

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Wstęp

Zbiór „Mój przedmiot matematyka” jest zestawem 132 scenariuszy przeznaczonych dla uczniów szczególnie zainteresowanych matematyką. Scenariusze mogą być wykorzystywane przez nauczycieli zarówno na typowych zajęciach lekcyjnych wpisanych w zakres podstawowy, jak też w ramach dodatkowych zajęć poszerzających wiedzę uczniów, np. koła zainteresowań. Scenariusze wymagają zastosowania komputerów z dostępem do internetu. Takie wyposażenie pozwoli na wykorzystanie środków dydaktycznych przewidzianych w projekcie „Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy” takich jak moduły e-learningowe: „Elementy statystyki i rachunek prawdopodobieństwa”, „Funkcja kwadratowa”, „Równania i nierówności liniowe i kwadratowe”, „Wielomiany”, gry strategiczne „Wyprawa Nasreddina”, „Herbatka u królowej Anglii”, „Wyprawa na grzyby”, „Matemafia” oraz „Międzykontynentalna szkoła”, poradniki „Ciągi”, „Planimetria”, „Trygonometria”, „Geometria analityczna”. Scenariusze mogą być realizowane na zajęciach lekcyjnych jako całość lub nauczyciel dokonuje wyboru określonych materiałów zgodnie z zaplanowanymi przez siebie tematami – zwiększa to elastyczność stosowania pakietu np. w sytuacji braku zapewnienia w placówce odpowiednich warunków technicznych do realizacji materiału w oparciu o cały pakiet.



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Spis scenariuszy

Wstęp	1
Scenariusz nr 1: Równania liniowe z jedną niewiadomą	3
Scenariusz nr 2: Nierówności liniowe	11
Scenariusz nr 3: Równania i nierówności z wartością bezwzględną	18
Scenariusz nr 4: Układy równań liniowych	27
Scenariusz nr 5: Równania kwadratowe zupełne	36
Scenariusz nr 6: Równania sprowadzalne do równań kwadratowych	42
Scenariusz nr 7: Układy równań, z których co najmniej jedno jest stopnia drugiego	48
Scenariusz nr 8*: Równania zawierające więcej niż jedną wartość bezwzględną	54
Scenariusz nr 9*: Nierówności zawierające więcej niż jedna wartość bezwzględną	58
Scenariusz nr 10*: Równania liniowe z parametrem	62
Scenariusz nr 11*: Układy równań liniowych z parametrem	67
Scenariusz nr 12*: Wzory Viete’a v.2	73
Scenariusz nr 13*: Równania kwadratowe niezupełne	79

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Scenariusz nr 1: Równania liniowe z jedną niewiadomą

Temat zajęć		Równania liniowe z jedną niewiadomą
Dział		Równania i nierówności
Klasa (poziom edukacyjny)		
Czas trwania zajęć		90 min
Lp.	Element scenariusza	Treść zajęć
1	Cel ogólny	<ul style="list-style-type: none"> • Kształcenie samodzielności pracy • Rozwijanie umiejętności czytania ze zrozumieniem • Ćwiczenie umiejętności rozwiązywania zadań dotyczących równań liniowych
2	Cele szczegółowe	<ul style="list-style-type: none"> • Uczeń: • wykazuje się umiejętnością rozpoznawania równań liniowych z jedną niewiadomą; • potrafi sprawdzić, czy dana liczba jest pierwiastkiem równania; • poprawnie posługuje się pojęciem dziedziny; • poprawnie rozwiązuje równania liniowe z jedną niewiadomą.
3	Formy i metody	<ul style="list-style-type: none"> • Praca indywidualna • Praca w grupie
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł,	Moduł e-learningowy „Równania i nierówności”.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

	gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Logowanie na platformie e-learningowej oraz wyjaśnienie zasad pracy na lekcji.
6	Przebieg zajęć (pełna wersja)	<p>Definicja równania liniowego i jego przykłady.</p> <p>Definicja. Równanie postaci $ax + b = 0$, w którym x jest niewiadomą, zaś a i b są danymi liczbami nazywamy równaniem liniowym lub równaniem stopnia pierwszego z jedną niewiadomą.</p> <p>Przykłady równań liniowych</p> $6(x + 7) = 35$ $\sqrt{5}x + 3 = x - 4\sqrt{5}$ <p>Pojęcie pierwiastka równania Rozwiązaniem równania z jedną niewiadomą nazywamy taką liczbę (liczby), która spełnia to równanie, tzn. jeśli w miejsce niewiadomej podstawimy tę liczbę, to otrzymamy równość prawdziwą. Liczbę (liczby) spełniającą dane równanie nazywamy pierwiastkiem równania.</p> <p>Przykład: Sprawdzimy, która z liczb zbioru $\{-2, \frac{1}{2}, 0\}$ jest pierwiastkiem równania $4x - 5 = 2(x - 2,5)$</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Sprawdzamy $x = -2$ $L = 4 \cdot (-2) - 5 = -8 - 5 = -13$ i $P = 2(2 - 2,5) = 2 \cdot (-0,5) = -1$. Zatem $L \neq P$ ➤ Sprawdzamy $x = \frac{1}{2}$ $L = 4 \cdot \frac{1}{2} - 5 = 2 - 5 = -3$ i $P = 2 \cdot (\frac{1}{2} - 2,5) = 2 \cdot (-2) = -4$. Więc $L \neq P$. ➤ Sprawdzamy $x = 0$ $L = 4 \cdot 0 - 5 = 0 - 5 = -5$ i $P = 2 \cdot (0 - 2,5) = -5$ i $L = P$ <p>Pierwiastkiem danego równania jest liczba $x = 0$.</p> <p>Dziedzina równania Przed przystąpieniem do rozwiązania równania musimy określić jego dziedzinę, tzn. podać zbiór liczb, dla których wyrażenia występujące po obu stronach równości mają sens liczbowy.</p>

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

W przypadku, gdy dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych, zapis $D = R$ będziemy pomijać.

Przykłady:

Określ dziedzinę równania:

a) $4x - 15 = 6$

$$D = R$$

b) $\frac{4}{x+5} = 7$

Mianownik ułamka nie może być równy zero, zatem mamy założenie $x + 5 \neq 0$, czyli $x \neq -5$.

Dziedziną jest zbiór $D = R \setminus \{-5\}$.

➤ *Po przypomnieniu pojęcia dziedziny równania, uczniowie samodzielnie określają dziedzinę równania wymiernego (pytanie testowe, w którym dokładnie jedna odpowiedź jest poprawna).*

Ćwiczenie. C

Dziedziną równania $\frac{4}{3-2x} = 5$ jest:

A. R B. $R \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$ C. $R \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$ D. $R \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

Równania równoważne

Definicja.

Równania nazywamy równoważnymi wtedy i tylko wtedy, gdy są określone w tej samej dziedzinie i mają ten sam zbiór pierwiastków.

Twierdzenie:

Równanie równoważne do danego równania otrzymujemy, jeżeli:

- występujące w równaniu wyrażenia zastąpimy wyrażeniami równymi,
- do obu stron równania dodamy lub od obu stron odejmiemy to samo wyrażenie,
- obie strony równania pomnożymy lub podzielimy przez liczbę różną od zera lub wyrażenie, które nie przyjmuje wartości zero,

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Przykłady otrzymywania równań równoważnych:

a) $(x + 3)^2 - 5 = 4x + x^2$

Występujący w równaniu kwadrat sumy zastąpimy odpowiednią sumą, wykorzystując wzór skróconego mnożenia i otrzymamy równanie równoważne:

$$x^2 + 6x + 9 - 5 = 4x + x^2$$

b) $\sqrt{3}x - 7 = 4\sqrt{3}$

Do obu stron równania dodamy liczbę 7

$$\begin{aligned}\sqrt{3}x - 7 &= 4\sqrt{3} & | +7 \\ \sqrt{3}x - 7 + 7 &= 7 + 4\sqrt{3} \\ \sqrt{3}x &= 7 + 4\sqrt{3}\end{aligned}$$

c) $\frac{2x-8}{3} - \frac{x-4}{2} = 7$

Aby pozbyć się mianowników obu ułamków, obie strony równania mnożymy przez 6

$$\begin{aligned}\frac{2x-8}{3} - \frac{x-4}{2} &= 7 & | \cdot 6 \\ \frac{2x-8}{3} \cdot 6 - \frac{x-4}{2} \cdot 6 &= 7 \cdot 6 \\ (2x-8) \cdot 2 - (x-4) \cdot 3 &= 42\end{aligned}$$

I dalej wykonamy działania $4x - 16 - 3x + 12 = 42$ otrzymując ciąg równań równoważnych.

- *Po przypomnieniu pojęcia równań równoważnych, uczniowie samodzielnie rozwiązują zadanie związane z tym pojęciem (pytanie testowe, w którym dokładnie jedna odpowiedź jest poprawna).*

Ćwiczenie. B

Które z równań nie jest równoważne do pozostałych:

A. $2x - 10 = 0$ B. $x^2 = 25$ C. $6x - 3 = 27$ D. $x^2 + 11 = (x + 1)^2$

Liczba rozwiązań równania linowego

Zajmiemy się teraz rozwiązywaniem równań typu $ax + b = 0$

1. Jeżeli $a \neq 0$, to

$$ax = -b \quad |:a$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

Równanie ma jeden pierwiastek, jest to równanie oznaczone.

2. Jeżeli $a = 0$ i $b = 0$, to otrzymujemy

$$0 \cdot x + 0 = 0$$

Więc $0 = 0$ i równanie jest tożsamościowe, ma nieskończenie wiele pierwiastków (każda liczba rzeczywista x jest rozwiązaniem równania).

3. Jeżeli $a = 0$ i $b \neq 0$, to otrzymujemy

$$0 \cdot x + b = 0$$

Więc $b = 0$ i jest to równanie sprzeczne, nie posiadające pierwiastków.

Wniosek:

Równanie liniowe $ax + b = 0$ dla:

- $a \neq 0$ jest oznaczone i ma jeden pierwiastek $x = -\frac{b}{a}$
- $a = 0$ i $b = 0$ jest tożsamościowe i ma nieskończenie wiele pierwiastków
- $a = 0$ i $b \neq 0$ jest sprzeczne i nie posiada rozwiązań

Przykład**Zadanie.**

Rozwiążemy podane równanie $(3x - 2)^2 - 6x = 12(x - 3)(x + 1) - (3x + 1)(x - 2)$

Najpierw „pozbywamy” się nawiasów. W tym celu wykonujemy mnożenie i stosujemy wzór skróconego mnożenia

$$9x^2 - 12x + 4 - 6x = 12(x^2 + x - 3x - 3) - (3x^2 - 6x + x - 2)$$

Pamiętamy o tym, że przy opuszczaniu nawiasu, przed którym znajduje się znak minus zmieniamy znaki każdego z wyrażeń będących w tym nawiasie.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

$$9x^2 - 12x + 4 - 6x = 12x^2 + 12x - 36x - 36 - 3x^2 + 6x - x + 2$$

Wykonujemy redukcję wyrazów podobnych:

$$9x^2 - 18x + 4 = 9x^2 - 19x - 34.$$

Porządkujemy równanie, przenosząc niewiadome na lewą stronę, a wiadome na prawą stronę. Przy przenoszeniu na drugą stronę pamiętamy o zmianie znaków na przeciwne.

$$9x^2 - 9x^2 - 18x + 19x = -34 - 4$$

Po ponownej redukcji wyrazów podobnych otrzymujemy: $x = -38$

Odpowiedź: Równanie ma jedno rozwiązanie $x = -38$. Jest to równanie oznaczone.

- *Po przypomnieniu pojęcia równania liniowego i sposobu jego rozwiązywania, uczniowie samodzielnie rozwiązują zadanie związane z tym pojęciem (pytanie testowe, w którym dokładnie jedna odpowiedź jest poprawna).*

Ćwiczenie . D

Jeżeli liczbę a zmniejszymy o 5, to otrzymamy $\frac{1}{5}$ tej liczby. Liczba a jest równa:

- A. $1\frac{1}{4}$ B. $4\frac{1}{6}$ C. 5 D. $6\frac{1}{4}$

- *W lekcji znajduje się lista zadań doskonalących umiejętność rozwiązywania równań liniowych. Zadania te mogą być wydrukowane, zaprezentowane na ekranie lub tablicy interaktywnej. Są one rozwiązywane przez uczniów pod kierunkiem nauczyciela.*

Zadanie 1. Rozwiąż równanie.

- a) $5 + 2[3(x - 1) - 5(2x - 3)] = 2x - 3$
 b) $3(x - 6) - 5(2x - 7) = 0$
 c) $3(5 - x) + 2(x - 4) = 4(x - 2) - 3(2x - 3)$
 d) $2(x - 4) + 9 = 7 - 2(3 - x)$

Zadanie 2. Rozwiąż równanie.

- a) $\frac{5x+4}{5} + 3 = \frac{7x-3}{7}$

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

		<p>b) $4 - \frac{3x-13}{5} = 6x$</p> <p>c) $\frac{2x-5}{4} - 6 = \frac{1-2x}{3} + \frac{x-1}{6} - 3$</p> <p>d) $\frac{7(2x-3)}{15} - 2 = -\frac{2}{3}x - \frac{3(4-x)}{2}$</p> <p>Zadanie 3. Rozwiąż równanie</p> <p>a) $\sqrt{3}x - 2x = 3$</p> <p>b) $4x - \sqrt{6} = \sqrt{6}x - 3$</p> <p>c) $(6-x)(6+x) = 9x - x^2$</p> <p>d) $\left(\frac{1}{2}x + 3\right)\left(\frac{1}{2}x - 3\right) - \left(6 + \frac{1}{2}x\right)^2 = 0$</p> <p>e) $2(x-2)^2 + 7(5x-3) = -19 - 2(1-x)(1+x)$</p> <p>f) $(x+2)(x-1) + 3x(x+4) = (2x+3)^2 - 8$</p> <p>Zadanie 4.</p> <p>Basia kupiła bratki do posadzenia na klombie. Chciała je posadzić w rzędach tak, aby rzędów było tyle co kwiatków w rzędzie. Jednak trzy kwiatki oddała sąsiadce. Wówczas posadziła pozostałe bratki tak, że rzędów było o trzy mniej, a w każdym rzędzie o 5 kwiatów więcej niż pierwotnie planowała. Ile bratków kupiła Basia?</p> <p>Zadanie 5.</p> <p>160 gramów roztworu zawiera 1% soli. Po odparowaniu części wody otrzymano roztwór 2%. Ile waży teraz ten roztwór?</p>
7	Podsumowanie zajęć	<p>Uczniowie przystępują do samodzielnego rozwiązywania zadań otwartych zamieszczonych na platformie e-learningowej, których rozwiązania przesyłają do sprawdzenia nauczycielowi.</p> <p>Zadanie 1.</p> <p>Rozwiąż równania:</p> <p>a) $\frac{x+3}{2} + \frac{4x}{3} = \frac{2x-1}{6} + 2$</p> <p>b) $(4x-5)(4x+5) - (x+1)^2 = 15(x-3)^2 - 6 - 4x$</p> <p>Zadanie 2.</p>

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

		<p>Zbiornik jest napełniany w $\frac{1}{4}$ swojej pojemności. Gdy wlejemy do niego 15 litrów, to będzie napełniony w $\frac{7}{8}$ pojemności. Oblicz pojemność zbiornika.</p> <p>Zadanie 3. Kawałek stopu miedzi z ołowiem waży 12 kg i zawiera 45% miedzi. Ile kilogramów czystego ołowiu należy stopić z tym stopem, aby nowy stop zawierał 30% miedzi.</p> <p>Zadanie 4. Wyznacz liczbę k tak, aby równanie $(2 - 5k)x - 3 = 6$ z niewiadomą x miało dokładnie jedno rozwiązanie.</p> <p>Zadanie 5. W 2011 roku wnuczek zapytał dziadka, ile ma lat. Ten odpowiedział, że jeśli podwoi swój wiek sprzed 50 lat i zwiększy go o 5, to otrzyma liczbę lat, których brakuje mu do 100 lat. Oblicz, ile lat miał dziadek i w którym roku się urodził.</p>
8	Uwagi metodyczne do realizacji	

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

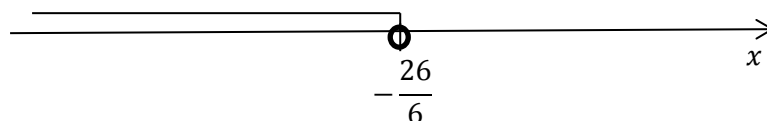
Scenariusz nr 2: Nierówności liniowe

Temat zajęć		Nierówności liniowe
Dział		Równania i nierówności
Klasa (poziom edukacyjny)		
Czas trwania zajęć		90 min
Lp.	Element scenariusza	Treść zajęć
1	Cel ogólny	<ul style="list-style-type: none"> • Kształcenie samodzielności pracy • Rozwijanie umiejętności czytania zadań ze zrozumieniem • Ćwiczenie umiejętności rozwiązywania zadań dotyczących rozwiązywania nierówności liniowych
2	Cele szczegółowe	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> • wykazuje się umiejętnością rozpoznawania nierówności liniowych z jedną niewiadomą; • poprawnie rozwiązuje równania liniowe z jedną niewiadomą, • wykazuje się umiejętnością zaznaczenia zbioru rozwiązań nierówności na osi liczbowej oraz zapisania go za pomocą przedziału liczbowego.
3	Formy i metody	<ul style="list-style-type: none"> • Praca indywidualna • Praca w grupie
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł,	Moduł e-learningowy „Równania i nierówności”.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

	gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Logowanie na platformie e-learningowej oraz wyjaśnienie zasad pracy na lekcji.
6	Przebieg zajęć (pełna wersja)	<p>Definicja nierówności liniowej z jedną niewiadomą.</p> <p>Definicja Nierówność w każdej z postaci: $ax + b > 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$ lub $ax + b \leq 0$, w której x jest niewiadomą, zaś a i b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, nazywamy nierównością liniową lub nierównością pierwszego stopnia z jedną niewiadomą.</p> <p>Przykład. Rozwiąż nierówność : $2x - \frac{3x+1}{3} > 2 + \frac{5+4x}{2}$. Następnie zaznacz zbiór rozwiązań na osi liczbowej i zapisz za pomocą przedziału. Mnożymy obie strony nierówności przez najmniejszy wspólny mianownik:</p> $2x - \frac{3x+1}{3} > 2 + \frac{5+4x}{2} \quad \cdot 6$ $6 \cdot 2x - 6 \cdot \frac{3x+1}{3} > 6 \cdot 2 + 6 \cdot \frac{5+4x}{2}$ $12x - 2(3x+1) > 12 + 3(5+4x)$ <p>Wykonujemy mnożenie $12x - 6x - 2 > 12 + 15 + 12x$ Przenosimy wyrazy zawierające niewiadomą na jedną stronę nierówności, a wiadome na prawą. Pamiętamy przy tym o zmianie znaków na przeciwne.</p> $12x - 6x - 12x > 12 + 15 + 2$ <p>Redukujemy wyrazy podobne $-6x > 29$ Wyznaczmy x, dzieląc nierówność obustronnie przez współczynnik stojący przy niewiadomej.</p> <p>Pamiętaj. Jeżeli mnożymy lub dzielimy nierówność stronami przez liczbę ujemną, to odwracamy znak nierówności na przeciwny.</p> $x < -\frac{29}{6}$

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”



- Teraz uczniowie mogą samodzielnie sprawdzić umiejętność rozwiązywania nierówności liniowych z jedną niewiadomą (dwa pytania testowe, w których dokładnie jedna odpowiedź jest poprawna).

Ćwiczenie. A

Jeżeli $12(x - 2) \geq -7$, to x nie może być równe:

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{5}{4}$ C. $\frac{4}{3}$ D. 2

Ćwiczenie. C

Największą liczbą naturalną spełniającą nierówność $2(x + 3) > 6x - 10$ jest:

- A. 4 B. 5 C. 3 D. 0

Układy nierówności liniowych z jedną niewiadomą.

Rozwiązywanie tych układów przedstawimy na przykładach.

Przykład 1.

Rozwiąż układ nierówności:
$$\begin{cases} (x + 1)^2 + 7 > (x - 4)^2 \\ (1 + x)^2 + 3x^2 < (2x - 1)^2 + 7 \end{cases}$$

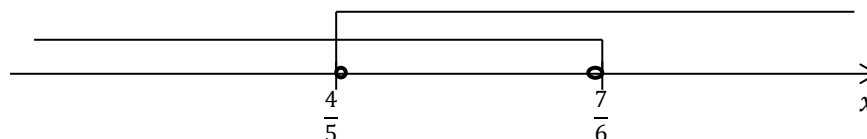
Układ taki zapisujemy za pomocą koniunkcji i rozwiązujemy każdą z nierówności oddzielnie.

$$\begin{array}{ll} (x + 1)^2 + 7 > (x - 4)^2 & \text{i} \quad (1 + x)^2 + 3x^2 < (2x - 1)^2 + 7 \\ x^2 + 2x + 1 + 7 > x^2 - 8x + 16 & \text{i} \quad 1 + 2x + x^2 + 3x^2 < 4x^2 - 4x + 1 + 7 \\ x^2 - x^2 + 2x + 8 > 16 - 1 - 7 & \text{i} \quad x^2 + 3x^2 - 4x^2 + 2x + 4x < 1 + 7 - 1 \\ 10x > 8 \quad |:10 & \text{i} \quad 6x < 7 \quad |:6 \\ x > \frac{8}{10} & \text{i} \quad x < \frac{7}{6} \\ x > \frac{4}{5} & \end{array}$$



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Oba rozwiązania zaznaczamy na osi liczbowej i wyznaczamy ich część wspólną.



Zatem $x \in \left(\frac{4}{5}, \frac{7}{6}\right)$ jest rozwiązaniem danego układu nierówności.

Przykład 2.

Wyznacz wszystkie liczby całkowite spełniające nierówność: $2x - 1 \leq \frac{x+2}{3} < 3(x - 2) + 12$.

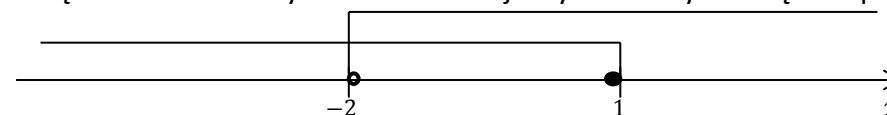
Nierówność ta jest równoważna układowi:

$$\begin{cases} 2x - 1 \leq \frac{x+2}{3} \\ \frac{x+2}{3} < 3(x-2) + 12 \end{cases}$$

Który rozwiązujemy jako koniunkcję dwóch nierówności:

$$\begin{array}{ll} 2x - 1 \leq \frac{x+2}{3} & | \cdot 3 & \text{i} & \frac{x+2}{3} < 3(x-2) + 12 & | \cdot 3 \\ 3 \cdot 2x - 3 \cdot 1 \leq 3 \cdot \frac{x+2}{3} & & \text{i} & 3 \cdot \frac{x+2}{3} < 3 \cdot 3 \cdot (x-2) + 3 \cdot 12 \\ 6x - 3 \leq x + 2 & & \text{i} & x + 2 < 9x - 18 + 36 \\ 6x - x \leq 2 + 3 & & \text{i} & x - 9x < -18 + 36 - 2 \\ 5x \leq 5 & | : 5 & \text{i} & -8x < 16 & | : (-8) \\ x \leq 1 & & \text{i} & x > -2 \end{array}$$

Oba rozwiązania zaznaczamy na osi liczbowej i wyznaczamy ich część wspólną.



Częścią wspólną obu rozwiązań jest zbiór $x \in (-2, 1)$, a liczbami całkowitymi należącymi do tego zbioru są $x \in \{-1, 0, 1\}$.



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

- Teraz uczniowie mogą samodzielnie sprawdzić umiejętność rozwiązywania układów nierówności liniowych z jedną niewiadomą (pytanie testowe, w którym dokładnie jedna odpowiedź jest poprawna).

Ćwiczenie. C

Zbiorem wszystkich liczb całkowitych spełniających układ nierówności $\begin{cases} 5x + 7 > -3 \\ \frac{1}{2}x \leq 1 \end{cases}$ jest:

- A. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ B. $\{-2, -1, 0, 1\}$ C. $\{-1, 0, 1, 2\}$ D. $\{-2, -1, 0, 1\}$

- W lekcji znajduje się lista zadań doskonalących umiejętność rozwiązywania nierówności liniowych. Zadania te mogą być wydrukowane, zaprezentowane na ekranie lub tablicy interaktywnej. Są one rozwiązywane przez uczniów pod kierunkiem nauczyciela.

Zadanie 1. Rozwiąż nierówność:

- a) $3x - 2(x + 4) < 5 + 4x$
 b) $5(x + 3) - 10(x - 1) \geq 3(x + 4) + 14$
 c) $6(x + 2) - 3(2 - x) - 8 \leq 4 - 5(3x - 1)$

Zadanie 2. Rozwiąż nierówność:

- a) $\frac{3(x+1)}{2} - 5x < 1 - 7(x - 3)$
 b) $2(x + 2) + 4 + x \leq \frac{4x-1}{3} + \frac{1}{4}$
 c) $3,5 - \frac{2-5x}{4} > 2 + x + \frac{2x-7}{2}$
 d) $\frac{x+3}{4} - (2 - x) \geq \frac{2x-1}{3}$

Zadanie 3. Rozwiąż nierówność:

- a) $(3x - 2)(3x + 2) \geq (3x + 4)^2$
 b) $2x < \sqrt{5}x + 3$
 c) $x^2 + \frac{x-7}{3} - \frac{x-2}{2} \leq (1 + x)^2$

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

		<p>d) $(x + 2)^2 - (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) < \frac{2x-1}{3} + \frac{2}{3}$</p> <p>Zadanie 4. Wyznacz ile liczb naturalnych spełnia nierówność: $\frac{x+2}{3} - 2(x + 3) \geq \frac{x-1}{2} - 7$.</p> <p>Zadanie 5. Rozwiąż układ nierówności:</p> <p>a) $\begin{cases} (x - 3)^2 + \frac{x+4}{3} \leq (x - 4)(x + 4) - 2x + 4\frac{1}{3} \\ -(3x^2 + 3x + 1) < -3(x - 5)(x + 5) \end{cases}$</p> <p>b) $\begin{cases} x(x - 2) - 2 > 3x + (3 + x)^2 \\ -6x^2 + 12x - 8 < (2x - 1)(1 - 3x) \end{cases}$</p>
7	Podsumowanie zajęć	<p>➤ Uczniowie przystępują do samodzielnego rozwiązywania zadań otwartych zamieszczonych na platformie e-learningowej, których rozwiązania przesyłają do sprawdzenia nauczycielowi.</p> <p>Zadanie 1. Wyznacz wszystkie liczby całkowite, które spełniają układ nierówności: $\begin{cases} 3(x + 2)^2 + (2x - 1)^2 - 7(x + 3)(x - 3) < 28 \\ x(x - 2) - (x - 3)(x + 3) < 27 \end{cases}$</p> <p>Zadanie 2. Rozwiąż następujący układy nierówności: $\begin{cases} -\frac{x+3}{4} + \frac{2x-1}{6} < 2 \\ -3x + 2 - \frac{x+6}{3} \geq 2x - 3 \end{cases}$</p> <p>Zadanie 3. Rozwiąż nierówność $x^3 - (x + 1)^3 \leq -3(x^2 - 5) < x^2 - 4(x + 2)^2 + 39$ i wyznacz wszystkie liczby naturalne, które ją spełniają.</p> <p>Zadanie 4. Rozwiąż podane nierówności: a) $x(x + 1) - (x^2 + 1) < 1$ b) $1 - x < 3x + 2 < 7$ c) $5(x - 1) > 2(x + 4) > 4$</p>

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

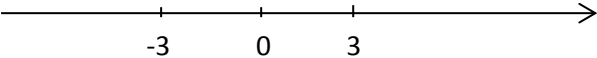
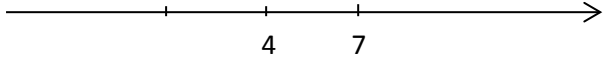
		<p>d) $\frac{3(x-1)^2}{2} - \frac{2(x+3)^2}{3} < \frac{5(x^2-8x-3)}{6}$</p> <p>e) $\frac{(x-1)^2}{2} - (x+2)(x-2) \leq \frac{(x+2)^2}{2}$</p> <p>Zadanie 5. Rozwiąż następujące układy nierówności:</p> <p>a) $\begin{cases} \frac{2-5x}{2} + 3 \geq \frac{2x+1}{3} - 2x \\ 2 + \frac{x+1}{4} \leq \frac{x-1}{6} + x \end{cases}$</p> <p>b) $\begin{cases} (x+1)^2 - 8 > (x-1)^2 + 3x - 7 \\ (1-3x)^2 - 5x^2 > (2x-1)(2x+1) - 10 \end{cases}$</p>
8	Uwagi metodyczne do realizacji	

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Scenariusz nr 3: Równania i nierówności z wartością bezwzględną

Temat zajęć		Równania i nierówności z wartością bezwzględną
Dział		Równania i nierówności
Klasa (poziom edukacyjny)		
Czas trwania zajęć		90 min
Lp.	Element scenariusza	Treść zajęć
1	Cel ogólny	<ul style="list-style-type: none"> • Kształcenie samodzielności pracy • Rozwijanie umiejętności czytania ze zrozumieniem • Ćwiczenie umiejętności rozwiązywania zadań dotyczących rozwiązywania równań i nierówności z wartością bezwzględną
2	Cele szczegółowe	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> • poprawnie posługuje się pojęciem wartości bezwzględnej; • wykazuje się umiejętnością rozwiązywania równań z wartością bezwzględną; • wykazuje się umiejętnością rozwiązywania nierówności z wartością bezwzględną; • zna interpretację geometryczną równania i nierówności z wartością bezwzględną; • poprawnie zapisuje zbiór rozwiązań nierówności za pomocą przedziału liczbowego.
3	Formy i metody	<ul style="list-style-type: none"> • Praca indywidualna • Praca w grupie
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków)	Moduł e-learningowy „Równania i nierówności”.

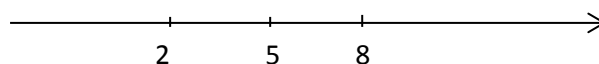
Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

	opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Logowanie na platformie e-learningowej oraz wyjaśnienie zasad pracy na lekcji.
6	Przebieg zajęć (pełna wersja)	<p>Definicja wartości bezwzględnej</p> <p>Wartością bezwzględną liczby nieujemnej jest ta sama liczba. Wartością bezwzględną liczby ujemnej jest liczba do niej przeciwna.</p> <p>Wartość bezwzględną liczby x oznaczamy symbolem x i możemy zapisać symbolicznie</p> $ x = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$ <p>Przykład.</p> <p>Zaznaczmy na osi liczbowej liczby x dla których $x = 3$.</p>  <p>Są to dwie liczby: -3 i 3, których odległość od 0 jest równa 3.</p> <p>Zatem równanie $x = 3$ ma dwa rozwiązania $x = 3$ oraz $x = -3$.</p> <p>Wniosek:</p> <p>W interpretacji geometrycznej wartość bezwzględna liczby jest to jej odległość na osi liczbowej od liczby 0.</p> <p>Interpretacja geometryczna rozwiązania równania $x - b = c$.</p> <p>Przykład 1.</p> <p>Obliczmy odległość na osi liczbowej między liczbami 4 i 7.</p>  <p>Możemy ją obliczyć: $7 - 4 = 3$, ale również $4 - 7 = 3$.</p> <p>Wniosek:</p> <p>$x - b$ jest odległością na osi liczbowej między liczbami x i b.</p>

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Przykład 2.

Zaznaczymy na osi liczbowej liczby x dla których $|x - 5| = 3$.



Są to dwie liczby 2 i 8, których odległość od liczby 5 jest równa 3.

Wniosek:

Rozwiązując równanie $|x - b| = c$, gdzie $c \geq 0$ zaznaczamy na osi liczbowej liczby, których odległość od b jest równa c .

Równania typu $|ax + b| = c$ dla $a \neq 0$.

Przypadek I. Załóżmy, że $c = 0$.

Wówczas równanie $|ax + b| = 0$ jest równoważne równaniu $ax + b = 0$ (ponieważ $|0| = 0$).

Rozwiązujemy drugie równanie:

$$\begin{aligned} ax &= -b \quad | :a \\ x &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Równanie $|ax + b| = 0$ ma jeden pierwiastek.

Przypadek II. Załóżmy, że $c > 0$.

Wówczas równanie $|ax + b| = c$ jest równoważne alternatywie dwóch równań:

$$\begin{aligned} ax + b &= c \text{ lub } ax + b = -c \\ ax &= c - b \text{ lub } ax = -c - b \\ x &= \frac{c-b}{a} \text{ lub } x = \frac{-c-b}{a} \end{aligned}$$

Czyli równanie $|ax + b| = c$ dla $c > 0$ ma dwa rozwiązania.

Przypadek III. Załóżmy, że $c < 0$.

Wówczas równanie $|ax + b| = c$ nie posiada rozwiązań, gdyż wartość bezwzględna liczby rzeczywistej jest zawsze nieujemna.



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Wniosek: Równanie $|ax + b| = c, a \neq 0$

- dla $c < 0$ nie ma rozwiązań, tzn. jest równaniem sprzecznym,
- dla $c = 0$ posiada jeden pierwiastek,
- dla $c > 0$ ma dwa pierwiastki.

➤ Teraz uczniowie mogą samodzielnie sprawdzić rozumienie pojęcia wartości bezwzględnej oraz umiejętność rozwiązywania prostych równań z wartością bezwzględną (trzy pytania testowe, w których dokładnie jedna odpowiedź jest poprawna).

Ćwiczenie. C

Równanie $|2x - 3| = 3 - 2x$ jest spełnione przez wszystkie liczby rzeczywiste x ze zbioru:

- A. \mathbb{R} B. $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$ C. $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ D. $(-\infty, 0)$

Ćwiczenie. A

Zbiorem wszystkich rozwiązań równania $|x + 4| = 3$ jest zbiór:

- A. $\{-1, -7\}$ B. $\{-1, 7\}$ C. $\{-7, 1\}$ D. $\{1, 7\}$

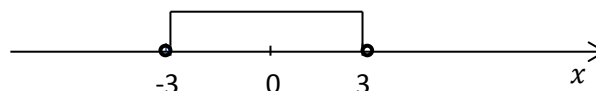
Ćwiczenie. C

Równaniem, które nie posiada pierwiastków wspólnych z równaniem $|x - 7| = 2$.

- A. $|x - 6| = 15$ B. $|x + 1| = 6$ C. $|x + 7| = 2$ D. $|x - 8| = 1$

Przykład 1.

Zaznacz na osi liczbowej wszystkie liczby spełniające nierówność $|x| < 3$.



Są to wszystkie liczby, których odległość od 0 jest mniejsza niż 3.
Zatem $x \in (-3, 3)$.



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Wniosek

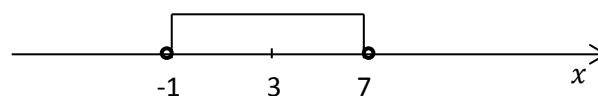
Rozwiązaniem nierówności $|x| < a$ jest zbiór:

- $x \in (-a, a)$, gdy $a > 0$,
- $x = 0$, gdy $a = 0$
- pusty (nierówność sprzeczna), gdy $a < 0$.

Przykład 2.

Rozwiąż nierówność: $|x - 3| < 4$.

Wiemy, że $|x - 3|$ możemy interpretować jako odległość x od 3. Wobec tego musimy zaznaczyć na osi liczbowej liczby, których odległość od 3 jest mniejsza niż 4. Liczbami które znajdują się w odległości 4 od 3 są: -1 i 7, dlatego one ograniczają nasz zbiór rozwiązań.

**Wniosek**

Rozwiązaniem nierówności $|x - b| < a$ jest zbiór:

- $x \in (b - a, b + a)$, gdy $a > 0$,
- pusty (nierówność sprzeczna), gdy $a \leq 0$.

➤ Teraz uczniowie mogą samodzielnie sprawdzić umiejętność rozwiązywania nierówności typu $|x - b| < a$ (pytanie testowe, w którym dokładnie jedna odpowiedź jest poprawna).

Ćwiczenie. A

Najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą nierówność : $|x + 3| < 4$ jest:

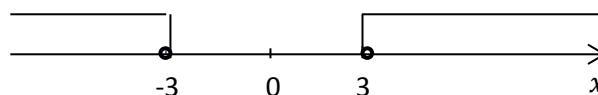
- A. -6 B. -7 C. 0 D. -7

Przykład 3.

Zaznacz na osi liczbowej wszystkie liczby spełniające nierówność $|x| > 3$.



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”



Są to wszystkie liczby, których odległość od 0 jest większa niż 3.
Zatem rozwiązaniem nierówności $|x| > 3$ jest $x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$

Wniosek

Zatem rozwiązaniem nierówności $|x| > a$ jest zbiór:

- $x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$, gdy $a > 0$
- $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, gdy $a = 0$
- zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, gdy $a < 0$.

➤ Teraz uczniowie mogą samodzielnie sprawdzić umiejętność rozwiązywania nierówności typu $|x| > a$ (pytanie testowe, w którym dokładnie jedna odpowiedź jest poprawna).

Ćwiczenie. D

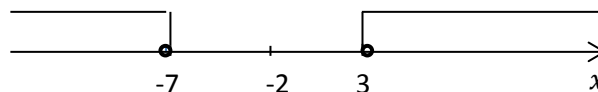
Ile liczb naturalnych nie spełnia nierówności $|x| > 4$:

- A. Nieskończenie wiele B. 3 C. 4 D. 5

Przykład

Rozwiąż nierówność $|x + 2| > 5$.

Na osi liczbowej zaznaczymy wszystkie liczby, których odległość od (-2) jest większa niż 5.



Zatem rozwiązaniem nierówności $|x + 2| > 5$ jest $x \in (-\infty, -7) \cup (3, \infty)$.

Wniosek

Zatem rozwiązaniem nierówności $|x - b| > a$ jest zbiór:

- $x \in (-\infty, b - a) \cup (b + a, \infty)$, gdy $a > 0$
- $x \in (-\infty, b) \cup (b, \infty)$, gdy $a = 0$



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

- zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, gdy $a < 0$.

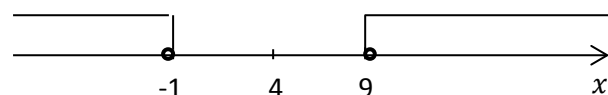
Uwaga:

Podobnie rozwiązujemy nierówności $|x - b| \leq a$ i $|x - b| \geq a$, pamiętając o domknięciu przedziałów.

➤ Teraz uczniowie mogą samodzielnie sprawdzić umiejętność rozwiązywania nierówności typu $|x - b| > a$ (pytanie testowe, w którym dokładnie jedna odpowiedź jest poprawna).

Ćwiczenie. B

Na osi liczbowej przedstawiony jest zbiór rozwiązań nierówności:



A. $|x - 5| > 4$ B. $|x - 4| > 5$ C. $|x + 4| > 5$ D. $|x - 4| < 5$

➤ Na zakończenie znajduje się aplet -ilustracja pojęcie wartości bezwzględnej oraz rozwiązania równań i nierówności z wartością bezwzględną.

➤ W lekcji znajduje się lista zadań doskonalących umiejętność rozwiązywania równań i nierówności z wartością bezwzględną. Zadania te mogą być wydrukowane, zaprezentowane na ekranie lub tablicy interaktywnej. Są one rozwiązywane przez uczniów pod kierunkiem nauczyciela.

Zadanie 1. Oblicz:

a) $|\sqrt{7} - 3| - |4 - \sqrt{7}|$

b) $|4 - |5 - 11||$

c) $\left| \frac{2-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} \right|$

Zadanie 2. Rozwiąż równanie:

a) $|x - 3| = 5$

e) $||x - 2| - 6| = 8$

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

		<p>c) $2x + 3 - x - 1 = 4$ d) $6 - \sqrt{16 - 8x + x^2} = 2 - 3x$</p> <p>Zadanie 2. Rozwiąż poniższe równania, wykorzystując ilustrację geometryczną wartości bezwzględnej:</p> <p>a) $x - 4 = 6$ b) $x + 3 = 2$ c) $5 - x = 8$</p> <p>Zadanie 3. (w podstawie rozwiązujemy tylko punkty a oraz b) Rozwiąż nierówności:</p> <p>a) $x + 5 \geq 4$ b) $x - 3 \leq 2$ c) $x - 1 - 4 < 6$ d) $2x - 3 - 5 > 13 + x + 1$</p> <p>Zadanie 4. Rozwiąż układ nierówności: $x + 2 < 4 < 3x - 1$</p>
8	Uwagi metodyczne do realizacji	

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Scenariusz nr 4: Układy równań liniowych

Temat zajęć		Układy równań liniowych
Dział		Równania i nierówności
Klasa (poziom edukacyjny)		
Czas trwania zajęć		90 min
Lp.	Element scenariusza	Treść zajęć
1	Cel ogólny	<ul style="list-style-type: none"> • Kształcenie samodzielności pracy • Rozwijanie umiejętności czytania ze zrozumieniem • Ćwiczenie umiejętności rozwiązywania zadań z zastosowaniem układów równań liniowych
2	Cele szczegółowe	<p>Uczeń</p> <ul style="list-style-type: none"> • wykazuje się umiejętnością rozwiązywania układów równań liniowych metodą podstawiania; • wykazuje się umiejętnością rozwiązywania układów równań liniowych metodą przeciwnych współczynników; • potrafi określić liczbę rozwiązań układu równań; • wykazuje się umiejętnością ułożenia układu równań wynikających z treści zadania.
3	Formy i metody	<ul style="list-style-type: none"> • Praca indywidualna • Praca w grupie
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w	Moduł e-learningowy „Równania i nierówności”.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

	projekcie np. moduł, gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Logowanie na platformie e-learningowej oraz wyjaśnienie zasad pracy na lekcji.
6	Przebieg zajęć (pełna wersja)	<p>Definicja</p> <p>Układ równań $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, w którym $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$ i $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$, nazywamy układem dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi x i y.</p> <p>Przykłady układów dwóch równań z dwiema niewiadomymi</p> $\begin{cases} x - 4y = 5 \\ 2x + 3 = 7 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} 4x - 2y = 3 \\ -8x + 4y = -6 \end{cases}$ <p>Rozwiązać układ równań oznacza podać takie pary liczb, które spełniają jednocześnie oba równania. Układy równań można rozwiązywać algebraicznie lub geometrycznie. W tej lekcji zapoznamy się z metodami algebraicznymi.</p> <p>Rozwiązywanie układów równań liniowych metodą podstawiania</p> <p>Pierwszy przykład rozwiążemy metodą podstawiania, która polega na wyznaczeniu niewiadomej z jednego równania i podstawianiu jej do drugiego równania. Otrzymujemy wówczas i rozwiązujemy równanie z jedną niewiadomą.</p> <p>Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 4x + y = 9 \\ -3x + 2y = -4 \end{cases}$</p> <p>Z pierwszego równania wyznaczamy niewiadomą y i podstawiamy do drugiego równania</p> $\begin{cases} y = 9 - 4x \\ -3x + 2(9 - 4x) = -4 \end{cases}$ <p>Pierwsze równanie przepisujemy, a drugie równanie z jedną niewiadomą rozwiązujemy</p> $\begin{cases} y = 9 - 4x \\ -3x + 18 - 8x = -4 \end{cases}$

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

$$\begin{cases} y = 9 - 2x \\ -11x = -22 \quad | :(-11) \\ y = 9 - 4x \\ x = 2 \end{cases}$$

Wyznaczoną wartość x podstawiamy do pierwszego równania i obliczamy drugą niewiadomą

$$\begin{cases} y = 9 - 4 \cdot 2 \\ x = 2 \\ y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Układ równań jest spełniony przez jedną parę liczb. Taki układ nazywamy oznaczonym.

Rozwiązywanie układów równań liniowych metodą przeciwnych współczynników

Drugi przykład rozwiążemy **metodą przeciwnych współczynników**, polegającą na pomnożeniu jednego lub obu równań przez liczbę (liczby) tak dobraną, aby przy jednej z niewiadomych otrzymać współczynniki, które są liczbami przeciwnymi. Wtedy po dodaniu obu równań stronami otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą, które później rozwiązujemy.

Rozwiążemy układ równań:
$$\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 5x - 2y = 17 \end{cases}$$

Aby uzyskać przeciwne współczynniki przy zmiennej y , pierwsze równanie pomnożymy obustronnie przez 2, zaś drugie obustronnie przez 3.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 3 & | \cdot 2 \\ 5x - 2y = 17 & | \cdot 3 \end{cases}$$

Otrzymamy
$$\begin{cases} 4x + 6y = 6 \\ 15x - 6y = 51 \end{cases}$$

Równania dodajemy stronami i rozwiązujemy równanie z jedną niewiadomą

$$\begin{aligned} 4x + 6y + 15x - 6y &= 6 + 51 \\ 19x &= 57 & | :19 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Podstawiając otrzymaną wartość do pierwszego równania układu otrzymujemy

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

		$\begin{aligned} 2 \cdot 3 + 3y &= 3 \\ 3y &= -3 \\ y &= -1 \end{aligned}$ <p>Rozwiązaniem układu jest para liczb: $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$.</p> <p>Przykład układu nieznaczonego</p> <p>Rozwiążemy układ równań: $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ -6x + 9y = -9 \end{cases}$</p> <p>Zrobimy to metodą przeciwnych współczynników, mnożąc stronami pierwsze równanie przez 3.</p> $\begin{cases} 6x - 9y = 9 \\ -6x + 9y = -9 \end{cases}$ <p>Dodajemy oba równania stronami: $6x - 9y - 6x + 9y = 9 - 9$</p> <p>I otrzymujemy : $0 = 0$, co jest tożsamością i oznacza, że układ jest nieoznaczony i posiada nieskończenie wiele rozwiązań.</p> <p>Przykład układu sprzecznego:</p> <p>Rozwiążemy układ równań: $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -6x + 3y = 2 \end{cases}$</p> <p>Zrobimy to metodą przeciwnych współczynników, mnożąc stronami pierwsze równanie przez 3.</p> $\begin{cases} 6x - 3y = 9 \\ -6x + 3y = 2 \end{cases}$ <p>Dodajemy oba równania stronami: $6x - 3y - 6x + 3y = 9 + 2$</p> <p>I otrzymujemy: $0 = 11$, co jest sprzecznością. Dany układ nie posiada więc rozwiązań i nazywamy go sprzecznym.</p> <p>➤ <i>Teraz uczniowie mogą samodzielnie sprawdzić umiejętność rozwiązywania układu równań i określania liczby jego rozwiązań (pytanie testowe, w którym dokładnie jedna odpowiedź jest poprawna).</i></p>
--	--	--

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Ćwiczenie. B

Aby układ $\begin{cases} 4x - 6y = -8 \\ ax + 3y = -4 \end{cases}$ był układem sprzecznym, należy w miejsce a podstawić;

- A. 2 B. -2 C. 3 D. taka liczba a nie istnieje

Liczba rozwiązań układu dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Układ równań $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, w którym $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$ i $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$, może:

- mieć dokładnie jedno rozwiązanie będące parą liczb; taki układ nazywamy **oznaczonym**
- mieć nieskończenie wiele rozwiązań, będących parami liczb; taki układ nazywamy **nieoznaczonym**
- nie mieć rozwiązań i nazywamy go wówczas sprzecznym.

➤ *Aplet – ilustracja graficzna układu dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi*

➤ *Teraz uczniowie mogą samodzielnie sprawdzić umiejętność rozwiązywania układu równań i określania liczby jego rozwiązań (pytanie testowe, w którym dokładnie jedna odpowiedź jest poprawna)*

Ćwiczenie. A

Ile rozwiązań posiada układ równań: $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 3x + 5y = 6 \end{cases}$

- A. Jedno B. dwa C. nie posiada rozwiązań D. nieskończenie wiele

Zadanie

W dwóch sadach owocowych rośło razem 1500 drzewek. W ciągu roku liczba drzewek w każdym sadzie powiększyła się o 25% i wtedy okazało się, że liczba drzewek w drugim sadzie stanowiła $\frac{2}{3}$ liczby drzewek w pierwszym. Ile drzewek było w każdym sadzie na początku roku?

Analiza zadania:

Oznaczenia: x – liczba drzewek w pierwszym sadzie na początku roku

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

		<p>y – liczba drzewek w drugim sadzie na początku roku Ich suma wynosi 1500, więc mamy pierwsze równanie: $x + y = 1500$. $1,25x$ – liczba drzewek w pierwszym sadzie na koniec roku $1,25y$ – liczba drzewek w drugim sadzie na koniec roku Na koniec roku liczba drzewek w drugim sadzie stanowiła $\frac{2}{3}$ liczby drzewek w pierwszym, więc: $\frac{2}{3} \cdot 1,25x = 1,25y$</p> <p>I otrzymujemy układ równań, który rozwiązujemy: $\begin{cases} x + y = 1500 \\ \frac{2}{3} \cdot 1,25x = 1,25y \end{cases} \quad : 1,25$</p> $\begin{cases} x + y = 1500 \\ \frac{2}{3}x = y \end{cases}$ $\begin{cases} x + \frac{2}{3}x = 1500 \\ \frac{2}{3}x = y \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{5}{3}x = 1500 & : \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3}x = y \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1500 \cdot \frac{3}{5} \\ \frac{2}{3}x = y \end{cases}$ $\begin{cases} x = 900 \\ \frac{2}{3} \cdot 900 = y \end{cases}$ $\begin{cases} x = 900 \\ y = 600 \end{cases}$ <p>Odpowiedź: W pierwszym sadzie było na początku roku 900, a w drugim 600 drzewek.</p>
--	--	--

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

- Teraz uczniowie mogą samodzielnie sprawdzić umiejętność rozwiązywania zadania z treścią z wykorzystaniem układu równań (pytanie testowe, w którym dokładnie jedna odpowiedź jest poprawna)

Ćwiczenie 3. C

Suma dwóch liczb jest równa (-2) , a ich różnica jest równa 10. Iloraz mniejszej z tych liczb przez większą wynosi:

A. $-\frac{2}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. $\frac{3}{2}$

- W lekcji znajduje się lista zadań doskonalących umiejętność rozwiązywania układów równań liniowych i ich zastosowania do rozwiązywania zadań. Zadania te mogą być wydrukowane, zaprezentowane na ekranie lub tablicy interaktywnej. Są one rozwiązywane przez uczniów pod kierunkiem nauczyciela.

Zadanie 1. Rozwiąż układ równań:

a)
$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x - 6y = -9 \\ 5x + 8y = 3 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 1 \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ -1,5x + 2y = -2 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} \frac{3}{2}x + y = \frac{3}{2} \\ y + 2 - \frac{3(2-x)+1}{2} = 0 \end{cases}$$

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

		<p>f) $\begin{cases} -\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = -\frac{2-y}{2} \\ -\frac{6x-y}{3} + \frac{4x-y}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$</p> <p>Zadanie 2. Do równania $2x - 3y = 7$ dopisz drugie, aby otrzymać układ:</p> <p>a) Nieoznaczony b) Oznaczony c) sprzeczny.</p> <p>Zadanie 3. Długości dwóch sąsiednich boków prostokąta różnią się o 6. Obwód prostokąta wynosi 48. Wyznacz długości boków i pole tej figury.</p> <p>Zadanie 4. Suma cyfr pewnej liczby dwucyfrowej wynosi 12. Jeżeli cyfry w tej liczbie zamienimy miejscami, to otrzymamy liczbę o 36 większą. Wyznacz początkową liczbę.</p> <p>Zadanie 5. 320 gramów roztworu zawiera 1% soli. Po odparowaniu pewnej ilości wody otrzymano roztwór o stężeniu 2%. Ile waży teraz ten roztwór?</p> <p>Zadanie 6. Za 15 biletów do kina zapłacono 312 zł. Bilet normalny kosztował 24 zł, zaś ulgowy był o 25 % tańszy. Ile kupiono biletów normalnych, a ile ulgowych?</p> <p>Zadanie 7. Suma dwóch liczb wynosi 60. Połowa pierwszej liczby jest równa 75 % liczby drugiej. Jakie to liczby?</p>
7	Podsumowanie zajęć	<p>➤ <i>Zadania do samodzielnego rozwiązania przez uczniów. Zadania otwarte przesyłane są do sprawdzenia nauczycielowi.</i></p> <p>Zadanie 1. Rozwiąż układ równań:</p> <p>a) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - 2y = -5 \\ 3x - \frac{1}{2}y = \frac{9}{2} \end{cases}$</p> <p>b) $\begin{cases} \frac{15y+7x}{16} - \frac{3y-4}{4} = -1 \\ 3y - \frac{10-x}{6} = 2 - x \end{cases}$</p>

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

		<p>Zadanie 2. Zmieszano dwa rodzaje roztworów soli kuchennej, roztwór 10% z roztworem o stężeniu 25%. W wyniku otrzymano 12 kg roztworu o stężeniu 15%. Oblicz masę każdego z roztworów.</p> <p>Zadanie 3. Wyznacz dwie takie liczby, aby suma $\frac{1}{3}$ pierwszej z nich i 25% drugiej wynosiła 9, a różnica podwojonej pierwszej i 75% drugiej również wynosiła 9.</p> <p>Zadanie 4. Rozwiąż układy równań:</p> <p>a) $\begin{cases} \frac{2x+3y}{2} - \frac{7x+4y}{3} = \frac{4}{9} \\ \frac{3x-2y}{6} + \frac{9x+y}{2} = -\frac{5}{3} \end{cases}$</p> <p>b) $\begin{cases} \frac{1}{2}\left(y + \frac{x}{2}\right) - \frac{1}{5}(x + 2) = 1,1 \\ x - 2y + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}\left[2x + 3\left(y - \frac{1}{2}\right)\right] \end{cases}$</p> <p>c) $\begin{cases} \frac{x}{3} - 2 = y - 2 \\ \frac{x+6}{3} + 3(y - 2) = 0 \end{cases}$</p> <p>Zadanie 5. Na początku roku szkolnego w liceum było o 20 harcerzy więcej niż w sąsiednim technikum. Do końca roku szkolnego liczba harcerzy wzrosła w liceum o 25%, a w technikum o $\frac{2}{3}$ stanu na początku roku szkolnego i wówczas liczba harcerzy w obu szkołach była jednakowa. Ilu harcerzy było na początku roku szkolnego w każdej z tych szkół?</p>
8	Uwagi metodyczne do realizacji	

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Scenariusz nr 5: Równania kwadratowe zupełne

Temat zajęć		Równania kwadratowe zupełne
Dział		Równania i nierówności
Klasa (poziom edukacyjny)		
Czas trwania zajęć		90 min
Lp.	Element scenariusza	Treść zajęć
1	Cel ogólny	<ul style="list-style-type: none"> • Kształcenie samodzielności pracy • Rozwijanie umiejętności czytania ze zrozumieniem • Rozwijanie umiejętności korzystania z dostępnych wzorów • Ćwiczenie umiejętności rozwiązywania równań kwadratowych
2	Cele szczegółowe	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> • wykazuje się umiejętnością rozpoznawania równań kwadratowych zupełnych; • potrafi określić liczbę rozwiązań równania na podstawie wyróżnika; • poprawnie oblicza pierwiastki równania kwadratowego.
3	Formy i metody	<ul style="list-style-type: none"> • Praca indywidualna • Praca w grupie
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł,	Moduł e-learningowy „Równania i nierówności”.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

	gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Logowanie na platformie e-learningowej oraz wyjaśnienie zasad pracy na lekcji.
6	Przebieg zajęć (pełna wersja)	<p><u>Porządek lekcji:</u> Lekcja jest prowadzona z wykorzystaniem kursu „Równania i nierówności” (lekcja 7) zamieszczonego na platformie e-learningowej Moodle. Wspólnie z uczniami omawiamy potrzebną teorię i analizujemy zawarte przykłady, ćwiczenia uczniowie rozwiązują samodzielnie.</p> <p>Definicja Równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, w którym wszystkie współczynniki a, b, c są różne od zera nazywamy równaniem zupełnym. Wyrażenie $\Delta = b^2 - 4ac$ nazywamy wyróżnikiem równania kwadratowego.</p> <p>➤ <i>Teraz uczniowie mogą sprawdzić swoją umiejętność obliczania wyróżnika równania kwadratowego oraz sprawdzenia, czy dane liczby są pierwiastkami równania dwa (pytania testowe, w których dokładnie jedna odpowiedź jest poprawna).</i></p> <p>Ćwiczenie 1. B Wyróżnik Δ jest równy 0 dla równania: A. $x^2 - 16 = 0$ B. $x^2 - 8x + 16 = 0$ C. $x^2 + 8x - 16 = 0$ D. $16x^2 + x = 0$</p> <p>Ćwiczenie 2. C Liczby -3 i 4 są pierwiastkami równania: A. $2(x - 3)(x + 4) = 0$ B. $-3(x - 3)(x - 4) = 0$ C. $6(x + 3)(x - 4) = 0$ D. $-4(x + 3)(x + 4) = 0$</p> <p>Twierdzenie: Aby rozwiązać równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ najpierw obliczamy wyróżnik.</p>

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

- Jeśli $\Delta > 0$, to równanie ma dwa różne rozwiązania $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ i $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Jeśli $\Delta = 0$, to równanie ma jedno rozwiązanie $x_0 = \frac{-b}{2a}$
- Jeśli $\Delta < 0$, to równanie nie ma rozwiązań.

➤ Teraz uczniowie mogą samodzielnie sprawdzić umiejętność rozwiązywania równania kwadratowego (pytanie testowe, w którym dokładnie jedna odpowiedź jest poprawna).

Ćwiczenie 3. C

Które równanie posiada dwa różne rozwiązania:

A. $x^2 - 2x + 1 = 0$ B. $3x^2 - x + 1 = 0$ C. $4x^2 - 6x - 7 = 0$ D. $2x^2 + 4x + 5 = 0$

Przykłady ilustrujące rozwiązanie równań kwadratowych zupełnych

Przykład 1.

Rozwiążemy równania :

a) $2x^2 - 3x - \frac{1}{2} = 0$

$$a = 2, \quad b = -3, \quad c = \frac{1}{2}$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 9 - 4 = 5$$

$\Delta > 0$ - równanie ma więc dwa pierwiastki

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) - \sqrt{5}}{2 \cdot 2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) + \sqrt{5}}{2 \cdot 2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{4}$$

b) $9x^2 - 12x + 4 = 0$

$$a = 9, \quad b = -12, \quad c = 4$$

$$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 144 - 144 = 0$$

$\Delta = 0$ - równanie ma jeden pierwiastek



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

		$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-12)}{2 \cdot 9} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$ <p>c) $-2x^2 + x - 3 = 0$</p> $a = -2, b = 1, c = -3$ $\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-3) = 1 - 24 = -23$ <p>$\Delta < 0$ - równanie nie ma.</p> <p>➤ Teraz uczniowie mogą samodzielnie sprawdzić umiejętność rozwiązywania równania kwadratowego (pytanie testowe, w którym dokładnie jedna odpowiedź jest poprawna).</p> <p>Ćwiczenie 4. D</p> <p>Liczba $\frac{1}{2}$ jest jednym z pierwiastków równania:</p> <p>A. $x^2 + 8x = 0$ B. $-x^2 + 2x - 4 = 0$ C. $3x^2 + 5x - 2 = 0$ D. $2x^2 - 7x + 3 = 0$.</p> <p>➤ W lekcji znajduje się lista zadań doskonalących umiejętność rozwiązywania równań kwadratowych i ich zastosowania do rozwiązywania zadań. Zadania te mogą być wydrukowane, zaprezentowane na ekranie lub tablicy interaktywnej. Są one rozwiązywane przez uczniów pod kierunkiem nauczyciela.</p> <p>Zadanie 1.</p> <p>Określ liczbę rozwiązań równania:</p> <p>a) $x^2 - 5x + 7 = 0$</p> <p>b) $\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4 = 0$</p> <p>c) $-\frac{3}{4}x^2 + 5x - 2 = 0$</p> <p>d) $x^2 + (1 - \sqrt{2})x - \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0$</p> <p>e) $(\sqrt{5} - 2)x^2 + 6x + \sqrt{5} + 2 = 0$.</p>
--	--	---

Zadanie 2.

Rozwiąż równania:

a) $(4x - 2)^2 = (x + 3)^2$

b) $-x^2 + \sqrt{2}x - 4 = 0$

c) $\left(2 - \frac{3}{2}x\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x + 5\right)^2 = 0$

d) $2x^2 - 7x = -3$

e) $32x^2 + 48\sqrt{2}x = -36$

Zadanie 3. Rozwiąż równania:

a) $(2x - 1)(2x + 1) - (4x + 5)^2 = -4x - 2$

b) $(x + 3)^2 - 2(x - 2)^2 = 4x + 10$

c) $\frac{x^2+5x}{3} - \frac{(x+2)^2}{4} = x - 1$

d) $\frac{x(x-1)}{2} + \frac{x(x-3)}{3} + (4-x)(4+x) = 10$

e) $x^2 + (x + 1)^2 = 29 - \frac{(2x+4)^2}{4}$

Zadanie 4.Wyznacz wszystkie wartości współczynnika b , dla których równanie $2x^2 + bx + 2 = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.**Zadanie 5.**Dla jakich wartości współczynnika c równanie $\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + c = 0$ ma dwa różne rozwiązania?**Zadanie 6.**Jednym z rozwiązań równania $x^2 + 6x + c = 0$ jest liczba $\{-3 - \sqrt{3}\}$. Wyznacz współczynnik c i znajdź drugie rozwiązanie tego równania.**Zadanie 7.**

Suma kwadratów dwóch kolejnych liczb całkowitych wynosi 1013. Wyznacz te liczby.

Zadanie 8.

Iloczyn dwóch kolejnych liczb naturalnych nieparzystych wynosi 323. Zapisz odpowiednie równanie i wyznacz te liczby.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

7	Podsumowanie zajęć	<p>➤ Uczniowie przystępują do samodzielnego rozwiązywania zadań otwartych zamieszczonych na platformie e-lerningowej, których rozwiązania przesyłają do sprawdzenia nauczycielowi.</p> <p>Zadanie 1. Rozwiąż równania: a) $12x + 7 = 21x^2$ b) $\frac{1}{2}x^2 - 10 = 6x$ c) $-2x^2 - 5x + 3 = 0$</p> <p>Zadanie 2. Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego jest dłuższa od jednej przyprostokątnej o 1 cm i od drugiej przyprostokątnej o 32 cm. Oblicz długości boków tego trójkąta.</p> <p>Zadanie 3. Oblicz liczbę boków wielokąta wypukłego, który ma 119 przekątnych.</p>
8	Uwagi metodyczne do realizacji	

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Scenariusz nr 6: Równania sprowadzalne do równań kwadratowych

Temat zajęć		Równania sprowadzalne do równań kwadratowych
Dział		Równania i nierówności
Klasa (poziom edukacyjny)		
Czas trwania zajęć		90 min
Lp.	Element scenariusza	Treść zajęć
1	Cel ogólny	<ul style="list-style-type: none"> • Kształcenie samodzielności pracy • Rozwijanie umiejętności czytania ze zrozumieniem • Rozwijanie umiejętności logicznego myślenia
2	Cele szczegółowe	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> • wykazuje się umiejętnością sprowadzania niektórych równań do równań kwadratowych; • potrafi dokonać podstawienia, które pozwoli sprowadzić równanie do równania kwadratowego; • doskonali umiejętność rozwiązywania równań kwadratowych.
3	Formy i metody	<ul style="list-style-type: none"> • Praca indywidualna • Praca w grupie
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	Moduł e-learningowy „Równania i nierówności”.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

5	Wprowadzenie do zajęć	Logowanie na platformie e-learningowej oraz wyjaśnienie zasad pracy na lekcji.
6	Przebieg zajęć (<i>pełna wersja</i>)	<p>Lekcja jest prowadzona z wykorzystaniem kursu „Równania i nierówności” (lekcja 8) zamieszczonego na platformie e-learningowej Moodle. Wspólnie z uczniami analizujemy przykłady ilustrujące metody sprowadzania niektórych równań do równań kwadratowych; ćwiczenia uczniowie rozwiązują samodzielnie.</p> <p>Sposoby rozwiązywania równań sprowadzalnych do równań kwadratowych zilustrowane zostały przykładami.</p> <p>Przykład 1.</p> <p>Rozwiąż równanie $\frac{x-3}{x} = \frac{5-x}{x+1}$</p> <p>Zakładamy, że $x \neq 0$ i $x + 1 \neq 0$, gdyż mianowniki ułamków nie mogą być równe 0. Zatem $x \in R \setminus \{-1, 0\}$.</p> $(x - 3)(x + 1) = x(5 - x)$ $x^2 + x - 3x - 3 = 5x - x^2$ $2x^2 - 7x - 3 = 0$ $\Delta = 49 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 49 + 24 = 73$ $x_1 = \frac{-(-7) - \sqrt{73}}{2 \cdot 2} = \frac{7 - \sqrt{73}}{4} \in R \setminus \{-1, 0\}.$ $x_2 = \frac{-(-7) + \sqrt{73}}{2 \cdot 2} = \frac{7 + \sqrt{73}}{4} \in R \setminus \{-1, 0\}.$ <p>Zatem równanie ma dwa rozwiązania $x_1 = \frac{7 - \sqrt{73}}{4}$ i $x_2 = \frac{7 + \sqrt{73}}{4}$.</p> <p>Przykład 2.</p> <p>Rozwiążemy równanie $x^4 - x^2 - 6 = 0$.</p> <p>Wykonamy podstawienie $t = x^2, t \geq 0$ (gdyż kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną)</p> <p>Otrzymujemy równanie $t^2 - t - 6 = 0$</p> $\Delta = 1 + 4 \cdot (-6) = 25$

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

$$t_1 = \frac{1-5}{2} = -2 < 0 \text{ i odrzucamy rozwiązanie}$$

$$t_2 = \frac{1+5}{2} = 3 > 0 \text{ i możemy teraz wyznaczyć } x: x^2 = 3$$

$$x = \sqrt{3} \text{ lub } x = -\sqrt{3}$$

Odpowiedź: Równanie ma dwa rozwiązania: $-\sqrt{3}, \sqrt{3}$

Przykład 3.

Rozwiążemy równanie $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$

Założenie: $x \geq 0$.

Wykonamy podstawienie $\sqrt{x} = t$ i otrzymamy równanie $t^2 - 5t + 6 = 0$.

$$\Delta = 25 - 4 \cdot 6 = 1$$

$$t_1 = \frac{5-1}{2} = 2 \quad t_2 = \frac{5+1}{2} = 3$$

$$\sqrt{x} = 2 \quad \sqrt{x} = 3$$

$$x = 4 \quad x = 9$$

➤ Teraz uczniowie mogą samodzielnie sprawdzić umiejętność rozwiązywania prostych równań sprowadzalnych do równań kwadratowych (pytanie testowe, w którym dokładnie jedna odpowiedź jest poprawna).

Ćwiczenie 1. C

Ile różnych rozwiązań ma równanie : $x^4 - 15x^2 = 0$

A. jedno B. dwa C. trzy D. cztery

Ćwiczenie 2. D

Ile różnych rozwiązań ma równanie : $x^4 - 10x^2 + 21 = 0$

A. jedno B. dwa C. trzy D. cztery

Ćwiczenie 3. A

Ile różnych rozwiązań ma równanie : $x^4 + 6x^2 + 9 = 0$

- A. zero B. dwa C. trzy D. cztery

Przykład 4.

Rozwiążemy równanie $24 - x^2 = 8|x - 3|$.

- Jeżeli $x \in (-\infty, 3)$, to równanie przyjmuje postać: $24 - x^2 = 8(-x + 3)$

Wykonując działania i przenosząc na jedną stronę otrzymujemy:

$$x^2 - 8x = 0$$

$$x(x - 8) = 0$$

Zatem $x = 0$ lub $x = 8$.

Jednak $x = 8$ nie należy do przedziału $(-\infty, 3)$, zatem rozwiązanie to odrzucamy.

- Jeżeli $x \in \langle 3, \infty \rangle$, to równanie przyjmuje postać : $24 - x^2 = 8(x - 3)$.

Wykonując działania i przenosząc na jedną stronę otrzymujemy:

$$x^2 + 8x - 48 = 0.$$

Jest to równanie zupełne, więc obliczamy wyróżnik: $\Delta = 64 - 4 \cdot (-48) = 256$.

Istnieją dwa rozwiązania:

$$x_1 = \frac{-8-16}{2} = -12 \text{ i } x_2 = \frac{-8+16}{2} = 4.$$

Ponieważ $x_1 = -12$ nie należy do rozważnego przedziału $\langle 3, \infty \rangle$, więc rozwiązanie to odrzucamy.

Odpowiedź: Równanie $24 - x^2 = 8|x - 3|$ posiada dwa rozwiązania $x = 0$ oraz $x = 4$.

- *W lekcji znajduje się lista zadań doskonalących umiejętność rozwiązywania równań sprowadzalnych do równań kwadratowych. Zadania te mogą być wydrukowane, zaprezentowane na ekranie lub tablicy interaktywnej. Są one rozwiązywane przez uczniów pod kierunkiem nauczyciela.*

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

		<p>Zadanie 1. Rozwiąż równania: a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ b) $x^4 - 12x^2 + 36 = 0$ c) $x^6 - 15x^3 - 16 = 0$ d) $-x^6 + 7x^3 - 12 = 0$</p> <p>Zadanie 2. Rozwiąż równania: a) $(x^2 - 3)^2 - 24 = 2x^4 - 14x^2$ b) $3x^4 + 9 = (x^2 - 1)^2 + 12x^2$ c) $x^4 - 18x^2 = (x^2 - 9)(2x^2 + 3) + 23$ d) $(x^2 + 6)(7 - x^2) - 36 = x^4 + 12x^2$</p> <p>Zadanie 3. Rozwiąż równania: a) $x^2 - 4 = 3 x$ b) $x^2 - 4 = 5 x - 2$ c) $x^2 - 9 = 4 x - 1$ d) $x^2 = 3 x - 1 + 1$</p> <p>Zadanie 4. Rozwiąż równania: a) $\sqrt{1 - 3x} + 3 + x = 0$ b) $3(x + 2) = \sqrt{22 - 9x}$ c) $x = \sqrt{\frac{3}{4} - x}$ d) $\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 2} = 3$ e) $\sqrt{x} + \sqrt{140 + x} = 4$</p>
7	Podsumowanie zajęć	➤ Uczniowie przystępują do samodzielnego rozwiązywania zadań otwartych zamieszczonych na platformie e-learningowej, których rozwiązania przesyłają do sprawdzenia nauczycielowi.



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

		<p>Zadanie 1. Rozwiąż równanie: $3x^6 + 4x^3 + 1 = 0$.</p> <p>Zadanie 2. Rozwiąż równanie: $x - \sqrt{x} - 6 = 0$</p> <p>Zadanie 3. Rozwiąż równanie: $x^4 + 2x^2 - 15 = 0$</p>
8	Uwagi metodyczne do realizacji	

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Scenariusz nr 7: Układy równań, z których co najmniej jedno jest stopnia drugiego

Temat zajęć		Układy równań, z których co najmniej jedno jest stopnia drugiego
Dział		Równania i nierówności
Klasa (poziom edukacyjny)		
Czas trwania zajęć		90 min
Lp.	Element scenariusza	Treść zajęć
1	Cel ogólny	<ul style="list-style-type: none"> • Kształcenie samodzielności pracy • Rozwijanie umiejętności czytania ze zrozumieniem • Rozwijanie umiejętności logicznego myślenia
2	Cele szczegółowe	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> • wykazuje się umiejętnością rozwiązywania układów równań, z których co najmniej jedno jest stopnia drugiego; • doskonalili umiejętność rozwiązywania równań kwadratowych.
3	Formy i metody	<ul style="list-style-type: none"> • Praca indywidualna • Praca w grupie
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	Moduł e-learningowy „Równania i nierówności”.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

5	Wprowadzenie do zajęć	Logowanie na platformie e-learningowej oraz wyjaśnienie zasad pracy na lekcji.
6	Przebieg zajęć (<i>pełna wersja</i>)	<p>Lekcja jest prowadzona z wykorzystaniem kursu „Równania i nierówności” (lekcja 9) zamieszczonego na platformie e-learningowej Moodle. Wspólnie z uczniami analizujemy przykłady ilustrujące metody rozwiązywania.</p> <p>Przykład : Rozwiążemy układ równań: $\begin{cases} y = 2x^2 + 20x + 47 \\ y = 2x + 11 \end{cases}$.</p> <p>Pierwsze z równań jest równaniem stopnia drugiego, zaś drugie stopnia pierwszego. Porównując prawe strony obu równań, otrzymujemy równanie kwadratowe</p> $2x^2 + 20x + 47 = 2x + 11$ <p>które rozwiązujemy:</p> $2x^2 + 20x + 47 - 2x - 11 = 0.$ <p>Po uporządkowaniu otrzymamy:</p> $\begin{aligned} 2x^2 + 18x + 36 &= 0 & :2 \\ x^2 + 9x + 18 &= 0 \end{aligned}$ <p>Zatem $\Delta = 9^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = 81 - 72 = 9$ i mamy dwa rozwiązania:</p> $x_1 = \frac{-9 - \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{-12}{2} = -6$ $x_2 = \frac{-9 + \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{-6}{2} = -3$ <p>Dla wyznaczonych wartości x_1 i x_2 obliczamy drugą niewiadomą:</p> $\begin{cases} x_1 = -6 \\ y = 2 \cdot (-6) + 11 = -1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x_2 = -3 \\ y = 2 \cdot (-3) + 11 = 5 \end{cases}$ <p>A więc rozwiązaniem układu równań są dwie pary liczb (układ ma dwa rozwiązania):</p> $\begin{cases} x_1 = -6 \\ y_1 = -1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = 5 \end{cases}$ <p>➤ Teraz uczniowie mogą samodzielnie sprawdzić umiejętność rozwiązywania prostych układów</p>

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

równań, z których co najmniej jedno jest stopnia drugiego i sprawdzenia kiedy para liczb jest rozwiązaniem takiego układu (dwa pytania testowe, w których dokładnie jedna odpowiedź jest poprawna).

Ćwiczenie 1. B

Ile rozwiązań ma układ równań:
$$\begin{cases} x^2 + (y + 2)^2 = 4 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

A. Jedno B. dwa C. trzy D. cztery

Ćwiczenie 2. D

Para liczb $(-2, 3)$ jest rozwiązaniem układu równań:

A. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ y - x = 1 \end{cases}$ B. $\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$ C. $\begin{cases} xy = -6 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x^2 + y = 7 \\ y - x = 5 \end{cases}$

Układy równań, z których co najmniej jedno jest stopnia drugiego możemy rozwiązywać metodą graficzną.

Przykład:

Rozwiążemy układ równań $\begin{cases} y = -x^2 - 4x \\ y = -x \end{cases}$ i podamy jego interpretację graficzną.

Porównujemy prawe strony obu równań i otrzymujemy: $-x^2 - 4x = -x$.

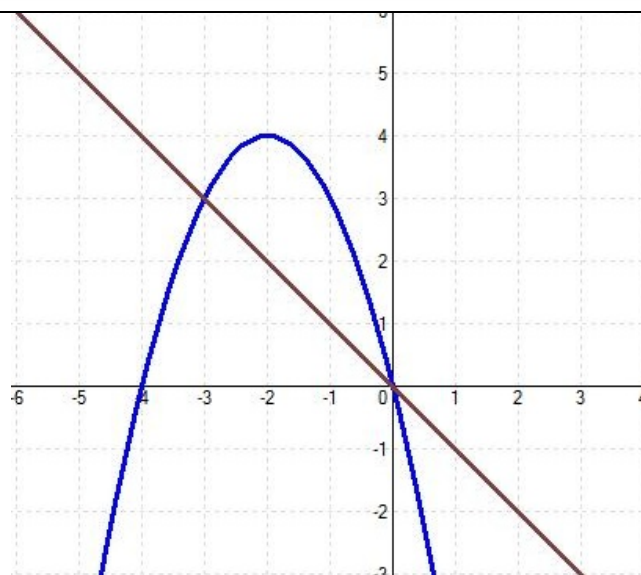
Wobec tego $-x^2 - 3x = 0$ i mamy równanie $x(-x - 3) = 0$, którego rozwiązaniami są $x = 0$ oraz $x = -3$.

Dla $x = 0$ mamy $y = 0$, natomiast dla $x = -3$ mamy $y = -3$.

Układ równań jest spełniony przez dwie pary liczb: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ oraz $\begin{cases} x = -3 \\ y = -3 \end{cases}$

Rysujemy teraz wykresy funkcji $y = -x$ i $y = -x^2 - 4x$ w jednym układzie współrzędnych.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”



Na podstawie wykresów widać, że prosta $y = -x$ przecina parabolę $y = -x^2 - 4x$ w punktach $O = (0,0)$ i $A = (-3, -3)$.

- W lekcji znajduje się lista zadań doskonalących umiejętność rozwiązywania układów równań, z których co najmniej jedno jest stopnia drugiego. Zadania te mogą być wydrukowane, zaprezentowane na ekranie lub tablicy interaktywnej. Są one rozwiązywane przez uczniów pod kierunkiem nauczyciela.

Zadanie 1.

Rozwiąż poniższe układy równań:

- a) $\begin{cases} x - y = -1 \\ xy = 2 \end{cases}$
b) $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 4 \end{cases}$



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

		<p>c) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 - 4x + y^2 = 0 \end{cases}$</p> <p>d) $\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4 \\ (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 4 \end{cases}$</p> <p>e) $\begin{cases} x = y^2 \\ x - y = 2 \end{cases}$</p> <p>Zadanie 2. Znajdź dwie liczby dodatnie, których suma jest trzykrotnie większa od różnicy, a iloczyn trzykrotnie większy od sumy.</p> <p>Zadanie 3. Suma cyfr pewnej liczby dwucyfrowej wynosi 11. Jeżeli pomnożymy tę liczbę przez liczbę o przedstawionych cyfrach, to otrzymamy 3478. Jaka to liczba?</p> <p>Zadanie 4. Suma dwóch liczb wynosi 64, zaś ich iloczyn 943. Wyznacz te liczby.</p> <p>Zadanie 5. Właściciel sklepu zakupił pewną ilość ciastek za kwotę 1440 zł. Gdy ciastka podrożały o 40 gr, to za tę samą kwotę mógł kupić o 40 ciastek mniej. Ile ciastek i w jakiej cenie zakupił właściciel sklepu?</p>
7	Podsumowanie zajęć	<p>➤ Uczniowie przystępują do samodzielnego rozwiązywania zadań otwartych zamieszczonych na platformie e-learningowej, których rozwiązania przesyłają do sprawdzenia nauczycielowi.</p> <p>Zadanie 1. Rozwiąż następujący układ równań: $\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = 2x^2 - 10x + 5 \end{cases}$</p> <p>Zadanie 2. Rozwiąż następujący układ równań: $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 4 \\ y = x^2 - 9x + 18 \end{cases}$</p>

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

		<p>Zadanie 3. Rozwiąż następujący układ równań: $\begin{cases} y = 2x^2 + 3 \\ y = 2x - 4 \end{cases}$</p> <p>Zadanie 4. Obwód pewnego prostokąta ma długość 42 cm, zaś jego pole wynosi 104 cm². Oblicz długości boków tego prostokąta.</p>
8	Uwagi metodyczne do realizacji	



Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Scenariusz nr 8*: Równania zawierające więcej niż jedną wartość bezwzględną

Temat zajęć		Równania zawierające więcej niż jedną wartość bezwzględną
Dział		Równania i nierówności
Klasa (poziom edukacyjny)		
Czas trwania zajęć		90 min
Lp.	Element scenariusza	Treść zajęć
1	Cel ogólny	<ul style="list-style-type: none"> • Kształcenie samodzielności pracy • Rozwijanie umiejętności czytania ze zrozumieniem • Ćwiczenie umiejętności rozwiązywania równań z jedną lub kilkoma wartościami bezwzględnymi
2	Cele szczegółowe	<ul style="list-style-type: none"> • Uczeń: • wykazuje się umiejętnością korzystania z definicji wartości bezwzględnej; • potrafi wykorzystywać własności wartości bezwzględnej do rozwiązywania równań.
3	Formy i metody	<ul style="list-style-type: none"> • Praca indywidualna • Praca w grupie
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	Moduł e-learningowy „Równania i nierówności”.
5	Wprowadzenie do	Logowanie na platformie e-learningowej oraz wyjaśnienie zasad pracy na lekcji.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

	zajęć													
6	Przebieg zajęć (pełna wersja)	<p>Lekcja jest prowadzona z wykorzystaniem platformy e-learningowej z kursem „Równania i nierówności”. Równań z wartością bezwzględną dotyczy lekcja 3. Praca na lekcji odbywa się z wykorzystaniem mobilnej pracowni komputerowej, tak aby każdy uczeń miał dostęp do komputera.</p> <p>Wspólnie z uczniami rozwiązujemy przykłady zawarte na platformie e-learningowej:</p> <p>Przykład 1. Rozwiążemy równanie $x + 4 - 5 = 6$. Opuszczamy „zewnątrzną” wartość bezwzględną i otrzymujemy alternatywę dwóch równań: $x + 4 - 5 = 6$ lub $x + 4 - 5 = -6$ Przekształcamy każde z nich i otrzymujemy: $x + 4 = 11$ lub $x + 4 = -1$ Z pierwszego równania mamy: $x + 4 = 11$ lub $x + 4 = -11$ Zatem $x = 7$ lub $x = -15$. Równanie $x + 4 = -1$ jest sprzeczne. Odpowiedź: Równanie $x + 4 - 5 = 6$ ma dwa rozwiązania $x = 7$ oraz $x = -15$.</p> <p>Przykład 2. Rozwiążemy równanie $x - 1 + x + 3 = 4$. Rozwiązując to równanie musimy opuszczać wartości bezwzględne na przedziałach, w zależności od tego, czy dla liczb z danego przedziału wyrażenie wewnątrz wartości bezwzględnej jest nieujemne, czy ujemne</p> <table border="1" data-bbox="584 1082 1711 1281"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>$(-\infty, -3)$</th> <th>$(-3, 1)$</th> <th>$(1, \infty)$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$x - 1$</td> <td>$-x + 1$</td> <td>$-x + 1$</td> <td>$x - 1$</td> </tr> <tr> <td>$x + 3$</td> <td>$-x - 3$</td> <td>$x + 3$</td> <td>$x + 3$</td> </tr> </tbody> </table> <p>Dla $x \in (-\infty, -3)$ równanie przyjmuje postać $-x + 1 - x - 3 = 4$ Porządkujemy to równanie i rozwiązujemy:</p>	x	$(-\infty, -3)$	$(-3, 1)$	$(1, \infty)$	$ x - 1 $	$-x + 1$	$-x + 1$	$x - 1$	$ x + 3 $	$-x - 3$	$x + 3$	$x + 3$
x	$(-\infty, -3)$	$(-3, 1)$	$(1, \infty)$											
$ x - 1 $	$-x + 1$	$-x + 1$	$x - 1$											
$ x + 3 $	$-x - 3$	$x + 3$	$x + 3$											

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

		$-2x - 2 = 4$ $-2x = 6$ <p>$x = -3$ nie należy do przedziału $(-\infty, -3)$. Więc w tym przedziale nie mamy rozwiązań. Dla $x \in (-3, 1)$ mamy: $-x + 1 + x + 3 = 4$ A z tego po uporządkowaniu: $4 = 4$. Otrzymujemy tożsamość i cały przedział $(-3, 1)$ jest rozwiązaniem nierówności. Dla $x \in (1, \infty)$ mamy: $x - 1 + x + 3 = 4$. A z tego wynika $2x + 2 = 4$ $2x = 2$ $x = 1$ i jest to liczba należąca do przedziału $(1, \infty)$, czyli rozwiązanie równania. Odpowiedź: Rozwiązaniem danego równania są liczby z przedziału $(-3, 1)$.</p> <p>➤ <i>W lekcji znajduje się lista zadań doskonalących umiejętność rozwiązywania równań zawierających więcej niż jedną wartość bezwzględną. Zadania te mogą być wydrukowane, zaprezentowane na ekranie lub tablicy interaktywnej. Są one rozwiązywane przez uczniów pod kierunkiem nauczyciela.</i></p> <p>Zadanie 1. Rozwiąż równania: a) $x - 5 = 2$ b) $x + 4 = 8$ c) $x - 6 = 6$ d) $x + 8 = 8$</p> <p>Zadanie 2. Rozwiąż równania: a) $x + 4 + 3 = 8$ b) $x - 5 - 7 = 3$ c) $3x - 8 + 2 = 3$ d) $2x + 5 - 1 = 2$</p>
--	--	---

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

		<p>Zadanie 3. Rozwiąż równanie:</p> <p>a) $x - 3 + x + 3 = 6$ b) $x - 1 + x + 3 = 4$ c) $2x + 3 = x - 1 + 8$ d) $6 - 4 - x = 2 - 3x$ e) $\sqrt{x^2 + 6x + 9} - x - 2 = x$ f) $\sqrt{16 - 8x + x^2} - \sqrt{x^2} = x + 3$ g) $2x + 4 - \sqrt{x^2 - 2x + 1} = 3$</p>
7	Podsumowanie zajęć	<p>Na koniec zajęć nastąpi omówienie wyników i najczęściej pojawiających się problemów.</p> <p>➤ Uczniowie przystępują do samodzielnego rozwiązywania zadań otwartych zamieszczonych na platformie e-learningowej, których rozwiązania przesyłają do sprawdzenia nauczycielowi.</p> <p>Zadanie 3.1 Rozwiąż równania:</p> <p>a) $2x + 3 - x - 1 = 4$ b) $6 - \sqrt{16 - 8x + x^2} = 2 - 3x$</p>
8	Uwagi metodyczne do realizacji	

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Scenariusz nr 9*: Nierówności zawierające więcej niż jedna wartość bezwzględna

Temat zajęć		Nierówności zawierające więcej niż jedna wartość bezwzględna
Dział		Równania i nierówności
Klasa (poziom edukacyjny)		
Czas trwania zajęć		90 min
Lp.	Element scenariusza	Treść zajęć
1	Cel ogólny	<ul style="list-style-type: none"> • Kształcenie samodzielności pracy • Rozwijanie umiejętności czytania ze zrozumieniem • Ćwiczenie umiejętności rozwiązywania nierówności z jedną lub kilkoma wartościami bezwzględnymi
2	Cele szczegółowe	<p>Uczeń</p> <ul style="list-style-type: none"> • wykazuje się umiejętnością korzystania z definicji wartości bezwzględnej • potrafi wykorzystywać własności wartości bezwzględnej do rozwiązywania nierówności
3	Formy i metody	<ul style="list-style-type: none"> • Praca indywidualna • Praca w grupie
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	Moduł e-learningowy „Równania i nierówności”.
5	Wprowadzenie do	Logowanie na platformie e-learningowej oraz wyjaśnienie zasad pracy na lekcji.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

	zajęć													
6	Przebieg zajęć (pełna wersja)	<p>Lekcja jest prowadzona z wykorzystaniem platformy e-learningowej z kursem „Równania i nierówności”. Nierówności z wartością bezwzględną dotyczy lekcja 3. Praca na lekcji odbywa się z wykorzystaniem mobilnej pracowni komputerowej, tak aby każdy uczeń miał dostęp do komputera. Wspólnie z uczniami rozwiązujemy przykład zawarty na platformie e-learningowej:</p> <p>Przykład: Rozwiąż nierówność $x - 3 - x < 5$. Rozwiązując tę nierówność musimy opuszczać wartości bezwzględne na przedziałach, w zależności od tego, czy dla liczb z danego przedziału wyrażenie wewnątrz wartości bezwzględnej jest nieujemne, czy ujemne</p> <table border="1" data-bbox="584 719 1711 919"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>$(-\infty, 0)$</th> <th>$\langle 0, 3 \rangle$</th> <th>$\langle 3, \infty$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$x - 3$</td> <td>$-x + 3$</td> <td>$-x + 3$</td> <td>$x - 3$</td> </tr> <tr> <td>x</td> <td>$-x$</td> <td>x</td> <td>x</td> </tr> </tbody> </table> <p>Rozwiązując to równanie musimy opuszczać wartości bezwzględne na przedziałach, w zależności od tego, czy dla liczb z danego przedziału wyrażenie wewnątrz wartości bezwzględnej jest nieujemne, czy ujemne. Dla $x \in (-\infty, 0)$ równanie przyjmuje postać $-x + 3 - (-x) < 5$ Porządkujemy to równanie i rozwiązujemy:</p> $\begin{aligned} -x + 3 + x &< 5 \\ 3 &< 5 \end{aligned}$ <p>Jest to tożsamość i uwzględniając rozważany przedział otrzymujemy $x \in (-\infty, 0)$. Dla $x \in \langle 0, 3 \rangle$ mamy: $-x + 3 - x < 5$ A z tego po uporządkowaniu: $-2x < 2$. $x > -1$ i wobec założenia $x \in \langle 0, 3 \rangle$ otrzymujemy $x \in \langle 0, 3 \rangle$.</p>	x	$(-\infty, 0)$	$\langle 0, 3 \rangle$	$\langle 3, \infty$	$ x - 3 $	$-x + 3$	$-x + 3$	$x - 3$	$ x $	$-x$	x	x
x	$(-\infty, 0)$	$\langle 0, 3 \rangle$	$\langle 3, \infty$											
$ x - 3 $	$-x + 3$	$-x + 3$	$x - 3$											
$ x $	$-x$	x	x											

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Dla $x \in \langle 3, \infty \rangle$ mamy: $x - 3 - x < 5$

Zatem $-3 < 5$.

Jest to tożsamość i wobec założenia $x \in \langle 3, \infty \rangle$ jest to rozwiązanie.

Odpowiedź: Sumując wszystkie wyniki otrzymujemy, że nierówność jest spełniona przez dowolną liczbę rzeczywistą.

➤ W lekcji znajduje się lista zadań doskonalących umiejętność rozwiązywania nierówności zawierających więcej niż jedną wartość bezwzględną. Zadania te mogą być wydrukowane, zaprezentowane na ekranie lub tablicy interaktywnej. Są one rozwiązywane przez uczniów pod kierunkiem nauczyciela.

Zadanie 1.

Rozwiąż nierówność:

a) $||x| - 5| < 3$

b) $||x| + 3| \geq 2$

c) $||x - 3| + 1| \leq 2$

d) $||3x - 4| - 5| > 4$

Zadanie 2.

Rozwiąż nierówność:

a) $|3 - x| - |x| > 3$

b) $|x + 2| + |x| \leq 6$

c) $\sqrt{x^2 + 4x + 4} - 6 \leq |x - 4|$

d) $|2x - 3| - 16 > \sqrt{x^2 + 2x + 1}$

e) $2\sqrt{x^2 - 4x + 4} \geq |x| + 1$

f) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + |2x - 5| \leq 9$

Zadanie 3.

Rozwiąż nierówność:

a) $|x - 3| < x + 2$

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

		b) $ x - 3 < 1 - x$ c) $2 x - 3 + x < -2$ d) $ x + 2 \geq 2x - 1$
7	Podsumowanie zajęć	<p>Na koniec zajęć nastąpi omówienie wyników i najczęściej pojawiających się problemów.</p> <p>➤ Uczniowie przystępują do samodzielnego rozwiązywania zadań otwartych zamieszczonych na platformie e-learningowej, których rozwiązania przesyłają do sprawdzenia nauczycielowi.</p> <p>Zadanie 3.3. Rozwiąż nierówności: a) $x - 1 - 4 < 6$ b) $2x - 3 - 5 > 13 + x + 1$</p>
8	Uwagi metodyczne do realizacji	

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Scenariusz nr 10*: Równania liniowe z parametrem

Temat zajęć		Równania liniowe z parametrem
Dział		Równania i nierówności
Klasa (poziom edukacyjny)		
Czas trwania zajęć		90 min
Lp.	Element scenariusza	Treść zajęć
1	Cel ogólny	<ul style="list-style-type: none"> • Kształcenie samodzielności pracy • Rozwijanie umiejętności czytania ze zrozumieniem • Ćwiczenie umiejętności rozwiązywania równań liniowych i analizy ich rozwiązań w zależności od parametru
2	Cele szczegółowe	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> • wykazuje się umiejętnością rozwiązywania równań liniowych; • potrafi rozwiązywać i analizować rozwiązania równania liniowego w zależności od występującego w nim parametru.
3	Formy i metody	<ul style="list-style-type: none"> • Praca indywidualna • Praca w grupie
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł,	Moduł e-learningowy „Równania i nierówności”.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

	gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Logowanie na platformie e-learningowej oraz wyjaśnienie zasad pracy na lekcji.
6	Przebieg zajęć (<i>pełna wersja</i>)	<p>Lekcja jest prowadzona z wykorzystaniem platformy e-learningowej z kursem „Równania i nierówności”. Zagadnienia związane z równaniami liniowymi z parametrem występują w lekcji 5. Praca na lekcji odbywa się z wykorzystaniem mobilnej pracowni komputerowej, tak aby każdy uczeń miał dostęp do komputera.</p> <p>Wspólnie z uczniami rozwiążemy przykład zawarty na platformie e-learningowej:</p> <p>Analiza liczby rozwiązań równania liniowego postaci $ax + b = 0$:</p> <p>Przypomnijmy:</p> <ul style="list-style-type: none"> - jeżeli $a = 0$ to równanie jest oznaczone i ma jeden pierwiastek $x = -\frac{b}{a}$ - jeżeli $a = 0$ i $b = 0$ to równanie jest tożsamościowe i ma nieskończenie wiele pierwiastków - jeżeli $a = 0$ i $b \neq 0$ to równanie jest sprzeczne i nie posiada rozwiązań. <p>Korzystając z tych informacji będziemy analizować rozwiązania równań liniowych w zależności od występujących w nich parametrów. Zrobimy to na przykładach.</p> <p>Przykład 1.</p> <p>Oblicz, dla jakiej wartości parametru k równanie $kx - 8 = 2x$:</p> <ol style="list-style-type: none"> a) Nie ma rozwiązania b) Ma pierwiastek $x = 4$ c) ma pierwiastek ujemny <p>Ad a) Chcąc określić kiedy równanie jest sprzeczne doprowadzamy przenosimy wszystko na jedną stronę równości i grupujemy wyrazy ze względu na potęgę zmiennej x.</p> $kx - 2x - 8 = 0$ $x(k - 2) - 8 = 0$ <p>Równanie jest sprzeczne, gdy wyraz wolny jest niezerowy (u nas wynosi on -8) i współczynnik przy x jest równy, czyli $k - 2 = 0$.</p> <p>Zatem dla $k = 2$ równanie jest sprzeczne.</p>

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Ad b) Liczba $x = 4$ jest pierwiastkiem równania, więc spełnia to równanie. Możemy podstawić

$$k \cdot 4 - 8 = 2 \cdot 4$$

$$4k = 16$$

$$k = 4$$

Odpowiedź: Liczba $x = 4$ jest pierwiastkiem równania, gdy $k = 4$.

Ad c) Aby określić kiedy pierwiastek jest ujemny, musimy go najpierw wyliczyć

$$x(k - 2) = 8 \quad |: (k - 2)$$

$$x = \frac{8}{k - 2}$$

Pierwiastek ten istnieje, gdy mianownik ułamka jest niezerowy, zatem $k \neq 2$.

Pierwiastek jest ujemny, zatem zachodzi warunek $\frac{8}{k-2} < 0$.

Ułamek jest ujemny, jego licznik dodatni, więc mianownik musi być ujemny i otrzymujemy:

$$k - 2 < 0$$

$$k < 2$$

Odpowiedź: Równanie posiada pierwiastek ujemny, gdy $k < 2$.

Przykład 2

Przedyskutujemy liczbę rozwiązań równania $m^2x - m^2 = 4x + 2m$ z niewiadomą x ze względu na wartość parametru m .

Przenosimy wszystko na jedną stronę równania i grupujemy wyrazy ze względu na potęgę zmiennej x .

$$m^2x - 4x - m^2 - 2m = 0$$

$$(m^2 - 4)x - m^2 - 2m = 0$$

- jeżeli $m^2 - 4 \neq 0$, to równanie jest oznaczone i ma jedno rozwiązanie. Rozwiązujemy ten warunek $m^2 \neq 4$ i dlatego $m \neq -2$ i $m \neq 2$. Jest więc on spełniony gdy $m \in R \setminus \{-2, 2\}$. Pozostaje sprawdzić, co dzieje się z równaniem dla $m = -2$ i $m = 2$.
- Jeżeli $m = -2$, to równanie przyjmuje postać $((-2)^2 - 4)x - (-2)^2 - 2(-2) = 0$
Wykonując działania mamy $(4 - 4)x - 4 + 4 = 0$

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

I dalej $0 = 0$, co jest tożsamością

- Jeżeli $m = 2$, to po podstawieniu tej wartości do równania mamy

$$(2^2 - 4)x - 2^2 - 2 \cdot 2 = 0$$

i dalej $0 \cdot x - 4 - 4 = 0$

$-8 = 0$, co jest sprzecznością.

Odpowiedź: Dane równanie jest oznaczone, gdy $m \in R \setminus \{-2, 2\}$; tożsamościowe, gdy $m = -2$, zaś oznaczone dla $m = 2$.

- W lekcji znajduje się lista zadań doskonalących umiejętność rozwiązywania nierówności zawierających więcej niż jedną wartość bezwzględną. Zadania te mogą być wydrukowane, zaprezentowane na ekranie lub tablicy interaktywnej. Są one rozwiązywane przez uczniów pod kierunkiem nauczyciela.

Zadanie 1.

Wyznacz wartość parametru m , dla której równanie $6x + mx = m^2 - 36$ nie ma rozwiązania.

Zadanie 2.

Rozwiązaniem równania $2x + |m| = 18$ jest liczba $1 - 3\sqrt{2}$. Wyznacz parametr m .

Zadanie 3.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których rozwiązanie równania $3x + 1 = 5m^2 - 4m$ jest liczbą ujemną większą od $\left(-\frac{1}{3}\right)$.

Zadanie 4.

Określ liczbę rozwiązań równania w zależności od parametru m , gdy:

- $m^2x + 4 = 4mx + m$
- $m^2 - m = 3(x + 2) + 33x$
- $m^2x + 8 = m(4x + 2)$
- $5mx - 3m^2 = 10x - 12$
- $m^2x - m = 4x + m^2 - 2$
- $mx - 6m - 9 = m^2 - 3x$
- $m^2x + 8mx - m^2 = -16(x + 1)$

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

		<p>h) $m^2x + x - m^2 = -2mx - 1$</p> <p>Zadanie 5. Rozwiąż równanie: $mx - 8 = 4x + b$ w zależności od parametrów k i l.</p>
7	Podsumowanie zajęć	<p>Na koniec zajęć nastąpi omówienie wyników i najczęściej pojawiających się problemów.</p> <p>➤ Uczniowie przystępują do samodzielnego rozwiązywania zadań otwartych zamieszczonych na platformie e-lerningowej, których rozwiązania przesyłają do sprawdzenia nauczycielowi.</p> <p>Zadanie 5.1. Określ liczbę rozwiązań równania z niewiadomą x w zależności od parametru m:</p> <p>a) $3mx - 2m^2 = 6x - 8$ b) $m^2x - m^2 + 1 = 2mx - x$ c) $m^2x - m + 2 = m^2 + x$</p>
8	Uwagi metodyczne do realizacji	

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Scenariusz nr 11*: Układy równań liniowych z parametrem

Temat zajęć		Układy równań liniowych z parametrem
Dział		Równania i nierówności
Klasa (poziom edukacyjny)		
Czas trwania zajęć		90 min
Lp.	Element scenariusza	Treść zajęć
1	Cel ogólny	<ul style="list-style-type: none"> • Kształcenie samodzielności pracy • Rozwijanie umiejętności czytania ze zrozumieniem • Ćwiczenie umiejętności rozwiązywania układów równań liniowych i analizy ich rozwiązań w zależności od parametru
2	Cele szczegółowe	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> • wykazuje się umiejętnością rozwiązywania układów równań liniowych; • potrafi wykorzystywać analizować rozwiązania układu równania w zależności od występującego w nim parametru.
3	Formy i metody	<ul style="list-style-type: none"> • Praca indywidualna • Praca w grupie
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł,	Moduł e-learningowy „Równania i nierówności”.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

	gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Logowanie na platformie e-learningowej oraz wyjaśnienie zasad pracy na lekcji
6	Przebieg zajęć (<i>pełna wersja</i>)	<p>Lekcja jest prowadzona z wykorzystaniem platformy e-learningowej z kursem „Równania i nierówności”. Zagadnienia związane z układami równań z parametrem występują w lekcji 5. Praca na lekcji odbywa się z wykorzystaniem mobilnej pracowni komputerowej, tak aby każdy uczeń miał dostęp do komputera.</p> <p>Wspólnie z uczniami przypominamy potrzebne wiadomości o o metodach rozwiązywania oraz ilości rozwiązań układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi i rozwiązujemy przykład zawarty na platformie e-learningowej:</p> <p>Przykład 1:</p> <p>Określ, dla jakich wartości parametru k rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x - y = k - 1 \\ 2x - y = -3 - k \end{cases}$ jest para liczb ujemnych.</p> <p>Aby stwierdzić, kiedy rozwiązaniem układu jest para liczb ujemnych, musimy najpierw rozwiązać ten układ. Zrobimy to metodą przeciwnych współczynników:</p> $\begin{cases} x - y = k - 1 & \cdot (-1) \\ 2x - y = -3 - k \end{cases}$ $\begin{cases} -x + y = -k + 1 \\ 2x - y = -3 - k \end{cases}$ <p>Zatem po dodaniu stronami: $x = -2k - 2$</p> <p>Podstawiamy wyznaczoną niewiadomą x do pierwszego równania układu: $-2k - 2 - y = k - 1$ i wyliczamy z tego y: $y = -3k - 1$</p> <p>Rozwiązaniem układu jest para liczb $\begin{cases} x = -2k - 2 \\ y = -3k - 1 \end{cases}$.</p> <p>Obie liczby mają być ujemne, czyli muszą zachodzić warunki:</p>

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

$$-2k - 2 < 0 \quad \text{i} \quad -3k - 1 < 0$$

$$-2k < 2 \quad \text{i} \quad -3k < 1$$

$$k > -1 \quad \text{i} \quad k > -\frac{1}{3}$$

Obie nierówności są spełnione przez liczby $k \in \left(-\frac{1}{3}; \infty\right)$.

Przykład 2 (zostaje zilustrowany na tablicy interaktywnej)

Dla jakich wartości parametru m układ równań z niewiadomymi x i y jest oznaczony, nieoznaczony, sprzeczny? W przypadku istnienia rozwiązania wyznacz je.

$$\begin{cases} x - my = 1 \\ mx - y = 1 \end{cases}$$

Rozwiązujemy równanie metodą przeciwnych współczynników, dlatego drugie równanie pomnożymy stronami przez $-m$

$$\begin{cases} x - my = 1 \\ -m^2x + my = -m \end{cases}$$

Dodając równania stronami otrzymamy:

$$(1 - m^2)x = 1 - m$$

Aby wyznaczyć z równania x musimy założyć, że $1 - m^2 \neq 0$ i wówczas $m \neq 1$ i $m \neq -1$:

$$x = \frac{1 - m}{1 - m^2} \\ x = \frac{1 - m}{(1 - m)(1 + m)}$$

Zatem :

$$x = \frac{1}{1 + m}$$

I wówczas podstawiając do drugiego równania układu:

$$m \frac{1}{1 + m} - y = 1 \\ y = \frac{m}{1 + m} - 1$$

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

		$y = \frac{m - (1 + m)}{1 + m}$ $y = \frac{-1}{1 + m}$ <p>Więc dla $m \in R \setminus \{-1, 1\}$ rozwiązaniem układu jest para liczb:</p> $\begin{cases} x = \frac{1}{1 + m} \\ y = \frac{-1}{1 + m} \end{cases}$ <p>Dla $m = -1$ układ przyjmuje postać:</p> $\begin{cases} x + y = 1 \\ -x - y = 1 \end{cases}$ <p>I dodając równania stronami otrzymujemy $0=2$, czyli układ jest sprzeczny.</p> <p>Dla $m = 1$ układ przyjmuje postać</p> $\begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$ <p>Więc jest to układ nieoznaczony, w którym rozwiązaniem jest każda para liczb $(x, x - 1)$.</p> <p>Odpowiedź: Dla $m \in R \setminus \{-1, 1\}$ rozwiązaniem układu jest para liczb:</p> $\begin{cases} x = \frac{1}{1 + m} \\ y = \frac{-1}{1 + m} \end{cases}$ <p>Dla $m = -1$ układ jest sprzeczny Dla $m = 1$ układ jest nieoznaczony, a jego rozwiązaniem są pary liczb $(x, x - 1)$</p> <p>➤ <i>W lekcji znajduje się lista zadań doskonalących umiejętność rozwiązywania układów równań liniowych z parametrem. Zadania te mogą być wydrukowane, zaprezentowane na ekranie lub tablicy interaktywnej. Są one rozwiązywane przez uczniów pod kierunkiem nauczyciela.</i></p>
--	--	--

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Zadanie 1.

Dla jakich wartości parametrów a i b rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} ax + by = -1 \\ (b + 2)x - ay = -12 \end{cases}$ jest para liczb $(-2, 1)$?

Zadanie 2.

Określ, dla jakich wartości parametru m rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x - 2y = 3m + 5 \\ 2x - 3y = -4 - 2m \end{cases}$

- a) jest para liczb ujemnych
- b) jest para liczb niedodatnich
- c) jest para liczb różnych znaków.

Zadanie 3.

Określ, dla jakich wartości parametru m układ równań $\begin{cases} 2x + my = 1 \\ mx + 8y = 2 \end{cases}$ jest układem:

- a) oznaczonym
- b) nieoznaczonym
- c) sprzecznym.

Zadanie 4.

Określ, dla jakich wartości parametru m rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 3x - 5y = 2m - 3 \\ 2x - 3y = 6 - m \end{cases}$ jest para liczb x i y spełniających warunek:

- a) $3x - 2y = 5$
- b) $4x + 7y \leq -2$

Zadanie 5.

Określ, dla jakich wartości parametru m rozwiązanie układu równań $\begin{cases} 3x - 7y = 4m - 2 \\ 2x - 6y = 7 - 3m \end{cases}$

- a) należy do drugiej ćwiartki układu współrzędnych
- b) spełnia warunek $x \geq -5$ i $y < 3$

Zadanie 6.

Dla jakich wartości parametru m układ równań z niewiadomymi x i y jest oznaczony, nieoznaczony, sprzeczny? W przypadku istnienia rozwiązania wyznacz je.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

		<p>a) $\begin{cases} 4x - 5y = 13 \\ 2x - my = 1 \end{cases}$</p> <p>b) $\begin{cases} 3x - my = 6 - m \\ mx - 3y = 3 \end{cases}$</p> <p>Zadanie 7.</p> <p>Określ, dla jakich wartości parametru m rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x - y = m \\ 2x - 3y = 4m - 5 \end{cases}$ jest para liczb x i y spełniających warunki: $x \leq 5$ i $y > 4$.</p>
7	Podsumowanie zajęć	<p>Na koniec zajęć nastąpi omówienie wyników i najczęściej pojawiających się problemów.</p> <p>➤ Uczniowie przystępują do samodzielnego rozwiązywania zadań otwartych zamieszczonych na platformie e-learningowej, których rozwiązania przesyłają do sprawdzenia nauczycielowi.</p> <p>Zadanie 5.2.</p> <p>Oblicz, dla jakich wartości parametru k rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x + y = k \\ 2x - 3y = 1 - 2k \end{cases}$ jest para liczb x i y spełniających warunek:</p> <p>a) $x < \frac{1}{2}$ i $y < \frac{1}{2}$</p> <p>b) $x + y \leq 2$</p>
8	Uwagi metodyczne do realizacji	

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Scenariusz nr 12*: Wzory Viete'a v.2

Temat zajęć		Wzory Viete'a v.2
Dział		Równania i nierówności
Klasa (poziom edukacyjny)		
Czas trwania zajęć		90 min
Lp.	Element scenariusza	Treść zajęć
1	Cel ogólny	<ul style="list-style-type: none"> • Kształcenie samodzielności pracy • Rozwijanie umiejętności czytania ze zrozumieniem • Ćwiczenie umiejętności rozwiązywania równań kwadratowych
2	Cele szczegółowe	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> • wykazuje się umiejętnością rozwiązywania równań kwadratowych; • potrafi wykorzystywać analizować znaki pierwiastków równania na podstawie współczynników; • potrafi wyznaczyć współczynniki mając dane pierwiastki równania.
3	Formy i metody	<ul style="list-style-type: none"> • Praca indywidualna • Praca w grupie
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	Moduł e-learningowy „Równania i nierówności”.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

5	Wprowadzenie do zajęć	Logowanie na platformie e-learningowej oraz wyjaśnienie zasad pracy na lekcji.
6	Przebieg zajęć (pełna wersja)	<p>Lekcja jest prowadzona z wykorzystaniem platformy e-learningowej z kursem „Równania i nierówności”. Wzory Viete’a i ich zastosowanie do rozwiązywania równań kwadratowych występują w lekcji 10. Praca na lekcji odbywa się z wykorzystaniem mobilnej pracowni komputerowej, tak aby każdy uczeń miał dostęp do komputera.</p> <p>Wspólnie z uczniami przypominamy potrzebne wiadomości o równaniach kwadratowych.</p> <p>Wyprowadzenie wzorów Viete’a</p> <p>Jeżeli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ ma dwa rozwiązania, to można je wyznaczyć korzystając ze wzorów: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ oraz $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.</p> <p>Obliczymy sumę liczb x_1 i x_2:</p> $x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$ <p>Podobnie obliczymy iloczyn rozwiązań:</p> $x_1 \cdot x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b-\sqrt{\Delta}) \cdot (-b+\sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{b^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$ <p>Wzory te zostały odkryte w XVI wieku przez francuskiego matematyka Francois Viete i od jego nazwiska noszą nazwę wzorów Viete’a.</p> <p>Jeśli liczby x_1 i x_2 są rozwiązaniami równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$, to zachodzą równości $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ oraz $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$</p> <p>Analiza znaku pierwiastków równania kwadratowego</p> <p>Korzystając ze wzorów Viete’a możemy ustalić znaki rozwiązań równania kwadratowego bez konieczności rozwiązywania tego równania.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Liczby x_1 i x_2 są różnych znaków, gdy $x_1 \cdot x_2 < 0$. • Liczby x_1 i x_2 są tego samego znaku, gdy $x_1 \cdot x_2 > 0$. • Liczby x_1 i x_2 są dodatnie, gdy $x_1 \cdot x_2 > 0$ i $x_1 + x_2 > 0$.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

- Liczby x_1 i x_2 są ujemne, gdy $x_1 \cdot x_2 > 0$ i $x_1 + x_2 < 0$.

Przykład 1.

Sprawdźmy ile ujemnych rozwiązań ma równanie $2\sqrt{5}x^2 + \sqrt{70}x + 1 = 0$.

Obliczmy wyróżnik, aby sprawdzić ile rozwiązań ma równanie

$$\Delta = (\sqrt{70})^2 - 4 \cdot 2\sqrt{5} \cdot 1 = 70 - 8\sqrt{5} > 0$$

Mamy zatem dwa różne rozwiązania.

Obliczam $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2\sqrt{5}} > 0$ i na tej podstawie mogę stwierdzić, że oba pierwiastki są tych samych znaków (oba dodatnie lub oba ujemne).

Obliczam $x_1 + x_2 = -\frac{\sqrt{70}}{2\sqrt{5}} < 0$, więc oba rozwiązania są ujemne.

Odpowiedź: Równanie ma dwa ujemne rozwiązania.

Przykład 2.

Obliczymy sumę odwrotności rozwiązań równania: $-275x^2 + 45x + 28 = 0$.

Obliczmy wyróżnik, aby sprawdzić ile rozwiązań ma równanie

$$\Delta = 45^2 - 4 \cdot (-275) \cdot 28 = 45^2 + 4 \cdot 275 \cdot 28 > 0$$

oraz sprawdzamy, czy istnieją odwrotności tych rozwiązań (tzn. czy $x_1 \neq 0$ i $x_2 \neq 0$)

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{28}{-275} \neq 0.$$

$$\text{Wtedy } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} = -\frac{b}{c} = -\frac{45}{28}$$

Odpowiedź: Suma odwrotności rozwiązań równania wynosi $-\frac{45}{28}$.

Przykład 3.

Oblicz sumę kwadratów rozwiązań równania $-5x^2 + 14x + 15 = 0$.

Obliczmy wyróżnik, aby sprawdzić ile rozwiązań ma równanie

$$\Delta = 14^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 15 = 196 + 60 \cdot 5 > 0$$

Mamy zatem dwa różne rozwiązania.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Przekształćmy wyrażenie $x_1^2 + x_2^2$ do postaci pozwalającej wykorzystać wzory Viete'a. W tym celu wykorzystamy wzór skróconego mnożenia dotyczący kwadratu sumy dwóch wyrażeń.

$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$$

Po przekształceniu tego wzoru otrzymamy $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$.

Postać ta pozwala na wykorzystanie wzorów Viete'a:

$$x_1^2 + x_2^2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a} = \left(-\frac{-14}{-5}\right)^2 - 2\frac{15}{-5} = \frac{196}{25} + 6 = \frac{196}{25} + \frac{150}{25} = \frac{346}{25}$$

Odpowiedź: Suma kwadratów rozwiązań równania wynosi $\frac{346}{25}$.

Przykład 4.

Oblicz dla jakich wartości b i c , rozwiązaniami równania $x^2 + bx + c = 0$ są liczby -5 i 17 .

Do wyznaczenia współczynników b i c wykorzystamy wzory Viete'a.

Suma pierwiastków równania $x_1 + x_2 = 12$, a z drugiej strony $x_1 + x_2 = -\frac{b}{1}$

Zatem $-b = 12$ i $b = -12$.

Iloczyn pierwiastków równania wynosi $x_1 \cdot x_2 = -85$, a na podstawie wzorów Viete'a $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{1}$.

Porównując te dwie wielkości otrzymujemy $c = 85$.

Odpowiedź: Szukane współczynniki to $b = -12, c = 85$.

- W lekcji znajduje się lista zadań doskonalących umiejętność stosowania wzorów Viete'a do rozwiązywania zadań. Zadania te mogą być wydrukowane, zaprezentowane na ekranie lub tablicy interaktywnej. Są one rozwiązywane przez uczniów pod kierunkiem nauczyciela.

Zadanie 1.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których suma kwadratów dwóch różnych pierwiastków rzeczywistych równania $(m - 1)x^2 - 2mx + m + 3 = 0$ jest mniejsza od 6.

Zadanie 2.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $x^2 + 2(m - 1)x + 2m^2 - 2 = 0$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste tych samych znaków.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Zadanie 3.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $x^2 - (m + 3)x - m - \frac{7}{4} = 0$ ma pierwiastki rzeczywiste, których suma odwrotności jest równa 8.

Zadanie 4.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $x^2 + (3m - 1)x + m^2 - m + 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste ujemne.

Zadanie 5.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $x^2 + (4 - m)x - m + 5 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste o tych samych znakach.

Zadanie 6.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $x^2 + 4mx + m + 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, będące liczbami ujemnymi.

Zadanie 7.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $x^2 + (m + 3)x + m + 3 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, których suma kwadratów jest równa 10.

Zadanie 8.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $x^2 + (m - 2)x + 3m^2 - 7m + 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, których suma kwadratów jest mniejsza od -4 .

Zadanie 9.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $x^2 + (m - 4)x + m^2 - 3m + 4 = 0$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste różnych znaków.

Zadanie 10.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $x^2 + (2m - 2)x + m^2 - 4 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, których suma jest równa 12.

Zadanie 11.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $x^2 + 2m + 2m - 1 = 0$ ma pierwiastki rzeczywiste, których suma jest równa sumie ich kwadratów.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

7	Podsumowanie zajęć	<p>Na koniec zajęć nastąpi omówienie wyników i najczęściej pojawiających się problemów.</p> <p>➤ Uczniowie przystępują do samodzielnego rozwiązywania zadań otwartych zamieszczonych na platformie e-lerningowej w lekcji 10, których rozwiązania przesyłają do sprawdzenia nauczycielowi.</p> <p>Zadanie 10.1. Dla jakich wartości parametru k równanie $kx^2 - (3k - 2)x + 3k - 2 = 0$ ma dwa rozwiązania?</p> <p>Zadanie 10.2. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + mx - m + 3 = 0$ ma dwa różne rzeczywiste rozwiązania ujemne?</p> <p>Zadanie 10.3. Oblicz, dla jakich wartości parametru m różne pierwiastki rzeczywiste równania $x^2 + \sqrt{5}mx + m^2 + m + 3 = 0$ spełniają warunek $x_1^2 + x_2^2 \geq 3x_1x_2$.</p> <p>Zadanie 10.4. Oblicz, dla jakich wartości p i q pierwiastki równania $x^2 + (1 - p)x - q - 3 = 0$ z niewiadomą x są równe liczbom p i q.</p>
8	Uwagi metodyczne do realizacji	

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

Scenariusz nr 13*: Równania kwadratowe niezupełne

Temat zajęć		Równania kwadratowe niezupełne
Dział		Równania i nierówności
Klasa (poziom edukacyjny)		
Czas trwania zajęć		45 min
Lp.	Element scenariusza	Treść zajęć
1	Cel ogólny	<ul style="list-style-type: none"> • Kształcenie umiejętności samodzielnej pracy • Rozwijanie umiejętności czytania ze zrozumieniem • Wykształcenie umiejętności rozwiązywania równań kwadratowych niezupełnych
2	Cele szczegółowe	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> • rozumie pojęcie równania kwadratowego; • potrafi określić współczynniki równania kwadratowego; • potrafi wskazać równania kwadratowe niezupełne; • rozróżnia typy równań kwadratowych niezupełnych; • poprawnie rozwiązuje równania kwadratowe niezupełne;
3	Formy i metody	<ul style="list-style-type: none"> • Praca indywidualna • Praca w grupie
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w	Moduł e-learningowy „Równania i nierówności” – lekcja 6.

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

	projekcie np. moduł, gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Logowanie na platformie e-learningowej oraz wyjaśnienie zasad pracy na lekcji.
6	Przebieg zajęć (pełna wersja)	<p>Definicja równania kwadratowego Definicja. Równanie postaci $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$, w którym x jest niewiadomą, zaś a, b, c są danymi liczbami, nazywamy równaniem kwadratowym. Równanie $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$, w którym współczynniki b lub c (jeden z nich albo oba) są równe zero, nazywamy równaniem kwadratowym niezupełnym.</p> <p>Równania typu $ax^2 + c = 0, a \neq 0$.</p> <p>Przykład 1. Rozwiążemy równanie: $-6x^2 + 18 = 0$.</p> $\begin{aligned} -6x^2 + 18 &= 0 \quad -18 \\ -6x^2 &= -18 \quad :(-6) \\ x^2 &= 3 \\ x &= \sqrt{3} \text{ lub } x = -\sqrt{3} \end{aligned}$ <p>Odpowiedź: Równanie ma dwa rozwiązania $x = \sqrt{3}$ oraz $x = -\sqrt{3}$</p> <p>Przykład 2. Rozwiążemy równanie: $5x^2 + 3 = 0$.</p> $\begin{aligned} 5x^2 + 3 &= 0 \quad -3 \\ 5x^2 &= -3 \quad :5 \\ x^2 &= -\frac{3}{5} \end{aligned}$ <p>Równanie jest sprzeczne, gdyż nie istnieje liczba rzeczywista, której kwadrat jest liczbą ujemną.</p> <p>Przykład 3. Rozwiążemy równanie: $2(x^2 - 3) = -6$.</p> $\begin{aligned} 2(x^2 - 3) &= -6 \\ 2x^2 - 6 &= -6 \quad +6 \end{aligned}$

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

$$2x^2 = 0 \quad |:2$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

Wniosek: Równanie postaci $ax^2 + c = 0$, $a \neq 0$ może:

- A. posiadać dwa rozwiązania, gdy współczynniki a i c ($c \neq 0$) są różnych znaków
- B. nie posiadać rozwiązań, gdy współczynniki a i c ($c \neq 0$) są jednakowych znaków
- C. posiadać jeden pierwiastek $x = 0$, gdy $c = 0$.

Ćwiczenie 1. B

Ile rozwiązań ma równanie $-3x^2 = -7$

- A. jedno
- B. dwa
- C. nie posiada rozwiązań
- D. ma nieskończenie wiele rozwiązań

Ćwiczenie 2. C

Zbiorem wszystkich rozwiązań równania $\frac{4}{3}x^2 - 8 = 0$ jest zbiór

- A. $\left\{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}$
- B. $\{\sqrt{6}\}$
- C. $\{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\}$
- D. \emptyset

Ćwiczenie 3. A

Kwadrat różnicy pierwiastków równania $4x^2 = 8$ jest równy:

- A. 8
- B. 0
- C. 2
- D. 16

Równania typu $ax^2 + bx = 0$, $a \neq 0$.

Przykład. Rozwiążemy równanie: $-3x^2 + 8x = 0$.

$$-3x^2 + 8x = 0$$

$$x(-3x + 8) = 0$$

Iloczyn jest równy zero, gdy co najmniej jeden z czynników jest równy zero, czyli

$$x = 0 \text{ lub } -3x + 8 = 0$$

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy

Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

$$-3x = -8 \quad | :(-3)$$

$$x = \frac{8}{3}$$

Wniosek: Każde równanie kwadratowe postaci $ax^2 + bx = 0$, $a \neq 0$ i $b \neq 0$ ma dwa pierwiastki

$$x_1 = 0 \text{ i } x_2 = -\frac{b}{a}$$

Ćwiczenie 4. C

Zbiorem wszystkich rozwiązań równania $3x^2 = -4x$ jest zbiór:

A. $\left\{-\frac{4}{3}\right\}$ B. $\{0\}$ C. $\left\{-\frac{3}{4}, 0\right\}$ D. $\left\{-\frac{4}{3}, 0\right\}$

Ćwiczenie 5. C

Tylko jeden pierwiastek ma równanie:

A. $x^2 = 6$ B. $2x^2 + 50 = 0$ C. $2x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$ D. $3x^2 = -7x$

Ćwiczenie 6. B

Pierwiastkami równania $\sqrt{5}x^2 = 5\sqrt{5}x$ są liczby:

A. 0 i $\sqrt{5}$ B. 0 i 5 C. 0 i -5 D. 0 i $-\sqrt{5}$

➤ W lekcji znajduje się lista zadań doskonalących umiejętność rozwiązywania równań kwadratowych niepełnych. Zadania te mogą być wydrukowane, zaprezentowane na ekranie lub tablicy interaktywnej. Są one rozwiązywane przez uczniów pod kierunkiem nauczyciela.

Zadanie 1.

Rozwiąż równania:

- $x^2 + 3 = 3(x + 1)$
- $2(x^2 - 5) = 7x - 10$
- $(x - 3)^2 - 4 = 2x^2 + 3x + 5$
- $3x^2 + 4x - 1 = (x + 2)^2 - 5$
- $(x - 4)(x + 4) = 5x^2 - 4(x + 4)$
- $x^2 + (3 - 2x)(3 + 2x) = 4(x + 5) - 11$

		<p>Zadanie 2. Rozwiąż równania:</p> <p>a) $x^2 + 4(x - 1) = 2(2x + 6)$ b) $3(x^2 - 2x) + 5 = (x - 3)^2 - 4$ c) $-2(x^2 + 4x) + 3 = 2(x - 2)^2 + 1$ d) $(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5}) + 6x = 3(2x + 1)$ e) $(6x - 7)^2 = 81$ f) $(5 - 3x)^2 = 7$ g) $\frac{x^2+2}{3} - 4 = 0$ h) $\frac{4x^2-3}{2} - 3 = 0$</p> <p>Zadanie 3. Rozwiąż równania:</p> <p>a) $(3x - 5)^2 = (5x - 3)^2 + 7$ b) $(x - 5)(x + 5) = -16$ c) $(2x - 3)^2 + 4x - 3 = 3(x + 2)$ d) $(x - 5)(2 + 4x) = -10(1 - x)(1 + x)$ e) $(4x - 1)(2 - 5x) = (2x + 3)^2 + x - 6$ f) $\frac{x^2-5x+2}{2} - \frac{x^2+x+3}{3} = 0$</p>
7	Podsumowanie zajęć	<p>➤ Uczniowie przystępują do samodzielnego rozwiązywania zadań otwartych zamieszczonych na platformie e-learningowej, których rozwiązania przesyłają do sprawdzenia nauczycielowi.</p> <p>Zadanie 1. Rozwiąż równanie: $(3x + 2)^2 = (2x + 3)^2 + 10$</p> <p>Zadanie 2. Iloczyn czwartej i piątej części pewnej liczby jest równy tej liczbie. Wyznacz tę liczbę.</p>

Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy
Zbiór scenariuszy „Mój przedmiot matematyka”

8	Uwagi metodyczne do realizacji	
---	--------------------------------	--

