Wstęp

Zbiór „Mój przedmiot matematyka” jest zestawem 132 scenariuszy przeznaczonych dla uczniów szczególnie zainteresowanych matematyką. Scenariusze mogą być wykorzystywane przez nauczycieli zarówno na typowych zajęciach lekcyjnych wpisanych w zakres podstawowy, jak też w ramach dodatkowych zajęć poszerzających wiedzę uczniów, np. koła zainteresowań. Scenariusze wymagają zastosowania komputerów z dostępem do internetu. Takie wyposażenie pozwoli na wykorzystanie środków dydaktycznych przewidzianych w projekcie „Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy” takich jak moduły e-learningowe: „Elementy statystyki i rachunek prawdopodobieństwa”, „Funkcja kwadratowa”, „Równania i nierówności liniowe i kwadratowe”, „Wielomiany”, gry strategiczne „Wyprawa Nasreddina”, „Herbatka u królowej Anglii”, „Wyprawa na grzyby”, „Matemafia” oraz „Międzykontynentalna szkoła”, poradniki „Ciągi”, „Planimetria”, „Trygonometria”, „Geometria analityczna”. Scenariusze mogą być realizowane na zajęciach lekcyjnych jako całość lub nauczyciel dokonuje wyboru określonych materiałów zgodnie z zaplanowanymi przez siebie tematami – zwiększa to elastyczność stosowania pakietu np. w sytuacji braku zapewnienia w placówce odpowiednich warunków technicznych do realizacji materiału w oparciu o cały pakiet.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Spis scenariuszy

Scenariusz nr 1: Pojęcie wielomianu

Temat zajęć		**Pojęcie wielomianu**
Dział		**Wielomiany**
Klasa (poziom edukacyjny)		**Klasa druga lub jako materiał powtórzeniowy do matury w klasie trzeciej lub czwartej**
Czas trwania zajęć		**45 min.**
Lp.	**Element scenariusza**	**Treść zajęć**
1	Cel ogólny	• Kształcenie umiejętności samodzielnego dochodzenia do wiedzy • Rozwijanie umiejętności czytania zadań ze zrozumieniem • Wykształcenie umiejętności rozwiązywania podstawowych zadań dotyczących wielomianów
2	Cele szczegółowe	Uczeń: • rozumie pojęcie wyrażenia algebraicznego; • poprawnie oblicza wartość wyrażenia algebraicznego; • rozróżnia jednomiany, dwumiany, trójmiany; • rozumie pojęcie wielomianu; • potrafi określić stopień wielomianu i wypisać jego współczynniki; • poprawnie oblicza wartość wielomianu.
3	Formy i metody	• Pogadanka • Praca z zespołem klasowym • Praca samodzielna
4	Środki dydaktyczne	Lekcję prowadzimy wykorzystując do tego kurs „Wielomiany” (lekcja 1) zamieszczony na platformie

	(ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	e-learningowej moodle oraz mobilną pracownię komputerową aby każdy uczeń miał samodzielny dostęp do komputera.
5	Wprowadzenie do zajęć	Informujemy uczniów o przebiegu lekcji: Przechodzimy przez strony lekcji 1 - „Pojęcie wielomianu”, uczniowie zapoznają się z teorią, wykonują samodzielnie ćwiczenia, które się z nią przeplatają. Rozwiązujemy zadania do wykonania na lekcji. Zadania 1.1, 1.2, 1.3 umieszczone na platformie uczniowie rozwiązują sami i rozwiązania przesyłają nauczycielowi bądź to jeszcze w czasie trwania lekcji lub jako praca domowa. Logujemy się na platformie. Wchodzimy na kurs „Wielomiany”. Wybieramy **Lekcja 1 – Pojęcie wielomianu** W lekcji pierwszej uczniowie przypomną sobie pojęcia takie jak wyrażenie algebraiczne czy jednomian, a także zapoznają się z definicją wielomianu.
6	Przebieg zajęć *(pełna wersja)*	**Przypominamy pojęcie wyrażenia algebraicznego:** **Strona1: Wyrażenie algebraiczne** W gimnazjum zetknęliście się z pojęciem *wyrażenia algebraicznego* czy *jednomianu*. Przypomnijmy sobie ich definicje: **Wyrażeniem algebraicznym** nazywamy wyrażenie, w którym liczby i litery połączone są znakami działań i nawiasami. Przykładami wyrażeń algebraicznych są: **ab, 3(x - y), (c + 5)^3,** $\frac{t+z}{t-z}$ Aby obliczyć wartość wyrażenia algebraicznego trzeba podstawić liczby w miejsce liter,

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

		Np.: Mamy wyrażenie algebraiczne $x(y-2)^3$ dla x = 7 i y = -1 ma wartość $7(-1-2)^3 = 7(-3)^3 = 7(-27) = -189$ **Uczniowie samodzielnie rozwiązują ćwiczenie 1:** Strona2: ćwiczenie 1 Wartość wyrażenia $\frac{x^2-1}{x^3-y^2}$ dla x = -1 i dla y = -2 wynosi: ● 2/5 ● 3/5 ● 0 **Idziemy dalej i uczniowie poznają pojęcie jednomianu, dwumianu, trójmianu.** Strona3: Jednomian **Jednomianem** nazywamy pojedyncze zmienne, liczby lub ich iloczyny. Przykładami jednomianów są: **3**, **2x**, **5xy**, $-x^3yz$, xyt^8. *Liczbę występującą w jednomianie nazywamy współczynnikiem.* My zajmiemy się jednomianami jednej zmiennej x, czyli wyrażeniami ax^n, gdzie **a** jest **współczynnikiem,** a $n \in N$ i **n** nazywamy **stopniem jednomianu**. Sumę dwóch jednomianów różnych stopni, np.: $x^2 + 2x$, $5x^4 + 1$, nazywamy **dwumianem.** Sumę trzech jednomianów różnych stopni, np.: $x^2 + 2x + 1$, $6x^3 - 5x^2 - x$ nazywamy **trójmianem.** *Jak łatwo zauważyć **wielomian** jest więc sumą wielu jednomianów różnych stopni.* **Uczniowie samodzielnie rozwiązują ćwiczenie 2:** Strona4: ćwiczenie 2 Wyrażenie $5x^4 + 3x - 8$ jest: ● jednomianem ● dwumianem

- trójmianem

Nauczyciel wprowadza pojęcie wielomianu:

Strona5: Wielomian

Wielomianem zmiennej x nazywamy wyrażenie postaci $\mathbf{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0}$, gdzie $\mathbf{a_n, a_{n-1}, \ldots a_2, a_1, a_0}$ to **współczynniki**, które są **liczbami rzeczywistymi, n∈N** i jest **stopniem wielomianu** oraz $\mathbf{a_n}$ **# 0**.

Współczynnik a_0 jest wyrazem wolnym. Zmienna wielomianu może być dowolną literą.

Podam teraz przykłady wielomianów, określę ich stopnie i wypiszemy współczynniki

1) $\mathbf{W(x) = 7x^6 - 3x^2 + 9}$ wielomian W zmiennej x, stopnia szóstego, współczynniki: $a_6=7$, $a_5=0$, $a_4=0$, $a_3=0$, $a_2=-3$, $a_1=0$, $a_0=9$

2) $\mathbf{V(a) = ¼a^5 - ¾a^4 + a^3 - a^2 - 4{,}8}$ wielomian V zmiennej a, stopnia piątego, współczynniki $a_5=¼$, $a_4=-¾$, $a_3=1$, $a_2=-1$, $a_1=0$, $a_0=-4{,}8$

***O** jest wielomianem ale nie możemy określić jego stopnia ponieważ wielomian zerowy można zapisać na różne sposoby, np: $0\cdot x^2$, $0\cdot x^{15}$, $0\cdot x^0$.*

Uczniowie samodzielnie rozwiązują ćwiczenie 3, a następnie ćwiczenie 4:

Strona6: ćwiczenie 3

Współczynnikami wielomianu $\frac{2t^3+3t-1}{2}$ są odpowiednio:

- 2, -3, 1
- 1, 0, 3/2, -1/2
- 1, 3/2, -1/2

Strona7: ćwiczenie 4

Wyrażenie $\sqrt{3}a^4 - \sqrt{2}a - \sqrt{5} - 1$

- nie jest wielomianem
- jest wielomianem stopnia 1

		● jest wielomianem stopnia 4 Po przejściu przez strony dotyczące teorii i ćwiczeniowe uczniowie rozwiązują zadania zamieszczone na platformie jako „zadania do rozwiązania na lekcji 1”. **Zadania do rozwiązania na lekcji:** **Zadanie 1** Dany jest wielomian $W(x) = x^3 - 5x^2 + 4x - 2$. Oblicz: a) $W(1)$ b) $W(-3)$ c) $W\left(\frac{1}{2}\right)$ d) $W(2+\sqrt{3})$ **Zadanie 2** Określ stopień wielomianu *P* i wypisz jego współczynniki: a) $P(x) = 4x^4 - 5x^3 + \sqrt{2}x - \frac{1}{3}$ b) $P(x) = (x^3 - 1)^2$ **Zadanie 3** Znajdź brakujący współczynnik *a* wielomianu *V*(*x*), jeśli: a) $V(x) = ax^3 - 2x^2 + 5x - 7$ i $V(-2) = 15$ b) $V(x) = \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + a$ i $V(3) = 11$ **Zadanie 4** Znajdź współczynniki *a* i *b* wielomianu $W(x) = ax^3 + 3x^2 - 4x + b$, jeśli $W(1) = 0$ *i* $W(2) = -2$.
7	Podsumowanie zajęć	Na koniec każdy uczeń samodzielnie rozwiązuje trzy zadania i przesyła rozwiązania do nauczyciela korzystając z platformy moodle. **Zadania do lekcji 1 (do samodzielnego rozwiązania i przesłania odpowiedzi)** **Zadanie 1.1:** a)Podaj przykład wielomianu stopnia szóstego. b)Podaj przykład wyrażenia algebraicznego, które nie jest wielomianem. **Zadanie 1.2:** Oblicz wartość wyrażenia $5(x - y^2) - 2(x^2 - y)$ dla x = -2 i dla y = -3.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

		Zadanie 1.3: Określ stopień wielomianu $W(x) = 6x^5 + 2x^4 - 9x^2 - 7x + 9$ i podaj jego współczynniki. Podczas rozwiązywania zadań w razie konieczności uczniowie cały czas korzystają z teorii i przykładów zawartych w lekcji 1 zamieszczonej na platformie moodle.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	

Scenariusz nr 2: Działania na wielomianach

Temat zajęć		**Działania na wielomianach**
Dział		**Wielomiany**
Klasa (poziom edukacyjny)		**Klasa druga lub jako materiał powtórzeniowy do matury w klasie trzeciej lub czwartej**
Czas trwania zajęć		**90 min.**
Lp.	**Element scenariusza**	**Treść zajęć**
1	Cel ogólny	• Kształcenie umiejętności samodzielnego dochodzenia do wiedzy • Rozwijanie umiejętności czytania zadań ze zrozumieniem • Wykształcenie umiejętności posługiwania się językiem matematycznym • Wykonywanie dodawania, odejmowania i mnożenia wielomianów
2	Cele szczegółowe	Uczeń: • zna pojęcie wielomianu jednej zmiennej; • potrafi odczytywać stopień i współczynniki wielomianu; • potrafi uporządkować wielomian; • potrafi wykonać działania na wielomianach; • potrafi obliczyć wartość wielomianu dla podanej wartości zmiennej.
3	Formy i metody	• Pogadanka • Praca z zespołem klasowym • Praca samodzielna
4	Środki dydaktyczne	Lekcję prowadzimy wykorzystując do tego kurs „Wielomiany” (lekcja 2) zamieszczony na platformie

	(ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	e-learningowej moodle oraz mobilną pracownię komputerową aby każdy uczeń miał samodzielny dostęp do komputera.
5	Wprowadzenie do zajęć	Informujemy uczniów o przebiegu lekcji: Przechodzimy przez strony lekcji 2 - „Działania na wielomianach”, uczniowie zapoznają się z teorią, wykonują samodzielnie ćwiczenia, które się z nią przeplatają. Rozwiązujemy zadania do wykonania na lekcji. Zadania 2.1, 2.2, 2.3 umieszczone na platformie uczniowie rozwiązują sami i rozwiązania przesyłają nauczycielowi bądź to jeszcze w czasie trwania lekcji lub jako praca domowa. Logujemy się na platformie. Wchodzimy na kurs „Wielomiany”. Wybieramy **Lekcja 2 – Działania na wielomianach** Na tej lekcji będziemy się uczyć wykonywać działania na wielomianach takie jak dodawanie, odejmowanie i mnożenie.
6	Przebieg zajęć *(pełna wersja)*	**Uczniowie poznają zasadę dodawania i odejmowania wielomianów:** **Strona1: Dodawanie i odejmowanie wielomianów** Jeżeli dodajemy do siebie wielomiany (lub odejmujemy) to działania te możemy wykonać tylko na wyrażeniach podobnych. **Np:** Mamy dwa wielomiany: $\mathbf{W(x) = 4x^2 + 0{,}5x - 1}$ i $\mathbf{U(x) = 5x^3 - 4{,}6x^2 - 0{,}8}$ Wtedy $W(x) - U(x) = (4x^2 + 0{,}5x - 1) - (5x^3 - 4{,}6x^2 - 0{,}8) = \mathbf{4x^2 + 0{,}5x - 1 - 5x^3 + 4{,}6x^2 + 0{,}8} = -5x^3 + 8{,}6x^2 + +0{,}5x - 0{,}2$ Wynik starajmy się przedstawić w postaci wielomianu uporządkowanego (t.j. ustawić od najwyższej potęgi zmiennej do najniższej).

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uczniowie samodzielnie rozwiązują ćwiczenie 1:

Strona2: ćwiczenie 1

Dane są wielomiany $W(x) = 4x^3 – 2x^2 – x + 3$ oraz $Q(x) = 8x – 5$.

Wynikiem działania $W(x) – 2·Q(x)$ jest:

- wielomian stopnia trzeciego
- wielomian zerowy
- wielomian stopnia drugiego

Uczniowie poznają zasadę mnożenia wielomianów:

Strona3: Mnożenie wielomianów

Jeśli mnożymy wielomian przez liczbę to działanie to wykonujemy na wszystkich współczynnikach.

Np.: Wielomian $P(x) = 2x^5 – 0,1x^3 + x$ mnożymy przez liczbę -3

Wtedy $-3P(x) = -3(2x^5 – 0,1x^3 + x) = -3·2x^5 – 3·(-0,1x^3) -3·x = -6x^5 + 0,3x^3 - 3x$

Iloczyn dwóch wielomianów obliczamy mnożąc wszystkie wyrazy pierwszego wielomianu przez wszystkie wyrazy drugiego (korzystamy z rozdzielności mnożenia względem dodawania).

Np.: Wyznaczmy iloczyn wielomianów: $P(x) = 2x – 3$ i $R(x) = x^2 – 2x +2$

$P(x)·R(x) = (2x – 3)(x^2 – 2x + 2) = 2x(x^2 – 2x +2) - 3(x^2 – 2x +2) = 2x^3 – 4x^2 + 4x – 3x^2 + 6x – 6 = 2x^3 – 7x^2 +$
$+ 10x – 6$

W wyniku pomnożenia wielomianu stopnia pierwszego przez wielomian stopnia drugiego otrzymaliśmy wielomian stopnia trzeciego.

Iloczyn wielomianów niezerowych stopnia m i stopnia n jest wielomianem stopnia m + n.

		Uczniowie samodzielnie rozwiązują ćwiczenie 2: Strona4: ćwiczenie 2 Mamy dane dwa wielomiany $W(x) = x^3 – 1$ i $P(x) = 2x^2 + 4x +1$. Wynikiem działania $2W(x) – x·P(x)$ jest wielomian: • $R(x) = 4x^3 – 4x^2 – x -2$ czy • $Q(x) = 4x^2 + x + 2$ czy • $U(x) = -4x^2 - x – 2$? **Poznajemy wzory skróconego mnożenia i ich zastosowanie:** Strona5: Wzory skróconego mnożenia Przy mnożeniu wielomianów często pomocne są wzory skróconego mnożenia: kwadrat sumy $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ kwadrat różnicy $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ różnica kwadratów $a^2 - b^2 = (a + b)(a – b)$ sześcian sumy $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ sześcian różnicy $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ różnica sześcianów $a^3 – b^3 = (a – b)(a^2 + ab +b^2)$ suma sześcianów $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab +b^2)$ **Np.:** $(2 - x)^3 = 2^3 - 3\cdot 2^2\cdot x + 3\cdot 2\cdot x^2 - x^3 = 8 - 12x + 6x^2 - x^3 = -x^3 + 6x^2 - 12x + 8$ **Np.:**$(3-\sqrt{2})^4 = (3-\sqrt{2})^2(3-\sqrt{2})^2 = (9-6\sqrt{2}+2)(9-6\sqrt{2}+2) = (11-6\sqrt{2})^2 =$ $= 121 - 132\sqrt{2} + 72 = 193 - 132\sqrt{2}$

		Uczniowie samodzielnie rozwiązują ćwiczenia 3 i 4: Strona6: ćwiczenie 3 Podnosząc wielomian Q(x) = 1-2x do trzeciej potęgi otrzymamy wielomian: • $W(x) = 1 - 8x^3$ czy • $P(x) = -8x^3 + 12x^2 - 6x + 1$ czy • $R(x) = 4x^2 - 4x + 1$? Strona7: ćwiczenie 4 Wynikiem działania $(1+\sqrt{3})^4$ jest: a) $4+2\sqrt{3}$ b) $28+16\sqrt{3}$ c) 30 **Przechodzimy do zasobu „Zadania do rozwiązania na lekcji 2” gdzie znajdują się treści zadań do rozwiązania poza platformą moodle:** **Zadania do rozwiązania na lekcji:** ***Zadanie 1*** Wiedząc, że $W(x) = 5x^3 - 4x^2 + 2x - 3$, $Q(x) = 5 - 2x^2 + 4x$ i $P(x) = -x^2 + 6x + 7$ wykonaj działania: $a)\ Q(x) - 2 \cdot P(x)$ $b)\ W(x) + P(x) \cdot Q(x)$ $c)\ 3W(x) - 5P(x) + \frac{1}{2}Q(x)$ $d)\ \frac{1}{2}[Q(x) - W(x) \cdot P(x)]$ ***Zadanie 2*** Przekształć wielomian, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia

		$a)\ (3x^3-2)(2+3x^3)$ $b)\ \left(2x+\sqrt{2}\right)^2-\left(2x-\sqrt{2}\right)^2$ $c)\ (4x-1)^3(2-7x)^3+(2+7x)^3$ $d)\ (2-3x^2)^2$ ***Zadanie 3*** Uporządkuj wielomiany: $a)\ \left(x^2-\sqrt{3}+1\right)^2$ $b)\ \left(\sqrt{5}+2x\right)^4$ **Zadanie 4** Zapisz wielomian $\left(x+1-\sqrt{2}\right)\left(x-1+\sqrt{2}\right)-\left(x+\sqrt{2}\right)^2$ w prostszej postaci, następnie oblicz jego wartość dla $x=-\frac{5\sqrt{2}}{4}$. **Zadanie 5** Wykonaj działania i doprowadź otrzymane wyrażenia do najprostszej postaci: $a)\ (2x+1)^3-(3+x)^2(x-1)$ $b)\ (2x+3)(4x^2-6x+9)-3(-x-2)^3$ $c)\ 5\left(x^2-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}+x^2\right)-(x+1)^3(x-1)$ $d)\ (3x^2-2)^2-(1-x)(x+2)^3$
7	Podsumowanie zajęć	Następnie uczniowie samodzielnie rozwiązują zadania dołączone do lekcji 2 (2.1, 2.2 i 2.3) i przesyłają odpowiedzi do nauczyciela poprzez platformę moodle. **Zadania do lekcji 2:** **Zadanie 2.1:** Korzystając ze wzorów skróconego mnożenia wykonaj działania i przedstaw w postaci uporządkowanego wielomianu: $\left(\sqrt{6}-x\right)\left(\sqrt{6}+x\right)+(x-2x^3)^2$ **Zadanie 2.2:** Wyznacz U(x) – $[W(x)]^2$ jeśli U(x) = x^2 – 2x +1, W(x) = x^2 + x . **Zadanie 2.3:** Oblicz wartość wielomianu P(x) = $4x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ dla $x=\sqrt{2}-1$

		Podczas rozwiązywania zadań w razie konieczności uczniowie cały czas korzystają z lekcji 2 zamieszczonej na platformie moodle.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	

Scenariusz nr 3: Równość wielomianów

Temat zajęć		**Równość wielomianów**
Dział		**Wielomiany**
Klasa (poziom edukacyjny)		**Klasa druga lub jako materiał powtórzeniowy do matury w klasie trzeciej lub czwartej**
Czas trwania zajęć		**90 min.**
Lp.	**Element scenariusza**	**Treść zajęć**
1	Cel ogólny	• Kształcenie umiejętności samodzielnego dochodzenia do wiedzy • Rozwijanie umiejętności czytania zadań ze zrozumieniem • Wykształcenie umiejętności posługiwania się językiem matematycznym • Porównywanie wielomianów
2	Cele szczegółowe	Uczeń: • zna pojęcie wielomianu jednej zmiennej; • potrafi odczytywać stopień i współczynniki wielomianu; • potrafi uporządkować wielomian; • wie kiedy dwa wielomiany są równe i potrafi zastosować tą wiedzę do rozwiązywania zadań.
3	Formy i metody	• Pogadanka • Praca z zespołem klasowym • Praca samodzielna
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym	Lekcję prowadzimy wykorzystując do tego kurs „Wielomiany” (lekcja 3) zamieszczony na platformie e-learningowej moodle oraz mobilną pracownię komputerową aby każdy uczeń miał samodzielny

	wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	dostęp do komputera.
5	Wprowadzenie do zajęć	Informujemy uczniów o przebiegu lekcji: Przechodzimy przez strony lekcji 3 - „Równość wielomianów”, uczniowie zapoznają się z teorią, wykonują samodzielnie ćwiczenia, które się z nią przeplatają. Rozwiązujemy zadania do wykonania na lekcji. Zadania 3.1, 3.2, 3.3 umieszczone na platformie uczniowie rozwiązują sami i rozwiązania przesyłają nauczycielowi bądź to jeszcze w czasie trwania lekcji lub jako praca domowa. Logujemy się na platformie. Wchodzimy na kurs „Wielomiany”. Wybieramy **Lekcja 3 – Równość wielomianów** Na tej lekcji dowiemy się, kiedy dwa wielomiany są równe.
6	Przebieg zajęć *(pełna wersja)*	**Uczniowie poznają pojęcie równości wielomianów:** **Strona1:** **Równość wielomianów** **Dwa niezerowe wielomiany są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są tego samego stopnia i ich współczynniki przy tych samych potęgach są równe.** **Np.:** Dobierzmy liczby *a* i *b* tak, aby wielomiany $W(x) = ax^3 – 2x^2 – 2$ i $P(x) = -x^3 – 2x^2 + bx – 2$ były równe. *Rozwiązanie:* Współczynniki przy x^2 i wyrazy wolne są takie same. Żeby wielomiany były równe to współczynniki przy x^3 i x też muszą być takie same czyli *a* musi być równe – 1, *b* musi być równe 0. **Uczniowie samodzielnie rozwiązują ćwiczenie 1:** **Strona2:** **ćwiczenie 1** Aby wielomiany $\mathbf{P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1}$ oraz $\mathbf{W(x) = x^3 - 2x^2 - mx + 1}$ były równe *m* wynosi:

- 2
- -3
- 3

Omawiamy przykładowe zadania dotyczące równości wielomianów (strona 3 i strona 4).

Strona3: Przykładowe zadanie 1

Czy można dobrać tak współczynnik *k* aby wielomiany W i P były równe, gdy $W(x) = x^3 – 3x^2 + x – 5$ i $P(x) = x^3 + kx^2 + kx – 5$

Rozwiązanie:

Aby zgadzały się współczynniki przy x^2, musimy przyjąć, że $k = -3$.

Wówczas $P(x) = x^3 – 3x^2 – 3x – 5$.

Wtedy jednak nie są równe współczynniki przy x.

Nie można zatem dobrać takiej liczby *k*, aby W i P były równe.

Strona4: Przykładowe zadanie 2

Dla jakiej wartości parametru a zachodzi równość

$(x^3 – x^2 – x – 15) = (x^2 + ax + 5)(x - 3)$?

Rozwiązanie:

W celu porównania wielomianów musimy wykonać mnożenie po prawej stronie równania a więc (prawa strona równania) $P = x^3 – 3x^2 + ax^2 – 3ax + 5x – 15$

Grupujemy współczynniki, czyli $P = x^3 +x^2(-3 + a) + x (-3a + 5) – 15$.

Ponieważ współczynniki wielomianu po lewej stronie muszą być równe współczynnikom wielomianu po prawej stronie to:

$-1 = -3 + a$ oraz

$-1 = -3a + 5$,

rozwiązując te dwa równania otrzymujemy $a = 2$.

Uczniowie samodzielnie rozwiązują ćwiczenie 2 i 3:

Strona5: ćwiczenie 2

Dla jakiej wartości parametru k zachodzi równość

$(x - k)(x + 7) = (x^2 + 4x - 21)$?

- k=2
- k=3
- k=0

Strona6: ćwiczenie 3

Które z wielomianów są równe?

$P(x) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ $W(x) = (x - \sqrt{2})^2$ $Q(x) = x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$

- P(x) = W(x) = Q(x)
- W(x) = P(x)
- Q(x) = W(x)

Przechodzimy do zasobu „Zadania do rozwiązania na lekcji 3” gdzie znajdują się treści zadań do rozwiązania poza platformą:

Zadania do rozwiązania na lekcji:

Zadanie 1

Znajdź wartość parametru a, aby wielomiany $x^3 + 3x^2 - 4$ oraz $(x + a)^2(x - 1)$ były równe.

Zadanie 2

Określ dla jakiej wartości a wielomian W(x) jest równy wielomianowi P(x) jeśli:

a) $\boldsymbol{W(x) = (2x + 1)^2 - 3x(x + 1),\ \ P(x) = ax^2 + x + 1}$

b) $\boldsymbol{W(x) = 2x(5x^3 - 4x^2 - 1) + 5x^3,\ \ P(x) = 10x^4 + ax^3 - 2x}$

c) $\boldsymbol{W(x) = (x^2 + 5)(3x^2 - x),\ \ P(x) = 3x^4 - x^3 + ax^2 - 5x}$

Zadanie 3

Dane są wielomiany $\boldsymbol{Q(x) = x^2 - 5x}$ i $\boldsymbol{P(x) = 2x^4 - 9x^3 - 8x^2 + 15x + 1}$. Wyznacz, o ile istnieją współczynniki a i b wielomianu $\boldsymbol{W(x) = ax^2 + bx + 1}$ jeśli:

a) $\boldsymbol{W(x) \cdot Q(x) = P(x)}$

b) $\boldsymbol{W(x) = P(x) - 2x^2 \cdot Q(x) - x^3}$

		Zadanie 4 Niech $\boldsymbol{P(x) = x^2 + 1}$, $\boldsymbol{R(x) = x^2 + bx + c}$, $\boldsymbol{S(x) = x^4 - 6x^3 + x^2 - 6x}$. Dla jakich wartości b i c wielomian $\boldsymbol{P(x) \cdot R(x) - S(x)}$ jest wielomianem zerowym? ***Zadanie 5*** Dla jakich wartości a, b i c wielomiany $\boldsymbol{Q(x) = 4x - 2}$ i $\boldsymbol{W(x) = a(x+1)(x-2) + b(x+3)(x-1) + c(x-1)}$ są równe? ***Zadanie 6*** Znajdź takie wartości parametru *a* i *b*, aby wielomiany $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ oraz $(x-a)(x-b)(x+2)$ były równe.
7	Podsumowanie zajęć	Podsumowujemy temat przypominając niezbędne informacje. Uczniowie przechodzą do rozwiązywania zadań, które przesyłają do sprawdzenia poprzez platformę nauczycielowi. **Zadania do lekcji 3:** **Zadanie 3.1:** Dla jakich wartości parametrów *a* i *b* zachodzi równość $2x^4 - x^3 + 2x^2 - 3 = (2x^3 + ax^2 + bx + 3)(x - 1)$? **Zadanie 3.2:** Dla jakich wartości *a* i *b* wielomian $(-x + 4)(2x^2 + ax + b) - (-2x^3 + 6x^2 + 5x + 12)$ jest **Zadanie 3.3:** Czy da się dobrać parametr *a* w taki sposób żeby wielomiany $W(x) = -x^3 + (a^3 + a)x + 1$ oraz $Q(x) = ax^3 - 2x + a^2$ były równe? Jeśli tak oblicz ile on wynosi. Podczas rozwiązywania zadań w razie konieczności uczniowie cały czas korzystają z lekcji zamieszczonej na platformie moodle.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	

Scenariusz nr 4: Równania wielomianowe

Temat zajęć	**Równania wielomianowe**
Dział	**Wielomiany**
Klasa (poziom edukacyjny)	**Klasa druga lub jako materiał powtórzeniowy do matury w klasie trzeciej lub czwartej**
Czas trwania zajęć	**90 min.**

Lp.	**Element scenariusza**	**Treść zajęć**
1	Cel ogólny	• Kształcenie umiejętności samodzielnego dochodzenia do wiedzy • Rozwijanie umiejętności czytania zadań ze zrozumieniem • Wykształcenie umiejętności rozwiązywania równań wielomianowych • Wykształcenie umiejętności rozwiązywania prostych równań wielomianowych
2	Cele szczegółowe	Uczeń: • rozumie pojęcie równania wielomianowego; • rozumie pojęcie pierwiastka wielomianu; • potrafi znaleźć pierwiastki wielomianu; • potrafi określić krotności pierwiastków wielomianu; • potrafi rozwiązać proste równanie wielomianowe.
3	Formy i metody	• Pogadanka • Praca z zespołem klasowym • Praca samodzielna
4	Środki dydaktyczne	Lekcję prowadzimy wykorzystując do tego kurs „Wielomiany” (lekcja 5) zamieszczony na platformie

	(ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	e-learningowej Moodle oraz mobilną pracownię komputerową aby każdy uczeń miał samodzielny dostęp do komputera.
5	Wprowadzenie do zajęć	Informujemy uczniów o przebiegu lekcji: Przechodzimy przez strony lekcji 5 - „Równania wielomianowe”, uczniowie zapoznają się z teorią, wykonują samodzielnie ćwiczenia, które się z nią przeplatają. Rozwiązujemy zadania do wykonania na lekcji. Zadania 5.1, 5.2, 5.3 umieszczone na platformie uczniowie rozwiązują sami i rozwiązania przesyłają nauczycielowi bądź to jeszcze w czasie trwania lekcji lub jako praca domowa. Logujemy się na platformie. Wchodzimy na kurs „Wielomiany”. Wybieramy **Lekcja 5 – Równania wielomianowe** Podczas tej lekcji nauczymy się rozwiązywać równania wielomianowe.
6	Przebieg zajęć *(pełna wersja)*	**Uczniowie poznają pojęcie równania wielomianowego:** **Strona1:** **Równania wielomianowe** **Równaniem wielomianowym nazywamy równanie postaci W(x) = 0, gdzie W(x) jest wielomianem stopnia n.** Jak się dowiedziałeś z lekcji 4 rozwiązanie równania wielomianowego nazywamy ***pierwiastkiem*** wielomianu. Rozwiązanie równania W(x) = 0 ma ścisły związek z rozkładem wielomianu W(x) na czynniki. **Np.** Dla równania: $\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{8}x^3-\frac{1}{2}x^2=0$ mamy:

$$\frac{1}{16}x^2(x^2+2x-8)=0$$
$$\frac{1}{16}x^2(x-2)(x+4)=0$$
Przyrównując poszczególne czynniki do zera otrzymujemy rozwiązania: x = 0, x = 2 lub x = -4.

Uczniowie poznają zasady rozwiązywania równania wielomianowego analizując przykłady:
Strona2: Przykłady rozwiązywania równań
Np.: Rozwiąż równanie $5x^3 + 4x^2 + 4x = 0$
Rozkładamy wielomian $5x^3 + 4x^2 + 4x$ na czynniki:
$x(5x^2 + 4x + 4) = 0$
$x = 0 \vee 5x^2 + 4x + 4 = 0$
Drugie równanie jest sprzeczne (delta<0), zatem rozwiązaniem jest x = 0.
Np.: Rozwiąż równanie $x^3 - 6x^2 + 9x = 0$
$x(x^2 - 6x + 9) = 0$ wyłączamy x przed nawias
$x(x - 3)^2 = 0$ korzystamy ze wzoru na kwadrat różnicy
Rozwiązaniami równania są więc liczby x = 0 i x = 3.

Uczniowie samodzielnie rozwiązują ćwiczenie 1:
Strona3: ćwiczenie 1
Rozwiązaniem równania $2x^3 - 4x^2 = 0$ jest:
- -2 i 0
- 0 i 2
- 2 i -2

Omawiamy co to są krotności pierwiastków równania i jak je odczytać:
Strona4: Krotności pierwiastka
Zwróć uwagę, że w rozkładzie na czynniki wielomianu $W(x) = x^3 – 6x^2 + 9x = x(x - 3)^2$

czynnik $x - 3$ występuje dwa razy. Dlatego liczbę 3 nazywamy **pierwiastkiem dwukrotnym** wielomianu $W(x)$.

Liczba 0 jest pierwiastkiem pojedynczym (jednokrotnym) tego wielomianu.

Liczbę a nazywamy **pierwiastkiem k-krotnym**, gdzie $k = 1, 2, 3, \ldots$, wielomianu $W(x)$, gdy ten wielomian możemy przedstawić w postaci $W(x) = (x - a)^k \cdot P(x)$gdzie $P(x)$ jest pewnym wielomianem i liczba a nie jest jego pierwiastkiem (czyli $P(a) \neq 0$)

Uczniowie analizują przykładowe zadanie dotyczące określania krotności pierwiastków:

Strona5: **Określanie krotności pierwiastków (przykład 1)**

Np.: Znajdź pierwiastki wielomianu $Q(x) = x^7(x - 1)^3(x + 2)(x + 5)^5$ i ustal ich krotności.

Rozwiązanie:

Przyrównując poszczególne czynniki do zera otrzymujemy:

$x^7 = 0$ więc $x = 0$ i jest to pierwiastek 7 - krotny

$(x - 1)^3 = 0$ więc $x = 1$ i jest to pierwiastek 3 - krotny

$(x + 2) = 0$ więc $x = -2$ i jest to pierwiastek 1 - krotny

$(x + 5)^5 = 0$ więc $x = -5$ i jest to pierwiastek 5 – krotny.

Uczniowie samodzielnie rozwiązują ćwiczenie 2:

Strona6: **ćwiczenie 2**

Mamy wielomian $P(x) = (x - 2)(x^2 - 4)$. Liczba 2 jest pierwiastkiem:

- jednokrotnym
- trzykrotnym
- dwukrotnym

Na kolejnym przykładzie uczniowie dowiadują się jak się rozwiązuje równanie wielomianowe i odczytuje krotności pierwiastków:

Strona7: **Określanie krotności pierwiastków (przykład 2)**

Np.: Podaj przykład wielomianu, którego 3 jest pierwiastkiem dwukrotnym, liczba -10 jest pierwiastkiem czterokrotnym i wielomian jest stopnia 8.

Rozwiązanie:

Najprościej jest podać przykład takiego wielomianu w postaci iloczynowej.

Ponieważ 3 jest pierwiastkiem dwukrotnym czynnik, którego pierwiastkiem jest 3 musi występować dwa razy, np. $(x – 3)^2$ lub $(2x – 6)^2$ lub $(15 – 5x)^2$ itp.

-10 jest pierwiastkiem czterokrotnym czyli czynnik, którego pierwiastkiem jest -10 musi występować cztery razy, np. $(x + 10)^2$ lub $(3x + 30)^4$ lub $(70 + 7x)^4$ itp.

Wielomian jest stopnia 8 więc musimy jeszcze dołączyć czynnik stopnia drugiego, który nie ma pierwiastków, np. $2x^2 + 1$ lub $x^2 + 2$ itp.

Przykład wielomianu $(2x – 6)^2(x + 10)^4(x^2 + 2)$

Uczniowie samodzielnie rozwiązują ćwiczenie 3:

Strona8: ćwiczenie 3

Wielomian, którego 2 jest pierwiastkiem trzykrotnym, -5 jest pierwiastkiem dwukrotnym, nie ma więcej pierwiastków i jest stopnia 7 to:

$W(x) = (x – 2)^2(x + 5)^3(x^2 + 7)$ czy

$P(x) = (x + 5)^2(x – 2)^3(3x^2 + 4)$ czy

$Q(x) = (2x – 4)^3(3x + 15)^2(x^2 - 8)$?

Przechodzimy do zasobu „Zadania do rozwiązania na lekcji 5” gdzie znajdują się treści zadań do rozwiązania poza platformą:

Zadanie 1

Znajdź liczby spełniające równania:

a) $5x^2(x-1)(x^2-1)=0$

b) $8(x^7-2x^6)(x^2-2)=0$

c) $(2x^3-8x^2+8x)(x^4-9)=0$

d) $(4x^2-x-5)(2x^2+3)(x^3-8x)=0$

Zadanie 2

Rozwiąż równania:

		a) $2x^3-2x^2-8x+8=0$ b) $5x^3+10x^2+x+2=0$ c) $4x^3+12x^2-x-3=0$ d) $2x^3+5x^2-4x-10=0$ e) $3x^5+2x^4+3x^3+2x^2+6x+4=0$ f) $6x^8-12x^6-5x^5+10x^3+x^2-2=0$ g) $(x-1)(x^2+5x+2)+(x+8)^2=x^2+x+62$ h) $3x^2(x-1)(x+1)-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$ ***Zadanie 3*** Podaj pierwiastki wielomianów i określ ich krotności: a) $W(x)=7(x-4)(x+6)^2(2x+5)$ b) $W(x)=\left(x+\sqrt{3}\right)^3\left(x-\sqrt{2}\right)^5(x+11)$ c) $W(x)=(4x^3-x)(x^2-2x^3)^2$ d) $W(x)=x^3(3x^2-x)(9x^2-1)$ e) $W(x)=(2x-1)^2(x-2)^3\left(x-\frac{1}{2}\right)^3$ f) $W(x)=-5(5x-6)^2(x^2-3)^3\left(x+\sqrt{2}\right)$
7	Podsumowanie zajęć	Na koniec uczeń ma za zadanie samodzielnie rozwiązać trzy zadania i przesłać do nauczyciela odpowiedzi korzystając z platformy. **Zadania do lekcji 5 (do samodzielnego rozwiązania i przesłania odpowiedzi)** **Zadanie 5.1:** Rozwiąż równanie: $3x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 10x = 0$ **Zadanie 5.2:** Rozwiąż równanie: $x^5 - 6x^4 + 9x^3 = 0$. Podaj krotność pierwiastków. **Zadanie 5.3:** Podaj pierwiastki wielomianu $W(x) = 7x(x-2)(5x+3)(x^2-4)^2$ oraz określ ich krotność.

		Podczas rozwiązywania zadań w razie konieczności uczniowie cały czas korzystają z lekcji zamieszczonej na platformie moodle.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	

Scenariusz nr 5: Rozkład wielomianu na czynniki

Temat zajęć		**Rozkład wielomianu na czynniki**
Dział		**Wielomiany**
Klasa (poziom edukacyjny)		**Klasa druga lub jako materiał powtórzeniowy do matury w klasie trzeciej lub czwartej**
Czas trwania zajęć		**90 min.**
Lp.	**Element scenariusza**	**Treść zajęć**
1	Cel ogólny	• Kształcenie umiejętności samodzielnego dochodzenia do wiedzy • Rozwijanie umiejętności czytania zadań ze zrozumieniem • Wykształcenie umiejętności posługiwania się językiem matematycznym • Wykształcenie umiejętności rozkładania wielomianu na czynniki
2	Cele szczegółowe	• Uczeń: • zna pojęcie wielomianu jednej zmiennej; • potrafi odczytywać współczynniki wielomianu; • potrafi uporządkować wielomian; • potrafi rozłożyć wielomian na czynniki grupując wyrazy; • potrafi rozłożyć wielomian na czynniki korzystając ze wzorów skróconego mnożenia; • rozumie pojęcie pierwiastka wielomianu.
3	Formy i metody	• Pogadanka • Praca z zespołem klasowym • Praca samodzielna

4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	Lekcję prowadzimy wykorzystując do tego kurs „Wielomiany” (lekcja 4) zamieszczony na platformie e-learningowej moodle oraz mobilną pracownię komputerową aby każdy uczeń miał samodzielny dostęp do komputera.
5	Wprowadzenie do zajęć	Informujemy uczniów o przebiegu lekcji: Przechodzimy przez strony lekcji 4 - „Rozkład wielomianu na czynniki”, uczniowie zapoznają się z teorią, wykonują samodzielnie ćwiczenia, które się z nią przeplatają. Rozwiązujemy zadania do wykonania na lekcji. Zadania 4.1, 4.2, 4.3 umieszczone na platformie uczniowie rozwiązują sami i rozwiązania przesyłają nauczycielowi bądź to jeszcze w czasie trwania lekcji lub jako praca domowa. Logujemy się na platformie. Wchodzimy na kurs „Wielomiany”. Wybieramy **Lekcja 4 – Rozkład wielomianu na czynniki** Podczas tej lekcji nauczymy się rozkładać wielomian na czynniki korzystając ze wzorów skróconego mnożenia lub grupując odpowiednio wyrazy.
6	Przebieg zajęć *(pełna wersja)*	**Uczniowie dowiadują się co to oznacza rozłożyć wielomian na czynniki:** **Strona1:** **Rozkład wielomianu na czynniki** W tej lekcji zajmiemy się rozkładem wielomianu na czynniki, czyli przedstawianiem go w postaci iloczynu wielomianów stopnia różnego od zera. **Każdy wielomian jest iloczynem czynników stopnia co najwyżej drugiego.** Zatem jedynymi nierozkładalnymi wielomianami są wielomiany stopnia drugiego, których wyróżnik (Δ) jest ujemny **Np.:** $x^2 + 2$ bo $\Delta = 0 - 4\cdot1\cdot2 = -8$ $x^2 + x + 1$ bo $\Delta = 1 - 4\cdot1\cdot1 = -3$

2) Uczniowie analizują przykłady rozkładu wielomianu na czynniki:

Strona2: Przykład rozkładu wielomianu na czynniki

Rozłożyć wielomian na czynniki tzn. przedstawić go w postaci iloczynu.

Np. Rozłóż na czynniki wielomian $W(x) = 12x^2 – 8x$

Wyłączamy 4x przed nawias i wtedy $W(x) = 4x(3x – 2)$.

Np. Rozłóż na czynniki wielomian $P(x) = 8x^5 + 6x^4 – 2x^3$.

Wyłączamy wspólny czynnik przed nawias: $P(x) = 2x^3(4x^2 + 3x – 1)$.

Dla trójmianu kwadratowego $4x^2 + 3x – 1$ mamy

delta = $3^2 – 4 \cdot 4\cdot(-1) = 25$,

zatem ma on pierwiastki: $x = -1$, $x = ¼$.

Oznacza to, że trójmian możemy zapisać w postaci iloczynowej:

$4x^2 + 3x – 1 = 4(x + 1)(x – ¼)$,

A zatem wielomian można przedstawić w postaci iloczynu czynników liniowych:

$P(x) = 8x^3(x + 1)(x – ¼)$.

Uczniowie samodzielnie rozwiązują ćwiczenie 1:

Strona3: ćwiczenie 1

Wielomian $Q(x)= 6x^5 - x^4 + x^3$ po rozłożeniu na czynniki jest wielomianem:

a) $Q(x) = x^3(6x^2 - x + 1)$

b) $Q(x) = x^3(3x - 1)^2$

c) $Q(x) = x^3(3x - 1)(2x - 1)$

		Uczniowie poznają jak wykorzystać wzory skróconego mnożenia aby rozłożyć wielomian na czynniki (strona 4 i strona 5): Strona4: Wzory skróconego mnożenia Aby rozłożyć wielomian na czynniki korzystamy często ze wzorów skróconego mnożenia. **Np.:** **1)** $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ ze wzoru $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ **2)** $4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$ ze wzoru $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ **3)** $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$ ze wzoru $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ Strona5: Przykłady rozkładu wielomianu na czynniki korzystając ze wzorów skróconego mnożenia **Np.** Rozłóżmy na czynniki wielomiany U(x) i V(x): **1)** $U(x) = x^5 – 8x^3 + 16x$ Najpierw wyłączmy x przed nawias, wtedy $U(x) = x(x^4 – 8x^2 + 16)$, Teraz skorzystamy ze wzoru na kwadrat różnicy, czyli $U(x) = x(x^2 – 4)^2$. Jak widać jeszcze możemy wielomian dalej rozłożyć na czynniki korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów: $U(x) = x(x^2 – 2^2)^2 = x[(x – 2)(x + 2)]^2 = x(x – 2)^2(x + 2)^2$. **2)** $V(x) = x^3 - 27$ Żeby rozłożyć wielomian V(x) na czynniki możemy skorzystać ze wzoru na sumę sześcianów: $V(x) = x^3 - 3^3 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$. I na tym się kończy rozkład ponieważ trójmian $x^2 + 3x + 9$ ma deltę ujemną więc już się dalej nie rozkłada na czynniki. **Uczniowie samodzielnie rozwiązują ćwiczenie 2:**

		Strona6: ćwiczenie 2 Wielomian $P(x) = x^3 - 1$ po rozłożeniu na czynniki jest wielomianem: a) $P(x) = (x - 1)^3$ b) $P(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ c) $P(x) = (x - 1)(x + 1)$ **Uczniowie poznają zasadę rozkładu wielomianu na czynniki poprzez grupowanie wyrazów (strona 7):** **Strona7: Rozkładanie wielomianu poprzez grupowanie wyrazów** W pewnych przypadkach możemy rozłożyć wielomian na czynniki, grupując odpowiednio jego wyrazy. **Np.** Rozłóżmy wielomian $U(x) = x^3 – 4x^2 + x – 4$ Z dwóch pierwszych wyrazów wyciągamy x^2 a dwa pozostałe pozostawiamy bez zmian ponieważ nie mają nic do wyciągnięcia, wtedy $U(x) = x^2(x – 4) + (x – 4)$ Teraz wspólnym czynnikiem jest $x – 4$ więc wyciągamy je przed nawias, czyli $U(x) = (x – 4)(x^2 + 1)$ I to już jest koniec ponieważ dwumian $x^2 + 1$ ma deltę ujemną i nie rozkłada się już dalej. **Uczniowie poznają pojęcie pierwiastka wielomianu (strona 8):** **Strona8: Pierwiastki wielomianu** Rozkład wielomianu na czynniki może być wykorzystany do wyznaczenia jego pierwiastków, tj. takich argumentów x, dla których $W(x) = 0$ **Np.** Znajdź pierwiastki wielomianu $W(x) = x^3 – x^2 – 9x + 9$ Rozkładamy wielomian na czynniki: $W(x) = x^3 – x^2 - 9x + 9 = x^2(x - 1) – 9(x – 1) =$ $= (x^2 – 9)(x – 1) = (x – 3)(x + 3)(x – 1)$

		Ponieważ (x – 3)(x + 3)(x – 1) = 0, gdy x – 3 = 0 lub x + 3 = 0 lub x -1 = 0, więc pierwiastkami wielomianu w są liczby -3, 1, 3. **Uczniowie samodzielnie rozwiązują ćwiczenie 3:** Strona9: ćwiczenie 3 Pierwiastkami wielomianu W(x) = $125x^3$ - 27 są: ● x = 1/3 lub x = 1/5 ● x = 1 lub x = -1 ● x = 3/5 Przechodzimy do zasobu „Zadania do rozwiązania na lekcji 4” gdzie znajdują się treści zadań do rozwiązania poza platformą: Zadania do rozwiązania poza platformą. ***Zadanie 1*** Rozłóż wielomian na czynniki stosując wzory skróconego mnożenia: a) $x^2 - 81$ b) $16x^2 - 5$ c) $x^2 + 4x + 4$ d) $x^4 - 16$ e) $9x^2 - 6x + 1$ f) $x^4 - x^2 + \frac{1}{4}$ g) $x^3 + 1$ h) $64 - x^6$ i) $\frac{1}{27} + x^3$ j) $25 - 144x^2$

		k) $x^3 - 27$ l) $x^4 - 10x^2 + 25$ m) $9 - x^3$ ***Zadanie 2*** Rozłóż trójmiany kwadratowe na czynniki: a) $x^2 - 3x - 18$ b) $2x^2 + 11x + 5$ ***Zadanie 3*** Rozłóż wielomian na czynniki jak najniższych stopni grupując wyrazy: a) $x^3 - 5x^2 + x - 5$ b) $2x^3 - 8x^2 - 5x + 20$ c) $x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 6x^2$ d) $12x^{10} + 24x^9 - 3x^8 - 6x^7$ e) $5x^3 - 3x^2 - 20x + 12$ f) $-2x^3 + x^2 - 2x + 1$ g) $3x^5 + 7x^4 - 3x - 7$ h) $4x^5 - 5x^4 - 36x + 45$ ***Zadanie 4*** Rozłóż wielomian na czynniki: a) $4x^3 - 4\sqrt{5}x^2 - x - \sqrt{5}$ b) $6x^6 + 2x^4 + x^2 + \frac{1}{3}$ c) $x^5 + 8x^2$ d) $3x^4 - 6x$
7	Podsumowanie zajęć	Uczniowie rozwiązują zadania dołączone do lekcji 4 i przesyłają je nauczycielowi poprzez platformę e-learningową do ocenienia. **Zadania do lekcji 4:**

		Zadanie 4.1: Znajdź pierwiastki wielomianu $W(x) = x^3 – x^2 – 4x + 4$. **Zadanie 4.2:** Rozłóż wielomian $P(x) = x^3 – 64$ na czynniki. **Zadanie 4.3:** Rozłóż wielomian $W(x) = 32x^6 - 16x^4 + 2x^2$ na czynniki i podaj jego pierwiastki. Podczas rozwiązywania zadań w razie konieczności uczniowie cały czas korzystają z lekcji zamieszczonej na platformie moodle.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	

Scenariusz nr 6*: Dzielenie wielomianów

Temat zajęć		**Dzielenie wielomianów**
Dział		**Wielomiany**
Klasa (poziom edukacyjny)		**Klasa druga lub jako materiał powtórzeniowy do matury w klasie trzeciej lub czwartej**
Czas trwania zajęć		**90 min.**
Lp.	**Element scenariusza**	**Treść zajęć**
1	Cel ogólny	• Kształcenie umiejętności logicznego myślenia • Operowanie posiadaną wiedzą w rozwiązywaniu zadań • Formułowanie wniosków • Kształcenie umiejętności posługiwania się językiem matematycznym • Rozwijanie u uczniów zdolności poznawczych
2	Cele szczegółowe	Uczeń: • potrafi podzielić wielomiany; • potrafi podzielić wielomian przez dwumian korzystając ze schematu Hornera; • potrafi znaleźć resztę z dzielenia wielomianów; • poprawnie operuje pojęciem stopnia wielomianu.
3	Formy i metody	• Pogadanka • Praca z zespołem klasowym • Praca samodzielna
4	Środki dydaktyczne	Lekcję prowadzimy wykorzystując do tego kurs „Wielomiany” (lekcja 6) zamieszczony na platformie

	(ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	e-learningowej moodle oraz mobilną pracownię komputerową aby każdy uczeń miał samodzielny dostęp do komputera.
5	Wprowadzenie do zajęć	Informujemy uczniów o przebiegu lekcji: Przechodzimy przez strony lekcji 6 - „Dzielenie wielomianów”, uczniowie zapoznają się z teorią, wykonują samodzielnie ćwiczenia, które się z nią przeplatają. Rozwiązujemy zadania do wykonania na lekcji. Zadania 6.1, 6.2, 6.3 umieszczone na platformie uczniowie rozwiązują sami i rozwiązania przesyłają nauczycielowi bądź to jeszcze w czasie trwania lekcji lub jako praca domowa. Logujemy się na platformie. Wchodzimy na kurs „Wielomiany”. Wybieramy **Lekcja 6 – Dzielenie wielomianów** Podczas tej lekcji nauczymy się dzielić wielomiany.
6	Przebieg zajęć *(pełna wersja)*	**Analizujemy jak dzielić wielomiany:** **Strona 1:** **Dzielenie wielomianów** Dzielenie wielomianów wykonujemy podobnie jak dzielenie liczb naturalnych. $W(x):Q(x) = P(x)$, jeśli $W(x) = P(x) \cdot Q(x)$ Dzielna dzielnik iloraz **Np.:** Wiemy, że $(x + 1)(x – 1) = x^2 -1$ Zatem $(x^2 – 1):(x – 1) = x + 1$ Wielomian stopnia drugiego podzielony przez wielomian stopnia pierwszego dał jako iloraz wielomian stopnia pierwszego. **Jeśli podzielimy wielomian *W*(*x*) przez wielomian *P*(*x*), to stopień *P*(*x*) nie może być wyższy od stopnia *W*(*x*).** **stopień W(x) = stopień P(x) + stopień Q(x)**

Pokazujemy zasadę dzielenia wielomianów:

Strona 2: Jak dzielić wielomiany?

Pokażę kolejne kroki przy wykonywaniu dzielenia trójmianu $6x^2 - 5x - 4$ przez dwumian $2x + 1$

$(6x^2 - 5x - 4) : (2x + 1) = 3x$	dzielimy $6x^2$ przez pierwszy wyraz dzielnika $2x$, wynik wpisujemy po znaku =
$6x^2 + 3x$	mnożymy $3x$ przez dzielnik $2x + 1$
$-8x - 4$	odejmujemy
$(6x^2 - 5x - 4) : (2x + 1) = 3x - 4$	dzielimy $-8x$ przez pierwszy wyraz dzielnika $2x$, wynik wpisujemy dalej po znaku =
$6x^2 + 3x$	
$-8x - 4$	mnożymy -4 przez dzielnik $2x + 1$
$-8x - 4$	odejmujemy

Otrzymujemy resztę 0, więc $(6x^2 - 5x - 4) : (2x + 1) = 3x - 4$

Wykonujemy razem ćwiczenie:

Strona 3: Ćwiczenie do wykonania na lekcji:

Wykonaj dzielenie:

a) $(-2x^3 + 6x^2 + 9x - 4) : (x - 4)$

b) $(3x^3 - 7x^2 + 3x - 2) : (-3x^2 + x - 1)$

c) $(8x^4 - 10x^3 + 3x^2 - 2x - 8) : (-2x^2 + x - 2)$

Uczniowie wykonują samodzielnie ćwiczenie 1:

Strona 4: ćwiczenie 1

Wynikiem dzielenia wielomianów $(x^2 - 6x + 8) : (x - 4)$ jest:

a) $x - 2$

b) $x^2 - 2$

c) $x + 2$

Następnie uświadamiamy uczniom, że wielomiany nie zawsze dzielą się bez reszty:

Strona 5: Dzielenie wielomianu z resztą

Bywa, że dzieląc dwie liczby całkowite zostaje nam reszta z dzielenia.
Podobnie dzieje się przy dzieleniu wielomianów.

Wykonam dzielenie $(2x^3 + 8x - 1) : (x^2 + x + 3)$

$(2x^3 + 8x - 1) : (x^2 + x + 3) = 2x - 2$

$\underline{2x^3 + 2x^2 + 6x}$

$-2x^2 + 2x - 1$

$\underline{-2x^2 - 2x - 6}$

$4x + 5$

Dzielenie kontynuujemy dopóki stopień wielomianu pod kreską nie stanie się mniejszy niż stopień dzielnika.

Otrzymaliśmy resztę $R(x) = 4x + 5$ co oznacza, że zachodzi następująca równość wielomianów:

$$2x^3 + 8x - 1 = (2x - 2)(x^2 + x + 3) + (4x + 5)$$

Jeżeli reszta z dzielenia wielomianu wynosi zero to mówimy, że wielomiany się dzielą bez reszty.

Wykonujemy razem ćwiczenie:

Strona 6: Ćwiczenie do wykonania na lekcji:

Wykonaj dzielenie z resztą:

a) $(5x^2 + 2x - 3) : (x - 1)$

b) $(-10x^5 + 5x^4 - 9x^3 + 4x^2 - 4x + 5) : (5x^3 + 2x - 1)$

c) $(-6x^4 + 19x^3 - 15x^2 - 26x - 4) : (3x^2 - 2x - 8)$

Uczniowie rozwiązują samodzielnie ćwiczenie 2:

Strona 7: ćwiczenie 2

Wynikiem dzielenia wielomianu $3x^3 + 2x + 12$ przez wielomian $x^2 + 2x + 5$ jest:

a) wielomian $3x - 6$ z resztą $-x + 42$

b) wielomian $3x - 6$ z resztą $-x + 30$

c) wielomian $3x + 6$ z resztą $5x - 18$

Aby podzielić wielomian przez dwumian postaci x – a to możemy skorzystać ze schematu Hornera:
Uczniowie zapoznają się ze schematem analizując stronę ósmą naszej lekcji o wielomianach zamieszczonej na platformie moodle.

Strona 8: Schemat Hornera

Dzieląc dowolny wielomian przez dwumian $x - a$ możemy skorzystać z uproszczonej metody, zwanej schematem Hornera.

Pokażę jak tą metodą znaleźć wynik dzielenia wielomianu $W(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$ przez dwumian $x - 5$.

W tym celu tworzymy tabelkę:

	1	1	-10	8
5	1			

Tu wpisujemy *a* (w tym wypadku 5)
Zapisujemy kolejne współczynniki wielomianu W(x)
Tu przepisujemy pierwszy współczynnik

Drugi współczynnik wiersza dolnego otrzymujemy, mnożąc poprzedni współczynnik tego wiersza, tzn. 1 przez 5 i dodając do drugiego współczynnika wiersza górnego, tzn. do 1 mamy $1 \cdot 5 + 1 = 6$,

Trzeci współczynnik wiersza dolnego otrzymujemy, mnożąc poprzedni współczynnik tego wiersza, tzn. 6 przez 5 i dodając do trzeciego współczynnika wiersza górnego, tzn. -10 mamy $6 \cdot 5 - 10 = 20$,

Podobnie mamy $20 \cdot 5 + 8 = 108$,

	1	1	-10	8
5	1	6	20	108

Reszta z dzielenia
To są współczynniki wielomianu, który powstał w wyniku dzielenia

Ostatecznie możemy zapisać:

$(x^3 + x^2 - 10x + 8) : (x - 5) = x^2 + 6x + 20$ reszta 108.

Uczniowie rozwiązują samodzielnie ćwiczenie:

Strona 9: Ćwiczenie do wykonania na lekcji

Wykonaj dzielenie, korzystając ze schematu Hornera:

a) $(x^3 + 5x - 2) : (x + 1)$
b) $(2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 1) : (x + 2)$
c) $(3x^3 - x^2 - 12x + 4) : (x - 2)$

Przechodzimy do zadań do wykonania na lekcji:

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

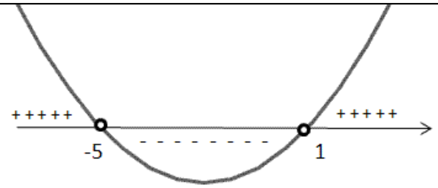
		Zadanie 1 Znajdź wielomian W(x), jeśli: a) $(2x^2 - 7) \cdot \mathrm{W(x)} = 6x^6 + 4x^5 - 31x^4 - 18x^3 + 37x^2 + 14\mathrm{x} - 7$ b) $W(x) \cdot (x-1)(x+5) = x^5 - x^4 - 22x^3 + 12x^2 - 3x - 35$ c) $W(x) \cdot (2x^2 + x - 5) - 2x^4 - 15 = x(x^2 - 11x - 3)$ ***Zadanie 2*** Znajdź resztę z dzielenia wielomianu $4x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 5$ przez wielomian: a) $x^3 - 2$ b) $x^5 + 4$ c) $x^2 - 3$ ***Zadanie 3*** Znajdź wielomian *P*(*x*) taki, że po podzieleniu go: a) przez $3x^3 + 2x^2 - 4$ otrzymujemy wielomian $x^2 + 3$ oraz resztę $2x^2 + 6$ b) przez $2x^5 + 4x - 3$ otrzymujemy wielomian $x^2 + 2x - 3$ oraz resztę $-5x^2 + 11x - 8$ ***Zadanie 4*** Wykonaj dzielenie korzystając ze schematu Hornera: a) $(x^3 - 3x^2 - 17x - 14) : (x + 2)$ b) $(5x^6 - 9x^5 + 7x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1) : (x - 1)$ c) $(-3\mathrm{x}^5 - 9\mathrm{x}^4 + 4\mathrm{x}^3 + 5\mathrm{x}^2 - 16\mathrm{x} + 15) : (\mathrm{x} + 3)$ d) $(-3x^4 + 2x - 5) : (x - 2)$
7	Podsumowanie zajęć	Na koniec uczniowie wykonują zadania do lekcji 6 i odpowiedzi przesyłają nauczycielowi poprzez platformę moodle. **Zadania do lekcji 6:** **Zadanie 6.1:** Podaj wynik dzielenia wielomianów $(x^3 + 3x^2 - 8x + 10) : (x^2 - 2x + 2)$ **Zadanie 6.2:** Oblicz resztę z dzielenia wielomianów $(x^4 + 3x^2 - 5x - 7) : (x - 2)$

		Zadanie 6.3: Podaj wielomian, który przy dzieleniu przez 2x + 1 daje iloraz $x^2 + 2x - 3$ i resztę 5. Podczas rozwiązywania zadań w razie konieczności uczniowie cały czas korzystają z lekcji zamieszczonej na platformie moodle.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	

Scenariusz nr 7*: Nierówności wielomianowe

Temat zajęć		**Nierówności wielomianowe**
Dział		**Wielomiany**
Klasa (poziom edukacyjny)		**Klasa druga lub jako materiał powtórzeniowy do matury w klasie trzeciej lub czwartej**
Czas trwania zajęć		**90 min.**
Lp.	**Element scenariusza**	**Treść zajęć**
1	Cel ogólny	• Kształcenie umiejętności logicznego myślenia • Operowanie posiadaną wiedzą w rozwiązywaniu zadań • Kształcenie umiejętności posługiwania się językiem matematycznym • Rozwijanie u uczniów zdolności poznawczych • Przyswajanie schematów rozumowań i ich stosowanie w rozwiązaniu nierówności wielomianowej
2	Cele szczegółowe	Uczeń: • zna pojęcie nierówności pierwszego i drugiego stopnia z jedną niewiadomą; • potrafi rozwiązać nierówność wielomianową.
3	Formy i metody	• Pogadanka • Praca z zespołem klasowym • Praca samodzielna
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym	W celu przeprowadzenia lekcji wykorzystamy kurs wielomiany. Lekcja dziesiąta tego kursu zapoznaje ze sposobem rozwiązywania nierówności wielomianowych.

	wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Informujemy uczniów o przebiegu lekcji: Przechodzimy przez strony lekcji 10 - „Nierówności wielomianowe”, uczniowie zapoznają się z teorią, wykonują samodzielnie ćwiczenia, które się z nią przeplatają. Rozwiązujemy zadania do wykonania na lekcji. Zadania 10.1, 10.2, 10.3 umieszczone na platformie uczniowie rozwiązują sami i rozwiązania przesyłają nauczycielowi bądź to jeszcze w czasie trwania lekcji lub jako praca domowa. Na początku przypomnimy jak rozwiązuje się nierówność pierwszego stopnia z jedną niewiadomą: ***Ćwiczenie*** Rozwiąż nierówność $2x + 5 \geq 3x - 2$. Wynik przedstaw w postaci przedziału liczbowego. Logujemy się na platformie. Wchodzimy na kurs „Wielomiany”. Wybieramy **Lekcja 10 – Nierówności wielomianowe** Podczas tej lekcji nauczymy się rozwiązywać nierówności wielomianowe stopnia wyższego niż drugi.
6	Przebieg zajęć *(pełna wersja)*	**Przypominamy jak rozwiązuje się nierówność kwadratową:** **Strona 1:** **Wiadomości wstępne** Potrafisz już rozwiązać nierówność stopnia pierwszego a także nierówność kwadratową. Umiejętność tą wykorzystamy przy rozwiązywaniu nierówności wyższego stopnia. Przypomnijmy jak się rozwiązuje nierówności kwadratowe. **Np.** Rozwiążmy $2x^2 + 8x - 10 < 0$ Wyznaczamy pierwiastki trójmianu: $\Delta = 144$, $x_1 = -5$, $x_2 = 1$. Zaznaczamy pierwiastki na osi liczbowej, kółeczka na pierwiastkach są otwarte (bo ostra nierówność, czyli <), rysujemy parabolę i odczytujemy kiedy w tym przypadku jest mniejsza od zera x є (-5, 1)



Przechodząc na stronę drugą dowiemy się jak rozwiązać prostą nierówność wielomianową podaną w postaci iloczynu:

Strona2: **Rozwiązywanie nierówności wielomianowej (przykład 1)**

Jeśli mamy wielomian rozłożony na czynniki to możemy w prosty sposób określić znak iloczynu.

Przykład: Rozwiążmy nierówność (x – 5)(x – 1)(x + 2) >0

Rozwiązanie

Mamy odpowiedzieć na pytanie kiedy iloczyn trzech czynników jest dodatni?

Liczby -2, 1 i 5 (pierwiastki wielomianu) dzielą oś liczbową na trzy przedziały. Znaki czynników zbieramy w tabelce:

x	(-∞,-2)	-2	(-2,1)	1	(1,5)	5	(5,∞)
x - 5	-	-	-	-	-	0	+
x - 1	-	-	-	0	+	+	+
x + 2	-	0	+	+	+	+	+
ILOCZYN	-	0	+	0	-	0	+

Czyli (x – 5)(x – 1)(x + 2) >0 wtedy i tylko wtedy gdy xє (-2,1)ᴜ(5,∞).

Uczniowie samodzielnie rozwiązują ćwiczenie 1:

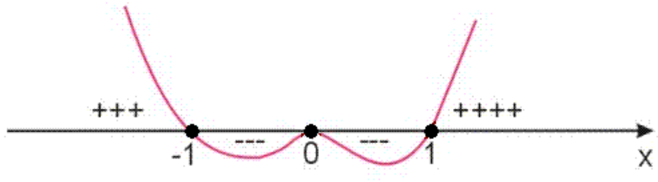
Strona 3: **ćwiczenie 1**

Rozwiązaniem nierówności -2(x + 3)(x – 1) <0 jest

(-3,1)ᴜ(1,∞)

(-∞,-3)ᴜ(1,∞)

		(-∞,1)υ(1, ∞) **Uczniowie poznają algorytm rozwiązywania nierówności wielomianowych każdej postaci:** Strona 4: Metoda rozwiązywania nierówności wielomianowej Im wielomian jest stopnia wyższego tym bardziej skomplikowane jest wykonywanie tabeli. Wtedy stosujemy inny sposób rozwiązywania nierówności wielomianowej: Uporządkowujemy wielomian, który powinien być po lewej stronie nierówności a po prawej jest zero Wyznaczamy pierwiastki wielomianu i określamy ich krotności Rysujemy oś liczbową i zaznaczamy na niej pierwiastki wielomianu Zamalowujemy lub nie kółka na pierwiastkach (w zależności od znaku nierówności jak jest ≥ lub ≤ kółka są zamalowane, gdy jest < lub < kółka są otwarte) Prowadzimy wykres zaczynając zawsze z prawej strony – jeśli współczynnik przy najwyższej potędze wielomianu jest dodatni to zaczynamy z nad osi jeśli ujemny z pod osi Jeżeli pierwiastek jest parzystokrotny to wykres odbijamy w tym pierwiastku z powrotem na tą samą stronę osi, z której go prowadziliśmy Jeżeli pierwiastek jest nieparzystokrotny do przechodzimy wykresem na drugą stronę osi Na koniec odczytujemy rozwiązanie naszej nierówności **Uczniowie analizują rozwiązany przykład:** Strona 5: Rozwiązywanie nierówności (przykład 2) Przykład: Rozwiąż nierówność 5x2(x – 1)3(x + 1) ≤ 0 *Rozwiązanie:* Mamy uporządkowaną nierówność więc przystępujemy do odczytania pierwiastków wielomianu ponieważ mamy tu postać iloczynową. Pierwiastki naszego wielomianu to: x = 0 dwukrotny x = 1 trzykrotny x = -1 jednokrotny Teraz wykonujemy rysunek zgodny z podaną wcześniej instrukcją.

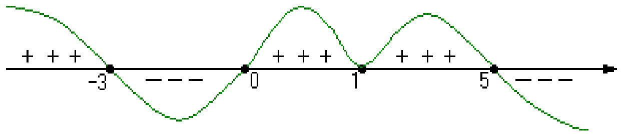


I odczytujemy, że rozwiązaniem nierówności jest x∈<-1,1>.

Uczniowie samodzielnie rozwiązują ćwiczenie 2:

Strona 6: **ćwiczenie 2**

Wykres i podana odpowiedź jest rozwiązaniem nierówności:



x ∈ (-∞,-3> ∪ <0,5>

$-2x(x + 3)^5(x - 1)^4(x - 5) < 0$

$3x(x + 3)^4(x - 1)(x - 5)^3 \leq 0$

$-5x^3(x + 3)^3(x - 1)^2(x - 5) \geq 0$

Przechodzimy do zadań do rozwiązania na lekcji:

Zadanie 1

Rozwiąż nierówności:

a) $(-x+2)(x^2-1) \leq 0$

b) $(x^2-3x)(x^2+3x-4) > 0$

c) $(x^2-4)(3x^2-5x-2) < 0$

d) $-x^4+3x^3+4x^2 \geq 0$

e) $2x^3-x^2-18x+9 \leq 0$

		Zadanie 2 Znajdź dziedzinę funkcji określonej wzorem: a) $y=\sqrt{2x^9-3x^8+6x^3-9x^2}$ b) $y=\frac{2x-3}{\sqrt{(3-x)^6(3x^2+2x-1)^2}}$ ***Zadanie 3*** Podaj przykład nierówności co najmniej trzeciego stopnia, której zbiorem rozwiązań jest zbiór: $(-\infty;-2)\cap\cup(1;3)\cup(4;\infty)$ pusty ***Zadanie 4*** Ustal dla jakich wartości parametru m reszta z dzielenia wielomianu $W(x)=x^5-2mx^3-5x^3+10mx-6x+15$ przez dwumian $x-m$ jest większa od 3. ***Zadanie 5*** Rozwiąż nierówność $\|x^3-6x\|>5x^2$
7	Podsumowanie zajęć	Podsumowujemy wiadomości poznane na tej lekcji. Przechodzimy do zadań zamieszczonych na platformie. Uczniowie rozwiązują samodzielnie zadania i przesyłają nauczycielowi. **Zadania do lekcji 10:** **Zadanie 10.1:** Rozwiąż nierówność $(-x+1)(x+2)^2>0$ **Zadanie 10.2:** Rozwiąż nierówność $x^4+x^3-8x-8\geq 0$ **Zadanie 10.3:** Rozwiąż nierówność $3x^3-x^2-x-1\leq 0$ (skorzystaj z twierdzenia Bezouta) Podczas rozwiązywania zadań w razie konieczności uczniowie cały czas korzystają z lekcji zamieszczonej na platformie moodle.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	

Scenariusz nr 8*: Twierdzenie Bezout’a

Temat zajęć		**Twierdzenie Bezout’a**
Dział		**Wielomiany**
Klasa (poziom edukacyjny)		**Klasa druga lub jako materiał powtórzeniowy do matury w klasie trzeciej lub czwartej**
Czas trwania zajęć		**90 min.**
Lp.	**Element scenariusza**	**Treść zajęć**
1	Cel ogólny	• Kształcenie umiejętności logicznego i twórczego myślenia • Operowanie posiadaną wiedzą w rozwiązywaniu zadań • Kształcenie umiejętności posługiwania się językiem matematycznym • Formułowanie wniosków • Rozwijanie u uczniów zdolności poznawczych
2	Cele szczegółowe	Uczeń: • rozumie co to pierwiastek wielomianu; • potrafi sprawdzić czy podana liczba jest pierwiastkiem wielomianu; • potrafi znaleźć resztą z dzielenie wielomianów nie dzieląc ich; • potrafi zastosować twierdzenie Beozuta;
3	Formy i metody	• Pogadanka • Praca z zespołem klasowym • Praca samodzielna
4	Środki dydaktyczne	Lekcję prowadzimy wykorzystując do tego kurs „Wielomiany” (lekcja 7) zamieszczony na platformie

	(ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	e-learningowej moodle, mobilną pracownię komputerową oraz mobilną pracownię komputerową aby każdy uczeń miał samodzielny dostęp do komputera.
5	Wprowadzenie do zajęć	Informujemy uczniów o przebiegu lekcji: Przechodzimy przez strony lekcji 7 - „Twierdzenie Bezouta”, uczniowie zapoznają się z teorią, wykonują samodzielnie ćwiczenia, które się z nią przeplatają. Rozwiązujemy zadania do wykonania na lekcji. Zadania 7.1, 7.2, 7.3 umieszczone na platformie uczniowie rozwiązują sami i rozwiązania przesyłają nauczycielowi bądź to jeszcze w czasie trwania lekcji lub jako praca domowa. Logujemy się na platformie. Wchodzimy na kurs „Wielomiany”. Wybieramy **Lekcja 7 – Twierdzenie Bezouta** Podczas tej lekcji poznamy i nauczymy się wykorzystywać twierdzenie Bezouta.
6	Przebieg zajęć *(pełna wersja)*	**Uczeń poznaje jak znaleźć resztę z dzielenia wielomianu przez dwumian bez wykonywania działania dzielenia:** **Strona 1:** **Podzielność wielomianu przez dwumian** Jeżeli wielomian jest rozłożony na czynniki stopnia co najwyżej drugiego, to potrafimy wskazać wszystkie jego pierwiastki. Gdy w postaci iloczynowej występują czynniki typu x – a, to od razu widać, że liczba a jest pierwiastkiem. Przyjmijmy, że wielomian W(x) jest stopnia co najmniej drugiego. Dzieląc wielomian W(x) przez dwumian x – a mamy: $W(x) = (x - a)\cdot Q(x) + R$ Ponieważ dzielnik (x – a) jest stopnia pierwszego to reszta będzie liczbą. Zauważmy, że jeżeli obliczymy wartość wielomianu W dla x = a, to otrzymamy równość:

$W(a) = (a – a) \cdot Q(a) + R$, czyli $W(x) = R$

Zatem aby obliczyć resztę z dzielenia wielomianu W(x) przez dwumian x – a, nie trzeba wykonywać dzielenia. Wystarczy obliczyć wartość wielomianu W dla x = a.

Uczniowie analizują podane przykłady znajdowania reszty z dzielenia wielomianu przez dwumian:

Strona 2: **Przykłady obliczania reszty z dzielenia**

Np.: Obliczmy resztę z dzielenia $(x^{10} – 5x^3 + 3) : (x + 1)$

Podstawiamy liczbę -1 (która jest pierwiastkiem dwumianu x + 1) do wielomianu $x^{10} – 5x^3 + 3$.

$(-1)^{10} – 5(-1)^3 + 3 = 1 + 5 + 3 = 9$

Reszta z tego dzielenia jest równa 9

Np.: Obliczmy resztę z dzielenia wielomianu $W(x) = x^4 - x^2 + 20$ przez dwumian $P(x) = x - \sqrt{3}$.

Obliczamy $W(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^4 - (\sqrt{3})^2 + 20 = 9 - 3 + 20 = 26$

Czyli R = 26

Np.: Obliczmy resztę z dzielenia wielomianu $W(x) = 3x^6 - x^4 - 5x^2 - 10$ przez dwumian $P(x) = x + \sqrt{2}$.

Obliczamy $W(-\sqrt{2}) = 3(-\sqrt{2})^6 - (-\sqrt{2})^4 - 5(-\sqrt{2})^2 - 10 = 24 - 4 - 10 - 10 = 0$

Czyli R = 0. Więc wielomian W jest podzielny przez dwumian $x + \sqrt{2}$.

Uczniowie samodzielnie rozwiązują ćwiczenie 1:

Strona 3: **ćwiczenie 1**

Reszta z dzielenia wielomianów $W(x) = x^5 + x^4 – x^3 – x + 6$ przez dwumian $Q(x) = x + 2$ wynosi:

- -20
- 0
- 14

Przechodzimy na stronę czwartą informując uczniów o tym, że zapoznają się z twierdzeniem dotyczącym pierwiastka wielomianu:

Strona 4: Twierdzenie Bezouta

Twierdzenie Bezouta

Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu W wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian W jest podzielny przez dwumian $x - a$.

Np.: Sprawdź, który z wielomianów W(x) = $x^3 + 2x^2 - 3x - 10$ czy U(x) = $x^3 - 5x^2 + 2x - 6$ jest podzielny przez dwumian $x - 2$.

Obliczamy W(2) = $2^3 + 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 - 10 = 8 + 8 - 6 - 10 = 0$

oraz U(2) = $2^3 - 5 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 6 = 8 - 20 + 4 - 6 = -14$

Stwierdzamy, że na podstawie tw.Bezouta wielomian W(x) jest podzielny przez dwumian $x - 2$.

Uczniowie analizują przykład zastosowania tw. Bezouta do rozwiązywania zadań:

Często znajomość jednego z pierwiastków wielomianu umożliwia znalezienie pozostałych pierwiastków.

Np.: Wiedząc, że liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ znajdź pozostałe pierwiastki.

Ponieważ 2 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to na podstawie tw. Bezouta wielomian ten można przedstawić w postaci:

$x^3 - 4x^2 + x + 6 = P(x) \cdot (x - 2)$

Wielomian $P(x)$ znajdujemy, wykonując dzielenie:

$(x^3 - 4x^2 + x + 6) : (x - 2) = x^2 - 2x - 3$

$$\begin{array}{l}
\underline{x^3 - 2x^2} \\
\quad - 2x^2 + x + 6 \\
\quad \underline{- 2x^2 + 4x} \\
\qquad - 3x + 6 \\
\qquad \underline{- 3x + 6} \\
\qquad\quad 0
\end{array}$$

Zatem $(x^3 - 4x^2 + x + 6) = (x - 2) \cdot (x^2 - 2x - 3)$. Pozostałe pierwiastkami wielomianu $W(x)$ są pierwiastki trójmianu $x^2 - 2x - 3$. Są to liczby -1 i 3.

Uczniowie samodzielnie rozwiązują ćwiczenie 2:

<u>Strona 6:</u> ćwiczenie 2

Jednym z pierwiastków wielomianu $W(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ jest liczba 3. Pozostałe pierwiastki to:

- 2 i -1
- -2 i 1
- -2 i 2

Uczniowie poznają kolejne zastosowanie tw. Bezouta:

<u>Strona 7:</u> Znajdowanie pierwiastków równania (przykład 2)

Np.: Liczby -3 i 2 są pierwiastkami wielomianu $W(x) = ax^3 + bx^2 - 11x + 30$. Znajdź trzeci pierwiastek tego wielomianu.

Rozwiązanie

Ponieważ -3 i 2 są pierwiastkami wielomianu to $W(3) = 0$ i $W(-2) = 0$.

$W(2) = a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 - 11 \cdot 2 + 30 = 8a + 4b + 8$

$W(-3) = a(-3)^3 + b(-3)^2 - 11(-3) + 30 = -27a + 9b + 63$

Stąd mamy układ

$$\begin{cases} 8a + 4b + 8 = 0 \\ -27a + 9b + 63 = 0 \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu jest para liczb $a = 1$, $b = -4$.

Wtedy $W(x) = x^3 - 4x^2 - 11x + 30$. Skoro -3 i 2 są jego pierwiastkami to jest on podzielny przez $(x + 3)(x - 2)$ czyli $x^2 + x - 6$.

Dokonując dzielenia $(x^3 - 4x^2 - 11x + 30) : (x^2 + x - 6)$ otrzymujemy dwumian $x - 5$, więc trzecim pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ jest liczba 5.

Uczniowie samodzielnie rozwiązują ćwiczenie 3:

<u>Strona 8:</u> ćwiczenie 3

Wiadomo, że reszta z dzielenia wielomianu $2x^3 + x^2 - x + 7$ przez dwumian $x - a$ wynosi 7. Wtedy a wynosi:

- a=-1 lub a=1 lub a=2
- a=0 lub a=1/2 lub a=-1
- a=0 lub a=1 lub a=-1

Przechodzimy do zadań do rozwiązania na lekcji:

Zadanie 1

Nie wykonując dzielenia sprawdź czy wielomian *W*(*x*) jest podzielny przez dwumian *P*(*x*), jeśli:

$\mathrm{W(x)} = 5x^9 - x^7 + 4x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 1,\ P(x) = x + 1$

$W(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2},\ P(x) = x - 2$

$W(x) = x^8 - 5x^4 - \sqrt{3}x^3 - 27,\ P(x) = x - \sqrt{3}$

Zadanie 2

Nie wykonując dzielenia, znajdź resztę z dzielenia:

a) $(5x^7 - 4x^5 + 2x^3 - 2x^2 + 3):(x - 1)$

b) $(4x^{100} - 3x^5 - 6x^2 + 4):(x + 1)$

c) $\left(-\frac{1}{9}x^5 - \frac{2}{9}x^4 - \frac{1}{3}x\right):(x + 3)$

Zadanie 3

Oblicz wartość parametru *t* wiedząc, że:

a) reszta z dzielenia wielomianu $4x^3 + 2x^2 - x - 4$ przez dwumian $x - t$ wynosi 1;

b) reszty z dzielenia wielomianów $x^3 + 3x^2 - 7x + 5$ i $x^3 + 2x^2 - 3x + 2$ przez dwumian $x - t$ są takie same.

Zadanie 4

Sprawdź czy liczba *a* jest pierwiastkiem wielomianu *W*(*x*). Następnie rozłóż ten wielomian na czynniki.

a) $W(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 10,\ \ a = -5$

b) $W(x) = 6x^3 - 13x^2 - 10x + 24,\ \ a = 2$

c) $W(x) = x^4 - 5x^3 - x^2 + 25x - 20,\ \ a = 4$

Zadanie 5

Liczba *a* jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu *W*(*x*). Znajdź pozostałe pierwiastki tego

		wielomianu. a) $a=-2,\ W(x)=3x^4+x^3-52x^2-124x-80$ b) $a=3,\ W(x)=4x^4-20x^3+13x^2+30x+9$ ***Zadanie 6*** Dla jakich wartości a i b wielomian $5x^4+4x^3+ax^2+bx+1$ jest podzielny przez dwumian x^2-1 ?
7	Podsumowanie zajęć	Podsumowujemy poznane wiadomości. Uczniowie próbują samodzielnie rozwiązać zadania do lekcji i przesłać odpowiedzi do nauczyciela wykorzystując platformę elearningową. **Zadania do lekcji 7:** **Zadanie 7.1:** Wiedząc, że liczba -5 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 + 2x^2 - 11x + 20$, znajdź jego pozostałe pierwiastki. **Zadanie 7.2:** Znajdź wartość parametru k wiedząc, że wielomian $W(x) =k^2x^3 + kx^2 + x +7$ jest podzielny przez dwumian $x + 1$. **Zadanie 7.3:** Reszty z dzielenia wielomianów $W(x) = 2x^3 + 5x^2 - 5x - 7$ i $P(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x + 3$ przez dwumian $x - a$ są takie same. Znajdź liczbę a. Podczas rozwiązywania zadań w razie konieczności uczniowie cały czas korzystają z lekcji zamieszczonej na platformie moodle.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	

Scenariusz nr 9*: Twierdzenie o rozwiązaniach całkowitych

Temat zajęć		**Twierdzenie o rozwiązaniach całkowitych**
Dział		**Wielomiany**
Klasa (poziom edukacyjny)		**Klasa druga lub jako materiał powtórzeniowy do matury w klasie trzeciej lub czwartej**
Czas trwania zajęć		**90 min.**
Lp.	**Element scenariusza**	**Treść zajęć**
1	Cel ogólny	• Kształcenie umiejętności logicznego myślenia • Operowanie posiadaną wiedzą w rozwiązywaniu zadań • Formułowanie wniosków • Kształcenie umiejętności posługiwania się językiem matematycznym • Rozwijanie u uczniów zdolności poznawczych
2	Cele szczegółowe	Uczeń: • potrafi znaleźć pierwiastki całkowite równania wielomianowego; • potrafi pokazać, że wielomian nie posiada pierwiastków całkowitych.
3	Formy i metody	• Pogadanka • Praca z zespołem klasowym • Praca samodzielna
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym	Prowadząc tą lekcję wykorzystujemy kurs wielomiany na platformie moodle, a konkretnie lekcję ósmą oraz mobilną pracownię komputerową aby każdy uczeń miał samodzielny dostęp do komputera.

	wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Informujemy uczniów o przebiegu lekcji: Przechodzimy przez strony lekcji 8 - „Twierdzenie o rozwiązaniach całkowitych”, uczniowie zapoznają się z teorią, wykonują samodzielnie ćwiczenia, które się z nią przeplatają. Rozwiązujemy zadania do wykonania na lekcji. Zadania 8.1, 8.2, 8.3 umieszczone na platformie uczniowie rozwiązują sami i rozwiązania przesyłają nauczycielowi bądź to jeszcze w czasie trwania lekcji lub jako praca domowa. Logujemy się na platformie. Wchodzimy na kurs „Wielomiany”. Wybieramy **Lekcja 8 – Twierdzenie o rozwiązaniach całkowitych** Podczas tej lekcji poznamy treść w.w. twierdzenia i jego zastosowanie w rozwiązywaniu zadań.
6	Przebieg zajęć *(pełna wersja)*	**Uczniowie poznają treść twierdzenia:** **Strona 1:** **Twierdzenie o rozwiązaniach całkowitych** W celu rozwiązania równania wielomianowego o współczynnikach całkowitych, możemy posłużyć się następującym twierdzeniem: **Twierdzenie o rozwiązaniach całkowitych** Załóżmy, że w równaniu wielomianowym $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ wszystkie współczynniki a_n, a_{n-1},+ … +a_1, a_0 są liczbami całkowitymi i $a_0 \neq 0$. Jeśli rozwiązaniem tego równania jest liczba całkowita, to jest ona dzielnikiem wyrazu wolnego a_0. **Omawiamy na przykładzie zastosowanie twierdzenia:**

		Strona 2: Rozwiązania całkowite wielomianu (przykład 1) **Przykład** Wykażemy, że równanie $x^5 + 2x – 11 = 0$ nie ma żadnych rozwiązań całkowitych. *Rozwiązanie* Gdyby powyższe równanie miało rozwiązania całkowite, byłyby to dzielniki wyrazu wolnego -11 (zgodnie z twierdzeniem o rozwiązaniach całkowitych). Sprawdzamy czy liczby -1, 1 -11 i 11 są pierwiastkami równania: $(-1)^5 + 2(-1) – 11 = -1 – 2 – 11 = -14$ $1^5 + 2\cdot1 – 11 = 1 + 2 -11 = -8$ $(-11)^5 + 2(-11) – 11 = -161051 – 22 – 11 = -161084$ $11^5 + 2\cdot11 – 11 = 161051 + 22 – 11 = 161062$ Widzimy, że wszystkie wyniki są różne od zera. Z tego wynika, że równanie $x^5 + 2x – 11 = 0$ nie ma żadnych rozwiązań całkowitych. **Uczniowie samodzielnie rozwiązują ćwiczenie 1:** **Strona 3:** ćwiczenie 1 Czy równanie $x^7 –x + 7 = 0$ ma rozwiązania całkowite? ma jedno rozwiązanie całkowite ma dwa rozwiązania całkowite nie ma rozwiązań całkowitych **Następnie na stronie czwartej uczniowie analizują przykład zadania wykorzystującego twierdzenie o rozwiązaniach całkowitych i poznane wcześniej twierdzenie Bezouta.** **Strona 4:** Rozwiązania całkowite wielomianu (przykład 2) **Przykład** Sprawdź czy równanie $5x^3 – 8x^2 – 5x + 2 = 0$ ma pierwiastki całkowite. Znajdź pozostałe pierwiastki tego równania. *Rozwiązanie* Jeśli są pierwiastki całkowite to mogą to być 1, -1, 2, -2. Sprawdzamy: $5\cdot1^3 – 8\cdot1^2 – 5\cdot1 + 2 = -6$ $5(-1)^3 – 8(-1)^2 – 5(-1) + 2 = -6$

		$5 \cdot 2^3 - 8 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 2 = 0$ Widzimy więc że 2 jest pierwiastkiem równania, stąd wiemy, że $5x^3 - 8x^2 - 5x + 2$ dzieli się na $x - 2$. W wyniku dzielenia otrzymujemy: $(5x^3 - 8x^2 - 5x + 2) : (x - 2) = 5x^2 + 2x - 1$ Pozostałych rozwiązań szukamy więc w rozwiązaniu równania $5x^2 + 2x - 1 = 0$ $\Delta = 24$ więc pozostałe pierwiastki równania to $\boldsymbol{x_1} = \frac{-1-\sqrt{6}}{5}$ $\boldsymbol{x_2} = \frac{-1+\sqrt{6}}{5}$ **Uczniowie samodzielnie rozwiązują ćwiczenie 2:** **Strona 5:** **ćwiczenie 2** Rozwiązaniem równania $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$ są liczby: ● 1 i -2 ● 1 i 2 i -2 ● -2 i 2 **Przechodzimy do zadań do rozwiązania na lekcji:** ***Zadanie 1*** Znajdź całkowite pierwiastki wielomianu: a) $x^3 - 3x^2 - 3x + 9$ b) $6x^3 + 23x^2 - 5x - 4$ c) $x^6 - 4x^5 - 6x^4 + 4x^3 + 5x^2$ ***Zadanie 2*** Rozwiąż równania: a) $2x^4 - x^3 - 9x^2 + 3x + 9 = 0$ b) $12x^3 - x^2 - 41x - 10 = 0$ c) $x^3 + 3x^2 + 7x + 21 = 0$ d) $x(x + 1)^2 - 3x = 3$

		e) $5x(x^2-1)+(3x+2)^2=-3x^2+x$ ***Zadanie 3*** Dla jakiej liczby całkowitej *m* równanie ma pierwiastki całkowite: a) $x^2+m=0$ b) $x^3+mx^2-2=0$ ***Zadanie 4*** Niech *p* będzie liczbą pierwszą. Zbadaj czy równanie ma rozwiązania całkowite: a) $x^3+(3-p)x^2+(5-3p)x-5p=0$ b) $x^3+5x^2-2x+p=0$ ***Zadanie 5*** Ustal dla jakiej wartości *a* równanie $a^3-4a^2+a+6=0$ posiada pierwiastki całkowite?
7	Podsumowanie zajęć	Po podsumowaniu tej części lekcji uczniowie rozwiązują trzy zadania i rozwiązania przesyłają nauczycielowi na platformie moodle. **Zadania do lekcji 8:** **Zadanie 8.1:** Jakie rozwiązania całkowite ma równanie $10x^3 + 11x^2 – 16x + 4 = 0$? **Zadanie 8.2:** Rozwiąż równanie $2x^3 + 2x^2 + 3 = 11x$ **Zadanie 8.3:** Napisz równanie stopnia trzeciego, którego pierwiastkami są liczby ab, ac i bc, jeżeli a, b, c są pierwiastkami równania $x^3 – 2x^2 – 11x +12 = 0$. Podczas rozwiązywania zadań w razie konieczności uczniowie cały czas korzystają z lekcji zamieszczonej na platformie moodle.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	

Scenariusz nr 10*: Twierdzenie o rozwiązaniach wymiernych

Temat zajęć	**Twierdzenie o rozwiązaniach wymiernych**
Dział	**Wielomiany**
Klasa (poziom edukacyjny)	**Klasa druga lub jako materiał powtórzeniowy do matury w klasie trzeciej lub czwartej**
Czas trwania zajęć	**90 min.**

Lp.	**Element scenariusza**	**Treść zajęć**
1	Cel ogólny	• Kształcenie umiejętności logicznego myślenia • Operowanie posiadaną wiedzą w rozwiązywaniu zadań • Formułowanie wniosków • Kształcenie umiejętności posługiwania się językiem matematycznym • Rozwijanie u uczniów zdolności poznawczych
2	Cele szczegółowe	Uczeń • potrafi znaleźć pierwiastki wymierne równania wielomianowego; • potrafi pokazać, że wielomian nie posiada pierwiastków wymiernych.
3	Formy i metody	• Pogadanka • Praca z zespołem klasowym • Praca samodzielna
4	Środki dydaktyczne (ze szczegółowym	Prowadząc tą lekcję wykorzystujemy kurs wielomiany na platformie moodle – lekcję dziewiątą oraz mobilną pracownię komputerową aby każdy uczeń miał samodzielny dostęp do komputera.

	wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra)	
5	Wprowadzenie do zajęć	Informujemy uczniów o przebiegu lekcji: Przechodzimy przez strony lekcji 9 - „Twierdzenie o rozwiązaniach wymiernych”, uczniowie zapoznają się z teorią, wykonują samodzielnie ćwiczenia, które się z nią przeplatają. Rozwiązujemy zadania do wykonania na lekcji. Zadania 9.1, 9.2, 9.3 umieszczone na platformie uczniowie rozwiązują sami i rozwiązania przesyłają nauczycielowi bądź to jeszcze w czasie trwania lekcji lub jako praca domowa. Logujemy się na platformie. Wchodzimy na kurs „Wielomiany”. Wybieramy **Lekcja 9 – Twierdzenie o rozwiązaniach wymiernych** Podczas tej lekcji poznamy treść w.w. twierdzenia i jego zastosowanie w rozwiązywaniu zadań.
6	Przebieg zajęć *(pełna wersja)*	**Uczniowie poznają treść twierdzenia:** **Strona 1:** **Twierdzenie o rozwiązaniach wymiernych** Jeżeli równanie wielomianowe o współczynnikach całkowitych nie ma rozwiązań całkowitych to możemy znaleźć jego rozwiązania wymierne posługując się następującym twierdzeniem: **Twierdzenie o rozwiązaniach wymiernych** Załóżmy, że w równaniu wielomianowym $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$ wszystkie współczynniki a_n, a_{n-1},+ … +a_1, a_0 są liczbami całkowitymi i $a_0 \neq 0$ i $a_n \neq 0$. Jeśli rozwiązaniem tego równania jest liczba wymierna, to można ją przedstawić w postaci ułamka $\frac{p}{q}$, gdzie licznik p jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0, a mianownik q jest dzielnikiem współczynnika a_n przy najwyższej potędze.

Omawiamy na przykładzie zastosowanie twierdzenia:

Strona 2: Rozwiązania wymierne wielomianu (przykład 1)

Przykład Znajdź wszystkie rozwiązania wymierne równania $6x^3 + x^2 - 1 = 0$

Rozwiązanie:

Zgodnie z twierdzeniem o rozwiązaniach wymiernych jeśli istnieją rozwiązania wymierne to są to liczby postaci $\frac{p}{q}$ gdzie w tym przypadku p jest dzielnikiem liczby -1 (czyli mogą to być liczby -1 lub 1), a q jest dzielnikiem liczby 6 (czyli mogą to być 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6 lub -6).

Rozwiązaniami wymiernymi mogą więc być liczby $\mathbf{1}$, $\mathbf{-1}$, $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}$. Sprawdzamy więc po kolei, które z nich są rozwiązaniami naszego równania.

$$6 \cdot 1^3 + 1^2 - 1 = 6$$

$$6 \cdot (-1)^3 + (-1)^2 - 1 = -6$$

$$6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 0$$

$$6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{3}{2}$$

$$6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = -\frac{2}{3}$$

$$6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = -\frac{10}{9}$$

$$6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 - 1 = -\frac{34}{36}$$

$$6 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^3 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2 - 1 = -1$$

Zatem jedynym wymiernym rozwiązaniem równania jest liczba $\frac{1}{2}$.

Uczniowie samodzielnie rozwiązują ćwiczenie 1:

Strona 3: ćwiczenie 1

		Liczba 2/5 jest rozwiązaniem równania: $6x^5 + 3x^3 – 2x – 4 = 0$ $10x^3 + 7x^2 – 5 = 0$ $5x^3 + 8x^2 – 14x + 4 = 0$ **Na stronie czwartej uczniowie analizują przykład zastosowania twierdzenia o rozwiązaniach wymiernych:** **Strona 4:** **Rozwiązania wymierne wielomianu (przykład 2)** **Przykład** Rozwiąż równanie $2x^3 + 5x^2 – 5x + 7 = 0$ *Rozwiązanie* Sprawdzimy, czy liczby 7, -7, $\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}$ są pierwiastkami naszego równania: $2{\cdot}7^3 + 5{\cdot}7^2 – 5{\cdot}7 + 7 = 903$ $2\left(\frac{7}{2}\right)^3 + 5\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 5\cdot\frac{7}{2} + 7 = 136{,}5$ $2(-7)^3 + 5(-7)^2 – 5(-7) + 7 = -399$ $2\left(-\frac{7}{2}\right)^3 + 5\left(-\frac{7}{2}\right)^2 - 5\left(-\frac{7}{2}\right) + 7 = 0$ Rozwiązanie wymierne tego równania to -3,5. Więc wielomian $2x^3 + 5x^2 – 5x + 7$ jest podzielny przez x + 3,5. $(2x^3 + 5x^2 – 5x + 7) : (x + 3{,}5) = 2x^2 – 2x +2$ Pozostałych rozwiązań naszego równania szukamy w rozwiązaniu równania $2x^2 – 2x + 2 = 0$. Obliczamy Δ=-12. Więc jedynym rozwiązaniem równania jest liczba -3,5. **Uczniowie samodzielnie rozwiązują ćwiczenie 2:** **Strona 5:** **ćwiczenie 2** Przykładem wielomianu stopnia trzeciego o pierwiastkach ½, -4 i 1 jest: $W(x) = 2x^3 + 5x^2 – 11x + 4$ czy $P(x) = 2x^3 - 5x^2 – 11x – 4$ czy

		$Q(x) = 4x^3 - 10x^2 + 22x – 8$? **Przechodzimy do zadań do rozwiązania na lekcji:** ***<u>Zadanie 1</u>*** Wypisz wszystkie możliwe wymierne pierwiastki wielomianu: a) $10x^4 - 3x^3 - 5x^2 + x - 2$ b) $-6x^5 + 12x^4 + 3x - 3$ c) $12x^5 - 16x^4 - x^3 + 7x^2 - 2x$ ***<u>Zadanie 2</u>*** Znajdź wszystkie wymierne pierwiastki wielomianu: a) $2x^3 + 5x^2 - 5x + 7$ b) $15x^4 - 32x^3 - 7x^2 + 20x + 4$ c) $6x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 10x - 8$ ***<u>Zadanie 3</u>*** Wyznacz wszystkie całkowite wartości parametru m, dla których równanie $2x^3 + 3x^2 - mx - 2 = 0$ ma co najmniej jedno rozwiązanie wymierne. ***<u>Zadanie 4</u>*** Rozwiąż równania: a) $\|3x^3 - x^2 - x - 2\| = 2$ b) $4x^6 + x^4 + \|x + 1\| + 3 = 0$ ***<u>Zadanie 5</u>*** Ile co najwyżej pierwiastków wymiernych ma wielomian o współczynnikach całkowitych, jeśli współczynnik przy najwyższej potędze i wyraz wolny są liczbami pierwszymi.
7	Podsumowanie zajęć	Po podsumowaniu lekcji uczniowie samodzielnie rozwiązują poniższe zadania. Rozwiązania przesyłają poprzez moodle do sprawdzenia dla nauczyciela. **Zadania do lekcji 9:** **<u>Zadanie 9.1:</u>** Wypisz wszystkie możliwe rozwiązania wymierne równania $W(x)=-6x^3 – 11x^2 + 13x + 15$

		Zadanie 9.2: Znajdź wymierne rozwiązania równania $-3x^3 + 7x^2 - 4 = 0$ **Zadanie 9.3:** Podaj przykład wielomianu stopnia trzeciego, o współczynnikach całkowitych, który ma jedno rozwiązanie wymierne $\frac{3}{4}$. Podczas rozwiązywania zadań w razie konieczności uczniowie cały czas korzystają z lekcji zamieszczonej na platformie moodle.
8	Uwagi metodyczne do realizacji	