poziom edukacyjny)
Czas trwania zajęć		90 minut
Lp.	Element scenariusza	Treść zajęć
1	Cel ogólny	<ul style="list-style-type: none"> • Usystematyzowanie wiadomości dotyczących „drzewek” w probablistyce • Kształtowanie umiejętności logicznego myślenia i wyciągania wniosków • Kształcenie umiejętności rozwiązywania zadań otwartych • Kształtowanie umiejętności korzystania z programów multimedialnych, platformy Moodle
2	Cele szczegółowe	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> • zna i umie zastosować metodę „drzew” w rachunku prawdopodobieństwa • ma wyrobiony nawyk sprawdzania otrzymanych odpowiedzi i koryguje popełniane błędy • kształci umiejętność samodzielnego zdobywania wiedzy, poszukiwania i selekcjonowania informacji zawartych w treści zadania • umie zachować dyscyplinę czasową
3	Formy i metody	<ul style="list-style-type: none"> • Pogadanka • Obserwacja • Praca z komputerem – platforma Moodle • Ćwiczenia • Praca indywidualna

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	Komputer, tablica interaktywna, platforma Moodle.
5	Wprowadzenie do zajęć	Nauczyciel informuje co będzie przedmiotem zajęć, omawia organizację pracy na lekcji, pogadanka o metodach rozwiązywania zadań w rachunku prawdopodobieństwa.
6	Przebieg zajęć (<i>pełna wersja</i>)	<p>Uczniowie logują się na platformę Moodle, wpisują hasło, login. Po zalogowaniu się wybieramy lekcję „Elementy statystyki i rachunek prawdopodobieństwa”, temat nr 8: „Drzewka” w rachunku prawdopodobieństwa”. Uczniowie uporządkowują swoją wiedzę na temat metody drzew w rachunku prawdopodobieństwa, zapoznają się z kolejnymi stronami tego tematu:</p> <p>Strona 1:</p> <p>1. Wprowadzenie do metody „drzewek” w rachunku prawdopodobieństwa.</p> <p>Rozwiązując zadania probabilistyczne można wykorzystać poznane pojęcia i wzory kombinatoryczne jak również metodę graficzną.</p> <p>Graficzny opis wieloetapowego doświadczenia losowego za pomocą diagramu nazywamy drzewem stochastycznym lub krótko drzewem. Metoda „drzewa” pozwala zobaczyć przebieg doświadczenia losowego, zauważyć, że rozwiązanie zadania jest bardzo naturalne i zgodne ze zdrowym rozsądkiem.</p> <p>Na czy polega metoda „drzew”?</p> <p>Strona 2:</p>

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

1.1. Przykład zastosowania "drzewa"

Przeanalizujmy następujący problem:

W klasie III a jest 14 dziewcząt i 16 chłopców, w klasie III b jest 17 dziewcząt i 13 chłopców. Z obu klas na wycieczkę może pojechać tylko jedna osoba. Uczniowie postanowili, że wybiorą ją w następujący sposób: rzucą raz symetryczną kostką do gry, jeśli wypadnie parzysta liczba oczek, to pojedzie osoba z klasy III a, w przeciwnym wypadku osoba z III b. Jakie jest prawdopodobieństwo, że na wycieczkę pojedzie dziewczyna?

Zauważmy, że nasze doświadczenie jest dwuetapowe. I tak: **pierwszy etap** to rzut kostką do gry, następnie w zależności od tego, czy otrzymaliśmy parzystą czy nieparzystą liczbą oczek, wybieramy osobę albo z klasy III a albo z III b (to **drugi etap** tego doświadczenia).

Rysując „drzewko” rozpoczynamy od węzła (początek) drzewa, następnie umieszczamy wyniki kolejnych etapów doświadczenia pod krawędziami (odcinkami). Obok krawędzi zapisujemy prawdopodobieństwa otrzymanych wyników.

Otrzymujemy w ten sposób ciąg krawędzi (łączy on początek drzewa z końcowym wynikiem) zwanych gałęziami. Każdej gałęzi opowiada pewien wynik naszego doświadczenia, np. wynik (P,D) oznacza, że w rzucie kostką otrzymano parzystą liczbę oczek i wylosowana osoba jest dziewczyną z klasy III a.

Strona 3:

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

1.2. rozwiązanie przykładu metodą "drzew"

Ważne!

Suma prawdopodobieństw przypisanych krawędziom wychodzącym z jednego węzła drzewa jest równa 1.

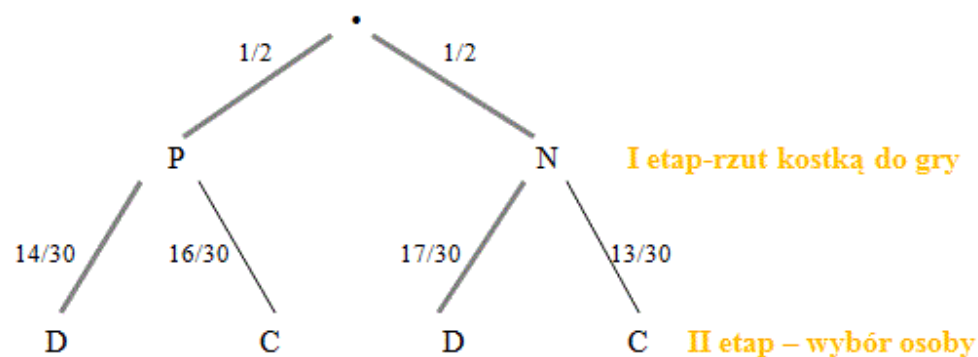
Przyjmujemy oznaczenia:

P – zdarzenie polegające na tym, że w rzucie kostką do gry otrzymano parzystą liczbę oczek

N – „otrzymano nieparzystą liczbę oczek” (zapis skrócony)

D – „wybrano dziewczynę”

C – „wybrano chłopca”



Pogrubione linie to gałęzie sprzyjające temu, iż wybrana losowo osoba to dziewczyna.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że na wycieczkę pojedzie dziewczyna.

$$\text{Wówczas: } P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{14}{30} + \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{30}$$

$$P(A) = \frac{31}{60}$$

Odp. Prawdopodobieństwo tego, że na wycieczkę pojedzie dziewczyna jest równe $\frac{31}{60}$.

Uczniowie przypominają dwie podstawowe zasady obowiązujące przy stosowaniu „drzewek”:

Strona 4:

2. Reguła mnożenia i reguła dodawania dla "drzew"

Obliczając P(A) wykorzystaliśmy dwie reguły (zasady) stosowane przy rozwiązywaniu zadań metodą „drzew”:

Reguła mnożenia dla drzew.

Prawdopodobieństwo zdarzenia reprezentowanego przez **jedną gałąź** drzewa jest równe **iloczynowi prawdopodobieństw** przypisanych krawędziom, z których składa się ta gałąź.

Reguła dodawania dla drzew.

Prawdopodobieństwo zdarzenia opisanego przez **kilka gałęzi** drzewa jest równe **sumie prawdopodobieństw** otrzymanych dla tych gałęzi.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

		<p>Strona 5:</p> <p>3. Przykład zadania rozwiązanego metodą drzew oraz z wykorzystaniem kombinatoryki</p> <p><u>Zadanie:</u></p> <p>W urnie jest 5 kul białych, 2 czerwone i 3 niebieskie. Losujemy kolejno bez zwracania dwie kule. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul tego samego koloru?</p> <p>Strona 6:</p>
--	--	--



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

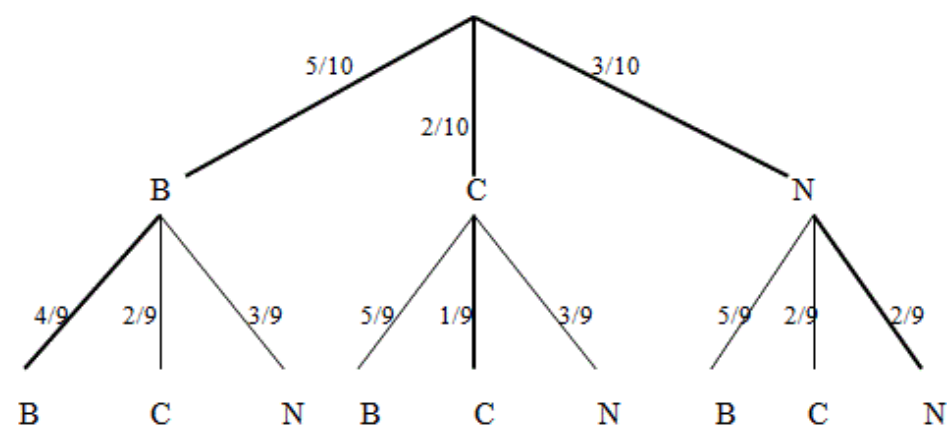
I sposób rozwiązania: metoda „drzew”

Przyjmujemy oznaczenia: B – wylosowanie kuli białej

C – wylosowanie kuli czerwonej

N – wylosowanie kuli niebieskiej

Doświadczenie jest dwuetapowe. Z urny zawierającej 10 kul (5 B, 2 C, 3 N) losujemy bez zwracania dwie kule, zatem diagram tego doświadczenia w postaci drzewka jest następujący:



Niech A oznacza zdarzenie „wylosowano dwie kule tego samego koloru”.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Wówczas korzystając z „drzewa” mamy:
$$P(A) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9}$$

$$P(A) = \frac{14}{45}$$

Odp. Prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul tego samego koloru jest równe $\frac{14}{45}$.

Strona 7:



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

II sposób rozwiązania: kombinatoryka

Losujemy dwie kule z dziesięciu, kolejność nie jest ważna, zatem liczba wszystkich zdarzeń elementarnych tego doświadczenia jest równa liczbie kombinacji dwuelementowych zbioru dziesięcioelementowego:

$$\bar{\Omega} = C_{10}^2 = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!8!} = 45$$

A- „wylosowano dwie kule tego samego koloru”

Liczba zdarzeń sprzyjających A:

$$\bar{A} = C_5^2 \cdot C_2^0 \cdot C_3^0 + C_5^0 \cdot C_2^2 \cdot C_3^0 + C_5^0 \cdot C_2^0 \cdot C_3^2$$

$$\bar{A} = \binom{5}{2} + \binom{2}{2} + \binom{3}{2}$$

$$\bar{A} = 14$$

Z klasycznej definicji prawdopodobieństwa mamy:

$$P(A) = \frac{\bar{A}}{\bar{\Omega}} = \frac{14}{45}$$

Strona 8:

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

4. Uwagi końcowe.

Przy pomocy „drzewka” można rozwiązać **prawie wszystkie** zadania z rachunku prawdopodobieństwa na poziomie szkoły ponadgimnazjalnej.

Metoda ta ma swoje **slabe strony**. Problemem będzie narysowanie „drzewka” o dużej liczbie gałęzi, a może taka sytuacja mieć miejsce, gdy **doświadczenie składa się z wielu etapów** np. trzykrotny rzut kostką do gry, czy też pięciokrotny rzut monetą.

I w takich sytuacjach niezastąpiona jest metoda kombinatoryczna!

W dalszej części uczniowie rozwiązują zadania otwarte zamieszczone bezpośrednio pod tematem nr 8:

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Zadanie 1

W trzech urnach rozmieszczono 12 kul białych i 12 kul czerwonych. Liczbę tych kul w poszczególnych urnach przedstawia poniższa tabela:

	Urn I	Urn II	Urn III
Liczba kul białych	2	6	4
Liczba kul czerwonych	4	7	1

Z losowo wybranej urny wybieramy jedną kulę. Co jest bardziej prawdopodobne: wylosowanie kuli białej czy wylosowanie kuli czerwonej? Odpowiedź uzasadnij wykonując odpowiednie obliczenia.

Zadanie 2

Wśród ośmiu monet jedna jest fałszywa. Losujemy dwie monety. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosujemy monetę fałszywą?

Zadanie 3

Rzucamy trzy razy symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że tylko na dwóch monetach wypadł orzeł.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

		<p style="text-align: center;">Zadanie 4</p> <p>W loterii jest 20 losów, z których cztery wygrywa, a następne cztery dają prawo wyciągnięcia dodatkowego losu. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że kupując jeden los wygramy.</p> <p style="text-align: center;">Zadanie 5</p> <p>Wśród dwóch kostek sześciennych do gry jedna jest prawidłowa, druga zaś ma na przeciwległych ściankach odpowiedni jedno, trzy i pięć oczek. Rzucamy losowo wybraną kostką. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na wypadnięciu trzech oczek.</p> <p style="text-align: center;">Zadanie 6</p> <p>W paczce znajduje się 8 książek po 30 zł, 4 książki po 20 zł oraz 2 książki po 50 zł. Losujemy z paczki dwie książki. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:</p> <p style="margin-left: 40px;">a) Obie książki mają tę samą cenę b) Obie książki kosztują razem 80 zł.</p>
7	Podsumowanie zajęć	Nauczyciel ocenia aktywność uczniów podczas zajęć.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	Nauczyciel udziela informacji o ocenie zadań poprzez platformę Moodle.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Scenariusz nr 4: Własności prawdopodobieństwa

Temat zajęć		Własności prawdopodobieństwa
Dział		Rachunek prawdopodobieństwa
Klasa (poziom edukacyjny)		Klasa IV (IV poziom edukacyjny)
Czas trwania zajęć		90 minut
Lp.	Element scenariusza	Treść zajęć
1	Cel ogólny	<ul style="list-style-type: none"> • Ćwiczenie umiejętności stosowania własności prawdopodobieństwa • Kształtowanie umiejętności korzystania z programów multimedialnych, platformy Moodle
2	Cele szczegółowe	<ul style="list-style-type: none"> • Uczeń: • zna i umie zastosować własności prawdopodobieństwa; • kształci umiejętność samodzielnego zdobywania wiedzy, bycia odpowiedzialnym za wyniki swojej pracy; • zna i stosuje odpowiednią strategię rozwiązywania zadań zamkniętych; • umie zachować dyscyplinę czasową.
3	Formy i metody	<ul style="list-style-type: none"> • Pogadanka-powtórzenie • Praca z komputerem – platforma Moodle • Ćwiczenia • Praca indywidualna
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków)	Komputer, tablica interaktywna, platforma Moodle.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

	opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Nauczyciel informuje co będzie przedmiotem zajęć, omawia organizację pracy na lekcji.
6	Przebieg zajęć (<i>pełna wersja</i>)	<p>Uczniowie logują się na platformę Moodle, wpisują hasło, login. Po zalogowaniu się wybieramy lekcję „Elementy statystyki i rachunek prawdopodobieństwa”, temat nr 9: „Własności prawdopodobieństwa”.</p> <p>Uczniowie uporządkowują swoją wiedzę na temat własności prawdopodobieństwa, zapoznają się z kolejnymi stronami tego tematu:</p> <p>Strona 1:</p> <p>1. Własności prawdopodobieństwa</p> <p>Z poprzednich lekcji wiemy, co nazywamy prawdopodobieństwem dowolnego zdarzenia zawartego w skończonej przestrzeni Ω.</p> <p>Czas, by wskazać na to, jakie są <u>własności prawdopodobieństwa</u>.</p>

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Zapamiętaj:

1. Dla dowolnego zdarzenia $A \subset \Omega$ zachodzi: $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\emptyset) = 0$, gdzie \emptyset - zdarzenie niemożliwe (pusty podzbiór Ω)
3. $P(\Omega) = 1$, gdzie Ω - zdarzenie pewne
4. $P(A) \leq P(B)$ gdy $A \subset B \subset \Omega$
5. $P(A') = 1 - P(A)$, gdzie A' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia A

6. Dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$ zachodzi:
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

tzn. prawdopodobieństwo sumy dwóch zdarzeń jest równe sumie prawdopodobieństw tych zdarzeń pomniejszone o prawdopodobieństwo jednoczesnego ich zajścia.

Uwaga! Jeżeli zdarzenia A i B **wykluczają się** (tzn. $P(A \cap B) = 0$)

to $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Strona 2:

2. Przykłady wykorzystania własności prawdopodobieństwa

Przykład 1.

Zdarzenia A i B są dowolnymi zdarzeniami przestrzeni Ω oraz

$$P(A \cup B) = \frac{9}{16}, \quad P(A) = \frac{3}{4}, \quad P(B) = \frac{1}{2}. \text{ Oblicz } P(A \cap B).$$

Rozwiązanie:

Zgodnie z punktem 5. własności mamy $P(A') = 1 - P(A)$, więc po przekształceniu

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}. \text{ Ze wzoru na prawdopodobieństwo sumy dwóch zdarzeń}$$

$$\text{(własność 6.) mamy: } P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{9}{16} = \frac{4 + 8 - 9}{16} = \frac{3}{16}$$

$$\text{Odp. } P(A \cap B) = \frac{3}{16}.$$

Strona 3:

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Przykład 2: (zadanie zamknięte)

Jeżeli zdarzenia A i B są zdarzeniami przestrzeni Ω oraz $P(A \cap B) = 0,125$ i $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$,
to suma prawdopodobieństwa zdarzenia A i prawdopodobieństwa zdarzenia B jest równa:

- A. 0,35, B. 0,50 C. 0,75, D. $\frac{3}{8}$

Rozwiązanie:

Z własności 6. Mamy: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Zatem $P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) = \frac{5}{8} + 0,125 = \frac{5}{8} + \frac{1}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0,75$.

Odp. C

Strona 4:

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Przykład 3:

Jeśli zdarzenia A i B są zdarzeniami przestrzeni Ω oraz $P(B') = \frac{1}{5}$, $P(A \cup B) = 1$ i $P(A \cap B) = 0$, to prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe:

- A. $\frac{4}{5}$, B. 0,2, C. $\frac{1}{2}$, D. $\frac{1}{10}$.

Rozwiązanie:

Z własności 5. mamy: $P(B) = \frac{4}{5} = 0,8$ oraz z własności 6. obliczamy $P(A)$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$1 = P(A) + 0,8 - 0$$

$$P(A) = 0,2$$

Odp. B

W dalszej części uczniowie rozwiązują zadania zamknięte zamieszczone w temacie 9, Menu lekcji: 3.1. Zadania otwarte zamieszczone bezpośrednio pod tematem nr 9 uczniowie rozwiązują i przesyłają do sprawdzenia poprzez platformę Moodle.
Zadania otwarte:

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

		<p style="text-align: center;"><u>Zadanie 1</u></p> <p>Zdarzenia A i B są zdarzeniami przestrzeni Ω. Wiedząc, że $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$, $P(B') = \frac{1}{2}$, oblicz: $P(A \cap B)$, $P(B)$, $P(A \cap B')$.</p> <p style="text-align: center;"><u>Zadanie 2</u></p> <p>O zdarzeniach $A, B \subset \Omega$ wiadomo, że $P(A') = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$. Oblicz $P(B)$, $P(A \cup B')$, $P(B \setminus A)$.</p> <p style="text-align: center;"><u>Zadanie 3</u></p> <p>Wiadomo, że $P(A) < P(A')$ i $P(A) \cdot P(A') = \frac{3}{16}$. Oblicz $P(A)$.</p> <p style="text-align: center;"><u>Zadanie 4</u></p> <p>Uzasadnij, że jeśli $P(A) = 0,45$ i $P(B) = 0,75$, to $P(A \cap B) \geq 0,2$.</p> <p style="text-align: center;"><u>Zadanie 5</u></p> <p>Uzasadnij, że jeśli $A, B \subset \Omega$ oraz $P(A') = 0,9$ i $P(B) = 0,5$, to zdarzenia A i B wyłączają się.</p>
7	Podsumowanie zajęć	Nauczyciel ocenia aktywność uczniów podczas zajęć.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	Nauczyciel udziela informacji o ocenie zadań poprzez platformę Moodle.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Scenariusz nr 5: Rozwiązywanie zadań różnych z rachunku prawdopodobieństwa – powtórzenie wiadomości

Temat zajęć		Rozwiązywanie zadań różnych z rachunku prawdopodobieństwa – powtórzenie wiadomości
Dział		Rachunek prawdopodobieństwa
Klasa (poziom edukacyjny)		Klasa IV (IV poziom edukacyjny)
Czas trwania zajęć		90 minut
Lp.	Element scenariusza	Treść zajęć
1	Cel ogólny	<ul style="list-style-type: none"> • Usystematyzowanie wiadomości i pojęć związanych z rachunkiem prawdopodobieństwa • Kształtowanie umiejętności logicznego myślenia i wyciągania wniosków • Kształcenie umiejętności rozwiązywania zadań zamkniętych i otwartych • Kształtowanie umiejętności korzystania z programów multimedialnych, platformy Moodle
2	Cele szczegółowe	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> • zna metody rozwiązywania zadań w rachunku prawdopodobieństwa; • ma wyrobiony nawyk sprawdzania otrzymanych odpowiedzi i koryguje popełniane błędy; • kształci umiejętność samodzielnego zdobywania wiedzy, poszukiwania i selekcjonowania informacji zawartych w treści zadania; • umie wybrać odpowiednią strategię rozwiązywania zadań zamkniętych z rachunku prawdopodobieństwa.
3	Formy i metody	<ul style="list-style-type: none"> • Pogadanka • Obserwacja • Praca z komputerem – platforma Moodle • Ćwiczenia

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

		<ul style="list-style-type: none"> Praca indywidualna
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	Komputer, tablica interaktywna, platforma Moodle.
5	Wprowadzenie do zajęć	Nauczyciel informuje co będzie przedmiotem zajęć, omawia organizację pracy na lekcji.
6	Przebieg zajęć (<i>pełna wersja</i>)	<p>Uczniowie logują się na platformę Moodle, wpisują hasło, login. Po zalogowaniu się wybieramy lekcję „Elementy statystyki i rachunek prawdopodobieństwa”, temat nr 10: „Rozwiązywanie zadań różnych z rachunku prawdopodobieństwa – powtórzenie wiadomości”. Uczniowie uporządkowują swoją wiedzę na temat pojęć związanych z rachunkiem prawdopodobieństwa. Rozwiązują zadania zamknięte, zadania otwarte krótkiej odpowiedzi oraz otwarte rozszerzonej odpowiedzi. Zadania zamknięte zamieszczone są w temacie e-learningowym, natomiast zadania otwarte zamieszczone są bezpośrednio pod tematem.</p> <p>Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi:</p>

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Zadanie 1

Zdarzenia A i B są zdarzeniami przestrzeni Ω . Wiedząc, że: $P(A') = \frac{4}{7}$, $P(B') = \frac{4}{5}$ oraz

$P(A \cup B) = \frac{4}{7}$ oblicz: $P(A \cap B)$ oraz $P(A' \cup B')$

Zadanie 2

Sprawdź, czy zdarzenia A i B wykluczają się, jeśli $P(A) = \frac{3}{4}$ oraz $P(B) = \frac{3}{8}$.

Zadanie 3

W urnie znajduje się 5 kul czarno-czerwonych, 3 kule biało-niebieskie, 6 kul zielono-żółtych i 8 kul białych. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli dwukolorowej.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Zadanie 4

W pewnej loterii losujemy 4 liczby z 24. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że trafimy:

- a) czwórkę
- b) trzy liczby

Zadanie 5

Ze zbioru liczb $\left\{-6; \sqrt[3]{-8}; -\frac{3}{4}; 0; 1; 3\frac{1}{2}\right\}$ losujemy bez zwracania współczynniki a, b funkcji

$f(x) = ax + b$. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia: funkcja $f(x)$ jest malejąca w całym zbiorze \mathbb{R} .

Zadanie 6

Ile jest naturalnych liczb dwucyfrowych, których cyfra dziesiątek jest parzysta, a cyfra jedności jest nieparzysta? Odpowiedź uzasadnij.

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi:

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

	<p style="text-align: center;">Zadanie 1</p> <p>Co jest bardziej prawdopodobne: wyrzucenie sumy oczek podzielnej przez 4 w rzucie dwiema kostkami, czy wyrzucenie więcej orłów niż reszek w rzucie czterema monetami?</p> <p style="text-align: center;">Zadanie 2</p> <p>Z klasy, w której jest 12 dziewcząt i 15 chłopców, wybieramy trzyosobową delegację. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w skład delegacji wejdzie co najmniej jedna dziewczyna?</p> <p style="text-align: center;">Zadanie 3</p> <p>Doświadczenie polega na jednokrotnym rzucie symetryczną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:</p> <p>A – „wypadły co najwyżej cztery oczka” B – „wypadła nieparzysta liczba oczek” oraz zdarzeń: $A \cup B$ i $A \cap B$.</p>
--	--

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

		<p style="text-align: center;">Zadanie 4</p> <p>Rzucamy czterema symetrycznymi monetami. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń: A – „wypadnie dokładnie jeden orzeł” B – „wypadnie co najmniej jedna reszka” C – „reszka wypadnie tyle samo razy co orzeł” oraz $B \cap C$.</p> <p style="text-align: center;">Zadanie 5</p> <p>Ze zbioru wszystkich wierzchołków danego sześciokąta foremnego o boku długości a losujemy dwa różne wierzchołki przyjmując, że wszystkie wyniki losowania są jednakowo prawdopodobne. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:</p> <p style="text-align: center;">A – „wylosowane wierzchołki wyznaczają bok danego wielokąta” oraz</p> <p style="text-align: center;">B – „wylosowane wierzchołki wyznaczają odcinek długości $2a$”</p> <p style="text-align: center;">Zadanie 6</p> <p>W urnie jest 10 kul żółtych i 2 czerwone. Ile kul czerwonych należy dorzucić, aby prawdopodobieństwo wylosowania kuli czerwonej było równe $3/5$?</p> <p>Uczniowie pracują samodzielnie rozwiązując zamieszczone zadania, przesyłają rozwiązania, uzyskują na platformie Moodle informację o poprawności rozwiązań poszczególnych zadań.</p>
7	Podsumowanie zajęć	Podsumowanie aktywność uczniów na zajęciach, uczniowie dyskutują na temat atrakcyjności i skuteczności takiej formy powtórzenia wiadomości z rachunku prawdopodobieństwa, wyjaśniane są problemy, które wystąpiły na lekcji.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	Zajęcia są doskonałą formą powtórzenia wiadomości z rachunku prawdopodobieństwa.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Scenariusz nr 6: Podstawowe zasady kombinatoryki. Permutacje, wariacje, kombinacje.

Temat zajęć		Podstawowe zasady kombinatoryki. Permutacje, wariacje, kombinacje.
Dział		Rachunek prawdopodobieństwa
Klasa (poziom edukacyjny)		Klasa III (IV etap edukacyjny)
Czas trwania zajęć		90 minut
Lp.	Element scenariusza	Treść zajęć
1	Cel ogólny	<ul style="list-style-type: none"> • Kształcenie umiejętności rozpoznawania i stosowania podstawowych pojęć kombinatorycznych: silni, permutacji, wariacji z powtórzeniami i bez powtórzeń oraz kombinacji • Kształtowanie umiejętności dzielenia się posiadaną wiedzą • Kształtowanie umiejętności korzystania z programów multimedialnych, platformy Moodle
2	Cele szczegółowe	<ul style="list-style-type: none"> • Uczeń: • zna i rozumie znaczenie pojęć: permutacje, wariacje bez powtórzeń, wariacje z powtórzeniami, kombinacje • umie zastosować poznane pojęcia kombinatoryczne • porządkuje i wykorzystuje informacje zawarte w treści zadania
3	Formy i metody	<ul style="list-style-type: none"> • Dyskusja kierowana • Ćwiczenia • Praca indywidualna lub parami
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym	Komputer, tablica interaktywna, platforma Moodle.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

	wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Nauczyciel omawia organizację pracy na lekcji, przedstawia cele lekcji.
6	Przebieg zajęć (<i>pełna wersja</i>)	<p>Uczniowie logują się na platformę Moodle, wpisują hasło, login. Po zalogowaniu się wybieramy lekcję „Elementy statystyki i rachunek prawdopodobieństwa”, temat nr 4: ”Podstawowe zasady kombinatoryki”.</p> <p>Uczniowie zapoznają się z treścią kolejnych stron e-learningu, analizują przedstawione zagadnienia, przykłady, wskazówki a w dalszej części rozwiązują zadania. Zagadnienia i treści ujęte na platformie, dotyczące podstawowych pojęć kombinatorycznych:</p> <p>1. Symbol silnia</p> <p>$n!$ oznacza iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do n.</p> $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ $0! = 1$ <p><u>Przykłady:</u></p> $0! = 1$ $1! = 1$ $2! = 1 \cdot 2 = 2$ $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ <p>itd.</p>

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

2. Symbol Newtona

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ gdzie } k, n \in \mathbb{N} \text{ i } k \leq n.$$

Niektóre wartości symbolu Newtona:

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{1} = 1$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{5! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 7 \cdot 8 = 56$$



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

3. Permutacje

Permutacją zbioru n -elementowego nazywamy każdy n -wyrazowy ciąg utworzony ze wszystkich elementów tego zbioru.

Permutacja spełnia następujące warunki:

- każda permutacja obejmuje wszystkie dane elementy,
- istotna jest tylko kolejność elementów permutacji.

Z permutacjami zbioru mamy do czynienia wówczas, gdy porządkujemy elementy tego zbioru (ustawiamy wszystkie elementy w ciąg).

Zatem pamiętamy, że: permutacja to każde ustawienie wszystkich elementów zbioru w dowolnej kolejności.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

	<p>przykłady</p> <p><u>Przykład 1:</u></p> <p>Z trzech danych elementów: a, b, c, można utworzyć sześć permutacji: {a, b, c}, {a, c, b}, {b, a, c}, {b, c, a}, {c, a, b}, {c, b, a}.</p> <p>Liczba permutacji zbioru złożonego z n elementów jest równa $n!$</p> $P_n = n!$ <p><u>Przykład 2:</u></p> <p>Sześć osób w kolejce można ustawić na $6! = 720$ sposobów.</p>
--	--

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

4. Wariacje bez powtórzeń

Wariacją k -elementową bez powtórzeń utworzoną ze zbioru n -elementowego ($k \leq n$) nazywamy każdy k -wyrazowy ciąg różnych elementów z tego zbioru.

Wariacje spełniają następujące warunki:

- obejmują jedynie określoną liczbę k spośród danych n elementów,
- istotna jest kolejność elementów wariacji

Zatem pamiętamy, że:

z k -wyrazowymi wariacjami bez powtórzeń zbioru złożonego z n elementów mamy do czynienia, gdy k razy wybieramy bez zwracania po jednym elemencie z danego zbioru.

Zauważyć należy, że n -wyrazowe wariacje bez powtórzeń zbioru n -elementowego są permutacjami tego zbioru.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

przykłady

Przykład 1:

Z trzech danych elementów: a, b, c, można utworzyć następujące dwuelementowe wariacje bez powtórzeń: {a, b}, {a, c}, {b, a}, {b, c}, {c, a}, {c, b}.

Liczba k-wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego wyraża się wzorem:

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Przykład 2:

Na ile sposobów można wybrać trójkę klasową z klasy liczącej 30 uczniów?

Rozwiązanie: Ważne jest, jaką funkcję będzie pełniła każda z osób w wybranej trójce, a jedna osoba może pełnić tylko jedną funkcję. Zatem liczba wybranych trójek klasowych jest równa liczbie trzywyrazowych wariacji bez powtórzeń wybranych ze zbioru 30 elementów.

$$V_{30}^3 = \frac{30!}{(30-3)!} = \frac{27! \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30}{27!} = 28 \cdot 29 \cdot 30 = 24\,360 \text{ trójek klasowych}$$



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

5. Wariacje z powtórzeniami

Wariacją k-elementową z powtórzeniami utworzoną ze zbioru n-elementowego nazywamy każdy k-wyrazowy ciąg różnych lub nie różniących się elementów z tego zbioru.

Z k-wyrazowymi wariacjami z powtórzeniami zbioru n-elementowego mamy do czynienia wówczas, gdy k razy wybieramy po jednym elemencie ze zwracaniem z danego zbioru.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

przykłady

Przykład 1:

Z trzech danych elementów: a, b, c, można utworzyć następujące dwuelementowe wariacje z powtórzeniami: {a, a}, {a, b}, {a, c}, {b, a}, {b, b}, {b, c}, {c, a}, {c, b}, {c, c}.

Liczba k-wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru n-elementowego wyraża się wzorem:

$$W_n^k = n^k$$

Przykład 2:

Na ile sposobów możemy uzyskać różne wyniki, przy rzucie dwiema różnymi kostkami?

Rozwiązanie:

Liczba wszystkich wyników przy rzucie dwiema kostkami jest równa liczbie dwuwyzrazowych wariacji z powtórzeniami ze zbioru sześcioelementowego.

mamy: $n=6$, $k=2$, zatem:

$$W_6^2 = 6^2 = 36$$

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

5. Kombinacje

Kombinacją k-elementową utworzoną ze zbioru n-elementowego ($k \leq n$) nazywamy każdy k-elementowy podzbiór tego zbioru.

Kombinacje spełniają następujące warunki:

- obejmują jedynie określoną liczbę k spośród danych n elementów.
- nie jest istotna kolejność elementów kombinacji

UWAGA! Kombinacja, to jedna z możliwości wyboru kilku elementów z większego zbioru, przy czym kolejność wyboru elementów nie ma znaczenia. Dwa podzbiory złożone z tych samych elementów, a różniące się tylko ich porządkiem, stanowią tę samą kombinację.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

		<p>przykłady</p> <p><u>Przykład 1:</u></p> <p>Z trzech danych elementów: a, b, c, można utworzyć następujące dwuelementowe kombinacje: {a, b}, {a, c}, {b, c}.</p> <p>Liczba k-elementowych kombinacji zbioru n-elementowego wyraża się wzorem:</p> $C_n^k = \binom{n}{k}$ <p><u>Przykład 2:</u></p> <p>Na ile różnych sposobów możemy wybrać 3 osoby do kina spośród 7.</p> <p><u>Rozwiązanie:</u></p> <p>Ilość osób, jakimi dysponujemy, to 7, czyli n=7, będziemy wybierali po 3 osoby, zatem k=3. Podstawiamy do wzoru i otrzymujemy:</p> $C_7^3 = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{3! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 5 \cdot 7 = 35$ <p>ZAPAMIĘTAJ! Tylko w kombinacjach w wybranych elementach <u>kolejność nie odgrywa roli!</u></p>
7	Podsumowanie zajęć	Nauczyciel ocenia zaangażowanie uczniów podczas zajęć, ich aktywność, wspiera w rozwiązywaniu bieżących problemów.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	Bez uwag

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Scenariusz nr 7*: Podstawowe zasady kombinatoryki. Permutacje, wariacje, kombinacje.

Temat zajęć		Podstawowe zasady kombinatoryki. Permutacje, wariacje, kombinacje.
Dział		Rachunek prawdopodobieństwa
Klasa (poziom edukacyjny)		Klasa III (IV etap edukacyjny)
Czas trwania zajęć		90 minut
Lp.	Element scenariusza	Treść zajęć
1	Cel ogólny	<ul style="list-style-type: none"> • Kształcenie umiejętności rozpoznawania i stosowania podstawowych pojęć kombinatorycznych: silni, permutacji, wariacji z powtórzeniami i bez powtórzeń oraz kombinacji • Kształtowanie umiejętności dzielenia się posiadaną wiedzą • Kształtowanie umiejętności korzystania z programów multimedialnych, platformy Moodle
2	Cele szczegółowe	<ul style="list-style-type: none"> • Uczeń: • zna i rozumie znaczenie pojęć: permutacje, wariacje bez powtórzeń, wariacje z powtórzeniami, kombinacje; • umie zastosować poznane pojęcia kombinatoryczne; • porządkuje i wykorzystuje informacje zawarte w treści zadania.
3	Formy i metody	<ul style="list-style-type: none"> • Dyskusja kierowana • Ćwiczenia • Praca indywidualna lub parami
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym	Komputer, tablica interaktywna, platforma Moodle.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

	wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Nauczyciel omawia organizację pracy na lekcji, przedstawia cele lekcji.
6	Przebieg zajęć (<i>pełna wersja</i>)	<p>Uczniowie logują się na platformę Moodle, wpisują hasło, login. Po zalogowaniu się wybieramy lekcję „Elementy statystyki i rachunek prawdopodobieństwa”, temat nr 4: ”Podstawowe zasady kombinatoryki”.</p> <p>Uczniowie zapoznają się z treścią kolejnych stron e-learningu, analizują przedstawione zagadnienia, przykłady, wskazówki a w dalszej części rozwiązują zadania. Zagadnienia i treści ujęte na platformie, dotyczące podstawowych pojęć kombinatorycznych:</p> <p>1. Symbol silnia</p> <p>$n!$ oznacza iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do n.</p> $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ $0! = 1$ <p><u>Przykłady:</u></p> $0! = 1$ $1! = 1$ $2! = 1 \cdot 2 = 2$ $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ <p>itd.</p>

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

2. Symbol Newtona

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ gdzie } k, n \in \mathbb{N} \text{ i } k \leq n.$$

Niektóre wartości symbolu Newtona:

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{1} = 1$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{5! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 7 \cdot 8 = 56$$



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

3. Permutacje

Permutacją zbioru n -elementowego nazywamy każdy n -wyrazowy ciąg utworzony ze wszystkich elementów tego zbioru.

Permutacja spełnia następujące warunki:

- każda permutacja obejmuje wszystkie dane elementy,
- istotna jest tylko kolejność elementów permutacji.

Z permutacjami zbioru mamy do czynienia wówczas, gdy porządkujemy elementy tego zbioru (ustawiamy wszystkie elementy w ciąg).

Zatem pamiętamy, że: permutacja to każde ustawienie wszystkich elementów zbioru w dowolnej kolejności.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

	<p>przykłady</p> <p><u>Przykład 1:</u></p> <p>Z trzech danych elementów: a, b, c, można utworzyć sześć permutacji: {a, b, c}, {a, c, b}, {b, a, c}, {b, c, a}, {c, a, b}, {c, b, a}.</p> <p>Liczba permutacji zbioru złożonego z n elementów jest równa $n!$</p> $P_n = n!$ <p><u>Przykład 2:</u></p> <p>Sześć osób w kolejce można ustawić na $6! = 720$ sposobów.</p>
--	--

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

4. Wariacje bez powtórzeń

Wariacją k-elementową bez powtórzeń utworzoną ze zbioru n-elementowego ($k \leq n$) nazywamy każdy k-wyrazowy ciąg różnych elementów z tego zbioru.

Wariacje spełniają następujące warunki:

- obejmują jedynie określoną liczbę k spośród danych n elementów,
- istotna jest kolejność elementów wariacji

Zatem pamiętamy, że:

z k-wyrazowymi wariacjami bez powtórzeń zbioru złożonego z n elementów mamy do czynienia, gdy k razy wybieramy bez zwracania po jednym elemencie z danego zbioru.

Zauważyć należy, że n-wyrazowe wariacje bez powtórzeń zbioru n-elementowego są permutacjami tego zbioru.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

przykłady

Przykład 1:

Z trzech danych elementów: a, b, c, można utworzyć następujące dwuelementowe wariacje bez powtórzeń: {a, b}, {a, c}, {b, a}, {b, c}, {c, a}, {c, b}.

Liczba k-wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego wyraża się wzorem:

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Przykład 2:

Na ile sposobów można wybrać trójkę klasową z klasy liczącej 30 uczniów?

Rozwiązanie: Ważne jest, jaką funkcję będzie pełniła każda z osób w wybranej trójce, a jedna osoba może pełnić tylko jedną funkcję. Zatem liczba wybranych trójek klasowych jest równa liczbie trzywyrazowych wariacji bez powtórzeń wybranych ze zbioru 30 elementów.

$$V_{30}^3 = \frac{30!}{(30-3)!} = \frac{27! \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30}{27!} = 28 \cdot 29 \cdot 30 = 24\,360 \text{ trójek klasowych}$$



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

5. Wariacje z powtórzeniami

Wariacją k-elementową z powtórzeniami utworzoną ze zbioru n-elementowego nazywamy każdy k-wyrazowy ciąg różnych lub nie różniących się elementów z tego zbioru.

Z k-wyrazowymi wariacjami z powtórzeniami zbioru n-elementowego mamy do czynienia wówczas, gdy k razy wybieramy po jednym elemencie ze zwracaniem z danego zbioru.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

przykłady

Przykład 1:

Z trzech danych elementów: a, b, c, można utworzyć następujące dwuelementowe wariacje z powtórzeniami: {a, a}, {a, b}, {a, c}, {b, a}, {b, b}, {b, c}, {c, a}, {c, b}, {c, c}.

Liczba k-wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru n-elementowego wyraża się wzorem:

$$W_n^k = n^k$$

Przykład 2:

Na ile sposobów możemy uzyskać różne wyniki, przy rzucie dwiema różnymi kostkami?

Rozwiązanie:

Liczba wszystkich wyników przy rzucie dwiema kostkami jest równa liczbie dwuwyrazowych wariacji z powtórzeniami ze zbioru sześcioelementowego.

mamy: $n=6$, $k=2$, zatem:

$$W_6^2 = 6^2 = 36$$

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

5. Kombinacje

Kombinacją k-elementową utworzoną ze zbioru n-elementowego ($k \leq n$) nazywamy każdy k-elementowy podzbiór tego zbioru.

Kombinacje spełniają następujące warunki:

- obejmują jedynie określoną liczbę k spośród danych n elementów.
- nie jest istotna kolejność elementów kombinacji

UWAGA! Kombinacja, to jedna z możliwości wyboru kilku elementów z większego zbioru, przy czym kolejność wyboru elementów nie ma znaczenia. Dwa podzbiory złożone z tych samych elementów, a różniące się tylko ich porządkiem, stanowią tę samą kombinację.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

		<p>przykłady</p> <p><u>Przykład 1:</u></p> <p>Z trzech danych elementów: a, b, c, można utworzyć następujące dwuelementowe kombinacje: {a, b}, {a, c}, {b, c}.</p> <p>Liczba k-elementowych kombinacji zbioru n-elementowego wyraża się wzorem:</p> $C_n^k = \binom{n}{k}$ <p><u>Przykład 2:</u></p> <p>Na ile różnych sposobów możemy wybrać 3 osoby do kina spośród 7.</p> <p><u>Rozwiązanie:</u></p> <p>Ilość osób, jakimi dysponujemy, to 7, czyli n=7, będziemy wybierali po 3 osoby, zatem k=3. Podstawiamy do wzoru i otrzymujemy:</p> $C_7^3 = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{3! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 5 \cdot 7 = 35$ <p>ZAPAMIĘTAJ! Tylko w kombinacjach w wybranych elementach <u>kolejność nie odgrywa roli!</u></p>
7	Podsumowanie zajęć	Nauczyciel ocenia zaangażowanie uczniów podczas zajęć, ich aktywność, wspiera w rozwiązywaniu bieżących problemów.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	Bez uwag

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Scenariusz nr 8*: Zastosowanie wzorów kombinatorycznych do rozwiązywania zadań tekstowych

Temat zajęć		Zastosowanie wzorów kombinatorycznych do rozwiązywania zadań tekstowych
Dział		Rachunek prawdopodobieństwa
Klasa (poziom edukacyjny)		Klasa III (IV etap edukacyjny)
Czas trwania zajęć		90 minut
Lp.	Element scenariusza	Treść zajęć
1	Cel ogólny	<ul style="list-style-type: none"> • Usystematyzowanie materiału z zakresu kombinatoryki • Uświadomienie uczniom, że w rachunku prawdopodobieństwa najważniejszy jest zdrowy rozsądek i logiczne rozumowanie • Nauka samodzielnego rozwiązywania problemów
2	Cele szczegółowe	<ul style="list-style-type: none"> • Uczeń: • rozróżnia zadania dotyczące poznanych elementów kombinatorycznych • stosuje symbol silnia • porządkuje i umiejętnie wykorzystuje informacje zawarte w treści zadania
3	Formy i metody	<ul style="list-style-type: none"> • Ćwiczenia • Praca indywidualna lub parami
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w	Komputer, tablica interaktywna, platforma Moodle.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

	projekcie np. moduł, gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Nauczyciel omawia organizację pracy na lekcji, uczniowie przypominają poznane podstawowe elementy kombinatoryczne.
6	Przebieg zajęć (<i>pełna wersja</i>)	<p>Uczniowie logują się na platformę Moodle, wpisują hasło, login. Po zalogowaniu się wybieramy lekcję „Elementy statystyki i rachunek prawdopodobieństwa”, temat nr 5: „Zastosowanie wzorów kombinatorycznych do rozwiązywania zadań tekstowych”.</p> <p>Jako pierwsze, uczniowie rozwiązują zadania zamknięte wybierają jedną odpowiedź uzyskując jednocześnie informację zwrotną o poprawności rozwiązania zadania.</p> <p>W dalszej części lekcji uczniowie rozwiązują zadania otwarte, przesyłają je na platformę (jako skan lub w pliku Word), nauczyciel wspiera pracę uczniów udzielając porad głównie technicznych, rzadziej merytorycznych, gdyż ocena poprawności rozwiązania zostanie zamieszczona na platformie Moodle.</p> <p>Oto treści zadań przeznaczonych do rozwiązania dla uczniów:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych mniejszych od 425: <ol style="list-style-type: none"> a) o dowolnych cyfrach b) o różnych cyfrach? 2. Na okręgu zaznaczono pięć punktów. Ile można poprowadzić prostych przechodzących przez te punkty? 3. Ilu zawodników brało udział w turnieju szachowym, jeśli wiadomo, że rozegrano 10 meczy i każdy grał z każdym dokładnie jeden raz?

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

		<p>4. Na loterię przygotowano 30 losów, z których 5 wygrywa. Na ile sposobów wśród kupionych 5 mogą się trafić:</p> <ol style="list-style-type: none"> dokładnie 2 wygrywające najwyżej 1 przegrywający wszystkie wygrywające <p>5. Do autobusu wsiada 5 kobiet i 7 mężczyzn. Na ile sposobów mogą wsiąść, jeżeli wiadomo, że jako pierwsze wchodzi kobiety?</p> <p>6. Ile różnych słów (mających sens lub nie) można utworzyć przestawiając w dowolny sposób litery w wyrazie:</p> <ol style="list-style-type: none"> matematyka kombinatoryka ekonomia <p>7. Na egzaminie student losuje trzy pytania. Oblicz, ile jest możliwości, że pozytywnie odpowie on na co najmniej dwa pytania, jeżeli umie odpowiedzieć tylko na 20 pytań spośród trzydziestu przygotowanych pytań egzaminacyjnych?</p> <p>8. Rozwiąż równanie: $V_n^4 \cdot P_{n-4} = 12P_{n-2}$</p> <p>9. Na ile sposobów można wybrać 6 kart z talii 52 kart w taki sposób, aby wśród wybranych kart znajdowały się dwa trefle?</p> <p>10. Sześć osób stoi trzymając się za ręce i tworząc okrąg. Na ile sposobów mogą one ustawić się w ten sposób?</p>
--	--	--

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

7	Podsumowanie zajęć	Nauczyciel ocenia aktywność uczniów podczas zajęć, ich zaangażowanie, wyjaśnia pojawiające się problemy.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	Bez uwag