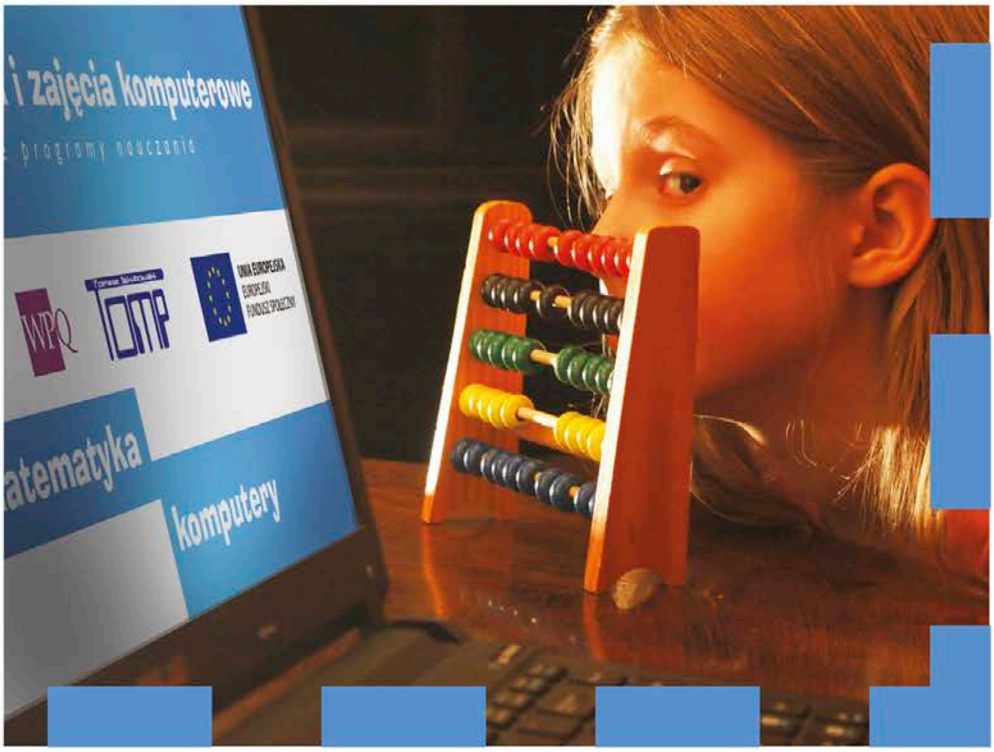
e-Matematyka klasa V



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

WPQ

Tomasz Jakubowski TOMP

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

e-Matematyka i zajęcia komputerowe

skuteczne programy nauczania

e-Matematyka
klasa V

Wydanie I

Pruszków 2015

Książka **e-Matematyka klasa V** powstała w ramach projektu
e-Matematyka i zajęcia komputerowe – skuteczne programy nauczania
współfinansowanego ze środków Unii Europejskiej w ramach
Europejskiego Funduszu Społecznego.

Koordynator projektu – Wojciech Piotrowski
Koordynator ds. IT – Tomasz Jakubowski

Pierwotnie książka miała być jedynie dostępna na edukacyjnej
platformie MATI opracowanej w ramach projektu. W czasie realizacji
projektu podjęto decyzję o przygotowaniu jej w formacie PDF
ułatwiającym publikację w wydaniu papierowym.

Autorami materiałów dydaktycznych dla klasy V zamieszczonych na platformie
edukacyjnej MATI, a tym samym książki są:
Agnieszka Bąk, Marcin Wojnowski, Ewa Uljasz, Marta Budzyńska, Agnieszka Suwalska,
Małgorzata Zienkiewicz, Justyna Paszkiewicz, Wojciech Piotrowski.

Znaczna część rysunków i zdjęć została wykonana przez autorów.
Szczególnie za przygotowanie rysunków i poprawki materiałów
graficznych dziękujemy Małgorzacie Tarnachowicz i Marcinowi Wojnowskiemu.

Niektóre rysunki zamieszczone w książce pochodzą z zasobów
openclipart.org.

Projekt graficzny – Marcin Piotrowski.

Przygotowanie książki w formie, którą właśnie przeglądasz zrealizował Wojciech Piotrowski
i Tomasz Jakubowski.

Skład i przygotowanie do druku – Emil Popko

Wersje instalacyjne platformy MATI oraz książka w formie cyfrowej
są dostępne m.in. na stronie internetowej projektu
www.ematematyka.edu.pl

ISBN-978-83-941707-1-4

9 788394 170714

Wydawca:
WPQ Wojciech Piotrowski
ul. Dolna 39
05-802 Pruszków

Spis treści

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

ROZDZIAŁ IV. **UŁAMKI ZWYKŁE**

ROZDZIAŁ V. **UŁAMKI DZIESIĘTNE**

ROZDZIAŁ VI. **POLA FIGUR**

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
WPQ
Tomasz Jakubowski TOMP
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

1. ZAPISYWANIE LICZB NATURALNYCH W SYSTEMIE DZIESIĘTNYM

Już od najdawniejszych czasów ludzie zapisywali liczby za pomocą znaków. W różnych kulturach były różne znaki. Mówiliśmy już o tym w czwartej klasie w dziale „Obliczenia praktyczne”.

Przypuszcza się, że obecnie stosowany system zapisywania liczb powstał w Indiach. W Europie rozpowszechnili go w X wieku kupcy arabscy, dlatego znaki służące do zapisywania liczb nazywamy cyframi arabskimi.

Cyfry arabskie to: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Za ich pomocą zapisujemy wszystkie liczby.

Ćwiczenie 1

Mając do dyspozycji tylko cyfry: 3, 4, 5, podaj wszystkie liczby trzycyfrowe.

Rozwiązanie:
Tymi cyframi można zapisać liczby: 345, 354, 435, 453, 534, 543. Każda z tych liczb jest inna.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI · WPQ · Tomasz Jakubowski TOMP · UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

3 4 5

setki, dziesiątki, jedności

$345=300+40+5$

5 4 3

setki, dziesiątki, jedności

$543=500+40+3$

Ponieważ od miejsca (pozycji) cyfry w liczbie zależy wartość liczby, to mówimy, że jest to pozycyjny system zapisu liczb.

Nasz system liczbowy jest dziesiątkowy.

$10\cdot1=10$

10 jedności =1 dziesiątka

$10\cdot10=100$

10 dziesiątek = 1 setka

$10\cdot100=1000$

10 setek = 1 tysiąc

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ TOMP UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

1.1. Zapisywanie i czytanie liczb.

W systemie dziesiętnym (dziesiątkowym) używamy dziesięciu cyfr: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Tworzą one swojego rodzaju matematyczny „alfabet", z którego budujemy liczby.

Liczby możemy opisać przez podanie, z ilu cyfr się składają:

- jednocyfrowe: 1, 6 ...,
- dwucyfrowe: 12, 21, 36, 63 ...
- trzycyfrowe: 123, 163, 185 ...
- czterocyfrowe: 6325, 7195, 8632 ...
- pięciocyfrowe: 12345, 23456, 34567 ...
- itd.

Każda cyfra w liczbie umieszczona jest na swoim miejscu (pozycji).

Przykład 1

Przyjrzyjmy się liczbie: sto sześćdziesiąt cztery tysiące siedemset dwadzieścia trzy.
Nazwy cyfr w zapisie liczby (czytaj od strony prawej):

Przykład 2

Ta olbrzymia liczba przedstawiona poniżej, to:
375 miliardów, 829 milionów, 661 tysięcy, 247.
Zaczynając od strony prawej, podzielmy tę liczbę na trzycyfrowe grupy. Mają one następujące nazwy:

setki	dziesiątki	jedności	setki	dziesiątki	jedności	setki	dziesiątki	jedności	setki	dziesiątki	jedności
3	7	5	8	2	9	6	6	1	2	4	7
	↑			↑			↑			↑	
	grupa miliardów			grupa milionów			grupa tysięcy			grupa jedności	

W każdej grupie są (od prawej): cyfra jedności, dziesiątek i setek.

Zapisując liczby, pamiętaj, że dokładne zapisywanie liczb jest bardzo ważne.
Zeszyt „w kratkę” powinien ci to ułatwić.

Zapisując liczby jedna pod drugą, zwracaj uwagę na pozycje cyfr.

miliony	setki tysięcy	dziesiątki tysięcy	tysiące	setki	dziesiątki	jedności
			1	5	2	8
				2	3	1
	8	2	9	4	5	7
		1	2	3	4	5
3	9	2	1	5	0	4

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
WPQ
TOMP
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 3

Przeczytaj liczbę: 509 000

pięćset dziewięć tysięcy

Przykład 4

Przeczytaj liczbę: 40 250

czterdzieści tysięcy dwieście pięćdziesiąt

Przykład 5

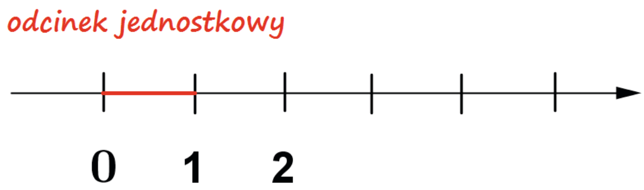
Przeczytaj liczbę: 6 023 000

sześć milionów dwadzieścia trzy tysiące

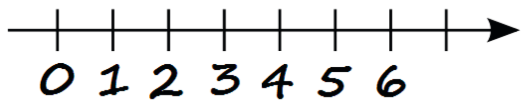
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

2. OŚ LICZBOWA I UKŁAD WSPÓŁRZĘDNYCH

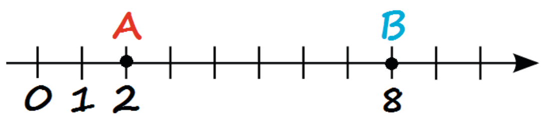
Oś liczbowa to prosta, na której ustalono zwrot, obrano punkt 0 i ustalono jednostkę odległości.



Odmierzając odcinki jednostkowe w kierunku, który wskazuje strzałka, możemy na osi liczbowej zaznaczyć punkty odpowiadające liczbom: 1, 2, 3, 4 itd.

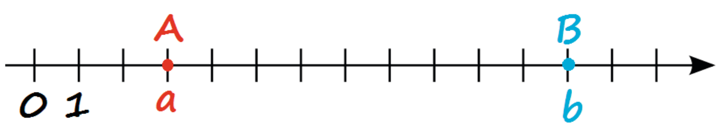


Każdej liczbie można przyporządkować jeden punkt osi liczbowej i na odwrót, każdy punkt osi odpowiada dokładnie jednej liczbie. Liczbę, której przyporządkowano dany punkt osi liczbowej, nazywamy **współrzędną punktu** na osi.



Liczbie 2 przyporządkowano punkt A, natomiast liczbie 8 przyporządkowano punkt B. Mówimy, że współrzędna punktu A wynosi 2 i możemy to zapisać krótko: $\mathrm{A} = 2$. Współrzędna punktu B wynosi 8, co zapiszemy: $\mathrm{B} = 8$.

Jeżeli punkt A o współrzędnej a poprzedza na osi liczbowej punkt B o współrzędnej b, to mówimy, że a < b (liczba a jest mniejsza od liczby b), lub że b > a (liczba b jest większa od liczby a).



$a < b$ lub $b > a$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

3. RACHUNKI PAMIĘCIOWE

Rachunki pamięciowe to takie działania, które wykonujemy w myślach.

3.1. Dodawanie i odejmowanie

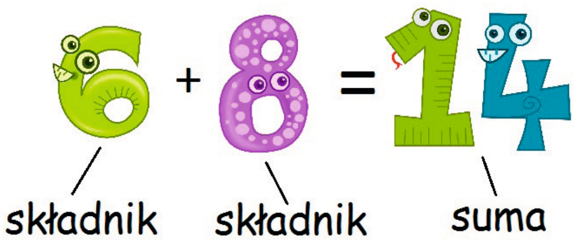
W życiu codziennym umiejętność pamięciowego dodawania i odejmowania jest bardzo potrzebna.

Ćwiczenie 1

Czy dziewczynce wystarczy **50 zł** na zakup dwóch książek?

Aby odpowiedzieć na to pytanie, wystarczy obliczyć sumę liczb: **24 zł** i **27 zł**.

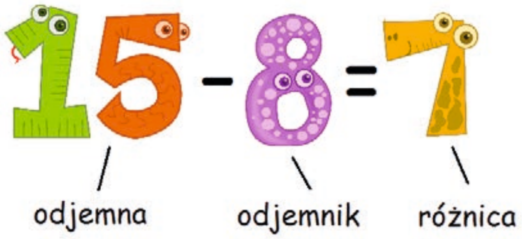
Przypomnijmy sobie, co oznacza słowo „suma".



Wynik dodawania nazywamy sumą.
Liczby, które dodajemy to składniki.

Wyrażenie: **37 + 48** czytamy „suma liczb **37** i **48**".

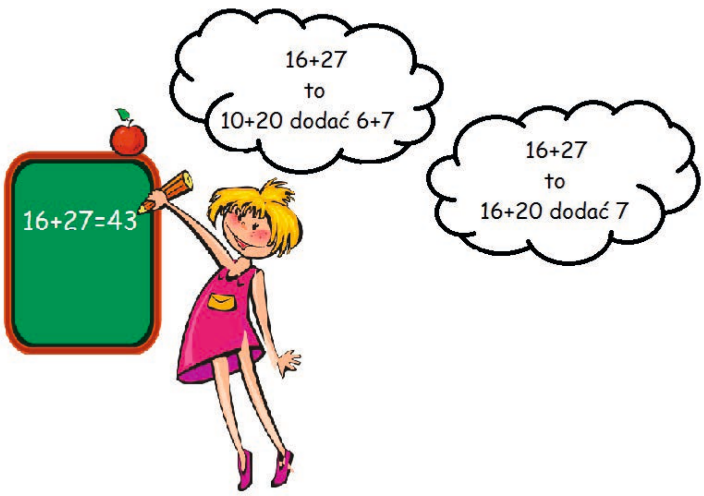
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
WPQ
TOMP
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



Wynik odejmowania to różnica. Liczba, od której odejmujemy to odjemna. Natomiast liczba, którą odejmujemy to odjemnik.

A jak przeczytamy zapis: **56 - 23**?
Wyrażenie: **56 - 23** należy przeczytać: „różnica liczb **56** i **23**”.

Popatrz, jak dziewczynka wykonuje dodawanie.



Przykład 1

Oblicz sumę liczb: **28** i **76**.

I sposób:
28+76=20+70+8+6=90+14=104

II sposób:
28+76=28+70+6=98+6=104

Przykład 2

Oblicz: **69 + 57 =**

I sposób:
69+57=60+50+9+7=110+16=126

II sposób:
69+57=69+50+7=119+7=126

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

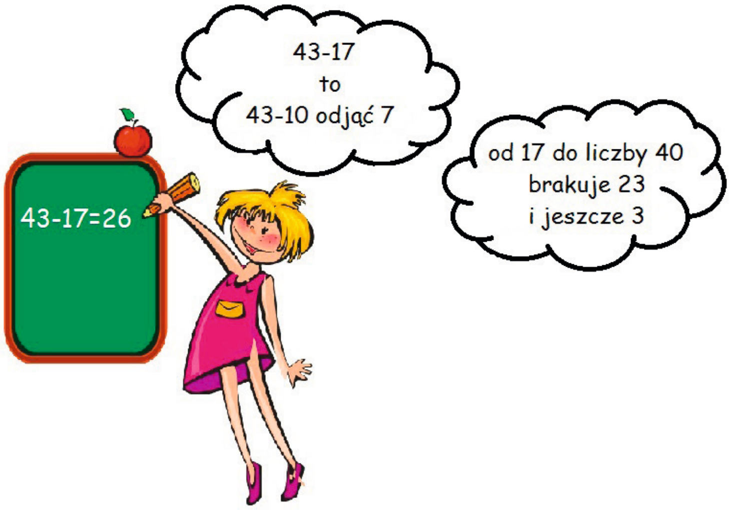
Przykład 3

Podaj wynik działania: **96 + 57 =**

I sposób: **96 + 57 = 90 + 50 + 6 + 7 = 140 + 13 = 153**

II sposób: **96 + 57 = 96 + 50 + 7 = 146 + 7 = 153**

Sposoby odejmowania:



Przykład 4

Oblicz różnicę liczb: **64** i **39**.

I sposób:
64 - 39 = 64 - 30 - 9 = 34 - 9 = 25

II sposób:
Od **39** do liczby **60** brakuje **21**
i jeszcze **4**.

64 - 39 = 21 + 4 = 25

Przykład 5

Oblicz: **151 - 46 =**

I sposób:
151 - 46 = 151 - 40 - 6 = 111 - 6 = 105

II sposób:
Od **46** do liczby **100** brakuje **54**
i jeszcze **51**.

151 - 46 = 54 + 51 = 105

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 1

Podaj wynik działania: **113 - 68 =**

I sposób: **113 - 68 = 113 - 60 - 8 = 53 - 8 = 45**

II sposób: Od **68** do liczby **100** brakuje **32** i jeszcze **13**.
113 - 68 = 32 + 13 = 45

W dodawaniu i odejmowaniu szczególną rolę pełni liczba **0** (zero).
Jeśli do dowolnej liczby dodamy liczbę **0**, to wynik się nie zmieni.

$$35 + 0 = 35$$

Jeśli od dowolnej liczby odejmiemy liczbę **0**,
to wynik również się nie zmieni.

$$35 + 0 = 35$$

Bardzo często słyszymy sformułowania: *„o dwa więcej”* lub *„o pięć mniej”*

Zadanie 2

Popatrz na rysunek i odpowiedz na pytanie: *Ile lat ma pan Jan?*

Sformułowanie: „o **7** lat więcej niż **22**” to **7 + 22 = 29**

Odpowiedź: *Pan Jan ma **29** lat.*

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 3

Korzystając z rysunku na poprzedniej stronie, odpowiedz na pytanie: *Ile lat ma Wojtuś?*

Sformułowanie: „o **19** lat mniej niż **22**” to **22 - 19 = 3**

Odpowiedź: *Wojtuś ma **3** lata.*

Aby odpowiedzieć na pytania, **o ile większa (o ile mniejsza) jest jedna liczba od drugiej,** musimy te liczby porównać, wykonując odejmowanie – od większej liczby odejmujemy mniejszą.

Przykład 6

O ile liczba **63** jest większa od liczby **27**?

63 - 27 = 63 - 20 - 7 = 43 - 7 = 36

Odpowiedź: *Liczba **63** jest o **36** większa od liczby **27**.*

Zadanie 4

Ola ma **13** lat, a jej siostra Ewa - **17** lat. O ile lat Ola jest młodsza od Ewy?

17 - 13 = 4

Odpowiedź: *Ola jest młodsza od Ewy o **4** lata.*

Zadanie 5

Jaką liczbę zasłonił motyl?

19+  **= 42**

Gdy chcemy obliczyć jeden ze składników, musimy od sumy odjąć drugi składnik.

42 - 19 = 23

Odpowiedź: *Liczba 23 została zasłonięta przez motyla.*

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 6

Jaką liczbę zasłonił motyl?

67 -  **= 38**

Gdy chcemy obliczyć odjemnik, to musimy od odjemnej odjąć różnicę.

67 - 38 = 29

Odpowiedź: *Liczba 29 została zasłonięta przez motyla.*

Zadanie 7

Jaką liczbę zasłonił motyl?

 **- 56 = 33**

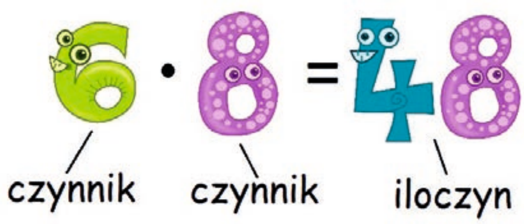
Gdy chcemy obliczyć odjemną, to musimy do odjemnika dodać różnicę.

56 + 33 = 89

Odpowiedź: *Liczba 89 została zasłonięta przez motyla.*

3.2. Mnożenie i dzielenie

Pamięciowe mnożenie i dzielenie również bardzo często wykorzystujemy w życiu codziennym. Przypomnijmy sobie, jak nazywają się liczby występujące w mnożeniu.



Wynik mnożenia to **iloczyn**. Liczby, które przez siebie mnożymy to **czynniki**. W mnożeniu mogą występować więcej niż dwa czynniki.

Wyrażenie **36 • 24** czytamy: „iloczyn liczb **36** i **24**.

Należy pamiętać o szczególnych własnościach liczby **0** oraz **1** w mnożeniu.

Iloczyn dowolnej liczby i liczby **0** zawsze wynosi **0**.

Na przykład:

469 • 0 = 0

54697 • 0 = 0

Natomiast iloczyn dowolnej liczby i liczby **1** zawsze jest równy tej liczbie.

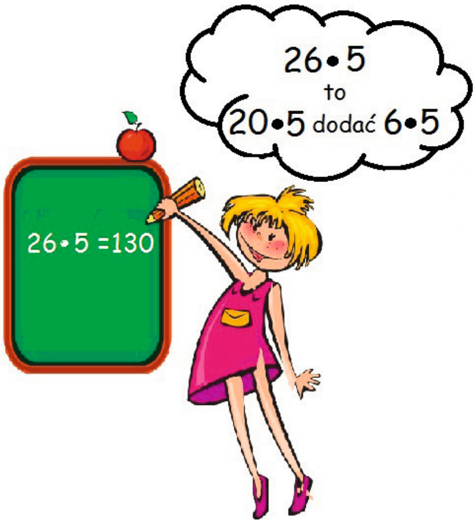
Na przykład:

36 • 1 = 36

295471 • 1 = 295471

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Popatrzmy, w jaki sposób dziewczynka wykonała mnożenie.



Ćwiczenie 1

Podaj iloczyn liczb: **47** i **8**.

47 • 8 = 40 • 8 + 7 • 8 = 320 + 56 = 376

Odpowiedź: *Szukany iloczyn to* ***376*****.**

Ćwiczenie 2

Podaj iloczyn liczb: **93** i **7**.

93 • 7 = 90 • 7 + 3 • 7 = 630 + 21 = 651

Odpowiedź: *Szukana wartość wyrażenia to* ***651*****.**

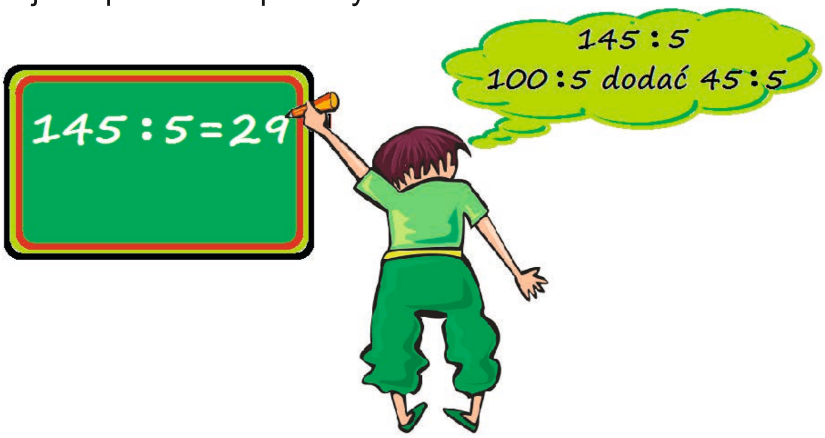
A teraz kilka słów o dzieleniu.

Wynik dzielenia to **iloraz**. Liczba, którą dzielimy to dzielna.
Liczba, przez którą dzielimy to **dzielnik**.

Zapis: „**56 : 7**” czytamy: iloraz liczb **56** i **7**.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Popatrzmy, w jaki sposób chłopiec wykonał dzielenie.



Chłopiec rozdzielił liczbę **145** na dwa składniki **100** i **45**.

Ćwiczenie 3

Oblicz iloraz liczb: **105** i **3**.

105 : 3 = 90 : 3 +15 : 3 = 30 + 5 = 35

Odpowiedź: *Szukany iloraz to* ***35****.*

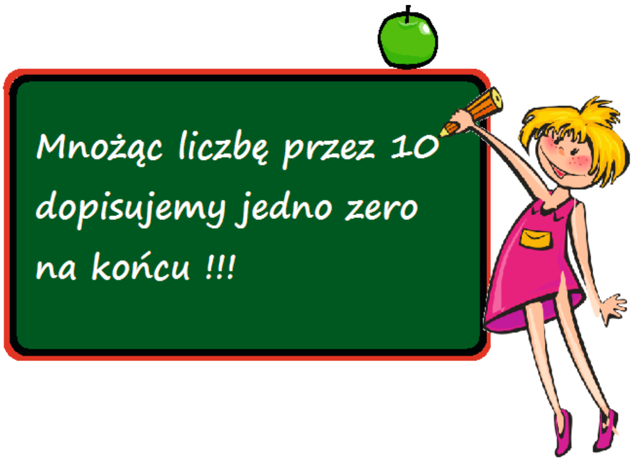
Ćwiczenie 4

Podaj wartość wyrażenia: **234 : 9 =**

234 : 9 = 180 : 9 + 54 : 9 = 20 + 6 = 26

Odpowiedź: Szukana wartość wyrażenia to **26**.

Na pewno pamiętasz, w jak prosty sposób mnożymy liczby przez 10, 100, 1000...



KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 1

17 • 10 = 170 (dopisujemy jedno zero)

472 • 100 = 47200 (dopisujemy dwa zera)

9156 • 1000 = 9156000 (dopisujemy trzy zera) itd.

Dzielenie liczb z zerami na końcu też nie powinno sprawić Wam kłopotu.

Gdy liczby z zerami na końcu dzielimy przez 10, to wystarczy pominąć jedno końcowe zero !!!

Przykład 2

120 : 10 = 12 (pomijamy jedno zero)

5300 : 100 = 53 (pomijamy dwa zera)

729000 :1000 = 729 (pomijamy trzy zera)

Zapamiętaj !!!

Gdy obliczamy iloraz liczb z zerami na końcu, najwygodniej jest skreślić w dzielnej i dzielniku tyle samo zer.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Bardzo często słyszymy określenia: „ dwa razy więcej” lub osiem razy mniej”.

Przykład 3

Ile razy odbiła piłkę Zuzia?

„**2** razy więcej niż **12**” to **2 • 12 = 24**

Odpowiedź: *Zuzia odbiła piłkę 24 razy.*

Przykład 4

Ile razy udało się odbić piłkę Mai?

„**3** razy mniej niż **12**” to **12 : 3 = 4**

Odpowiedź: Maja odbiła piłkę 4 razy.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

4. UPRASZCZANIE DZIAŁAŃ ARYTMETYCZNYCH

Niektórzy ludzie mają niezwykłe umiejętności wykonywania w pamięci rachunków na liczbach wielocyfrowych. Korzystają oni ze sprytnych metod rachunkowych.

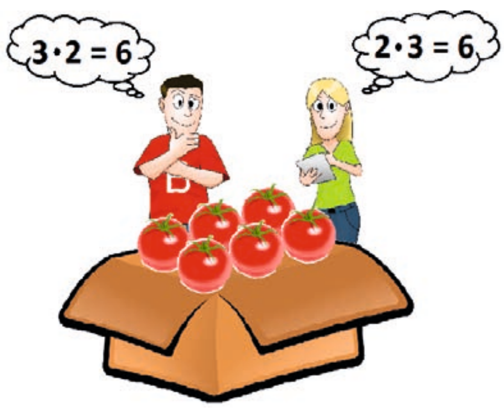
Przypomnijmy sobie prawa działań, które ułatwiają wykonywanie obliczeń w pamięci.

Dodawanie jest przemienne.

Przykład 1

$4 + 5 = 9$ $5 + 4 = 9$

Mnożenie jest przemienne.

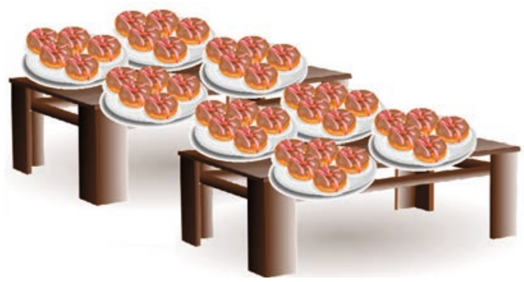


KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dodawanie jest łączne.

$$(6+4)+5=6+(4+5)$$
$$10+5=6+9$$

Mnożenie jest łączne.



Przykład 2

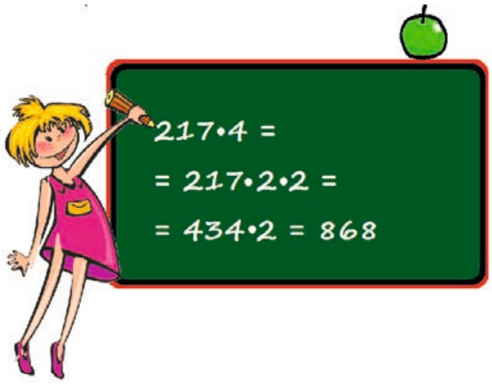
$(2 \cdot 4) \cdot 5 = 8 \cdot 5 = 40$ $2 \cdot (4 \cdot 5) = 2 \cdot 20 = 40$

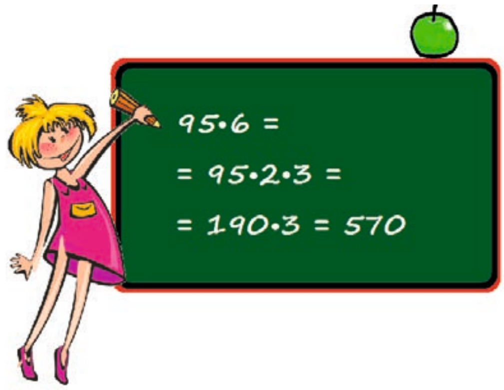
Stosując powyższe prawa działań i stosując rachunkowe sztuczki, możemy sprawnie wykonywać rachunki.

Sumę dwóch liczb można zastąpić inną sumą (lub różnicą), którą łatwo obliczyć.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zamiast mnożyć przez 4, możemy najpierw pomnożyć przez 2 i otrzymany wynik pomnożyć jeszcze raz przez 2.
Podobny sposób można stosować przy mnożeniu przez 6, 8, 12 itp.





Zamiast mnożyć przez 5, możemy najpierw pomnożyć przez 10 (dopisać jedno zero) i następnie otrzymaną liczbę podzielić przez 2.

Przykład 3

76 • 5 = 760 : 2 = 380

148 • 5 = 1480 : 2 = 740

Zamiast dzielić przez 5, możemy najpierw pomnożyć przez 2, a następnie podzielić przez 10 (skreślić jedno zero).

Przykład 4

135 : 5 = 270 : 10 = 27

465 : 5 = 930 : 10 = 93

Mnożąc dwie liczby dwucyfrowe, możemy stosować mnożenie „po kawałku”.

Przykład 5

Oblicz **15 • 12 =**

Sposób I

15 • 12 = 15 • 10 + 15 • 2 = 150 +30 = 180

Sposób II

15 • 12 = 10 • 12 + 5 • 12 = 120 + 60 = 180

Sposób III

15 • 12 = 10 • 10 + 10 • 2 + 5 • 10 + 5 • 2 = 100 + 20 + 50 + 10 = 180

Ćwiczenie 1

Oblicz samodzielnie: **19 • 15 =**

Rozwiązanie: 19 • 10 + 19 • 5 = 190 + 95 = 285

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

5. SZACOWANIE WYNIKÓW DZIAŁAŃ

W życiu codziennym, np robiąc zakupy, nie musimy wykonywać dokładnych obliczeń. Wystarczy oszacować, czyli podać przybliżony wynik.

Ćwiczenie 1

Czy pani Kowalskiej wystarczy pieniędzy na zakup szminki?

Odpowiedzmy na to pytanie, nie wykonując dokładnych obliczeń.

149 zł - czyli mniej niż **150 zł**

55 zł - czyli więcej niż **50 zł**

$$\mathbf{150 + 50 + 20 = 220}$$

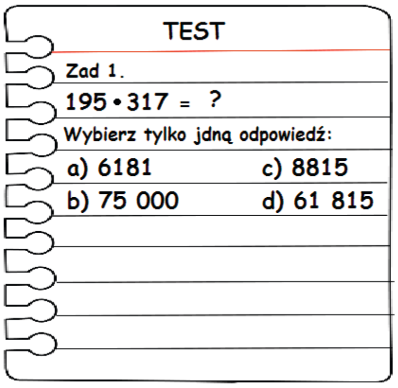
19 zł - czyli mniej niż **20 zł**

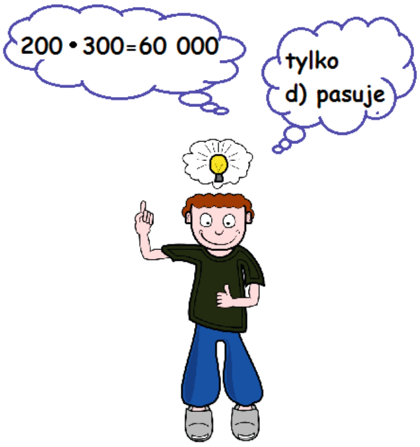
Odpowiedź: *Pani Kowalskiej wystarczy pieniędzy na zakup szminki.*

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 1

Rozwiązujemy test, gdy mamy odpowiedzi do wyboru.





195 to mniej niż **200**
317 to więcej niż **300**
Zatem **200 • 300 = 60000**

Wybieramy odpowiedź: d) **61815**

Zadanie 1

W klasie jest 29 uczniów. Pod koniec wycieczki z zebranych pieniędzy zostało 150 zł. Sprawdź, jaką porcję lodów można kupić dla każdego uczestnika.

Mała porcja lodów **1,95 zł**, czyli mniej niż **2 zł**
Średnia porcja lodów **3,95 zł**, czyli mniej niż **4 zł**
Duża porcja lodów **5,95 zł**, czyli mniej niż **6 zł**

Klasa liczy 29 uczniów, czyli mniej niż 30 osób

30 • 2 zł = 60 zł
30 • 4 zł = 120 zł
30 • 6 zł = 180 zł

Odpowiedź: *Dla każdego uczestnika wycieczki można kupić średnią porcję lodów.*

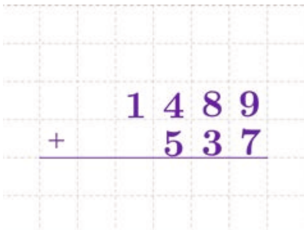
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

6. PISEMNE DODAWANIE I ODEJMOWANIE

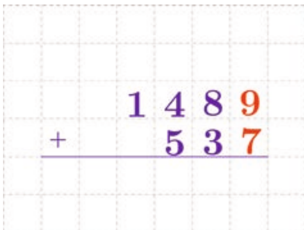
Przypomnijmy sobie, jak wykonujemy dodawanie i odejmowanie sposobem pisemnym. Zaczniemy od dodawania. W rachunkach pisemnych bardzo ważny jest prawidłowy sposób zapisywania liczb.

Cyfry tego samego rzędu dodawanych liczb zapisujemy jedna pod drugą: jedności pod jednościami, dziesiątki pod dziesiątkami, setki pod setkami itd.

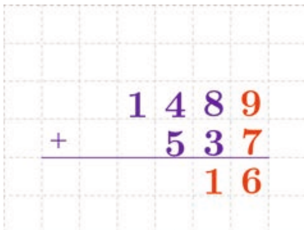
Jednocześnie możemy dodawać więcej niż dwie liczby.



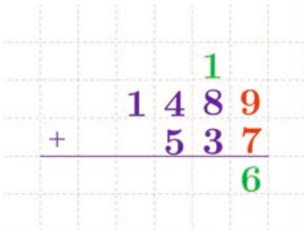
Wykonamy dodawanie sposobem pisemnym liczb:1489 i 537. Musimy je zapisać tak, aby wyrównać je do prawej strony, tak aby cyfry jedności były pod cyframi jedności, cyfry dziesiątek pod cyframi dziesiątek, cyfry setek pod cyframi setek itd.



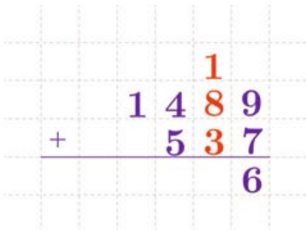
Zaczniemy od dodawania cyfr jedności.



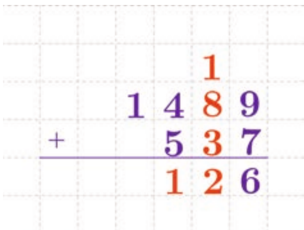
Suma cyfr jedności wynosi 16.



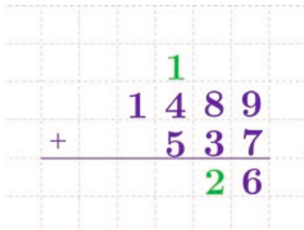
Przenosimy 1 (cyfrę dziesiątek obliczonej sumy) nad pozostałe cyfry dziesiątek



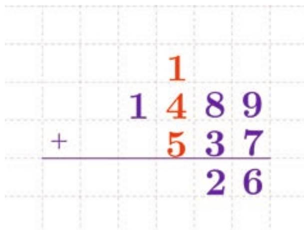
Teraz będziemy dodawali cyfry dziesiątek



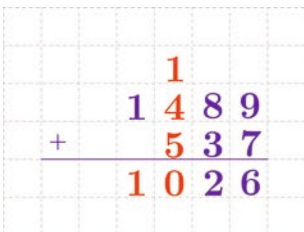
Suma cyfr dziesiątek wynosi 12.



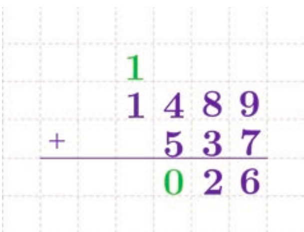
Przenosimy 1 (cyfrę dziesiątek obliczonej sumy) nad pozostałe cyfry setek.



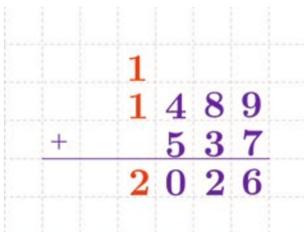
Obliczamy sumę cyfr setek.



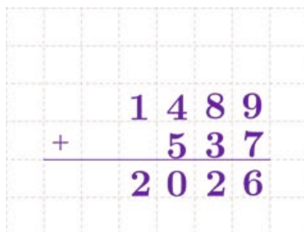
Suma cyfr setek wynosi 10.



Przenosimy 1 (cyfrę dziesiątek obliczonej sumy) nad pozostałe cyfry tysięcy.



Następnie obliczamy sumę cyfr tysięcy.



Suma cyfr tysięcy wynosi 2.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Teraz zajmiemy się odejmowaniem. Jednocześnie możemy odejmować tylko dwie liczby. Od liczby większej odejmujemy liczbę mniejszą. Odejmowanie możemy sprawdzić za pomocą dodawania.

$$\begin{array}{ccccc} & 7 & 2 & 5 & 0 \\ - & & 8 & 3 & 7 \\ \hline \end{array}$$

Wykonamy odejmowanie sposobem pisemnym liczb: 7250 i 837. Musimy je zapisać tak, aby wyrównać je do prawej strony, tak aby cyfry jedności były pod cyframi jedności, cyfry dziesiątek pod cyframi dziesiątek, cyfry setek pod cyframi setek itd.

$$\begin{array}{ccccc} & 7 & 2 & 5 & 0 \\ - & & 8 & 3 & 7 \\ \hline \end{array}$$

Odejmujemy cyfry w rzędzie jedności. Niestety nie możemy od 0 odjąć 7. Musimy „pożyczyć" sobie z kolumny dziesiątek 1 dziesiątkę.

$$\begin{array}{ccccc} & & & 4 & 10 \\ & 7 & 2 & 5 & 0 \\ - & & 8 & 3 & 7 \\ \hline \end{array}$$

Zamiast 0 w kolumnie jedności mamy 10, a zamiast 5 w kolumnie dziesiątek mamy 4. Zapisujemy to nad działaniem w odpowiednich kolumnach.

$$\begin{array}{ccccc} & & & 4 & 10 \\ & 7 & 2 & 5 & 0 \\ - & & 8 & 3 & 7 \\ \hline & & & & 3 \end{array}$$

Wykonujemy działanie 10 - 7 = 3. Wynik wpisujemy w rzędzie jedności.

$$\begin{array}{ccccc} & & & 4 & \\ & 7 & 2 & 5 & 0 \\ - & & 8 & 3 & 7 \\ \hline & & & & 3 \end{array}$$

Teraz wykonujemy |odejmowanie w rzędzie dziesiątek. Pamiętamy, że „pożyczaliśmy".

$$\begin{array}{ccccc} & & & 4 & \\ & 7 & 2 & 5 & 0 \\ - & & 8 & 3 & 7 \\ \hline & & & 1 & 3 \end{array}$$

Wynik działania 4 - 3 = 1, wpisujemy w kolumnie dziesiątek

$$\begin{array}{ccccc} & 7 & 2 & 5 & 0 \\ - & & 8 & 3 & 7 \\ \hline & & & 1 & 3 \end{array}$$

Teraz będziemy odejmować setki. Niestety od 2 nie można odjąć 8. Musimy „pożyczyć" sobie z kolumny setek 1 setkę.

$$\begin{array}{ccccc} & 6 & 12 & & \\ & 7 & 2 & 5 & 0 \\ - & & 8 & 3 & 7 \\ \hline & & & 1 & 3 \end{array}$$

Zamiast 2 w kolumnie setek mamy 12, a w rzędzie tysięcy zamiast 7 mamy 6.

$$\begin{array}{ccccc} & 6 & & & \\ & 7 & 2 & 5 & 0 \\ - & 0 & 8 & 3 & 7 \\ \hline & & 4 & 1 & 3 \end{array}$$

Wynik działania 12-8=4 wpisujemy w kolumnę setek. Następnie zajmujemy się odejmowaniem cyfr tysięcy. W puste miejsce możemy dla ułatwienia wpisać cyfrę 0.

$$\begin{array}{ccccc} & 6 & & & \\ & 7 & 2 & 5 & 0 \\ - & 0 & 8 & 3 & 7 \\ \hline & 6 & 4 & 1 & 3 \end{array}$$

Wykonujemy obliczenia w rzędzie tysięcy. Pamiętamy, że „pożyczaliśmy". Wynik działania 6-0=6, wpisujemy w kolumnie tysięcy.

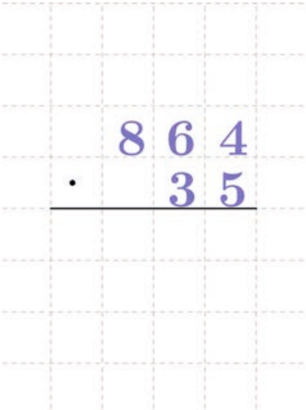
$$\begin{array}{ccccc} & 7 & 2 & 5 & 0 \\ - & & 8 & 3 & 7 \\ \hline & 6 & 4 & 1 & 3 \end{array}$$

Różnica liczb 7250 i 837 wynosi 6413

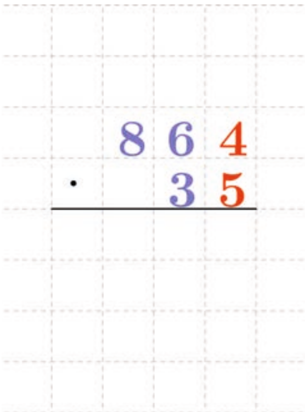
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

7. PISEMNE MNOŻENIE I DZIELENIE

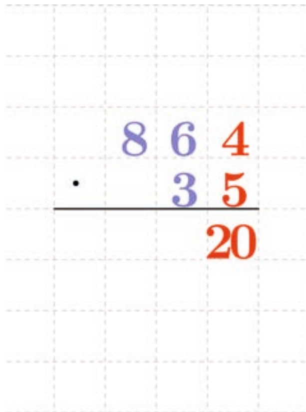
Mnożyć i dzielić sposobem pisemnym nauczyliśmy się w klasie czwartej. Obejrzyjmy poniższe prezentacje przypominające, jak wykonujemy te działania.



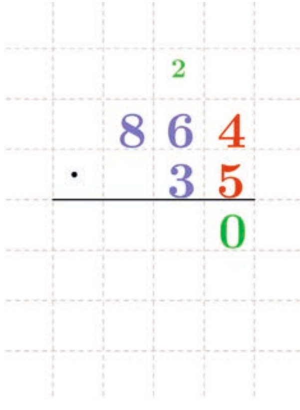
Podpisujemy liczby wyrównując do prawej - tak, aby cyfry jedności były pod cyframi jedności itd.



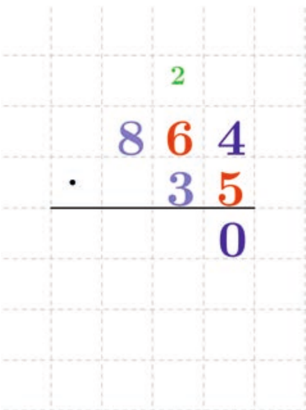
Zaczynamy od mnożenia 864 przez 5.



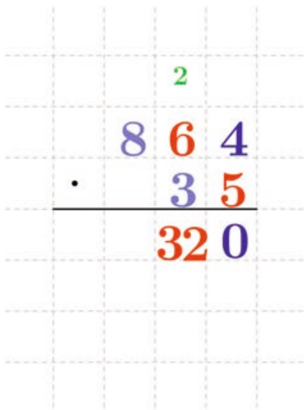
Obliczamy 4 · 5 = 20



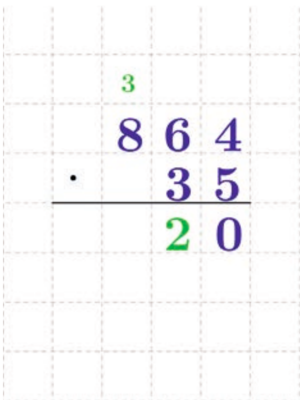
0 zostawiamy pod 5, a 2 przepisujemy do następnej kolumny i zapisujemy powyżej działania.



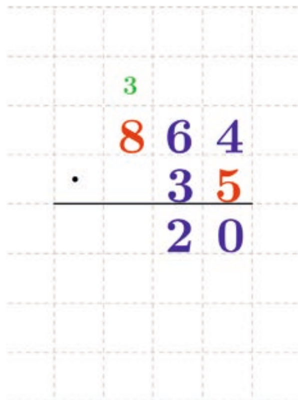
Przechodzimy do następnego mnożenia. 6 · 5 = 30



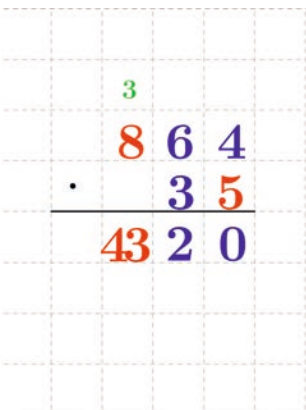
Do wyniku 30 dodajemy przepisaną z poprzedniego mnożenia liczbę 2 i otrzymujemy 32.



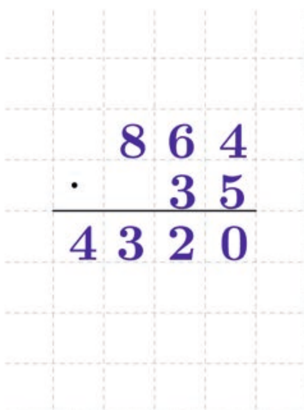
2 zostawiamy, a 3 przepisujemy do następnej kolumny i zapisujemy powyżej działania.



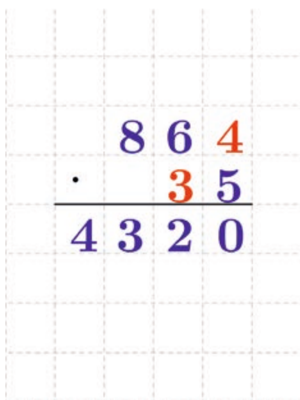
Przechodzimy do następnego mnożenia. 5 · 8 = 40



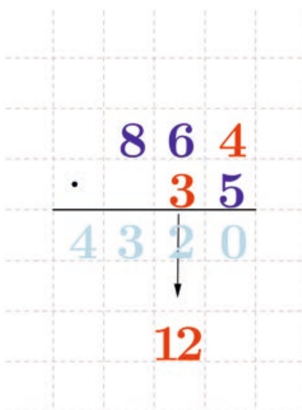
Do wyniku 40 dodajemy przepisaną z poprzedniego mnożenia liczbę 3 i otrzymujemy 43.



Otrzymaliśmy 864 · 5 = 4320



Przechodzimy do mnożenia 864 · 3. Zaczynamy od iloczynu 3 · 4 = 12



Trzeba zwrócić uwagę, gdzie wpisujemy wynik.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 864 \\ \cdot\ \ 35 \\ \hline 4320 \\ 2 \end{array}$$

2 zostawiamy, a 1 przepisujemy do następnej kolumny i zapisujemy powyżej działania.

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 864 \\ \cdot\ \ 35 \\ \hline 4320 \\ 192 \end{array}$$

Teraz obliczamy iloczyn 3 · 6 = 18. Do wyniku dodajemy 1 przepisaną z poprzedniego mnożenia i otrzymujemy 19.

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 864 \\ \cdot\ \ 35 \\ \hline 4320 \\ 92 \end{array}$$

9 zostawiamy, a 1 przepisujemy do następnej kolumny i zapisujemy powyżej działania.

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 864 \\ \cdot\ \ 35 \\ \hline 4320 \\ 2592 \end{array}$$

Następnie obliczamy iloczyn 3 · 8 . Do wyniku iloczynu 3 · 8 = 24 dodajemy 1 przepisaną z poprzedniego mnożenia i otrzymujemy 25.

$$\begin{array}{r} 864 \\ \cdot\ \ 35 \\ \hline 4320 \\ 2592 \end{array}$$

Obliczyliśmy iloczyn 864 · 3 = 2592

$$\begin{array}{r} 864 \\ \cdot\ \ 35 \\ \hline 4320 \\ +\ 2592 \\ \hline 30240 \end{array}$$

Teraz należy wykonać dodawanie.

$$\begin{array}{r} 864 \\ \cdot\ \ 35 \\ \hline 4320 \\ +\ 2592 \\ \hline 30240 \end{array}$$

Iloczyn liczb 864 i 35 jest równy 30 240.

Dzielenie sposobem pisemnym przez liczbę jednocyfrową.

$$\begin{array}{l} \hline 5144 : 8 \end{array}$$

Wykonamy dzielenie liczby 5144 przez 8.

$$\begin{array}{l} \hline 5144 : 8 \end{array}$$

Dzielenie zaczynamy od lewej strony. Bierzemy pierwszą cyfrę. Niestety 5 nie dzieli się przez 8.

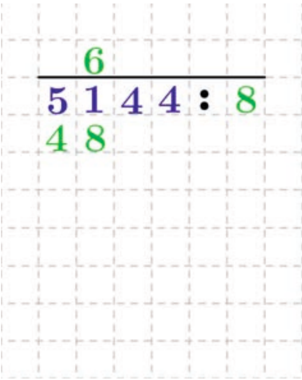
$$\begin{array}{l} \hline 5144 : 8 \end{array}$$

Dołączamy do pierwszej cyfry następną i otrzymujemy liczbę 51.

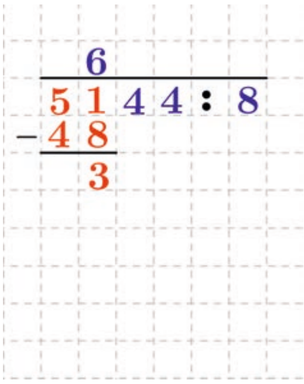
$$\begin{array}{l} 6 \\ \hline 5144 : 8 \end{array}$$

51 dzielone przez 8 daje 6 reszty 3

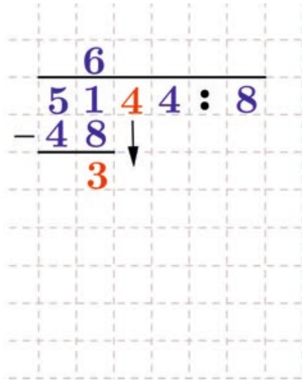
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
WPQ
Tomasz Jakubowski TOMP
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



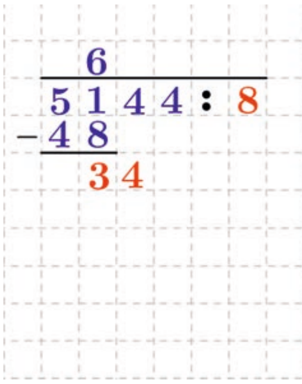
Dla sprawdzenia wykonujemy mnożenie 6 razy 8.



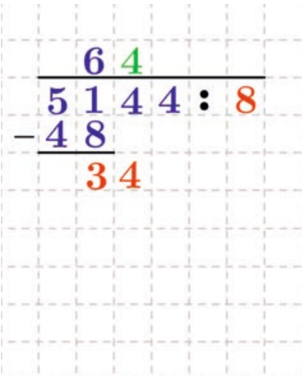
Wykonujemy odejmowanie. Wynik odejmowania musi być mniejszy od liczby przez którą wykonujemy dzielenie (w naszym przypadku 8).



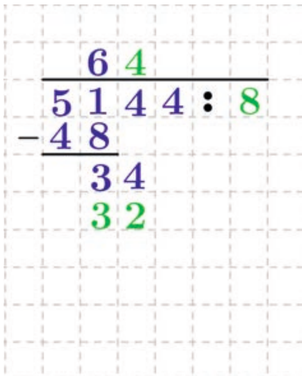
Bierzemy następną cyfrę dzielnej i spisujemy ją niżej, obok reszty z poprzedniego dzielenia.



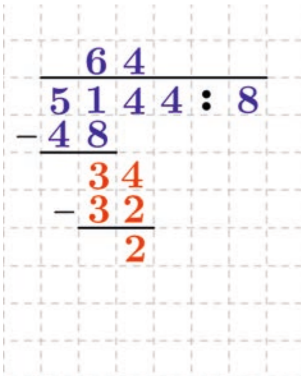
Otrzymujemy liczbę 34.



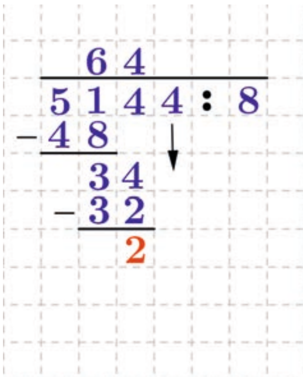
W liczbie 34 dzielnik mieści się 4 razy.



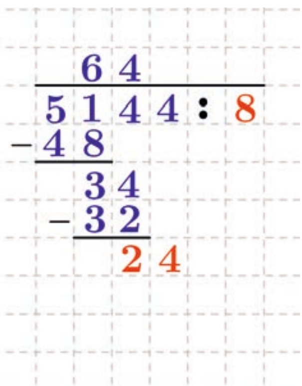
Dla sprawdzenia wykonujemy mnożenie 4 razy 8.



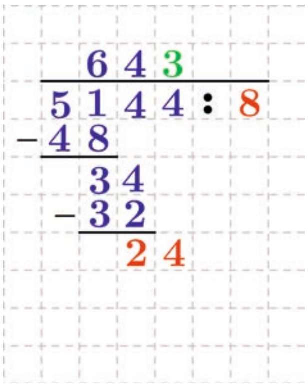
Wykonujemy odejmowanie. Wynik odejmowania musi być mniejszy od liczby, przez którą wykonujemy dzielenie (w naszym przypadku 8).



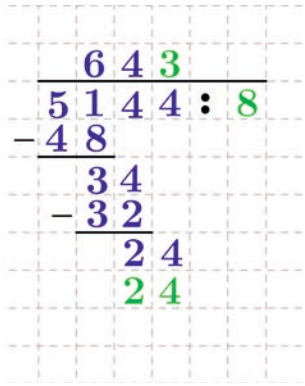
Bierzemy następną cyfrę dzielnej i spisujemy ją niżej, obok reszty z poprzedniego dzielenia.



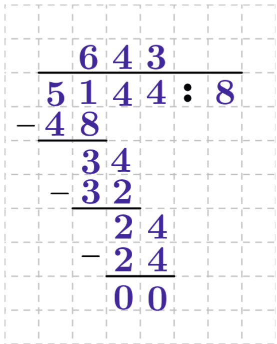
Otrzymujemy liczbę 24.



W liczbie 24 dzielnik mieści się 3 razy.



Dla sprawdzenia wykonujemy mnożenie 3 razy 8.



Dla sprawdzenia wykonujemy mnożenie 4 razy 8.
Iloraz liczby 5144 przez liczbę 8 wynosi 643.

Dzielenie przez liczbę dwucyfrową - obejrzyj prezentację na platformie MATI.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

8. KOLEJNOŚĆ DZIAŁAŃ

Często spotykamy się z wyrażeniami, w których występuje wiele działań arytmetycznych. Aby obliczyć wartość tych wyrażeń, musimy wiedzieć, w jakiej kolejności wykonujemy te działania.

Kolejność wykonywania działań

Najpierw matematyczny Asie,
wykonuj **działania w nawiasie**.
Potem umyśle tęgi,
obliczaj **pierwiastki i potęgi**.
Następnie **dziel i mnóż**,
a wynik tuż, tuż.
Na koniec **dodawaj lub odejmuj**,
i o wynik się nie przejmuj.

Autor nieznany

Oto kilka przykładów. Zaczniemy od najprostszych.

Wyrażenia arytmetyczne, w których nie ma nawiasów.

Gdy w wyrażeniu występuje tylko dodawanie i odejmowanie, to wykonujemy je w kolejności od lewej strony do prawej.

Przykład 1

17 - 3 + 5 = 14 + 5 = 19
32 + 9 - 7 = 41 - 7 = 34

Gdy w wyrażeniu występuje tylko mnożenie i dzielenie, to wykonujemy je w kolejności od lewej strony do prawej.

Przykład 2

$\underline{54 : 9} \cdot 2 = 6 \cdot 2 = 12$
$\underline{7 \cdot 8} : 4 = 56 : 4 = 14$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Gdy w wyrażeniu występuje dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie, to w pierwszej kolejności wykonujemy mnożenie i dzielenie, a potem dodawanie i odejmowanie.

Przykład 3

30 + 5 • 2 = 30 + 10 = 40
50 - 30 : 5 = 50 - 6 = 44
4 • 10 - 5 • 2 = 40 - 10 = 30
60 : 15 + 3 • 4 = 4 + 12 = 16

Wyrażenia arytmetyczne, w których występują nawiasy.

Jeżeli w wyrażeniu występują nawiasy, to w pierwszej kolejności wykonujemy działania wewnątrz nawiasów.

Przykład 4

22 + (15 - 7) = 22 + 8 = 30
(32 - 19) • (24 - 17) = 13 • 7 = 91
(3 + 4 • 5) - 8 = (3 + 20) - 8 = 23 - 8 = 15
24 : (2 + 16 : 4) = 24 : (2 + 4) = 24 : 6 = 4

Ćwiczenie 1

Oblicz samodzielnie:
37 - 12 + 8 =

Rozwiązanie:
37 - 12 + 8 = 25 + 8 = 33

Ćwiczenie 2

Oblicz samodzielnie:
20 : 5 • 2 =

Rozwiązanie:
20 : 5 • 2 = 4 • 2 = 8

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ TOMP UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 3

Oblicz samodzielnie:

15 + 5 • 8 =

Rozwiązanie:

15 + 5 • 8 = 15 + 40 = 55

Ćwiczenie 4

Oblicz samodzielnie:

4 • 20 - 20 : 5 =

Rozwiązanie:

4 • 20 - 20 : 5 = 80 - 4 = 76

Ćwiczenie 5

Oblicz samodzielnie:

8 • (5 + 5 • 9) =

Rozwiązanie:

8 • (5 + 5 • 9) = 8 • (5 + 45) = 8 • 50 = 400

Zadanie 1

Oblicz sposobem pisemnym - pamiętaj o kolejności wykonywania działań:

a) **(13035 - 12087) :79 =**

b) **13035 - 12087 : 79 =**

Rozwiązanie:

a) **(13035 - 12087) : 79 = 948 : 79 = 12**

b) **13035 - 12087 : 79 = 13035 - 153 = 12882**

$$\begin{array}{r} 13035 \\ -12087 \\ \hline 948 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \underline{12} & \\ 948 & : 79 \\ -\ \underline{79} & \\ 158 & \\ -\ \underline{158} & \\ 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \underline{153} & \\ 12087 & : 79 \\ -\ \underline{79} & \\ 418 & \\ -\ \underline{395} & \\ 237 & \\ -\ \underline{237} & \\ 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13035 \\ -\ \ \ 153 \\ \hline 12882 \end{array}$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

9. ZADANIA TEKSTOWE

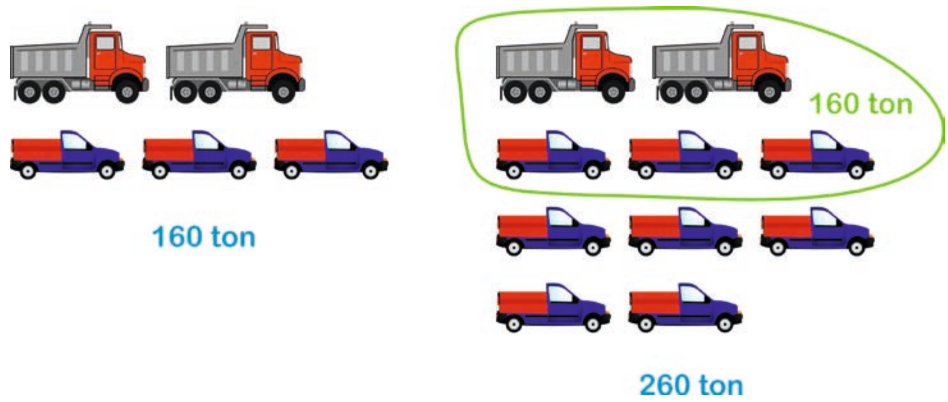
Rozwiązując zadania tekstowe, pamiętaj, aby:

- dokładnie przeczytać treść zadania,
- wypisać dane - inny sposób zapisania treści zadania pomoże Ci znaleźć prawidłowe rozwiązanie,
- zapisać wszystkie działania, które wykonujesz w pamięci,
- sprawdzić obliczenia, wykonując działania odwrotne,
- sprawdzić, czy otrzymany wynik zgadza się z treścią zadania,
- zapisać odpowiedź.

Jedną z metod rozwiązywania zadań tekstowych jest metoda graficzna. Popatrzmy na przykład.

Zadanie 1

Dwie duże ciężarówki i trzy małe przewożą razem 160 ton węgla. Osiem małych ciężarówek i dwie duże mogą przewieźć razem 260 ton węgla. Ile węgla przewozi duża, a ile mała ciężarówka?



Popatrzmy na rysunek i odpowiedzmy najpierw na pytanie:
Ile ton węgla przewozi pięć małych ciężarówek?

260 ton - 160 ton = 100 ton

Pięć małych ciężarówek przewozi **100 ton** węgla

Ile ton węgla przewozi jedna mała ciężarówka?

100 : 5 = 20 ton

Jedna mała ciężarówka przewozi 20 ton węgla. Ile ton węgla przewozi duża ciężarówka?

160 ton - 3 • 20 ton = 160 ton - 60 ton = 100 ton
100 ton : 2 = 50 ton

Duża ciężarówka przewozi **50 ton** węgla

Mała ciężarówka przewozi **20 ton** węgla

Sprawdzenie poprawności rozwiązania:
2 • 50 + 3 • 20 = 160
8 • 20 + 2 • 50 = 260

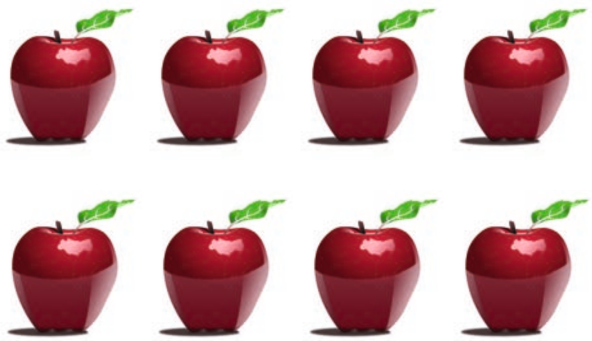
Odpowiedź: Duża ciężarówka przewozi 50 ton, a mała 20 ton węgla.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

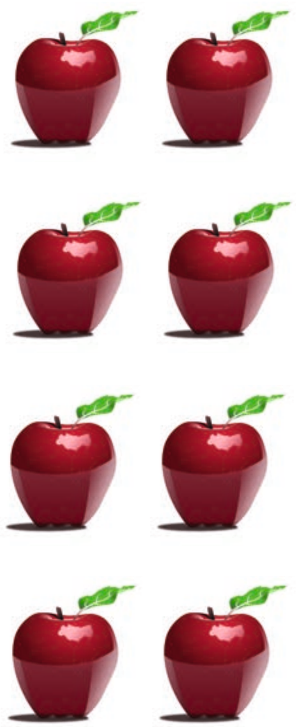
1. LICZBY PIERWSZE I ZŁOŻONE

Zastanówmy się, na ile części możemy podzielić 8 jabłek. Możemy je podzielić na jedną część - i będą w niej wszystkie jabłka - albo na 8 części po 1 jabłku.

Możemy je podzielić na dwie części po 4 jabłka.



Możemy też podzielić je na cztery części po 2 jabłka.



Zatem liczba 8 dzieli się bez reszty przez 1, 2, 4 i 8.
Liczby te nazywamy dzielnikami liczby 8.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przyjrzyjmy się dzielnikom kilku liczb naturalnych.

Liczba	Dzielniki liczby
0	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8...
1	1
2	1, 2
3	1, 3
4	1, 2, 4
5	1, 5
6	1, 2, 3, 6
7	1, 7
8	1, 2, 4, 8
9	1, 3, 9

Zauważmy, że niektóre liczby mają jeden dzielnik, inne dwa, a jeszcze inne trzy lub więcej. Ze względu na ich ilość wśród liczb naturalnych, wyróżniamy liczby pierwsze i liczby złożone.

Liczba pierwsza to taka liczba naturalna, która ma dwa dzielniki - dzieli się przez jeden i samą siebie.

Przykład 1

Przykłady liczb pierwszych: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23...

Liczba, która ma więcej niż dwa dzielniki, to **liczba złożona.**

Przykład 2

Przykłady liczb złożonych: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20...

A co z 0 i 1?

Liczby 0 i 1 nie pasują do żadnej z tych grup. Mówimy, że 0 i 1 nie są ani liczbami pierwszymi, ani złożonymi.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

2. CECHY PODZIELNOŚCI LICZB PRZEZ 2, 5, 10, 100 ORAZ PRZEZ 3 i 9

Wypiszmy kilka liczb podzielnych przez 2.

Przykłady: 16, 34, 28, 112, 80, 54, 62, 66.

Przyjrzyjmy się tym liczbom i spróbujmy odgadnąć, co je łączy.

Otóż każda z nich kończy się na 0, 2, 4, 6 lub 8.

Liczba jest podzielna przez **2**, gdy jej ostatnią cyfrą jest **0**, **2**, **4**, **6** lub **8.**

Liczba jest podzielna przez 2, gdy jej ostatnią cyfrą jest 0, 2, 4, 6 lub 8.

Przyjrzyjmy się teraz poniższym liczbom:

10, 15, 50, 60, 75, 100, 125, 200.

Zastanówmy się, które z tych liczb są podzielne przez 5, które przez 10, a które przez 100.

Liczby podzielne przez 5 to: 10, 15, 50, 60, 75, 100, 125, 200.

Liczby podzielne przez 10 to: 10, 50, 60, 100, 200.

Liczby podzielne przez 100 to: 100, 200.

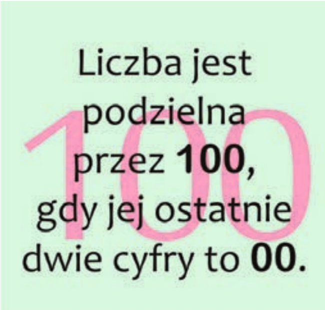
Liczba jest podzielna przez **5**, gdy jej ostatnią cyfrą jest **0** lub **5.**

Liczba jest podzielna przez 5, gdy jej ostatnią cyfrą jest 0 lub 5.

Liczba jest podzielna przez **10**, gdy jej ostatnią cyfrą jest **0.**

Liczba jest podzielna przez 10, gdy jej ostatnią cyfrą jest 0.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



Liczba jest podzielna przez 100, gdy jej ostatnie dwie cyfry to 00.

Ćwiczenie 1

Spośród liczb 30, 76, 35, 13, 245, 1200, 4790, 2001, 7598, 20000, 345200, 1805 wypisz liczby podzielne przez 2, 5, 10 oraz 100.

Rozwiązanie:

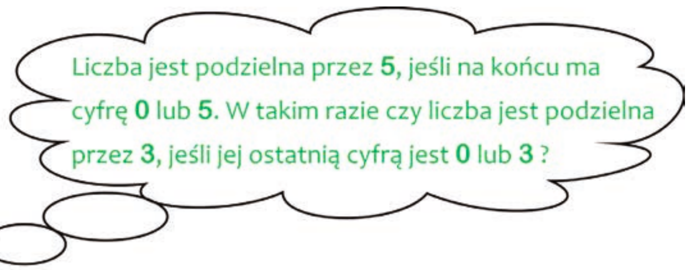
Liczby podzielne przez 2: 30, 76, 1200, 4790, 7598, 20000, 345200

Liczby podzielne przez 5: 30, 35, 245, 1200, 4790, 20000, 345200, 1805

Liczby podzielne przez 10: 30, 1200, 4790, 20000, 34500

Liczby podzielne przez 100: 1200, 20000, 345200.

Króliczek zastanawiał się, po czym poznać liczbę podzielną przez 3.



Odpowiedzmy na pytanie króliczka.
Przyjrzyjmy się kilku liczbom podzielnym przez 3:
12, 33, 69, 210.
Liczby te mają inną wspólną cechę.
Suma ich cyfr jest liczbą podzielną przez 3.

Sprawdźmy:
Suma cyfr w liczbie 12 to 1 + 2 = 3, a 3 : 3 = 1
Suma cyfr w liczbie 33 to 3 + 3 = 6, a 6 : 3 = 2
Suma cyfr w liczbie 69 to 6 + 9 = 15, a 15 : 3 = 5
Suma cyfr w liczbie 210 to 2 + 1 + 0 = 3, a 3 : 3 = 1

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Liczba jest podzielna przez **3**, jeśli suma jej cyfr jest podzielna przez **3**.

Liczba jest podzielna przez 3,
jeśli suma jej cyfr jest podzielna przez 3.

Podobnie jest z liczbami podzielnymi przez 9.
Suma ich cyfr musi być liczbą podzielną przez 9.

Sprawdźmy:
Suma cyfr w liczbie 81 to 8 + 1 = 9, a 9 : 9 = 1
Suma cyfr w liczbie 99 to 9 + 9 = 18, a 18 : 9 = 2
Suma cyfr w liczbie 999 to 9 + 9 + 9 = 27, a 27 : 9 = 3

Liczba jest podzielna przez **9**, jeśli suma jej cyfr jest podzielna przez **9**.

Liczba jest podzielna przez 9,
jeśli suma jej cyfr jest podzielna przez 9.

Ćwiczenie 2

Wśród liczb 521, 10101, 9369, 7510 wskaż liczby podzielne przez 3 i przez 9.

Rozwiązanie:
Suma cyfr w liczbie 521 to 5 + 2 + 1 = 8
Liczba 8 nie jest podzielna ani przez 3, ani przez 9,
zatem liczba 521 nie jest podzielna przez 3 i 9.

Suma cyfr w liczbie 10101 to 1 + 0 + 1 + 0 + 1 = 3
Liczba 3 jest podzielna przez 3, ale nie przez 9,
zatem liczba 10101 jest podzielna przez 3.

Suma cyfr w liczbie 9369 to 9 + 3 + 6 + 9 = 27
Liczba 27 jest podzielna przez 3 i 9,
zatem liczba 9369 jest podzielna i przez 3, i przez 9.

Suma cyfr w liczbie 7510 to 7 + 5 + 1 + 0 = 13
Liczba 13 nie jest podzielna ani przez 3, ani przez 9,
zatem liczba 7510 nie jest podzielna przez 3 i 9.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

3. WIELOKROTNOŚCI I NWW

Przypomnijmy sobie, jak w II klasie uczyliśmy się tabliczki mnożenia. Zapamiętywaliście kolejne wielokrotności liczb od 1 do 9. Rozszerzając ten sposób na liczby naturalne różne od zera i obliczając ich dowolne wielokrotności widzimy, że zawsze możemy obliczyć taką wielokrotność, która będzie wspólna np. dla 2, 3, 4 … różnych liczb.

Przykład 1

Kasia chciała kupić gumy do żucia, które sprzedawane są w opakowaniach po 6 sztuk.
Liczba gum, które może kupić to: 0, 6, 12, 18, 24,…

Każda wielokrotność liczby 6 jest wynikiem mnożenia liczby 6 przez pewną liczbę naturalną:

$0 \cdot 6 = 0$
$1 \cdot 6 = 6$
$2 \cdot 6 = 12$
$3 \cdot 6 = 18$

Możemy zapisać: W6 = { 0, 6, 12, 18, 24, 30,...}

Każda wielokrotność liczby jest wynikiem jej mnożenia przez liczbę naturalną.

Znajdowanie najmniejszej wspólnej wielokrotności (NWW) jest przydatne przy rozwiązywaniu wielu problemów matematycznych, na przykład przy sprowadzaniu ułamków do wspólnego mianownika.

Przykład 2

Zapiszmy 8 kolejnych wielokrotności liczb 6 i 9.

Sposób 1:
W6 = {0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42}
W9 = {0, 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63}
NWW (6, 9) = 18

Sposób 2:
Zobacz prezentację na platformie MATI.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

4. DZIELNIKI I NWD

Czy można posadzić 30 uczniów po 5 lub 7 osób przy stoliku, tak aby przy każdym stoliku siedziało tylu samo uczniów? To samo pytanie możemy sformułować inaczej:

Czy można liczbę 30 podzielić przez 5 lub 7 bez reszty?

Sprawdźmy:

30 : 5 = 6

Dzielnik

30 : 7 = 4 r 2

Zauważmy, że liczba 30 dzieli się bez reszty przez 5.

Mówimy wtedy, że 5 jest dzielnikiem liczby 30.

Dzielnikiem liczby 30 są też liczby 1, 2, 3, 6, 10, 15, 30.

Możemy to zapisać następująco: $D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

Każda liczba naturalna różna od zera dzieli się przez 1 i przez samą siebie.

Liczby, przez które jest podzielna bez reszty dana liczba to dzielniki tej liczby.

Liczba 0 jest jedyną liczbą naturalną, która ma nieskończenie wiele dzielników.

Przykład 1

Wiktoria miała 9 cukierków czekoladowych, 12 kakaowych i 69 pomarańczowych. Czy można rozdzielić je pomiędzy trzy osoby, aby każda z nich dostała taką samą ilość cukierków?

Sposób 1:

Zauważmy, że 9 : 3 = 3, 12 : 3 = 4, 69 : 3 = 23

3 + 4 + 23 = 30

Zatem każda osoba dostanie po 30 cukierków.

Sposób 2:

9 + 12 + 69 = 90, 90 : 3 = 30

Jeżeli pewna liczba jest dzielnikiem wszystkich składników, to jest również dzielnikiem ich sumy.

Przykład 2

Na paczki świąteczne przygotowano 161 torebek cukierków i 35 tabliczek czekolady.
a) Jaką największą liczbę takich samych paczek można przygotować?

Sposób 1:
$D_{161} = \{1, 7, 23, 161\}$
$D_{35} = \{1, 5, 7, 35\}$
Wspólne dzielniki to: 1 i 7
Największy wspólny dzielnik to 7.
Zatem można najwięcej przygotować 7 paczek.

b) Ile torebek cukierków i ile czekolad będzie wówczas w każdej paczce?
161 : 7 = 23
35 : 7 = 5

Odpowiedź: *W każdej paczce będą 23 torebki cukierków i 5 czekolad.*

Sposób 2:
Rozłóżmy na czynniki pierwsze liczby 161 i 35

$$\begin{array}{r|l} 161 & 7 \\ 23 & 23 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Wypiszmy jednakowe czynniki: 7

Zatem największym wspólnym dzielnikiem jest liczba 7.
Zapisujemy NWD(161, 35) = 7.

Każda para liczb ma jeden NWD (największy wspólny dzielnik).
NWD jest równy iloczynowi wszystkich czynników pierwszych wspólnych dla obu liczb. Jest to największa liczba, która jest dzielnikiem obu liczb.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

5. ROZKŁAD LICZBY NA CZYNNIKI PIERWSZE

Wiemy już, co to są liczby pierwsze i złożone, a także znamy cechy podzielności liczb przez 2, 3, 5, 9, 10 i 100.

Wykorzystajmy teraz tę wiedzę, aby przedstawić liczbę w postaci iloczynu dwóch lub więcej liczb pierwszych.

$12 = 2 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$

$66 = 2 \cdot 33 = 2 \cdot 3 \cdot 11$

$144 = 2 \cdot 72 = 2 \cdot 2 \cdot 36 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 18 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3^2$

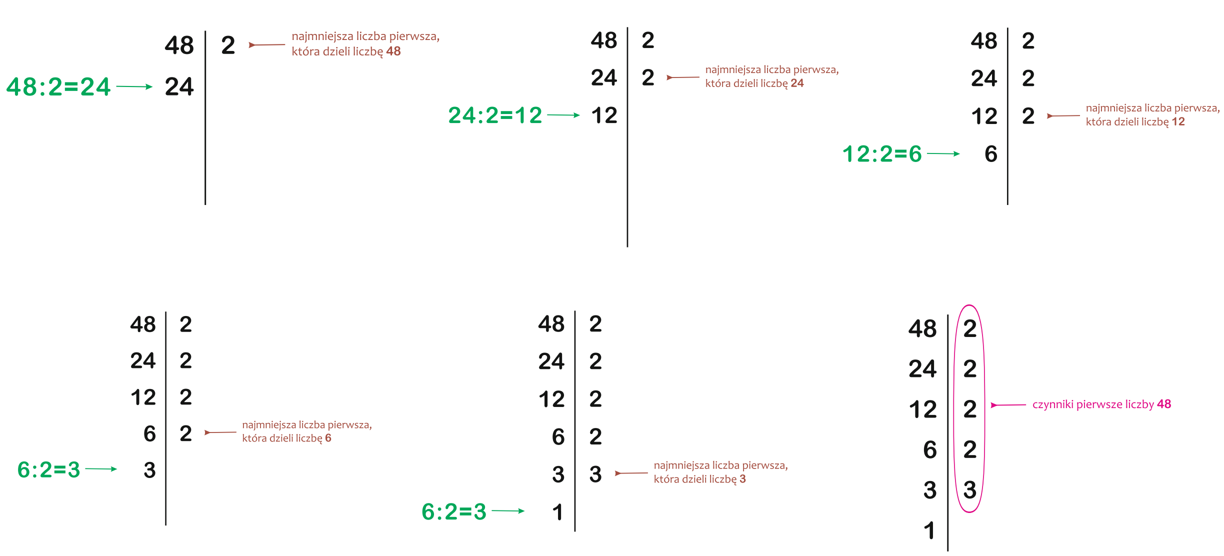
Każdą liczbę złożoną możemy przedstawić w postaci iloczynu liczb pierwszych, czyli rozłożyć na czynniki pierwsze.

Ćwiczenie 1

Rozłóżmy na czynniki pierwsze liczbę 48.
Możemy to zrobić, postępując jak powyżej, czyli:

$$48=2\cdot\underbrace{24}_{2\cdot 12}=2\cdot 2\cdot\underbrace{12}_{2\cdot 6}=2\cdot 2\cdot 2\cdot\underbrace{6}_{2\cdot 3}=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3=2^4\cdot 3$$

Drugi sposób jest zdecydowanie szybszy. Wystarczy, że liczbę 420 będziemy dzielić przez liczby pierwsze do momentu, aż otrzymamy liczbę 1.



Rozwiązanie: $48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 16 \cdot 3$

Ćwiczenie 2

Liczbę 360 rozłóż na czynniki pierwsze.

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Rozwiązanie: $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

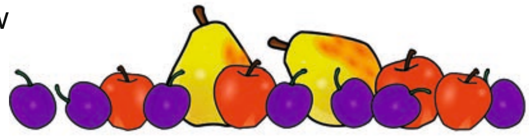
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

6. NWW I NWD W ZADANIACH TEKSTOWYCH

Ćwiczenie 1

W stołówce szkolnej zostawiono 24 gruszki, 48 jabłek i 96 śliwek. Pani Hania chciała równo rozdzielić owoce między uczniów klasy liczącej ponad 20 osób.

Ilu uczniów jest w klasie i po ile owoców każdego rodzaju otrzyma jedno dziecko?



Rozwiązanie:

Zacznijmy od ustalenia, ilu uczniów liczy klasa. Ponieważ każdy uczeń miał otrzymać tyle samo owoców każdego rodzaju, znajdźmy największy wspólny dzielnik liczb 24, 48 i 96.

Możemy to zrobić na dwa sposoby.

<u>Sposób 1:</u>

Rozkładamy liczby na czynniki pierwsze:

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 96 & 2 \\ 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Szukamy NWD:

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 96 & 2 \\ 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

NWD(24, 48, 96) = 2•2•2•3 = 24

<u>Sposób 2:</u>

Wypiszmy dzielniki liczb 24, 48 i 96. Zaznaczmy wspólne dzielniki liczb:

NWD (24, 48, 96) = 24.

Z powyższych obliczeń wynika, że klasa liczy 24 uczniów.

Obliczmy teraz, po ile owoców każdego rodzaju dostaną dzieci.

gruszki 24 : 24 = 1

jabłka 48 : 24 = 2

śliwki 96 : 24 = 4

Odpowiedź: *Klasa liczy 24 uczniów. Każdy uczeń otrzyma 1 gruszkę, 2 jabłka i 4 śliwki.*

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ Tomasz Jakubowski TOMP UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 2

Dwie krawcowe szyją spodnie. Pierwszej czynność ta zabiera 20, a drugiej 25 minut. Obie zaczynają pracę o 7:00.
O której godzinie obydwie krawcowe po raz pierwszy skończą szyć **spodnie jednocześnie?**

Rozwiązanie:
Najpierw musimy obliczyć, po ilu minutach obydwie krawcowe pierwszy raz skończą szyć spodnie. Znajdźmy najmniejszą wspólną wielokrotność liczb 20 i 25.
Możemy to zrobić na dwa sposoby.

Sposób 1:
Wypiszmy kilka wielokrotności obu liczb.

$$W_{20}=\{0, 20, 40, 60, 80, 100, 120, 140...\}$$
$$W_{25}=\{0, 25, 50, 75, 100, 125, 150...\}$$

Zauważmy, że najmniejszą wspólną wielokrotnością różną od zera jest liczba 100.

$$W_{20}=\{0, 20, 40, 60, 80, 100, 120, 140...\}$$
$$W_{25}=\{0, 25, 50, 75, 100, 125, 150...\}$$

NWW (20, 25) = 100

Sposób 2:
Rozkładamy liczby 20 i 25 na czynniki pierwsze.

20	2
10	2
5	5
1	

25	5
5	5
1	

Zaznaczamy wspólne dzielniki i obliczamy NWW.

20	2
10	2
5	5
1	

25	5
5	5
1	

NWW (20, 25) = 5 • 2 • 2 • 5 = 100
Wiemy już, że krawcowe skończą razem szyć po 100 minutach. Pozostało nam ustalić, która to będzie godzina.

Odpowiedź: *100 min = 1 h 40 min czyli 7:00 + 1 h 40 min = 8:40.*
Krawcowe pierwszy raz skończą jednocześnie szyć spodnie o godz. 8:40.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

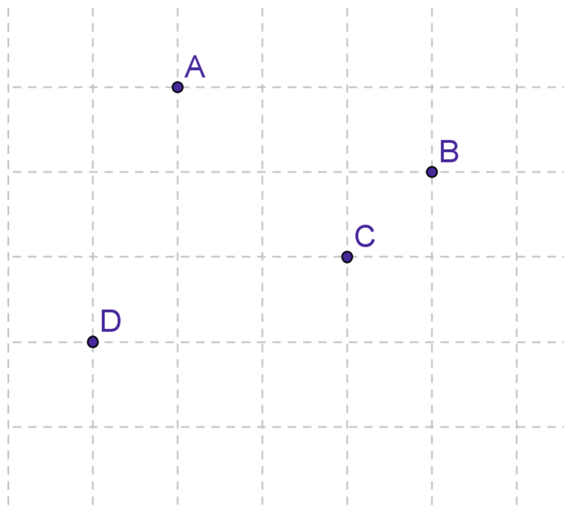
1. PODSTAWOWE FIGURY GEOMETRYCZNE

1.1. Punkt

Punkty służą do zaznaczania konkretnych miejsc, np. na mapie albo w zeszycie za pomocą kropki lub krzyżyka. Każdy punkt powinien posiadać swoją nazwę. Zazwyczaj używamy do tego dużych liter alfabetu (A, B, C, ...).

Przykład 1

Małgosia zaznaczyła w zeszycie w kratkę 4 punkty i oznaczyła je dużymi literami alfabetu.



Wskaż punkt C?

Przykład 2

Michał zaznaczył punktami na mapie miejsca, które chciałby odwiedzić w najbliższej przyszłości, w podanej kolejności. Czy potrafisz wymienić te miasta?

Przykład 3

Wojtek wypełnił kupon, zakreślając liczby krzyżykami. Czy potrafisz je wymienić?

W tym przypadku punkty nie mają swoich nazw, bo nie są one potrzebne.

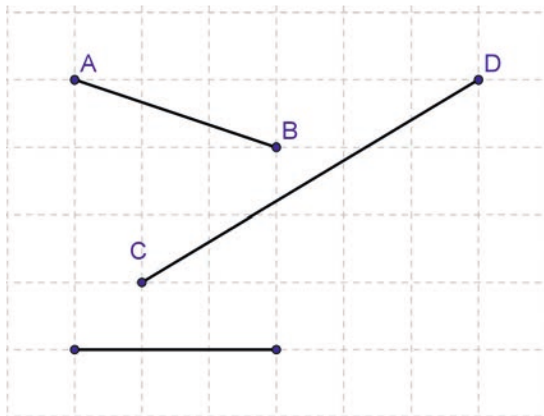
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

1.2. Odcinek

Odcinek możemy sobie wyobrazić jako linię (kreskę), która łączy ze sobą dwa punkty. Odcinki rysujemy od punktu początkowego do punktu końcowego za pomocą linijki. Zarówno punkt początkowy, jak również końcowy powinny mieć swoje nazwy, którymi zazwyczaj są duże litery alfabetu, np. odcinek AB

Przykład 1

Wojtek narysował trzy odcinki w zeszycie: odcinek AB, odcinek CD oraz trzeci odcinek, którego nie oznaczył. Czy możesz zaproponować jego nazwę?



Każdy odcinek, jak widzisz, ma swoją długość. Który z powyższych odcinków jest najdłuższy?

Długość odcinka AB to liczba nieujemna, określająca, ile razy odcinek jednostkowy mieści się w AB. Długość odcinka AB oznaczamy symbolem |AB|, niekiedy długości odcinków oznaczamy małymi literami, np. ***a, b***.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

1.3. Jednostki długości

W Polsce używamy następujących jednostek:
1 mm - jeden milimetr
1 cm - jeden centymetr **1 cm = 10 mm**
1 dm - jeden decymetr **1 dm = 10 cm**
1 m - jeden metr **1 m = 100 cm**
1 km - jeden kilometr **1 km = 1000 m**

Pomiaru odcinków w zeszycie dokonujemy za pomocą linijki.

Przykład 1

Michał zaznaczył odcinkiem odległość między dwoma miastami. Podaj nazwy tych miast.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

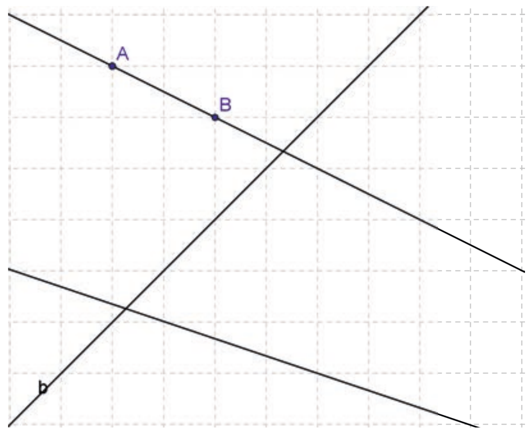
1.4. Prosta

Jeżeli odcinek będziemy przedłużać bez końca z jednej i drugiej strony, to powstanie **linia prosta** (krócej prosta). Rysując prostą w zeszycie, jesteśmy w stanie narysować tylko jej fragment, ponieważ prosta ciągnie się w nieskończoność (w kosmos). Prosta nie ma ani początku, ani końca.

Proste oznaczamy, używając małych liter alfabetu, np. prosta ***a, b, c, ...*** lub podajemy nazwy dwóch punktów należących do tej prostej, np. prosta ***AB*** itd.

Przykład 1

Agatka narysowała w zeszycie trzy proste. Jedna z tych prostych nie ma swojej nazwy. Zaproponuj jej nazwę:



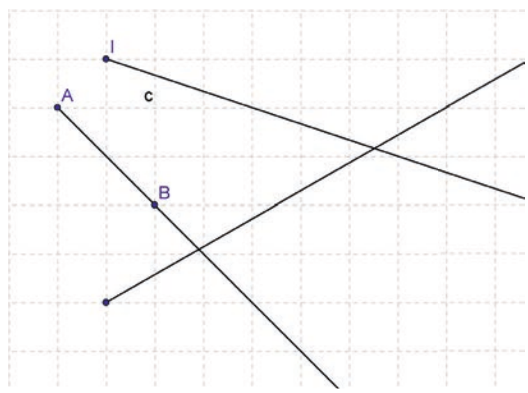
1.5. Półprosta

Jeżeli odcinek będziemy przedłużać tylko z jednej strony, to powstanie **półprosta**. Każda półprosta ma swój początek, który oznaczamy za pomocą punktu. Punkt ten dzieli prostą na dwie półproste.

Półproste oznaczamy małymi literami alfabetu, podając jej punkt początkowy lub zaznaczając punkt początkowy oraz drugi punkt należący do tej półprostej, np. półprosta AB (punkt A jest początkiem półprostej).

Przykład 1

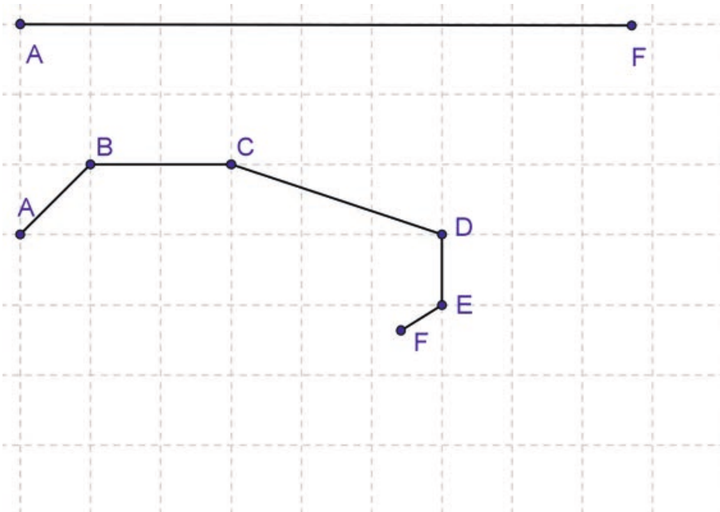
Jerzy narysował w zeszycie trzy półproste.Trzeciej półprostej nie nazwał. Zaproponuj jej nazwę:



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
WPQ
TOMP
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

1.6. Łamana

Wyobraźmy sobie dowolny odcinek AF i spróbujmy go „połamać”, nie rozrywając.



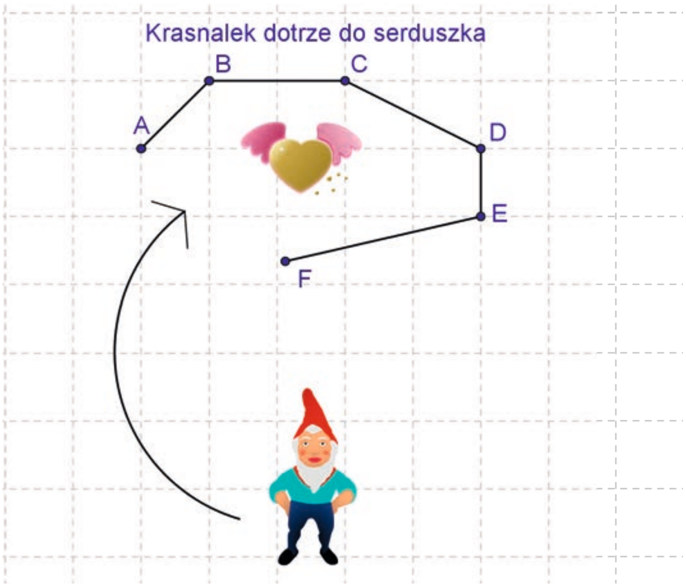
Powstała łamana, której krawędzie „łamania” (końce odcinków) oznaczyliśmy punktami. Na rysunku powyżej narysowaliśmy łamaną ABCDEF. Odcinki, z których składa się łamana to jej boki, a końce boków to wierzchołki.

Łamana może być:

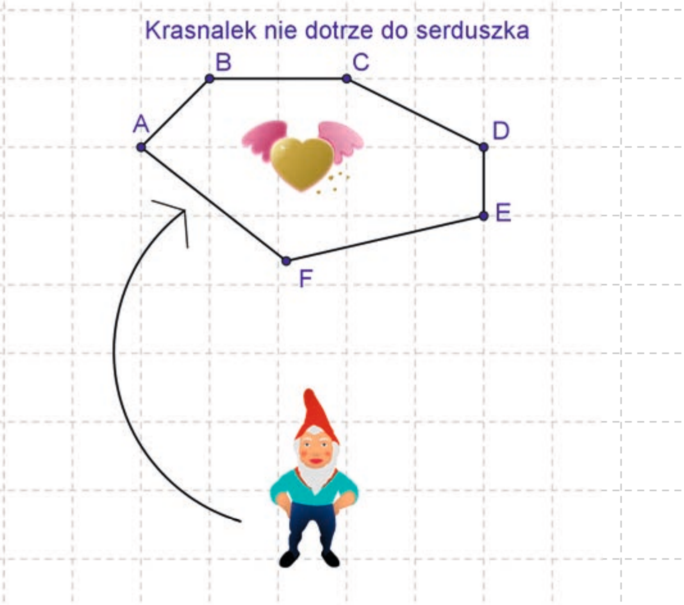
- otwarta
- zamknięta

Wojtek wyjaśnił Michałowi, czym różni się łamana otwarta od łamanej zamkniętej za pomocą rysunku:

1.6.1. Łamana otwarta:



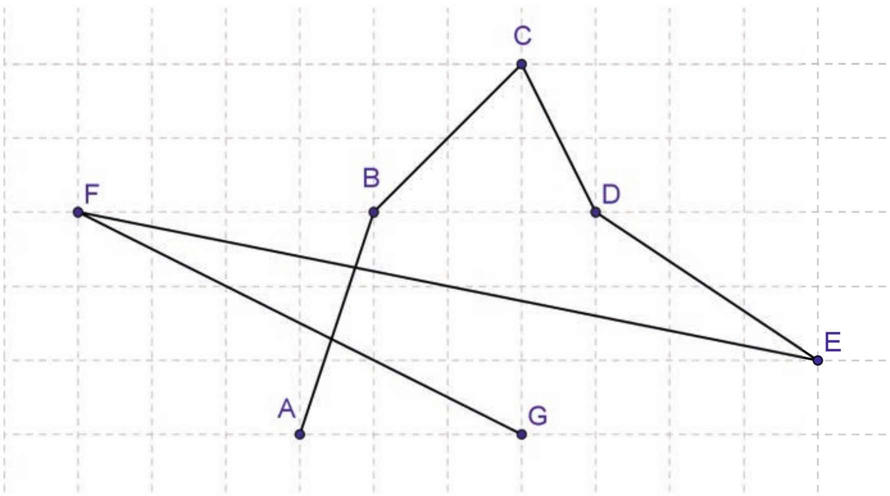
1.6.2. Łamana zamknięta:



Wyjaśnij swoimi słowami, kiedy łamana jest otwarta, a kiedy zamknięta.

Łamane, jak zapewne się domyślasz, możemy rysować również w inny sposób. Jeżeli odcinki, z których zbudowana jest łamana, przecinają się lub dotykają, to taką łamaną nazywamy **wiązaną**. W przeciwnym wypadku (patrz rysunki łamanych powyżej) łamaną nazywamy **zwyczajną**.

Łamana wiązana otwarta



KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 1

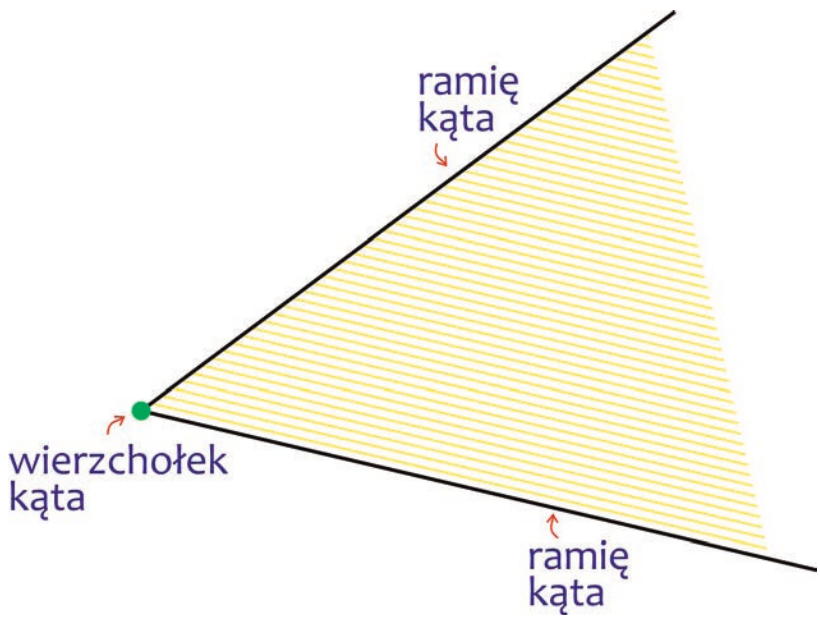
Narysuj dowolną łamaną zamkniętą.

Ćwiczenie

Z kawałka drutu lub plasteliny zbuduj dowolną łamaną otwartą i zamkniętą.

1.7. Kąt

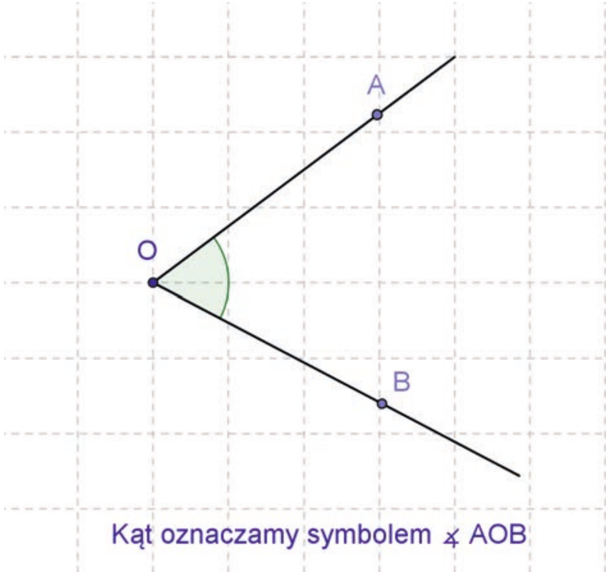
Dwie półproste o wspólnym początku dzielą płaszczyznę na dwie części. Każdą z tych części wraz z półprostymi nazywamy **kątem**.



Półproste nazywamy ramionami kąta, a ich wspólny początek wierzchołkiem kąta.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Kąty zaznaczamy za pomocą łuków i opisujemy przez podanie trzech punktów, z których składa się dany kąt. Kąt prosty zaznaczamy dodatkowo kropeczką narysowaną wewnątrz łuku.



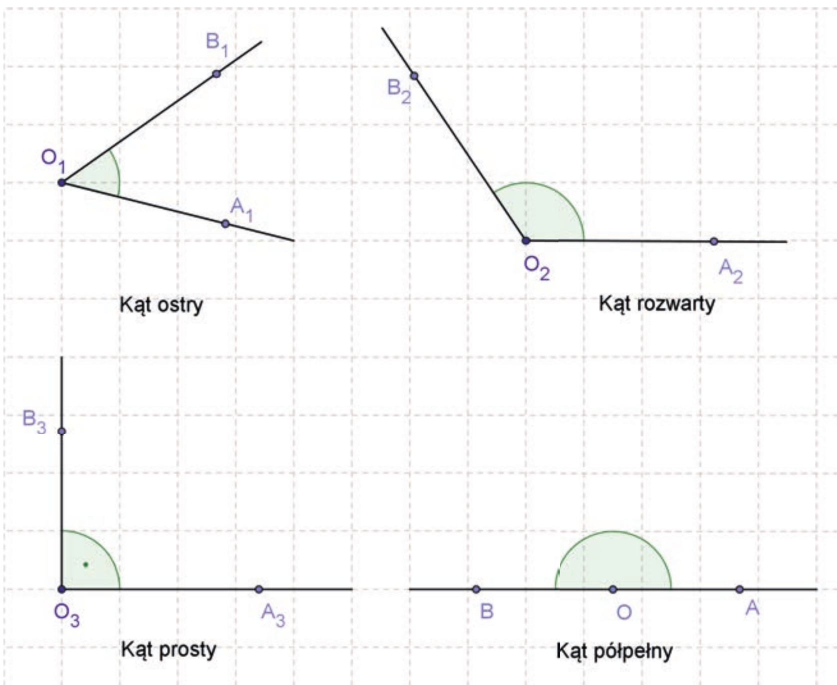
Rodzaje kątów

Kąty mogą być:

- wklęsłe
- wypukłe

1.7.1. Kąty wypukłe:

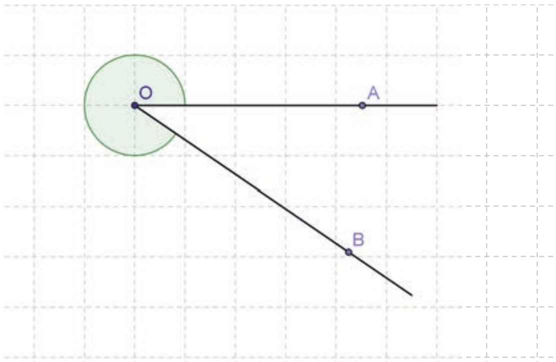
Podaj nazwy symboliczne każdego z kątów.



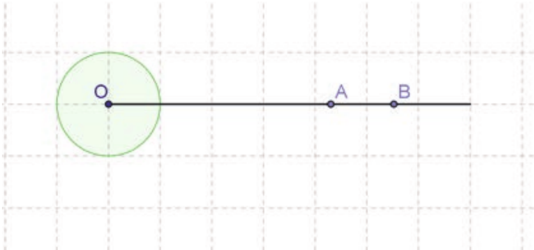
Patrząc na rysunek, wyjaśnij swoimi słowami, czym charakteryzują się kąty ostre, proste i rozwarte.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

1.7.2. Kąty wklęsłe:



Patrząc na rysunek, wyjaśnij swoimi słowami, jaki kąt nazywamy pełnym.



Kąt pełny nie jest ani wypukły, ani wklęsły.

Kąty mierzymy w stopniach (symbolicznie °) i używamy do tego kątomierza.

Nazwy kątów:

Kątem **ostrym** nazywamy kąt,
którego miara jest większa od 0° i mniejsza od 90°.

Kątem **prostym** nazywamy kąt, którego miara jest równa 90°.

Kątem **rozwartym** nazywamy kąt,
którego miara jest większa od 90°, ale mniejsza od 180°.

Kątem **półpełnym** nazywamy kąt, którego miara jest równa 180°.

Kątem **wklęsłym** nazywamy kąt,
którego miara jest większa niż 180°, ale mniejsza od 360°.

Kątem **wypukłym** nazywamy kąt, którego miara jest mniejsza lub równa 180°.

Kątem **pełnym** nazywamy kąt, którego miara wynosi 360°.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 1

Narysuj każdy rodzaj kąta w zeszycie i podaj jego oznaczenie oraz nazwę.

1.8. Rysowanie figur geometrycznych

Obejrzyj animację na platformie MATI.

Ćwiczenie 1

Narysuj w zeszycie dowolny odcinek AB, prostą CD, kąt ostry AOB oraz kąt rozwarty COD.

Ćwiczenie 2

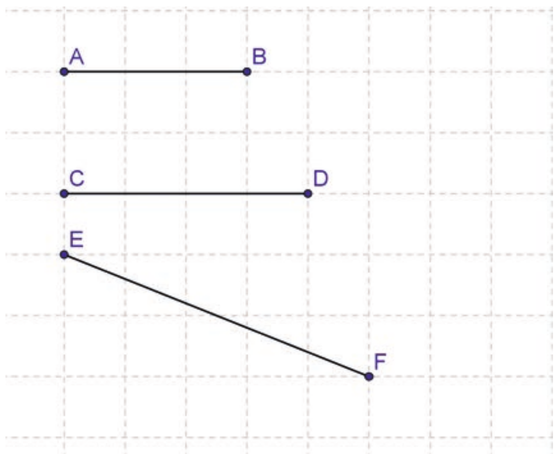
Narysuj w zeszycie łamaną otwartą ABCDE oraz łamaną zamkniętą EFGHI.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

2. ODCINKI - RYSOWANIE I POMIAR

Ćwiczenie 1

Który z odcinków jest najdłuższy?



Długości odcinków można szybko porównywać za pomocą cyrkla.

Ćwiczenie 2

Na mapie zaznaczono pewne miasta. Oceń, które dwa miasta, spośród zaznaczonych, są najbardziej oddalone od siebie?

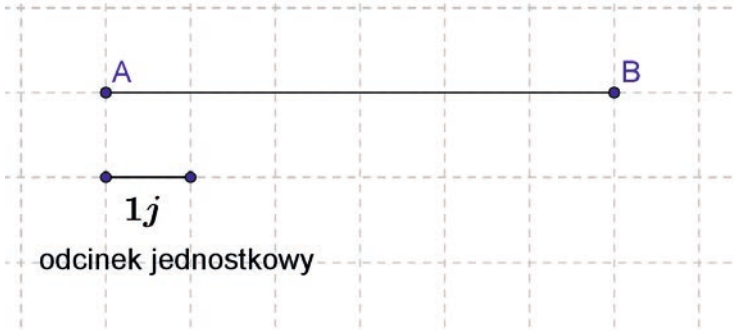
Długość odcinka AB jest to liczba nieujemna określająca ile razy odcinek jednostkowy mieści się w AB.

Długość odcinka AB oznaczamy symbolem |AB|, niekiedy długości odcinków oznaczamy małymi literami, np. ***a, b***.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 1

Przyjmując za jednostkę odcinek jednostkowy, zmierz długość odcinka AB na rysunku poniżej:



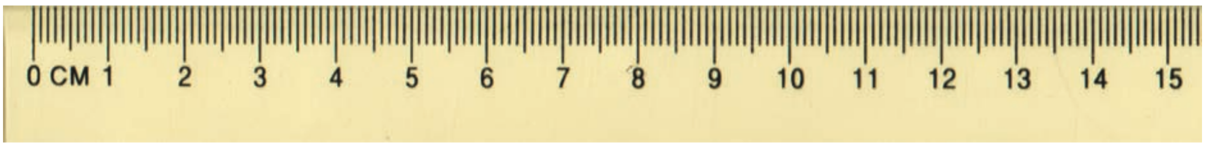
Z rysunku łatwo odczytać, że odcinek AB ma długość 6 kratek, czyli **6 j.**

|AB| = 6 j

W szkole podstawowej do pomiaru długości odcinków będziemy używać linijki. Krawcowe do tego celu używają miarek, a geodeci specjalnych urządzeń.

2.1. Jednostki długości

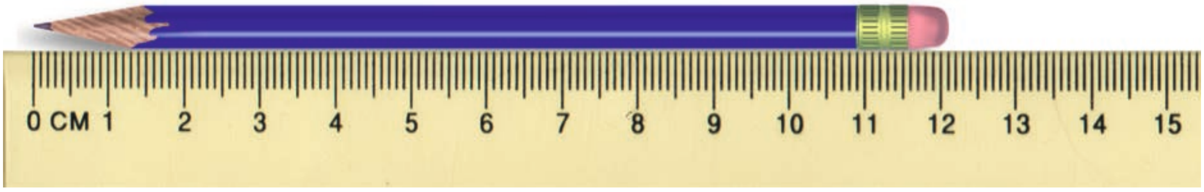
Linijka podzielona jest na duże i małe kreski. Pomiędzy każdymi dwiema dużymi kreskami znajduje się 10 małych kresek. Odległości pomiędzy dużymi kreskami mierzymy w cm, a pomiędzy małymi kreskami w mm.



Z linijki odczytujemy, że:
1 cm = 10 mm (bo pomiędzy 0 i 1 znajduje się 10 małych kresek)
3 cm = 30 mm (bo pomiędzy 0 i 3 znajduje się 30 małych kresek)

itd.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ TOMP UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



Długość ołówka Kasi wynosi: 12 cm 1 mm.

Długość ołówka Marcina wynosi: 9 cm 4 mm.

Ćwiczenie 1

Zmierz za pomocą linijki długość swojego ołówka i porównaj ją z długością ołówka kolegi z ławki.

Ćwiczenie 2

Narysuj w zeszycie dowolny odcinek CD oraz zmierz jego długość.

Ćwiczenie 3

Narysuj w zeszycie odcinek EF o długości 9 cm 26 mm

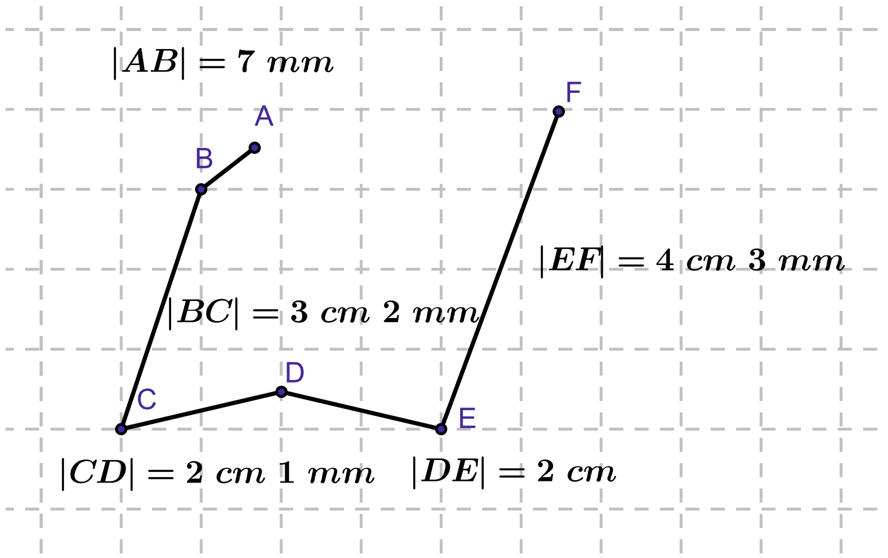
2.2. Długość odcinka oraz łamanej

Odcinki rysujemy oraz mierzymy za pomocą linijki z dokładnością do 1 mm. Umiejętność mierzenia odcinków możemy wykorzystać np. do obliczania odległości między miastami na mapie w podanej skali albo do obliczania długości figur zbudowanych z odcinków np. **łamanych**.

Długością **łamanej** nazywamy sumę długości wszystkich jej boków (odcinków).

Przykład 1

Wojtek narysował w zeszycie łamaną otwartą, a następnie zmierzył długości wszystkich odcinków tej łamanej. Oblicz długość tej łamanej.



Obliczamy długość łamanej ABCDEF
|ABCDEF| = |AB| + |BC| + |CD| + |DE| + |EF|

<u>I sposób (jeśli potrafisz dodawać ułamki dziesiętne)</u>
Przed dodaniem długości odcinków przedstawiamy je w tej samej jednostce:
|ABCDEF| = 0,7 cm + 3,2 cm + 2,1 cm + 2 cm + 4,3 cm
|ABCDEF| = 12,3 cm = 12 cm 3mm

Odpowiedź: *Długość łamanej narysowanej przez Wojtka wynosi 12 cm 3 mm.*

<u>II sposób</u>
Długości odcinków łamanej przedstawiamy w najmniejszej jednostce:
|ABCDEF| = |AB| + |BC| + |CD| + |DE| + |EF| =
= 7 mm + 32 mm + 21 mm + 20 mm + 43 mm
|ABCDEF| = 123 mm
|ABCDEF| = 12 cm 3 mm

Odpowiedź: *Długość łamanej narysowanej przez Wojtka wynosi 12 cm 3 mm.*

Przed obliczeniem długości łamanej wyraź długości wszystkich jej odcinków **w tej samej jednostce**.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 1

Narysuj w zeszycie dowolną łamaną otwartą i zamkniętą oraz zmierz za pomocą linijki ich długości.

Czy wiesz, że promienie słoneczne poruszają się po prostych. Droga, jaką przebywa światło słoneczne do Ziemi jest odcinkiem. Czy możesz podać początek oraz koniec tego odcinka?

Długość tego odcinka jest bardzo duża i wynosi 150 000 km.

2.3. Zamiana jednostek długości

Zamiana podstawowych jednostek

Podstawowe jednostki:

1 cm = 10 mm
1 dm = 10 cm
1 m = 100 cm
1 km = 1000 m

Zamiana jednostek większych na mniejsze

1 cm = 10 mm
1 dm = 10 cm = 10 • 1 cm = 10 • 10 mm = 100 mm
1 m = 10 dm = 10 • 1 dm = 10 • 10 cm = 100 cm
1 m = 100 cm = 100 • 1 cm = 100 • 10 mm = 1 000 mm
1 km = 1 000 m = 1 000 • 100 cm = 100 000 cm
1 km = 100 000 cm = 100 000 • 1 cm = 100 000 • 10 mm = 1 000 000 mm

Zamiana jednostek mniejszych na większe

1 m = 0,001 km
1 dm = 1 • (0,1 m) = 0,1 m = 0,1 • (0,001 km) = 0,0001 km
1 cm = 0,1 dm = 0,1 • (0,1 m) = 0,01 m = 0,01 • (0,001 km) = 0,00001 km
1 mm = 0,1 cm = 0,1 • (0,1 dm) = 0,01 dm = 0,01 • (0,1m) = 0,001 m =
= 0,001 • (0,001 km) = 0,000001 km

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ TOMP UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

2.3.1. Zamiana różnych jednostek

Zamiana jednostek większych na mniejsze

Przykład 1

Zamienić:

a) 123 cm na mm

123 cm = 123 • (10 mm) = 1230 mm

b) 34,5 m na cm

34,5 m = 34,5 • (100 cm) = 3450 cm

c) 0,234 km na dm

0,234 km = 0,234 • (10000 dm) = 2340 dm

Zamiana jednostek mniejszych na większe

Przykład 2

Zamienić

a) 23400 cm na m

23400 cm = 23400 • (0,01 m) = 234 m

b) 345 mm na dm

345 mm = 345 • (0,01 dm) = 3,45 dm

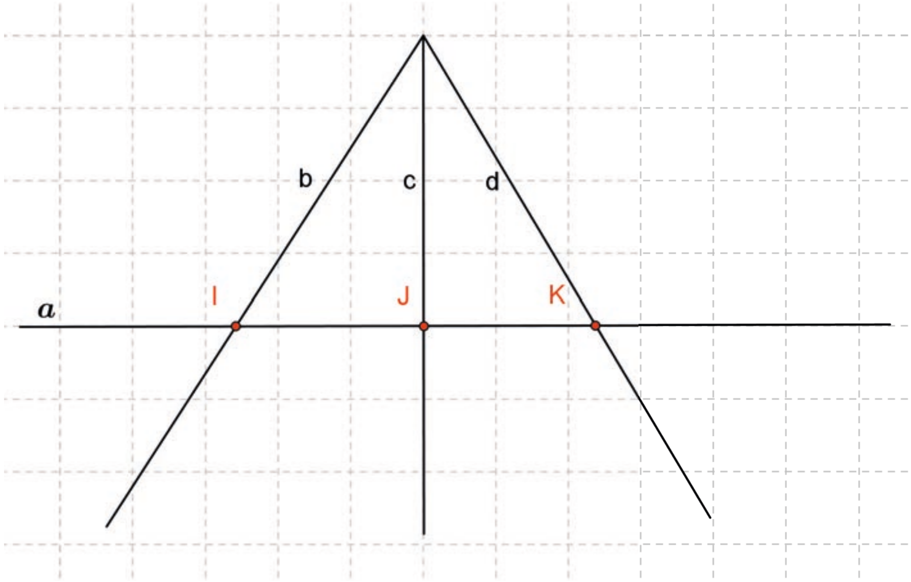
c) 1200 cm na dm

1200 cm = 1200 • (0,1 dm) = 120 dm

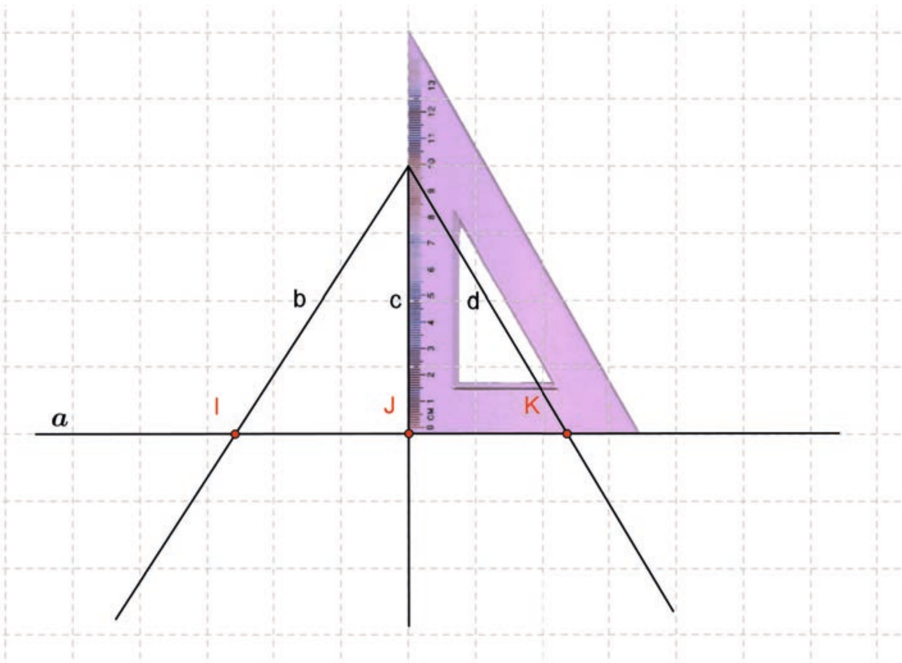
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

3. PROSTE PROSTOPADŁE

Wojtek narysował w zeszycie cztery proste: prostą ***a***, prostą ***b***, prostą ***c*** oraz prostą ***d***. Proste ***b***, ***c***, ***d*** przecinają prostą ***a*** w trzech punktach zaznaczonych kolorem czerwonym. Która z tych prostych przecina prostą ***a*** pod kątem prostym?



Z rysunku widać, że najbardziej „prosto" prostą ***a*** przecina prosta **c**. Jak się o tym przekonać? Wojtek narysował proste ***a*** oraz ***c*** po kratkach w zeszycie, a kratki w zeszycie przecinają się pod kątem prostym. Jak nie wierzysz, to przyłóż ekierkę do punktu przecięcia ***J***, żeby się o tym przekonać:

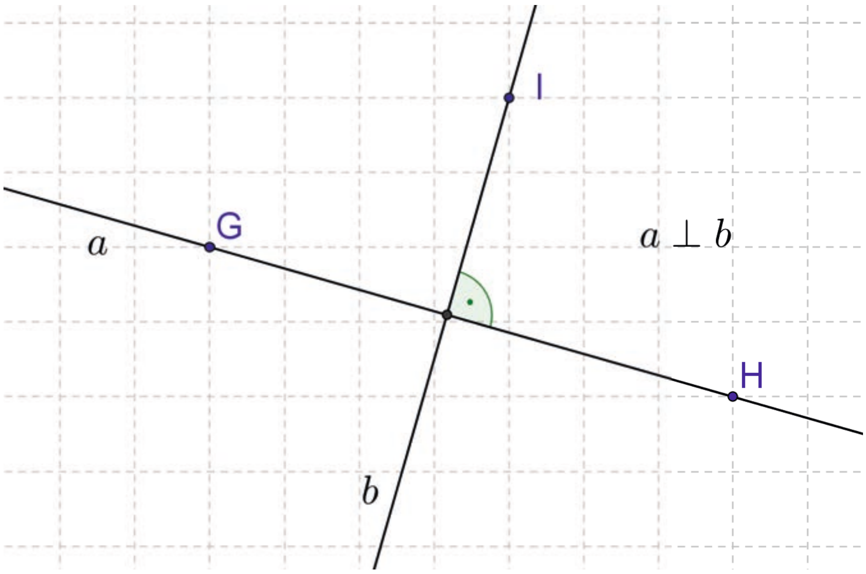


Widzisz teraz, że prosta ***a*** przecina prostą ***c*** pod kątem „ekierkowym", czyli pod kątem prostym. Zamiast pisać: „prosta ***a*** przecina prostą ***c*** pod kątem prostym" matematycy piszą $a \perp c$.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Mówimy, że dwie proste ***a*** i ***b*** są prostopadłe, jeśli przecinają się pod kątem prostym, co zapisujemy $a \perp b$.

Kąt prosty ma miarę 90° i oznaczamy go kropeczką w środku łuku:



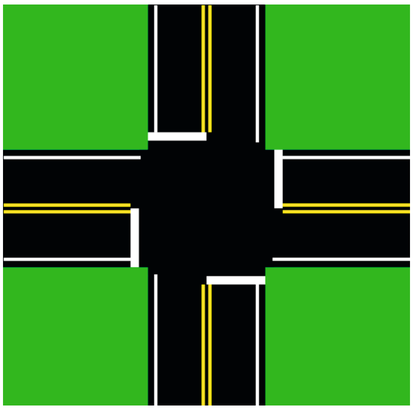
Ćwiczenie 1

Narysuj w zeszycie dowolną prostą, a następnie dwie dowolne inne proste prostopadłe do niej (staraj się używać ekierki, nie rysuj po kratkach).
Wprowadź oznaczenia prostych oraz zapisz symbolicznie prostopadłość prostych.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 1

Oto przykład obiektu, w którym występuje prostopadłość prostych:



Jak nazywa się ten obiekt ?

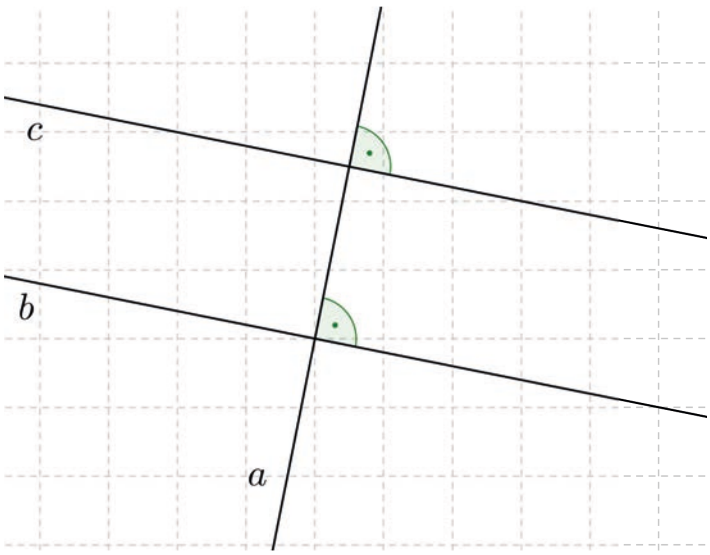
Podaj inny przykład, w którym występuje prostopadłość prostych.

3.1. Rysowanie prostych prostopadłych do danej prostej - animacja

Obejrzyj animację na platformie MATI.

3.2. Proste równoległe

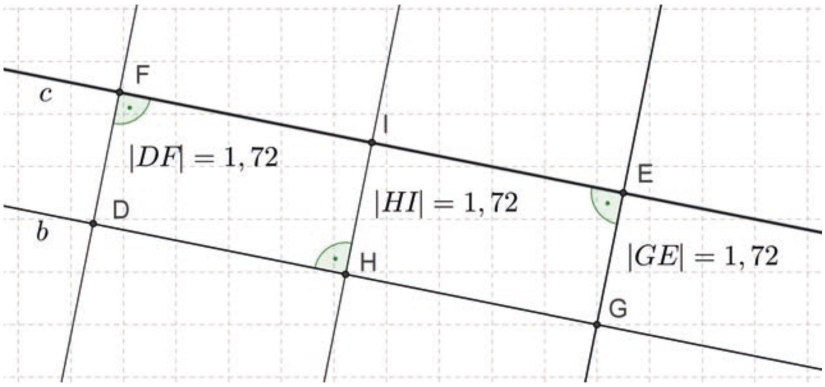
Pamiętasz ćwiczenie z poprzedniego rozdziału? Należało narysować dowolną prostą oraz dwie dowolne inne proste prostopadłe do tej prostej. Rozwiążmy to ćwiczenie jeszcze raz i przyjrzyjmy się tym dwóm prostym.



Widzimy, że prosta ***b*** jest prostopadła do prostej ***a*** oraz prosta ***c*** jest prostopadła do prostej ***a***. Symbolicznie prostopadłość tych prostych możemy zapisać krótko: $a \perp b$ i $a \perp c$.

Zwróć uwagę teraz na proste ***b*** i ***c***. Jak myślisz, czy proste ***b*** i ***c*** przetną się kiedyś? Żeby się o tym przekonać, najlepiej sprawdzić, czy te proste zbliżają się do siebie.

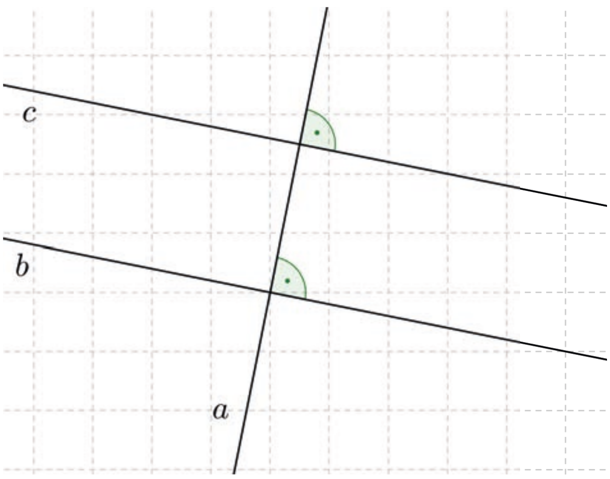
Eksperyment:
Wojtek zmierzył odległości tych prostych w różnych miejscach i okazało się, że są one jednakowe. Na tej podstawie stwierdził, że proste są równoodległe i nie mogą się przecinać, ponieważ nigdy się do siebie nie zbliżają.



Czy zgadzasz się z Wojtkiem?

Zamiast mówić, że proste są **równoodległe** będziemy mówić, że proste są równoległe i zamiast pisać: „prosta ***b*** jest **równoległa** do prostej ***c***" zapiszemy krótko: $b \parallel c$.

Mówimy, że dwie proste są równoległe, gdy są prostopadłe do tej samej prostej. Proste równoległe nigdy się nie przecinają.



Zapisujemy to tak: $b \parallel c$.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

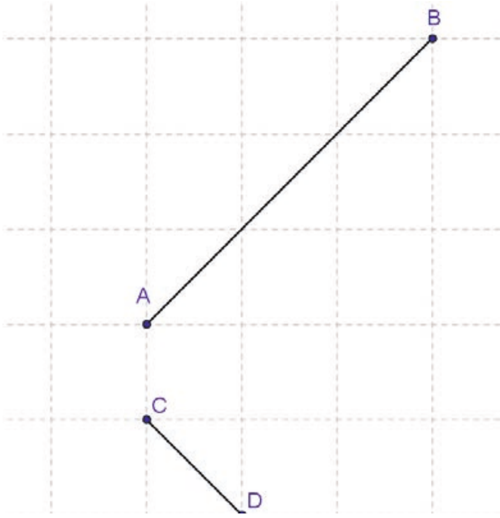
Przykład 1

Oto przykład prostych równoległych z otoczenia:

Wskaż na tym obrazku obiekty równoległe.
Podaj inne przykłady z Twojego otoczenia prostych równoległych.

3.3. Odcinki prostopadłe

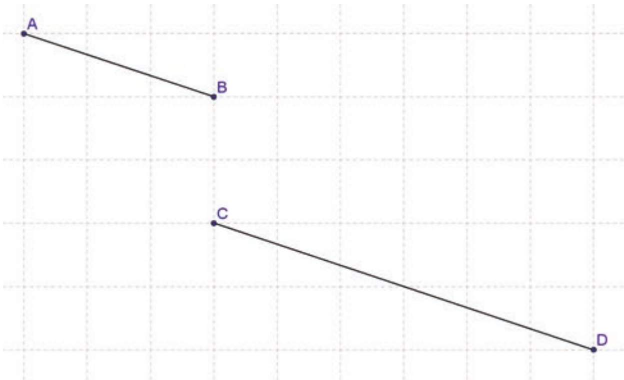
Wojtek narysował dwa odcinki w zeszycie: odcinek AB oraz odcinek CD. Czy te odcinki są do siebie prostopadłe? Jak to sprawdzić?



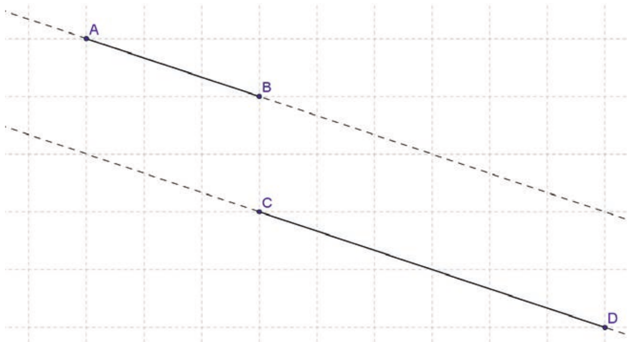
Obejrzyj animację na platformie MATI.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
WPQ
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

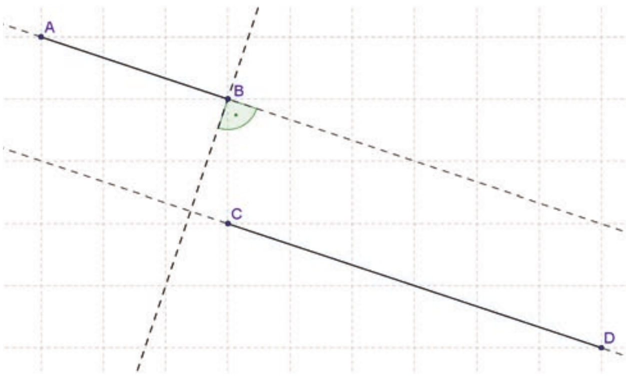
3.4. Odcinki równoległe



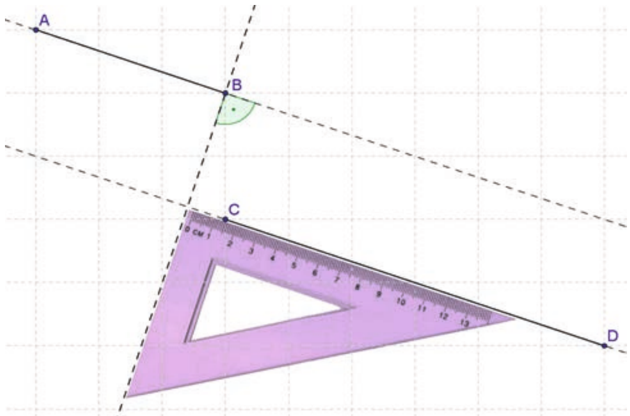
Małgosia narysowała dwa odcinki w zeszycie: odcinek **AB** oraz odcinek **CD**. Małgosia chciałaby sprawdzić, czy te odcinki są równoległe. Czy wiesz, jak to zrobić?



Małgosia wpadła na pomysł, żeby przedłużyć odcinki do prostych i sprawdzić, czy te proste są równoległe.



Żeby sprawdzić równoległość tych prostych, Małgosia dorysowała za pomocą ekierki trzecią prostą prostopadłą do jednej z tych prostych?



i sprawdziła przy użyciu ekierki, czy ta prosta jest prostopadła do drugiej?

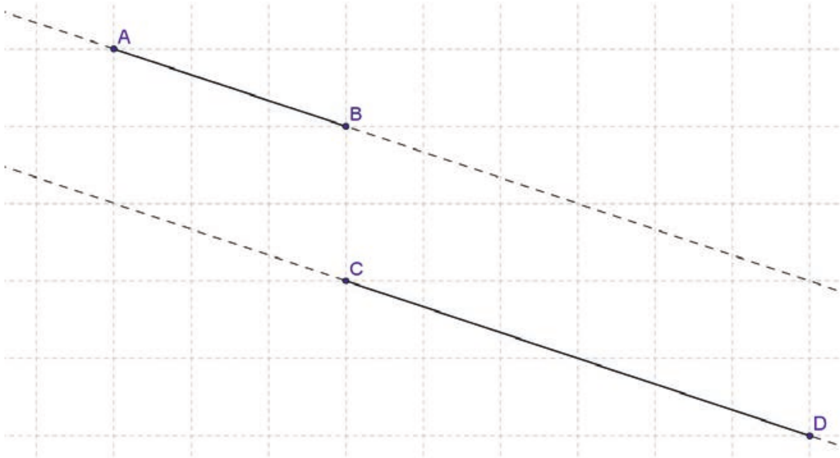
Widzimy, że odcinki **AB** oraz **CD** mają wspólną prostą prostopadłą. Skoro tak, to muszą być równoległe.

Równoległość odcinków (prostych) można sprawdzać prościej, bez rysowania prostej prostopadłej.
Wtedy rolę tej pomocniczej prostej pełni linijka.

Zobacz animację na platofrmie Mati.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Odcinki **AB** oraz **CD** są równoległe, jeśli proste wyznaczone przez te odcinki są równoległe.



Zapisujemy to tak: **AB**$\parallel$**CD**

3.5. Rysowanie prostych równoległych do danej prostej

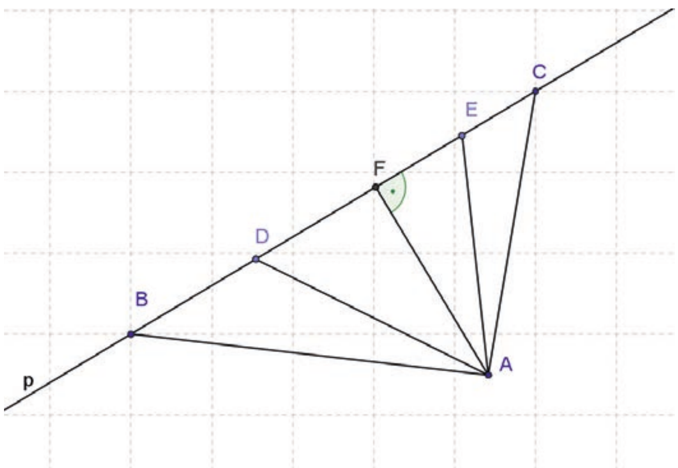
Obejrzyj animację na platformie MATI.

3.6. Wyznaczanie odległości punktu od prostej

Odległość punktu **A** od prostej ***p*** to długość najkrótszego odcinka poprowadzonego z punktu **A** do tej prostej.

W jaki sposób wyznaczyć ten odcinek?

Wojtek połączył punkt ***A*** z prostą ***p*** wieloma odcinkami. Jakie położenie względem prostej ma najkrótszy odcinek?

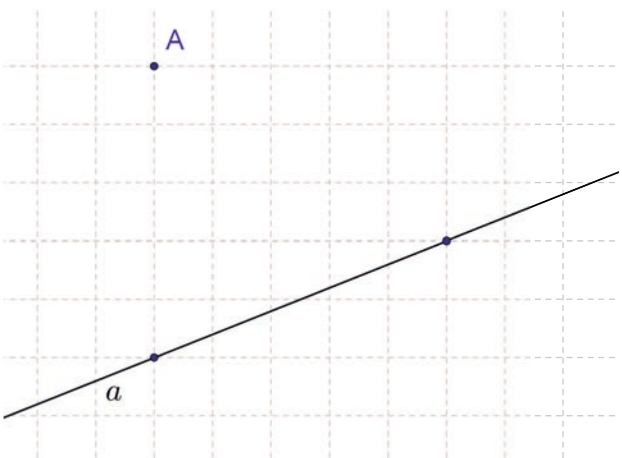


KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

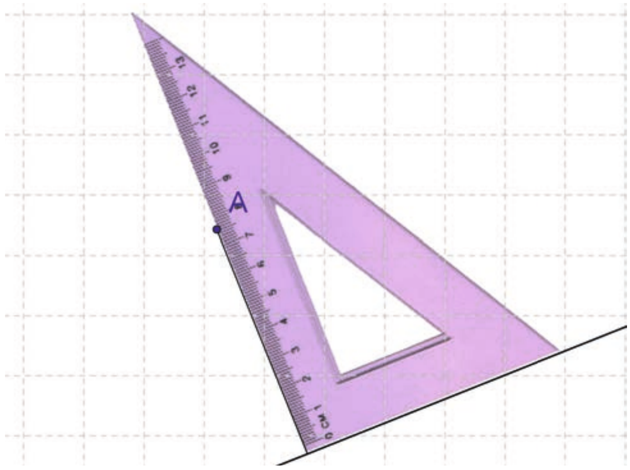
Z rysunku łatwo odczytać, że najkrótszy odcinek poprowadzony z punktu ***A*** do prostej ***p*** jest prostopadły do tej prostej.

Ta obserwacja pozwoliła Wojtkowi przedstawić sposób wyznaczania odległości punktu od prostej. Czy zgadzasz się z tym sposobem?

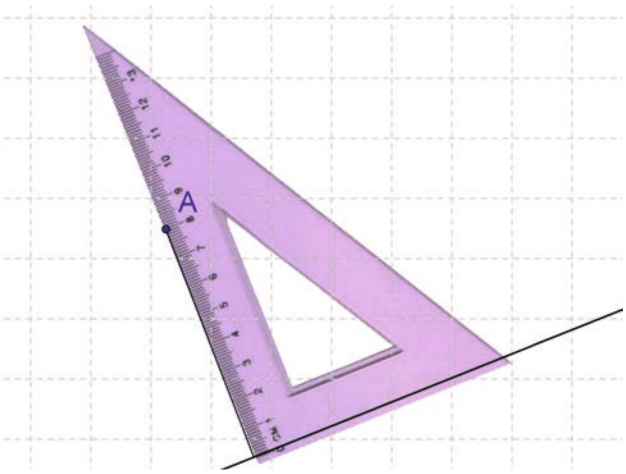
I. Wyznaczanie odległości punktu od prostej:



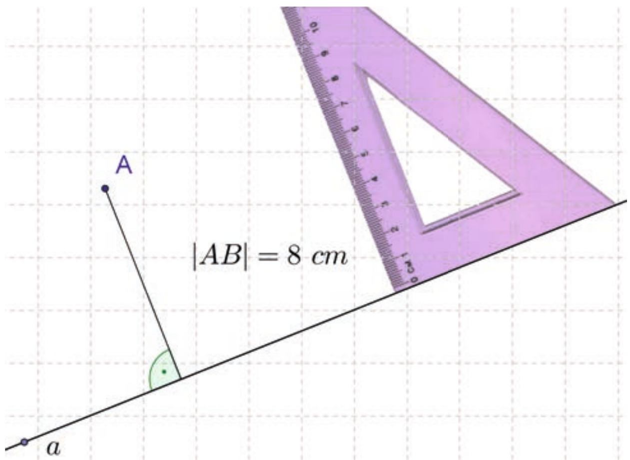
II. Rysowanie z punktu A odcinka prostopadłego do prostej:



III. Pomiar długości odcinka:



IV. Zapisanie wyniku i podanie odpowiedzi:

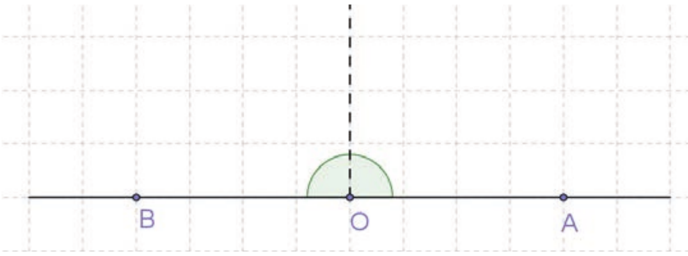


Ćwiczenie 1

Narysuj w zeszycie dowolny punkt ***A*** oraz prostą ***p***, a następnie wyznacz odległość tego punktu od tej prostej.

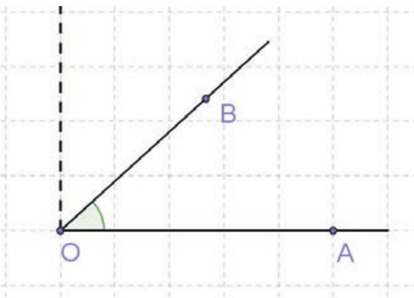
4. KĄTY

Kąt, którego ramiona są swoimi przedłużeniami nazywamy **kątem półpełnym.**

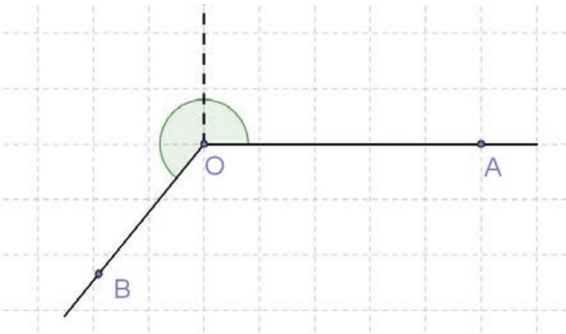


Kąt, którego ramiona pokrywają się ze sobą nazywamy **kątem pełnym.**

Kąt pełny lub kąt półpełny lub kąt mniejszy od kąta półpełnego nazywamy **kątem wypukłym**.



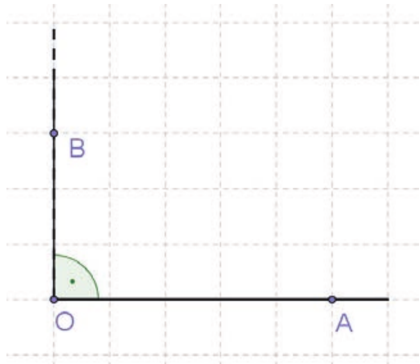
Kąt większy od kąta półpełnego, ale mniejszy od kąta pełnego nazywamy **kątem wklęsłym.**



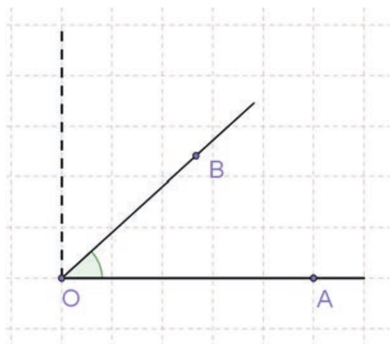
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Kąty wypukłe dodatkowo dzielimy na:
- kąty zerowe (pełne)
- kąty ostre
- kąty proste
- kąty rozwarte

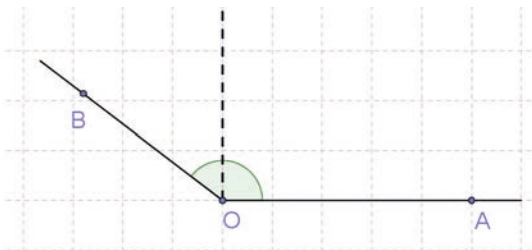
Kąt, którego ramiona położone są na półprostych wzajemnie do siebie prostopadłych nazywamy **kątem prostym**.



Kąt, który jest mniejszy od kąta prostego, ale większy od kąta zerowego nazywamy **kątem ostrym.**



Kąt, który jest większy od kąta prostego, ale mniejszy od kąta półpełnego nazywamy **kątem rozwartym.**



Ćwiczenie 1

Narysuj w zeszycie kąty:

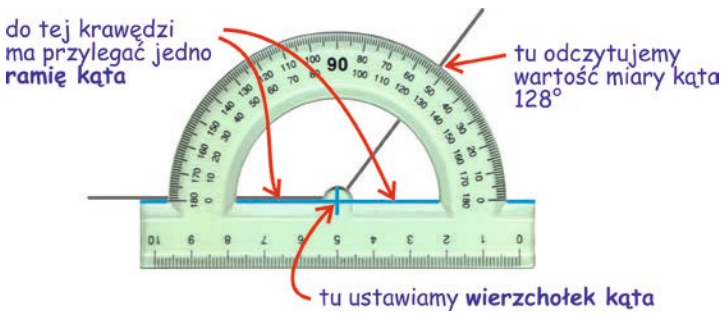
1. kąt ostry
2. kąt rozwarty
3. kąt prosty
4. kąt wklęsły

Wszystkie kąty odpowiednio oznacz i podpisz.

Kąt zerowy oraz kąt pełny są kątami wypukłymi.

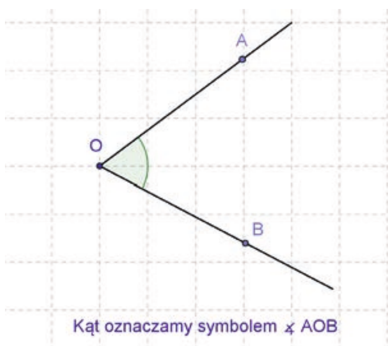
4.1. Mierzenie kątów

Jak zapewne wiesz z klasy IV, przyrządem do mierzenia kątów jest kątomierz.



Miarą kąta jest jeden stopień (°). Jeden stopień odpowiada pojedynczej kreseczce na kątomierzu. Przyglądając się skali kątomierza, widzimy, że kąt pełny ma 180°, a kąt prosty 90° (dlaczego ?) Ponadto kąty możemy mierzyć z lewej strony do prawej oraz z prawej do lewej. (dlaczego?)

Dla oznaczenia kątów używamy także pojedyńczych liter alfabetu greckiego **α, β, γ, δ, ϵ, ζ** ... (czytamy: alfa, beta, gamma, delta, epsilon, zeta)



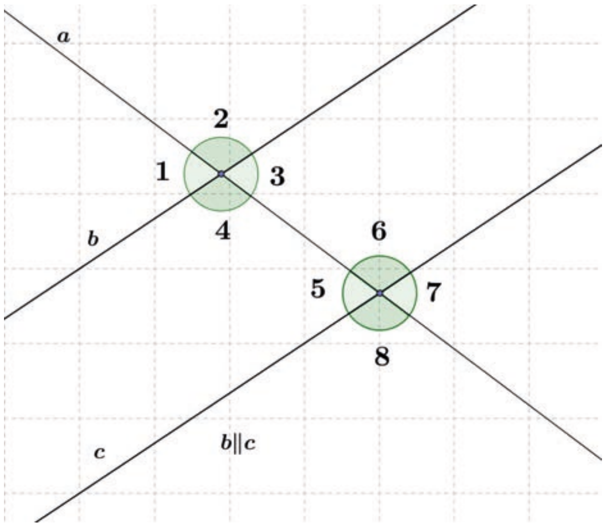
4.2 Rysowanie kąta o danej mierze

Obejrzyj animację na platformie MATI.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

5. KĄTY PRZYLEGŁE, WIERZCHOŁKOWE, ODPOWIADAJĄCE, NAPRZEMIANLEGŁE

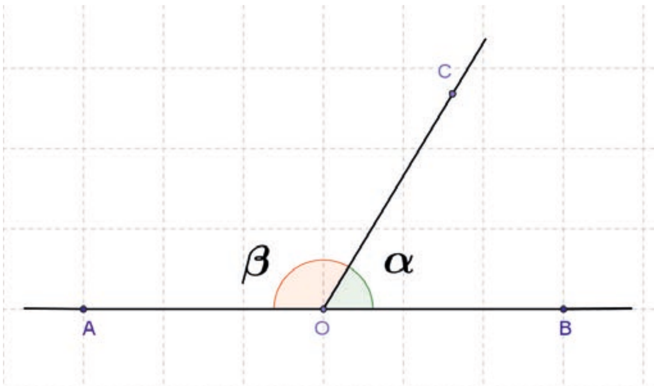
Zanim dokładnie omówimy i nazwiemy poszczególne kąty zaznaczone na rysunku, przyjrzyj się im dokładnie.



Na rysunku mamy dwie proste równoległe ***b*** i ***c***, które przecięliśmy trzecią prostą ***a***. W wyniku przecięcia powstało osiem kątów (widzisz je wszystkie?). Niektóre pary kątów mają swoje nazwy i własności, np. para kątów 1 i 3 to **kąty wierzchołkowe**, natomiast para 5 i 6 to **kąty przyległe** (jak myślisz dlaczego tak się nazywają?). W tym rozdziale poznamy ich nazwy i przyjrzymy się ich własnościom.

Do dzieła!

5.1. Kąty przyległe



$$\alpha + \beta = 180°$$

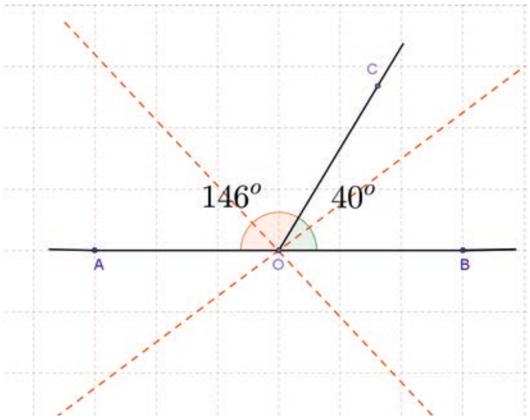
Na rysunku przedstawione są **kąty przyległe**. Kąty przyległe mają wspólne ramię **OC** oraz wierzchołek **O**. Pozostałe ramiona są swoimi przedłużeniami. Z rysunku odczytujemy, że suma kątów przyległych jest kątem **AOB**, czyli kątem półpełnym.

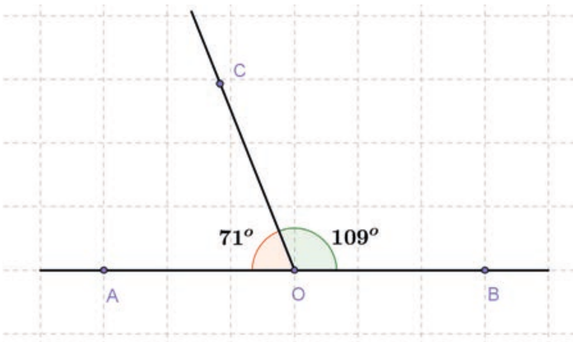
Suma rozwartości kątów przyległych jest równa 180°.

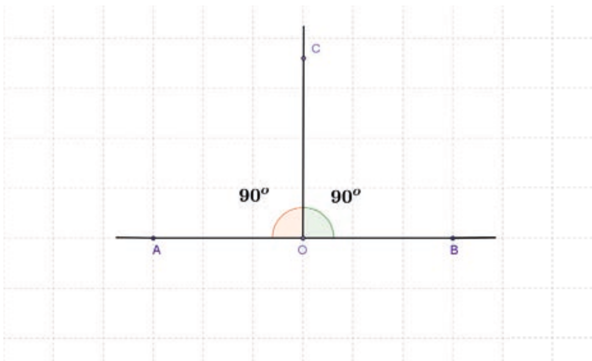
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 1

Wojtek sporządził kilka rysunków kątów przyległych, a następnie zmierzył je kątomierzem. Niestety nie wszystkie wyniki są poprawne. Dlaczego?

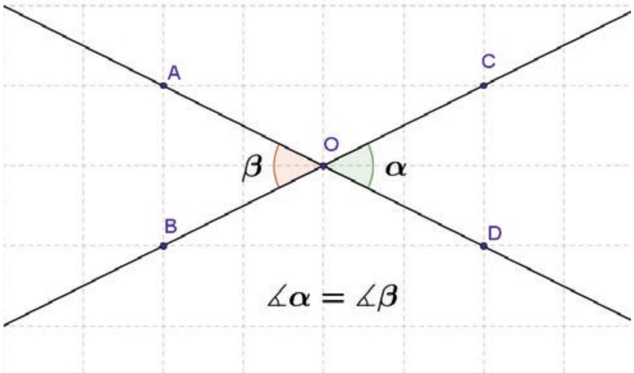






KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

5.2. Kąty wierzchołkowe



Dwie przecinające się proste podzieliły płaszczyznę na cztery kąty. Kąty o wspólnym wierzchołku **O**, których ramiona wzajemnie się przedłużają nazywamy **kątami wierzchołkowymi**. Na rysunku powyżej zaznaczono jedną parę kątów wierzchołkowych. Czy potrafisz odnaleźć drugą parę?

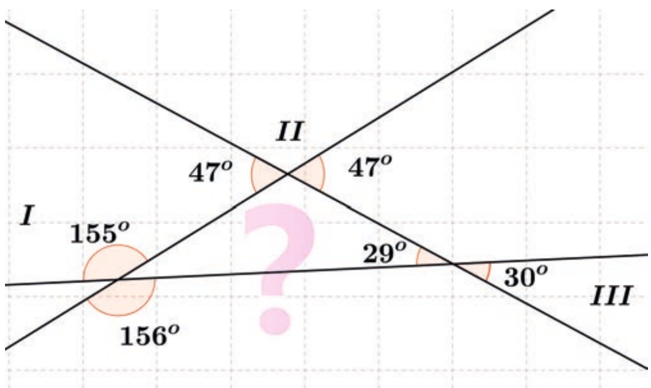
Miary kątów wierzchołkowych są równe.

Ćwiczenie 1

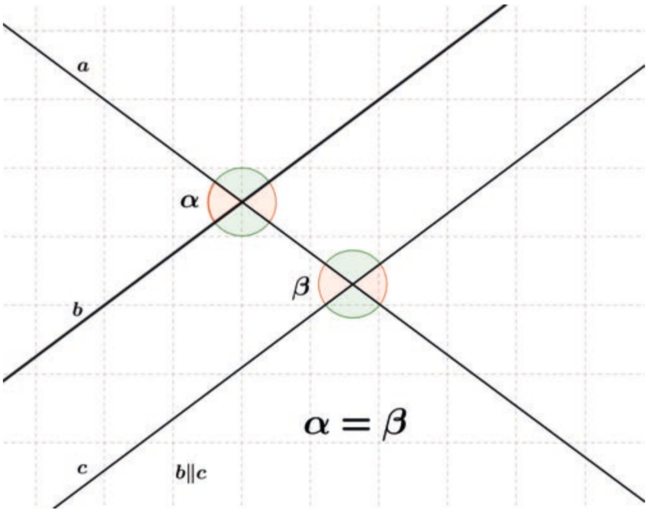
Wskaż na rysunku inną parę kątów wierzchołkowych.

Ćwiczenie 2

Małgosia narysowała trzy proste i zaznaczyła 3 pary kątów wierzchołkowych, po czym zmierzyła je za pomocą kątomierza. Jednak nie wszystkie wyniki są poprawne. Dlaczego?



5.3. Kąty odpowiadające



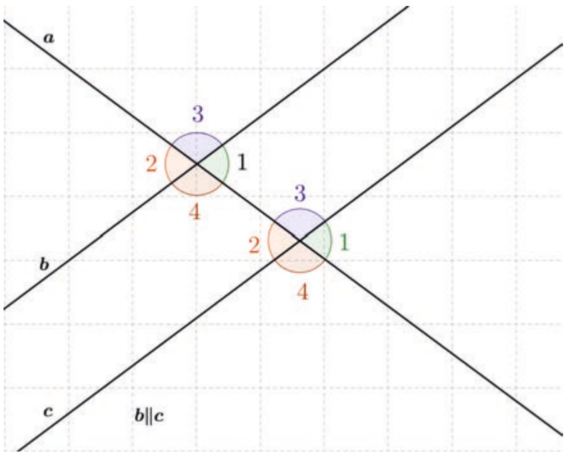
Jeżeli dwie proste równoległe ***b*** oraz ***c*** przetniemy trzecią prostą ***a***, to kąty położone po tej samej stronie prostej ***a***, oznaczone na rysunku nazywamy **kątami odpowiadającymi**.

Miary kątów odpowiadających są równe.

Ćwiczenie 1

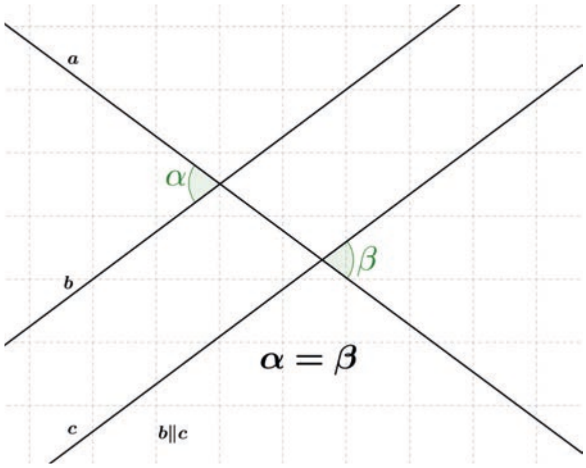
Wskaż inną parę kątów odpowiadających.

Na rysunku poniżej zaznaczone są wszystkie pary kątów odpowiadających:



KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

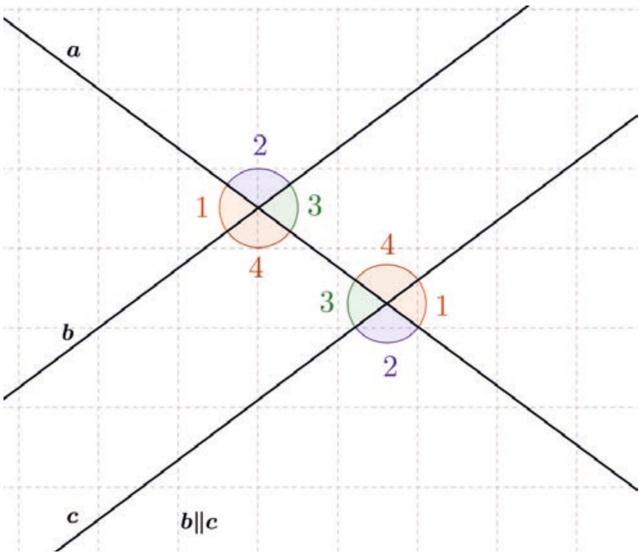
5.4. Kąty naprzemianległe



Jeżeli dwie proste równoległe ***b*** i ***c*** przetniemy trzecią prostą ***a***, to kąty położone po przeciwnych stronach prostej ***a***, oznaczone na rysunku kolorem zielonym nazywamy **kątami naprzemianległymi**.

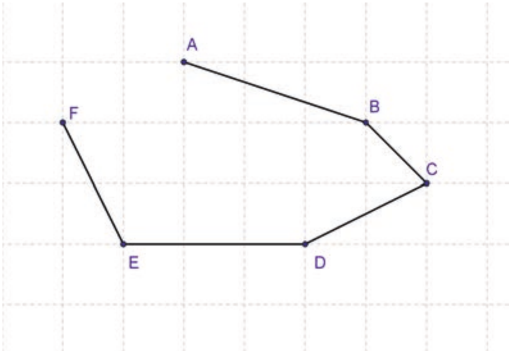
Miary kątów naprzemianległych są równe.

Na rysunku poniżej zaznaczone są wszystkie pary kątów naprzemianległych:

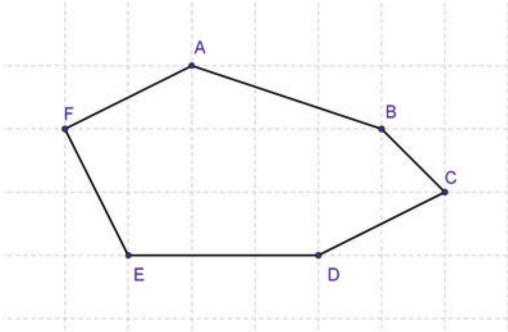


6. WIELOKĄTY

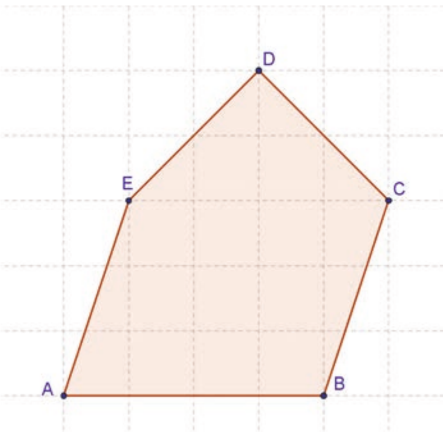
Łamaną zwyczajną nazywamy figurę zbudowaną z odcinków w taki sposób, że koniec odcinka jest początkiem następnego odcinka oraz żadne odcinki nie przecinają się. Jedynymi punktami wspólnymi są tylko początki i końce.

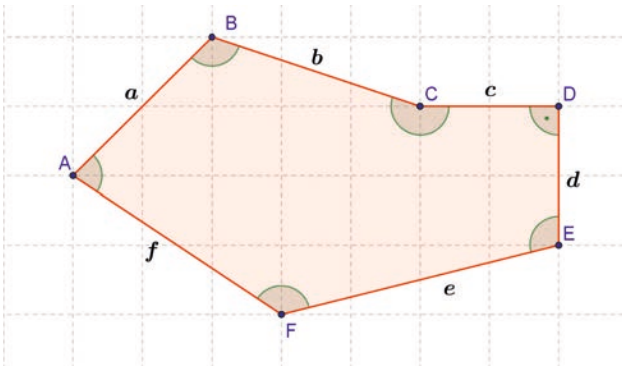


Łamaną zwyczajną zamkniętą nazywamy łamaną zwyczajną, której koniec ostatniego odcinka jest zarazem początkiem pierwszego.



Wielokątem nazywamy część płaszczyzny ograniczoną łamaną zwyczajną zamkniętą wraz z tą łamaną.





Poszczególne odcinki łamanej to **boki** wielokąta.

Końce odcinków łamanej to **wierzchołki** wielokąta, oznaczamy je dużymi literami alfabetu, np. **A**, **B**, **C** ...

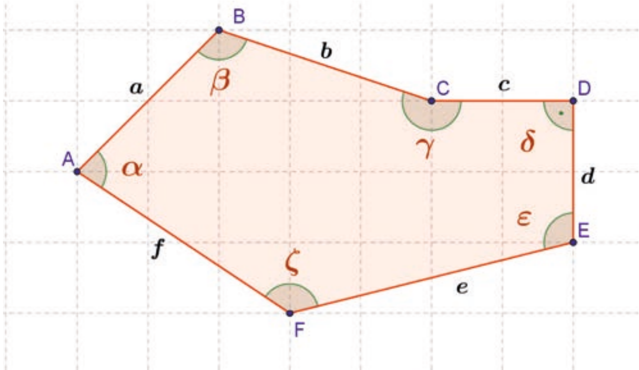
Ile wierzchołków oraz ile boków ma wielokąt przedstawiony powyżej?

Wielokąt przedstawiony na rysunku powyżej ma:

- 6 boków,
- 6 wierzchołków,
- 6 kątów wewnętrznych oznaczonych zielonym łukiem.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

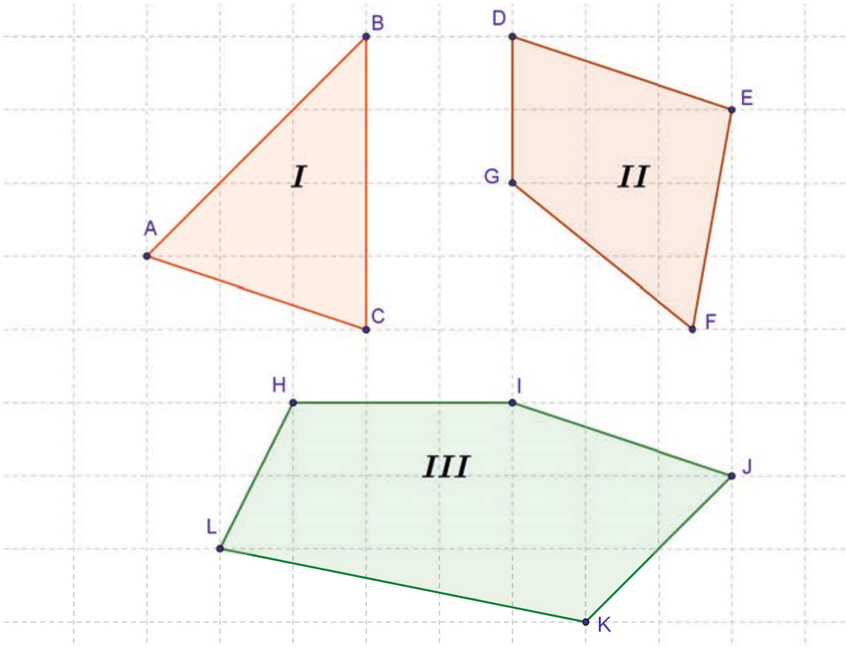
Kąty wyznaczone przez dwa kolejne boki wielokąta to kąty wewnętrzne. Oznaczamy je greckimi literami alfabetu: ***α, β, γ, δ, ϵ, ζ***... (czytamy: alfa, beta, gamma, delta, epsilon, zeta). Długości boków wielokąta oznaczamy małymi literami alfabetu, np. ***a***, ***b***, ***c***, ...



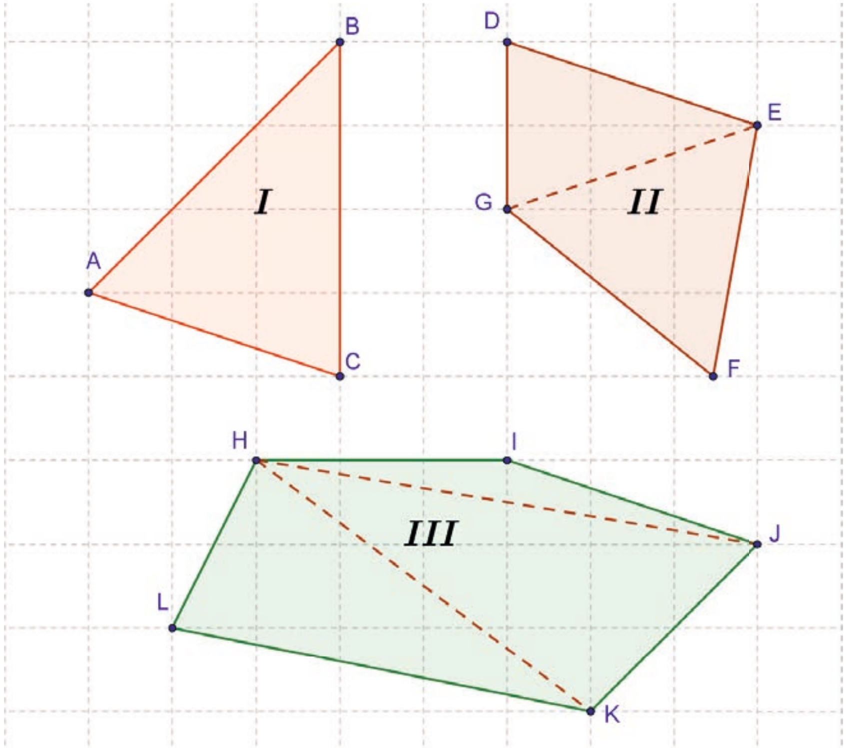
Nazwę wielokąta tworzymy w zależności od ilości jego boków i kątów. Powyższy wielokąt ma 6 boków i kątów, zatem nazwiemy go sześciokątem. Wielokąt o trzech bokach i kątach nazwiemy **trójkątem** itd.

Ćwiczenie 1

Nazwij poniższe wielokąty:



Przekątną wielokąta nazywamy odcinek, który łączy dwa niekolejne wierzchołki wielokąta, np.:



Dlaczego nie jest zaznaczona przekątna w trójkącie?

Na koniec zastanówmy się, która z poniższych figur nie jest wielokątem (i dlaczego?):

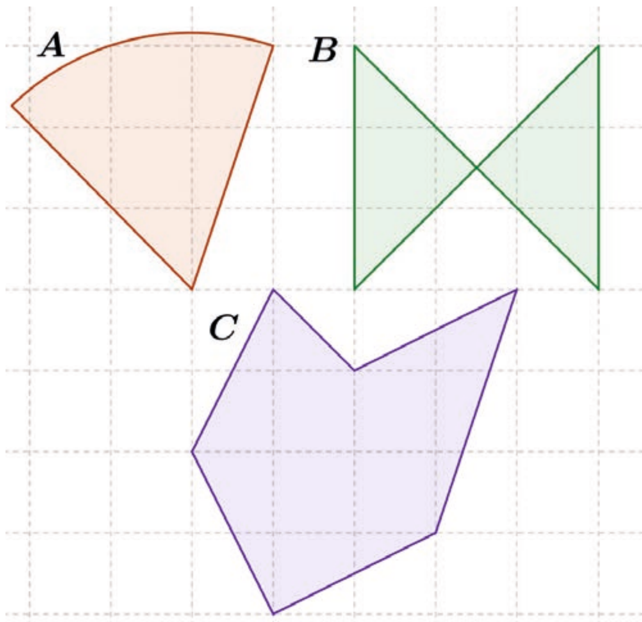


Figura A nie jest wielokątem, ponieważ jeden z jej boków nie jest odcinkiem.
Figura B nie jest wielokątem, ponieważ łamana, z której zbudowana jest ta figura nie jest zwyczajna.
Figura C jest wielokątem, ponieważ tworzy ją łamana zwyczajna zamknięta.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

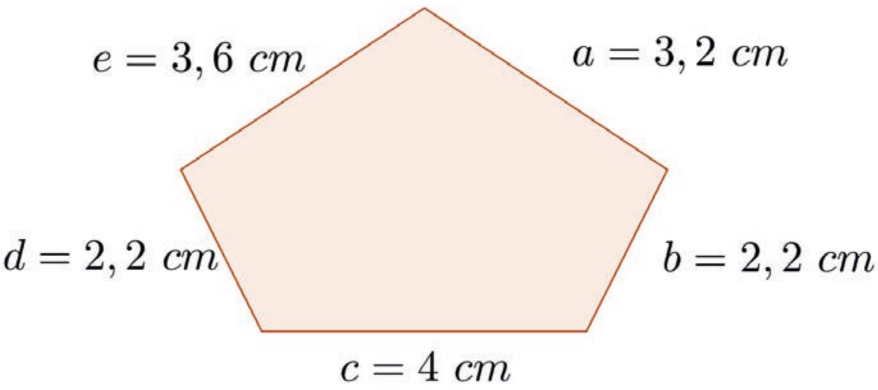
6.1. Obwód wielokąta

Obwodem wielokąta nazywamy długość łamanej zwyczajnej zamkniętej, z której został ten wielokąt zbudowany.

Pamiętaj! Wszystkie odcinki muszą być wyrażone w tych samych jednostkach!

Przykład 1

Oblicz obwód wielokąta przedstawionego na rysunku:

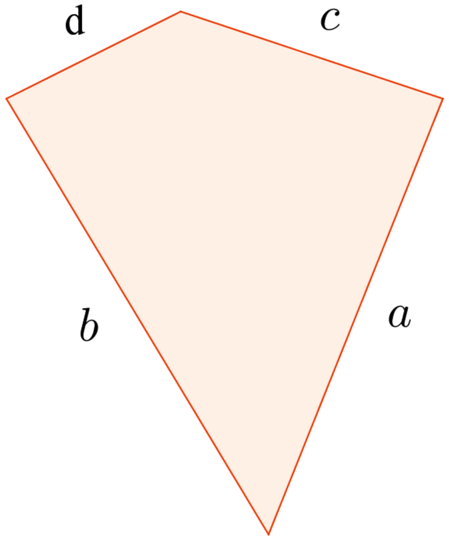


<u>Rozwiązanie:</u>
Obliczamy długość łamanej zwyczajnej zamkniętej:
Obw = a + b + c + d + e
Obw = 3,2 cm + 2,2 cm + 4 cm + 2,2 cm + 3,6 cm
Obw = 15,2 cm

Odpowiedź: *Obwód figury wynosi 15,2 cm.*

Przykład 2

Oblicz obwód czworokąta, którego ***a* = 1,5 dm, *b* = 1,4 dm, *c* = 5,7 cm, *d* = 1,5 cm**:



Obw* = *a* + *b* + *c* + *d
***Obw* = 1,5 dm + 1,4 dm + 5,7 cm + 1,5 cm**
Wyrażamy długości wszystkich boków w tej samej jednostce:
***Obw* = 15 cm + 14 cm + 5,7 cm + 1,5 cm**
***Obw* = 36,2 cm**

Odpowiedź: *Obwód czworokąta wynosi 36,2 cm.*

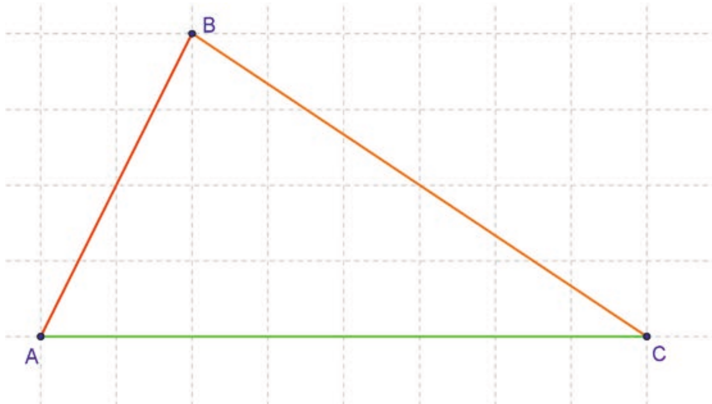
Przed sumowaniem długości boków wielokąta upewnij się, że wszystkie wyrażone są w tej samej jednostce.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI · WPQ · Tomasz Jakubowski TOMP · UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

7. TRÓJKĄTY

Najprostszym przykładem wielokąta jest trójkąt.

Trójkąt - część płaszczyzny ograniczona łamaną zwyczajną zamkniętą składającą się z trzech odcinków, które stanowią **boki trójkąta.**



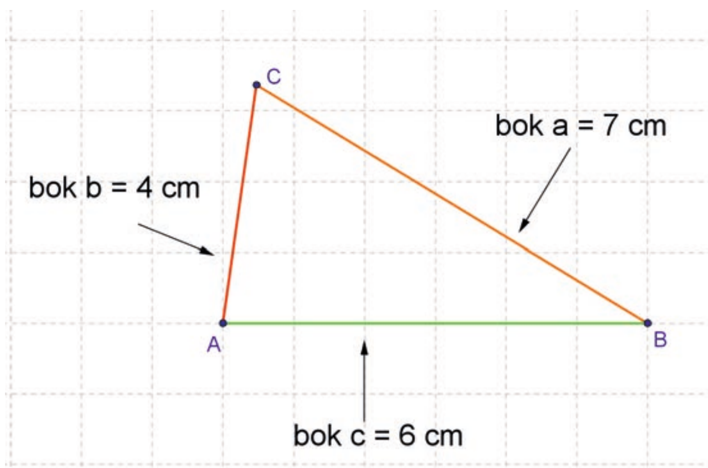
Trójkąty dzielimy na na dwie grupy:

ze względu na długości boków
- różnoboczne
- równoboczne
- równoramienne

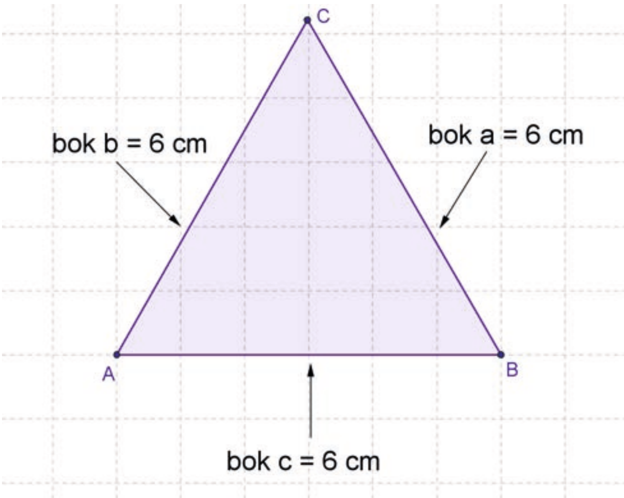
ze względu na miary kątów wewnętrznych
- ostrokątne
- prostokątne
- rozwartokątne

7.1. Klasyfikacja trójkątów ze względu na boki

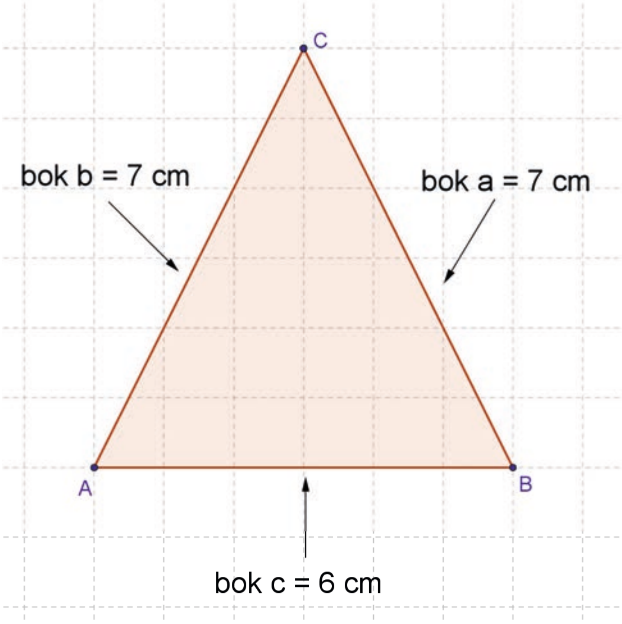
Trójkąt różnoboczny ma trzy różne boki:



Trójkąt równoboczny ma trzy boki równe.



Trójkąt równoramienny ma podstawę i dwa boki równe (ramiona).

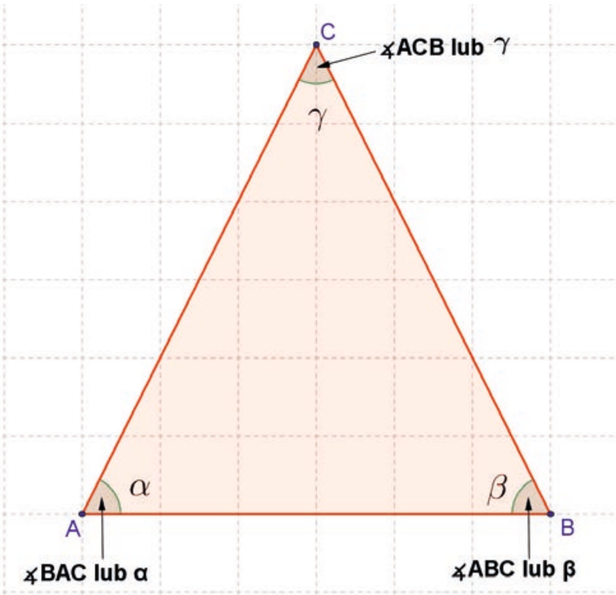


Ćwiczenie 1

Czy trójkąt równoboczny możemy nazwać trójkątem równoramiennym?
Czy trójkąt równoramienny możemy nazwać trójkątem równobocznym?

7.2. Klasyfikacja trójkątów ze względu na kąty

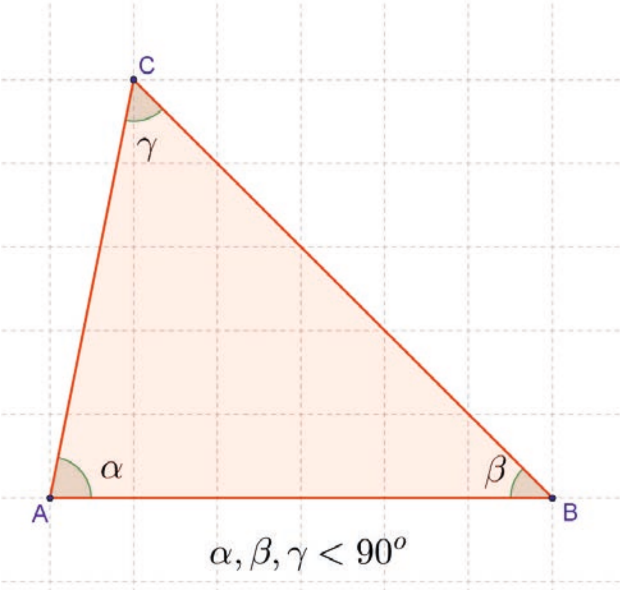
Kąty w trójkącie zwykle oznaczamy za pomocą **wierzchołków** lub **greckimi literami**.



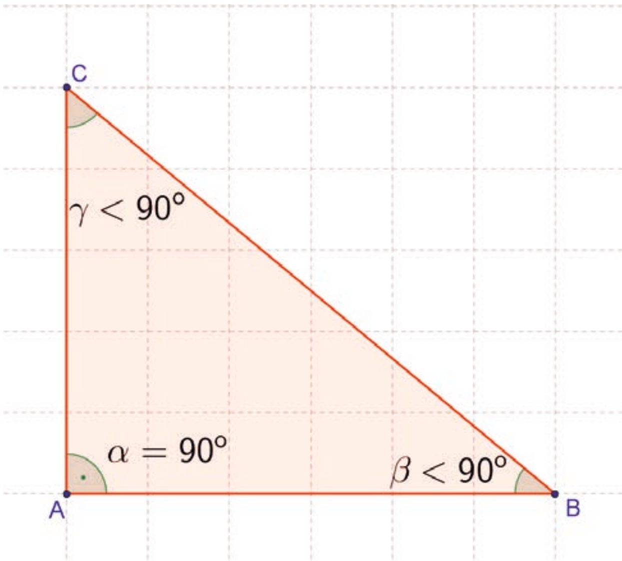
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Nazwy trójkątów zależą od rodzajów kątów:

Trójkąt ostrokątny ma trzy kąty ostre

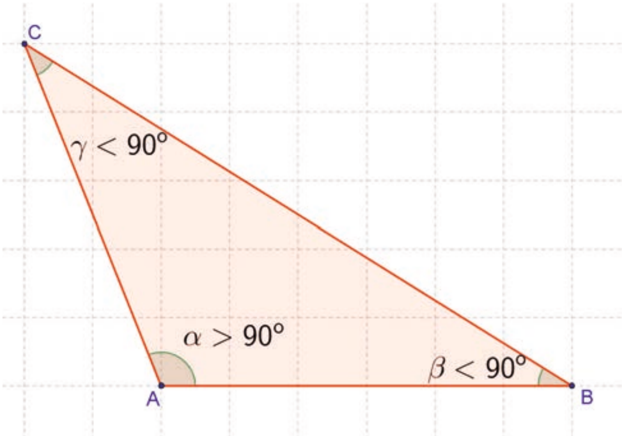


Trójkąt prostokątny ma jeden kąt prosty



Boki trójkąta prostokątnego, które leżą przy kącie prostym nazywamy przyprostokątnymi, natomiast bok położony naprzeciwko kąta prostego - **przeciwprostokątną**.

Trójkąt rozwartokątny ma jeden kąt rozwarty



Ćwiczenie 1

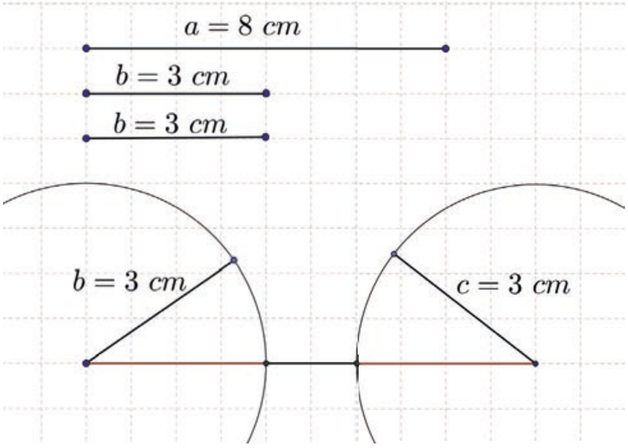
Narysuj w zeszycie trójkąt prostokątny równoramienny.

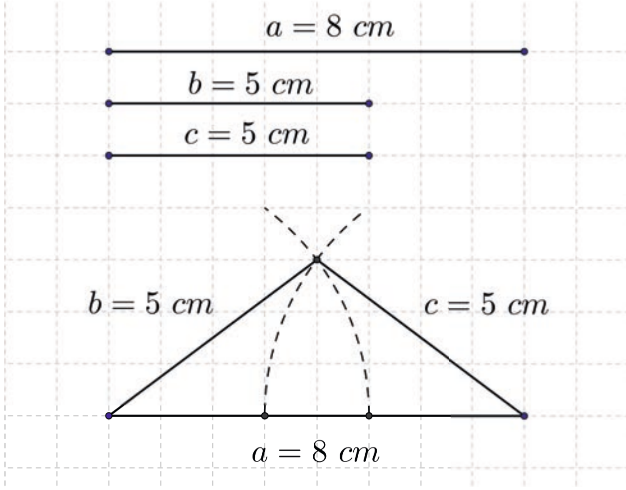
Ćwiczenie 2

Czy istnieje trójkąt rozwartokątny równoramienny?

7.3. Nierówność trójkąta

Zastanówmy się, czy zawsze można z trzech odcinków zbudować trójkąt. Z odcinków pokazanych poniżej nie można zbudować trójkąta (Dlaczego?)





Z rysunku (z lewej) widzimy, że odcinki ***b*** i ***c*** (ramiona trójkąta) nie pokrywają całego odcinka ***c*** (podstawy trójkąta). Są za krótkie. Żeby mógł powstać trójkąt, suma długości odcinków ***b*** i ***c*** musiałaby być większa od długości odcinka ***c*** (patrz rysunek po prawej).

b + c = 5 cm + 5 cm = 10 cm

a = 8 cm

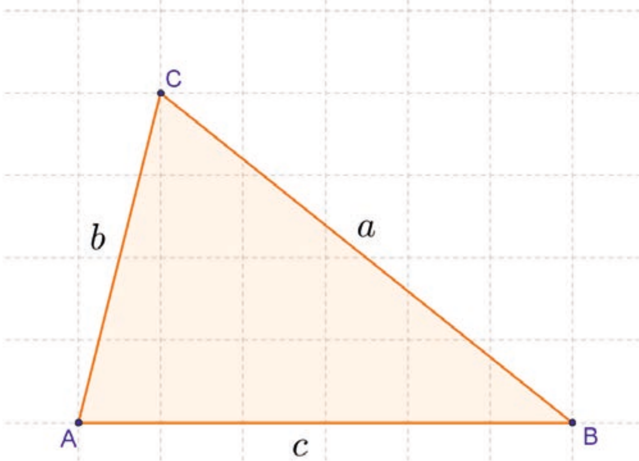
b + c > a, bo 10 cm > 8 cm

Z trzech danych odcinków można zbudować trójkąt, jeżeli suma długości każdych dwóch odcinków jest większa od długości trzeciego.

a + b > c

a + c > b

b + c > a



KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 1

Sprawdź, czy z trzech patyczków o długościach: 3 cm, 4 cm, 5 cm można zbudować trójkąt.

Rozwiązanie:
Sprawdzamy czy suma długości każdych dwóch patyczków jest większa od trzeciego patyczka:

a	b	c	a + b	a + b > c
3 cm	4 cm	5 cm	7 cm	**tak**
a	c	b	a + c	a + c > b
3 cm	5 cm	4 cm	8 cm	**tak**
b	c	a	b + c	b + c > a
4 cm	5 cm	3 cm	9 cm	**tak**

Suma długości każdych dwóch boków trójkąta jest większa od trzeciego boku.

Odpowiedź: *Z podanych patyczków można zbudować trójkąt.*

Ćwiczenie 1

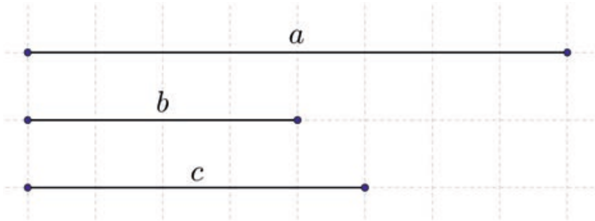
Czy można zbudować trójkąt z odcinków o długościach 5 cm, 1 cm, 3 cm?

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

7.4. Konstrukcja trójkąta o danych trzech bokach

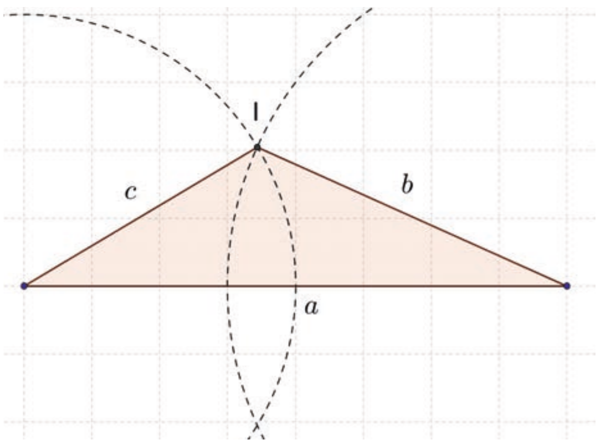
Przykład

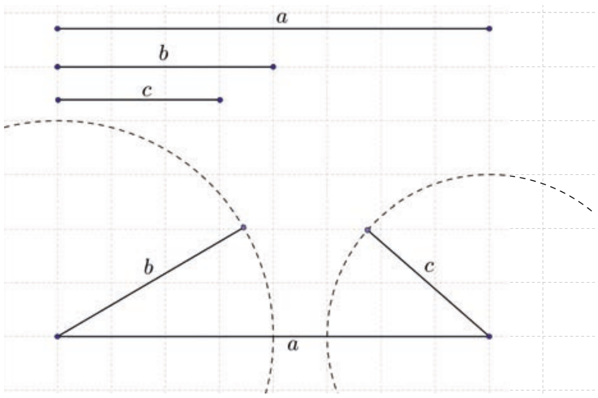
Skonstruuj trójkąt o danych trzech bokach ***a, b, c.***



Rozwiązanie:
Do konstrukcji trójkąta o bokach ***a***, ***b*** i ***c*** używamy cyrkla i linijki.

<u>Konstrukcja:</u>
Najpierw kreślimy odcinek ***a***. Z końców tego odcinka zakreślamy okręgi (łuki) o długości równej odcinkom ***b*** i ***c***. Okręgi przetną się w punkcie, który łączymy z końcami odcinka ***a***.





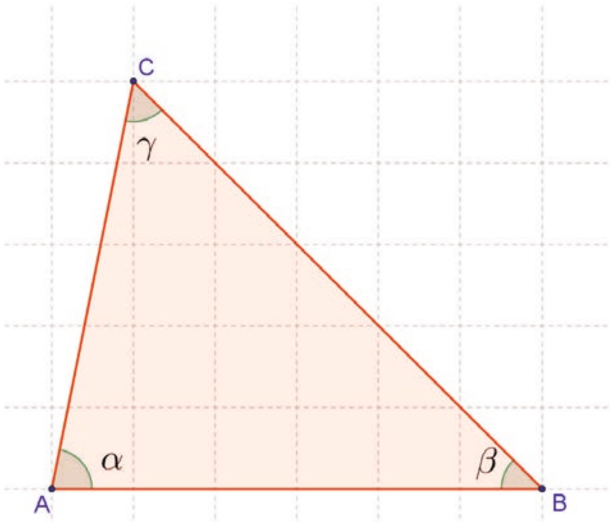
Czy z każdych odcinków można zbudować trójkąt?
W poprzednim podrozdziale dowiedzieliśmy się, że nie. Jeżeli suma długości odcinków ***b*** i ***c*** będzie mniejsza od długości odcinka ***a***, to konstrukcja trójkąta nie będzie możliwa.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

7.5. Miary kątów w trójkącie

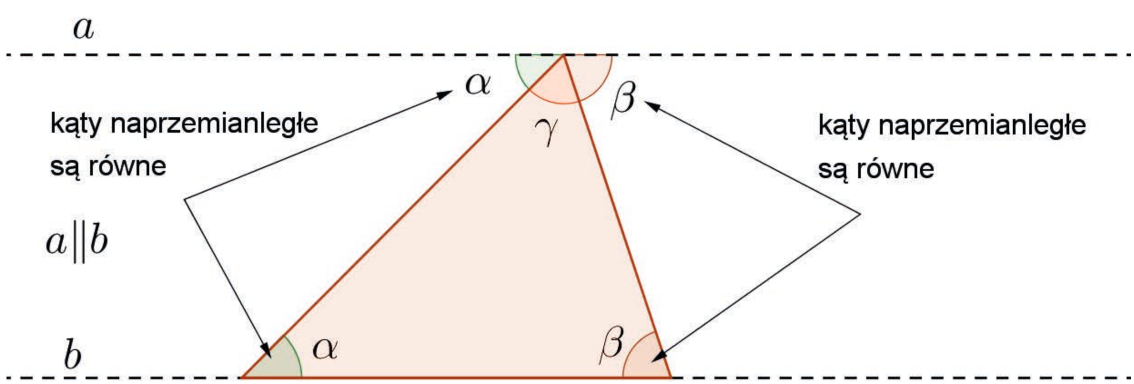
Obejrzyj animację na platformie MATI.

Z rysunku łatwo odczytujemy, że $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, czyli suma kątów wewnętrznych w trójkącie wynosi 180° (Dlaczego?)



$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

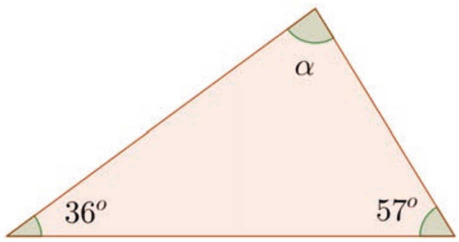
Przyjrzyjcie się uważnie kolejnemu rysunkowi:



Z rysunku łatwo odczytujemy, że $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, czyli suma kątów wewnętrznych w trójkącie wynosi 180° (Dlaczego?)

Przykład 1

Oblicz miarę kata α w trójkącie, w którym α = 36° oraz β = 57°:



Rozwiązanie:
Suma kątów wewnętrznych w trójkącie wynosi 180°. Zatem

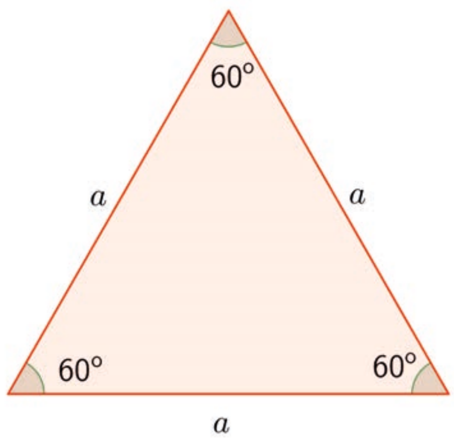
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$
$\alpha = 180° - (\beta + \gamma)$
$\alpha = 180° - (36° + 57°)$
$\alpha = 180° - 93°$
$\alpha = 87°$

Odpowiedź: *Kąt α ma 87°.*

7.6. Własności kątów w trójkątach

Własności kątów w trójkącie równobocznym

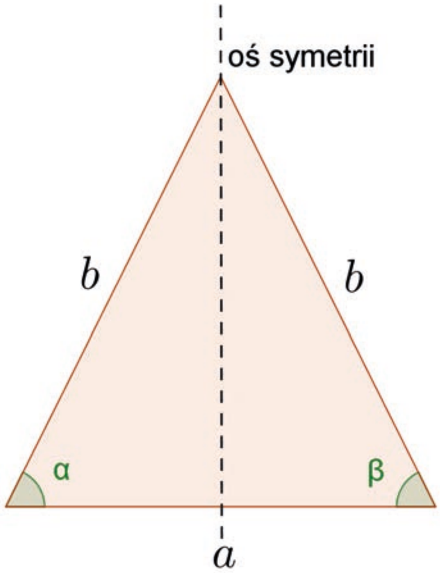
W trójkącie równobocznym wszystkie kąty mają taką samą miarę. Wiemy, że suma miar kątów wewnętrznych wynosi 180°. Zatem w trójkącie równobocznym wszystkie kąty mają miarę po: 180° : 3 = 60°.



KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ TOMP UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Własności kątów w trójkącie równoramiennym

W trójkącie równoramiennym oś symetrii dzieli trójkąt na dwie identyczne części, więc kąty ***α*** i ***β*** są takiej samej miary.



$$\alpha = \beta$$

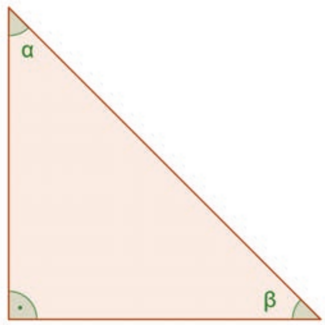
Własności kątów w trójkącie prostokątnym

W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ma miarę równą 90°, a suma wszystkich kątów wewnętrznych wynosi 180°. Wynika stąd, że:

$\alpha + \beta + 90° = 180°$

$\alpha + \beta = 180° - 90°$

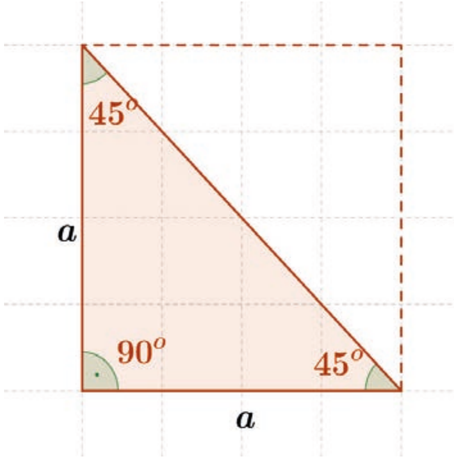
$\alpha + \beta = 90°$



$$\alpha + \beta = 90^o$$

Własności kątów w trójkącie prostokątnym równoramiennym

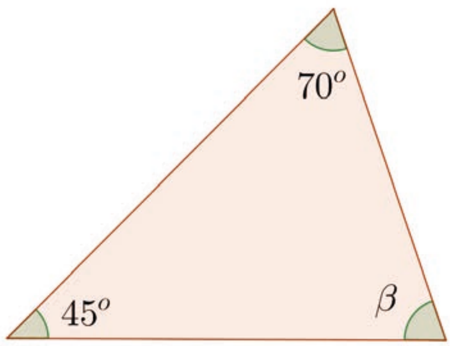
W trójkącie prostokątnym równoramiennym przyprostokątne oraz kąty ostre są sobie równe i wynoszą po: $\frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$.



7.7. Obliczanie miar kątów w trójkącie

Przykład 1

W trójkącie oblicz miarkę kąta ***β***.



Rozwiązanie:

β = 180° − (45° + 70°)

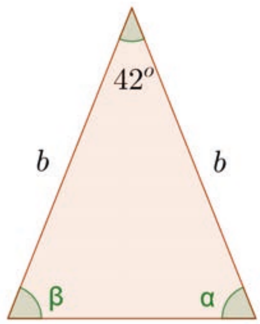
β = 180° − 105°

β = 75°

Odpowiedź:
Miara kąta β wynosi 75°.

Przykład 2

Oblicz w trójkącie miarę kątów ***α*** oraz ***β.***



Rozwiązanie:
Jest to trójkąt równoramienny,
zatem ***α = β***.

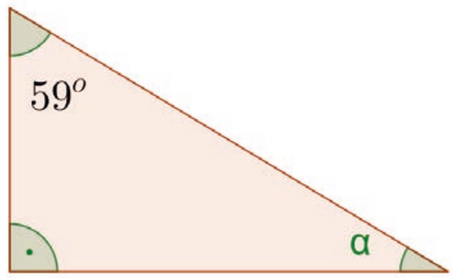
α = β = (180° − 42°) : 2 = 138° : 2 = 69°

Odpowiedź: *Kąty przy podstawie mają miary **α = β = 69°**.*

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
WPQ
TOMP
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 3

Oblicz w trójkącie miarę kąta ***α***.



Rozwiązanie:
Z rysunku odczytujemy, że jest to trójkąt prostokątny, zatem:

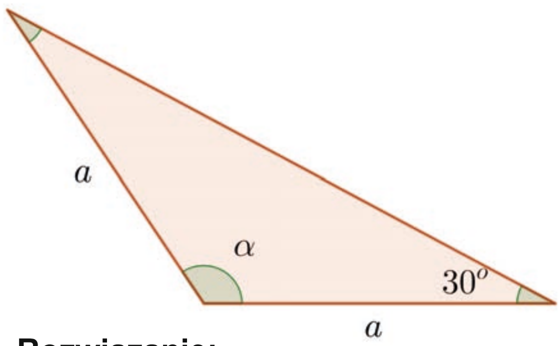
α = 180° − (90° + 59°) =

= 180° − 149° = 31°

Odpowiedź: *Kąt **α** wynosi 31°.*

Przykład 4

Oblicz w trójkącie miarę kąta ***α***.



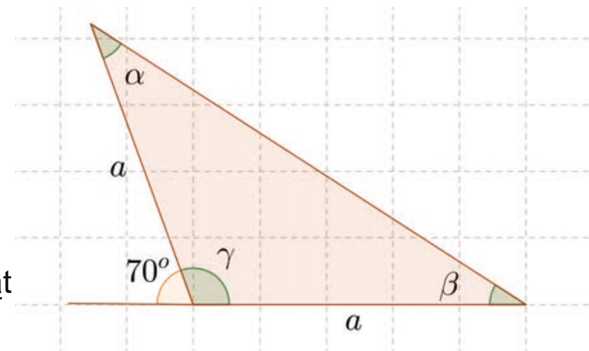
Rozwiązanie:
Z rysunku widać, że jest to trójkąt równoramienny, zatem:

α = 180° − 2 • 30° = 180° − 60° = 120°

Odpowiedź: *Kąt **α** wynosi 120°.*

Przykład 5

Oblicz miary kątów wewnętrznych w trójkącie:



Rozwiązanie:
Obliczamy miarę kąta przyległego γ:

γ = 180° − 70° = 110°

Z rysunku odczytujemy, że jest to trójkąt równoramienny, zatem α = β

α = β = (180° − 110°) : 2 = 70° : 2 = 35°

Odpowiedź: Miary kątów wewnętrznych trójkąta wynoszą: α = β = 35°,γ = 70°.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

8. PROSTOKĄTY I KWADRATY

Wiemy, że wielokąt o czterech bokach i kątach nazywamy czworokątem. Wśród wszystkich czworokątów wyróżniamy czworokąty o wszystkich kątach prostych. Takie czworokąty nazywamy prostokątami.

Prostokąt to czworokąt, który ma cztery kąty proste

Własności prostokątów:

W każdym prostokącie:

- wszystkie kąty są proste
- przeciwległe boki są równej długości
- przeciwległe boki są do siebie równoległe

Dla prostokąta przedstawionego poniżej jego własności możemy zapisać symbolicznie:

$$|AB| = |CD|$$

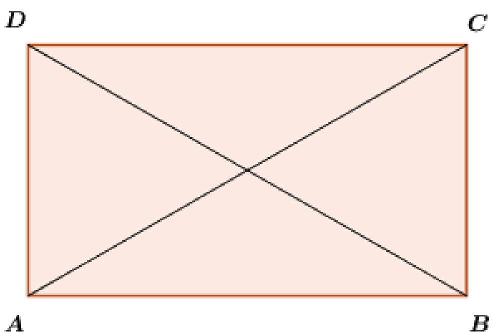
$$|AD| = |BC|$$

$$AB \parallel CD$$

$$AD \parallel BC$$

$$\measuredangle DAB = \measuredangle ABC = \measuredangle BCD = \measuredangle CDA = 90°$$

Przekątne prostokąta

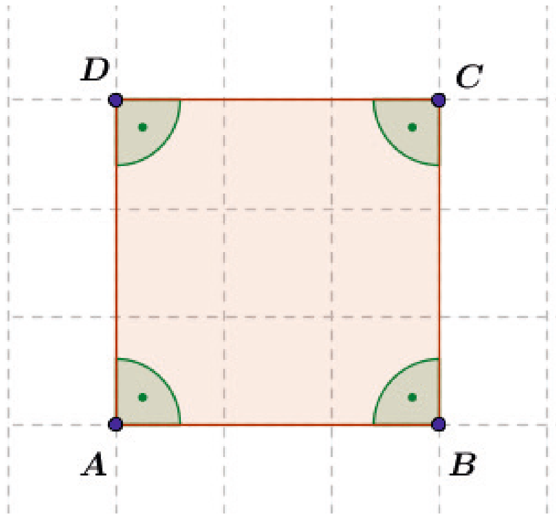


Przekątna łączy dwa wierzchołki wielokąta, ale nie jest jego bokiem.

Przekątne prostokąta są równej długości i dzielą się na połowy.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Kwadrat jest to prostokąt o bokach równej długości.



Własności kwadratu:

W każdym kwadracie

- wszystkie (cztery) kąty są proste,
- przeciwległe boki są równoległe,
- wszystkie (cztery) są boki równe.

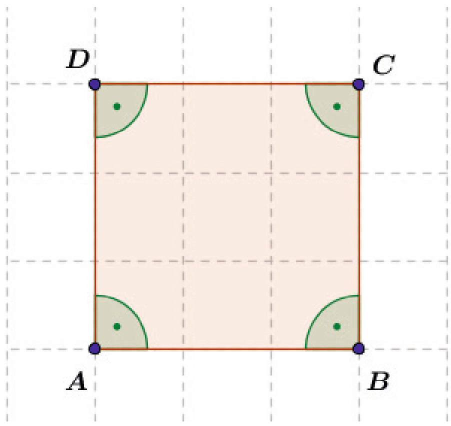
Własności kwadratu możemy zapisać symbolicznie:

$$|AB| = |BC| = |CD| = |AD|$$

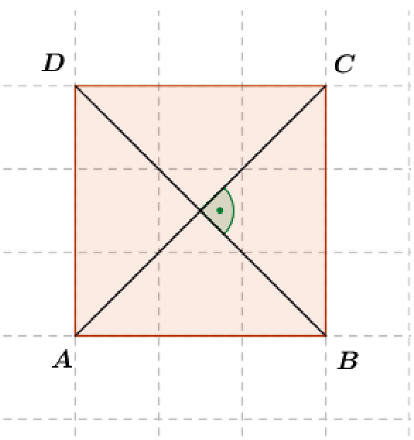
$$AB \parallel CD$$

$$AD \parallel BC$$

$$\measuredangle DAB = \measuredangle ABC = \measuredangle BCD = \measuredangle CDA = 90^\circ$$



Przekątne kwadratu



Przekątne kwadratu są równej długości, przecinają się pod kątem prostym i dzielą się na połowy.

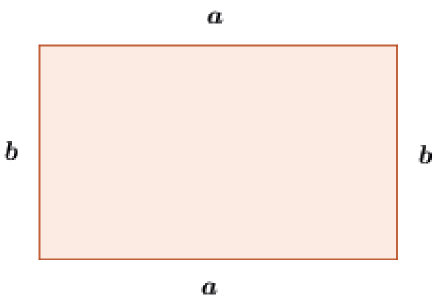
Ćwiczenie 1

Podaj przykłady rzeczy z Twojego otoczenia w kształcie prostokąta lub kwadratu. Im więcej podasz tym lepiej.

Przykład: (blat stolika)

8.1. Obwód prostokąta (kwadratu)

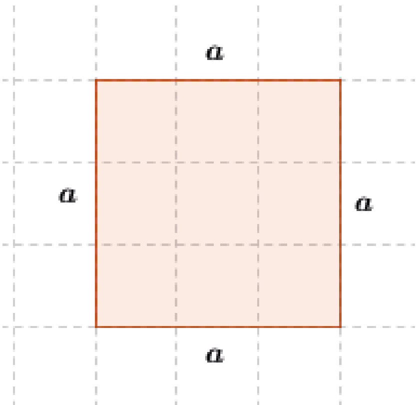
Przypominamy sobie, że obwodem wielokąta nazwaliśmy długość łamanej zwyczajnej zamkniętej, z której ten wielokąt został zbudowany. Prostokąt, a tym bardziej kwadrat, to nic innego jak czworokąt, którego przeciwległe boki są równej długości. Zatem:



$$Obw = a + b + a + b$$

$$Obw = 2 \cdot a + 2 \cdot b$$

Kwadrat jest prostokątem, którego wszystkie boki są równej długości. Jego obwód obliczamy jeszcze prościej:



$$Obw = a + a + a + a$$

$$Obw = 4 \cdot a$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 1

Oblicz obwód prostokąta o bokach długości 12 cm i 21 cm.

Rozwiązanie:

Dane:

a = 12 cm

b = 21 cm

Obliczamy obwód prostokąta ze wzoru:

Obw = 2 • a + 2 • b

Obw = 2 • 12 cm + 2 • 21 cm

Obw = 24 cm + 42 cm

Obw = 66 cm

Odpowiedź: *Obwód prostokąta wynosi 66 cm.*

Ćwiczenie 1

Oblicz obwód prostokąta o bokach 5 cm oraz 11 cm.

8.2. Rysowanie prostokąta i kwadratu o danych bokach

Obejrzyj animację na platformie MATI.

Ćwiczenie 1

Narysuj w zeszycie za pomocą ekierki kwadrat ABCD o boku równym 5 cm.

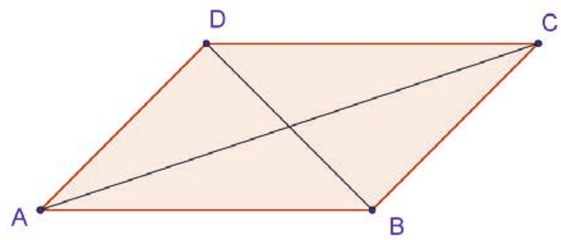
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

9. RÓWNOLEGŁOBOKI I ROMBY

Równoległoboki to czworokąty o parach wzajemnie równoległych boków.

$$AB \parallel CD \text{ oraz } AD \parallel BC$$

Obejrzyj animację na platformie MATI.

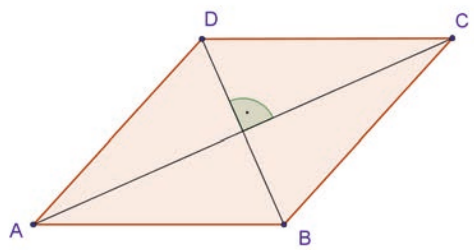


Własności równoległoboku:

- przeciwległe boki równoległoboku są do siebie równoległe i mają równe długości,
- przekątne równoległoboku dzielą się na połowy.

Romb to równoległobok, którego wszystkie boki są równe.

Obejrzyj animację na platformie MATI.



Własności rombu:

- przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym i dzielą na połowy,
- boki rombu mają równe długości.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

9.1. Rysowanie równoległoboku (rombu)

Obejrzyj animację na platformie MATI.

Ćwiczenie 1

Narysuj za pomocą cyrkla oraz linijki dowolny romb o boku równym 4 cm.

Rysowanie rombu o danych przekątnych

Sposób rysowania rombu o danych przekątnych wynika z własności przekątnych rombu. Zapoznaj się z tym sposobem i zastanów się, z jakich własności wynika sposób rysowania rombu.

Obejrzyj animację na platformie MATI.

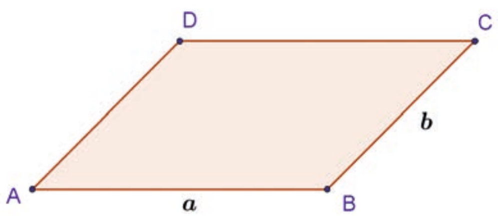
Ćwiczenie 2

Narysuj w zeszycie romb o przekątnych równych 8 cm oraz 6 cm.

9.2. Obwód równoległoboku (rombu)

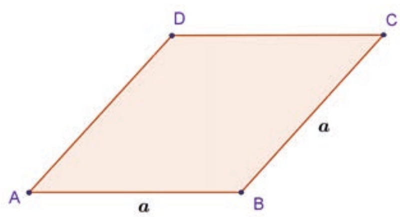
Obwód równoległoboku (rombu) obliczamy tak samo jak obwód dowolnego innego czworokąta. Jest to suma długości wszystkich jego boków.

Obwód równoległoboku to suma długości wszystkich jego boków.



Obw = 2 • a + 2 • b

Obwód rombu:



Obw = 4 • a

Przykład 1

Obliczyć obwód równoległoboku o bokach równych 12 dm oraz 8 dm.

Rozwiązanie:
Obwód równoległoboku obliczamy ze wzoru:

Obw = 2 • a + 2 • b

Obw = 2 • 12 dm + 2 • 8 dm

Obw = 24 dm + 16 dm

Obw = 40 dm

Odpowiedź: *Obwód tego rombu wynosi 40 dm.*

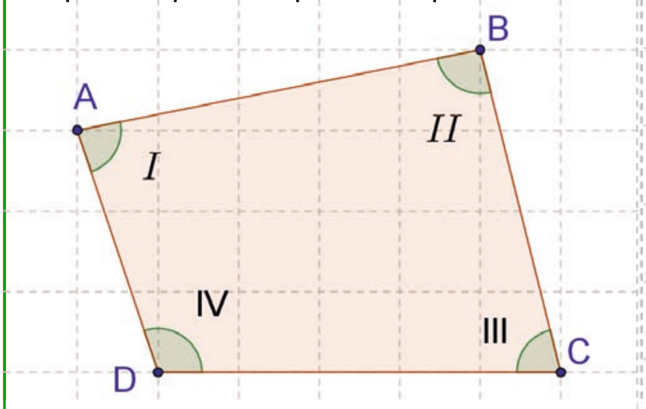
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

10. SUMA MIAR KĄTÓW WEWNĘTRZNYCH CZWOROKĄTA

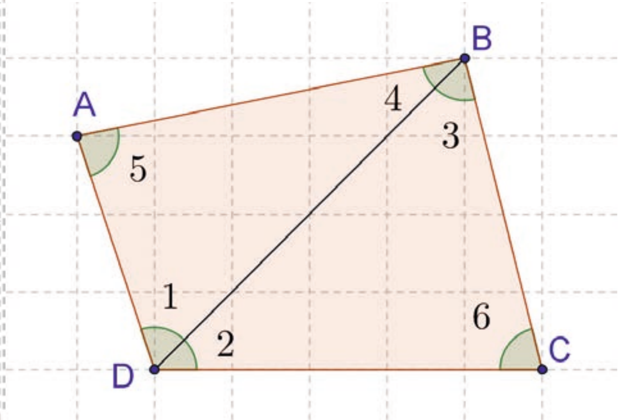
Ćwiczenie 1

Małgosia narysowała dowolny czworokąt i zastanawia się, ile wynosi suma rozwartości kątów czworokąta.

$$\measuredangle I + \measuredangle II + \measuredangle III + \measuredangle IV = ?$$



Wojtek stwierdził, że to jest proste zadanie, bo wystarczy podzielić czworokąt na dwa trójkąty. Spróbuj dokończyć rozumowanie Wojtka ...



$\angle 1 + \angle 4 + \angle 5 = \ldots$

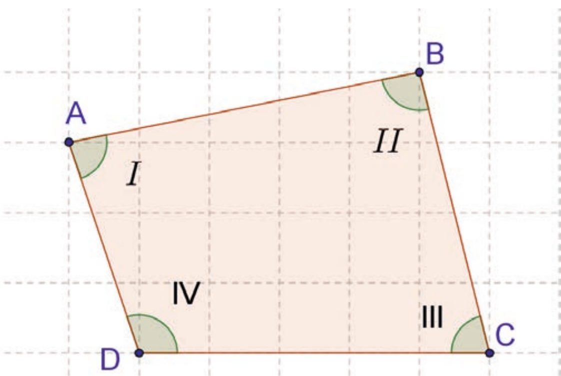
$\angle 2 + \angle 3 + \angle 6 = \ldots$

$(\angle 1 + \angle 4 + \angle 5) + (\angle 2 + \angle 3 + \angle 6) = \ldots$

$\angle I + \angle II + \angle III + \angle IV = \ldots$

Suma rozwartości kątów dowolnego czworokąta wynosi 360°.

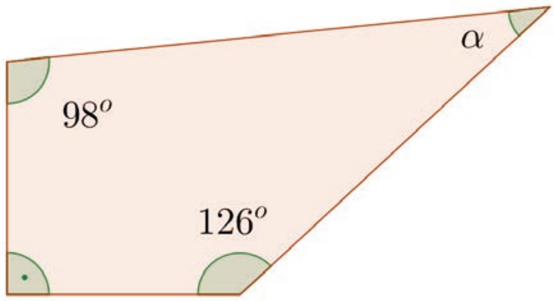
$$\measuredangle I + \measuredangle II + \measuredangle III + \measuredangle IV = 360°$$



KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 1

Oblicz miarę kąta *α* w czworokącie:

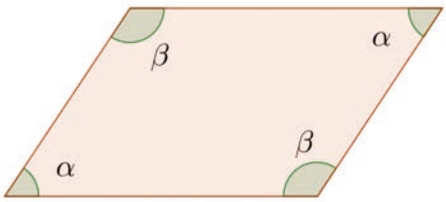


Rozwiązanie:
Wiemy, że suma kątów wewnętrznych czworokąta wynosi 360°. Zatem:
$\alpha = 360° - 90° - 126° - 98°$
$\alpha = 46°$

Odpowiedź: *Miara kąta α wynosi 46°.*

10.1. Miary kątów równoległoboku

W równoległoboku kąty leżące naprzeciwko siebie mają równe miary, a suma kątów leżących przy tym samym boku wynosi 180°.



$\alpha + \beta = 180^o$

Te własności kątów równoległoboku możemy wyrazić w postaci dwóch punktów:

1. miary kątów leżące naprzeciwko siebie są takie same,
2. suma kątów leżących przy tym samym boku jest równa 180°.

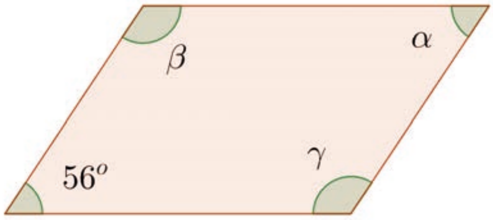
Ćwiczenie 1

Wskaż w powyższym równoległoboku:

- dwie pary kątów położonych naprzeciwko siebie,
- cztery pary kątów leżących przy tym samym boku.

Przykład 1

Oblicz miary pozostałych kątów równoległoboku:

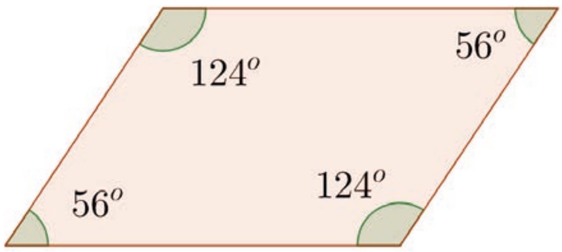


Rozwiązanie:

Korzystamy z pierwszej zasady mówiącej o tym, że:
1. Miary kątów równoległoboku leżące naprzeciwko siebie są równe.

α = 56°

Korzystamy z drugiej zasady mówiącej o tym, że:
2. Suma miar kątów leżących przy tym samym boku wynosi 180°.



β = 180° − 56°

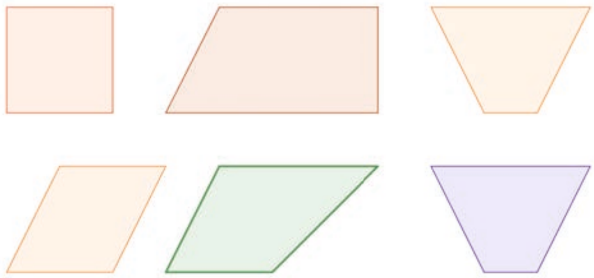
β = 124°

Korzystamy z pierwszej zasady:

γ = 124°

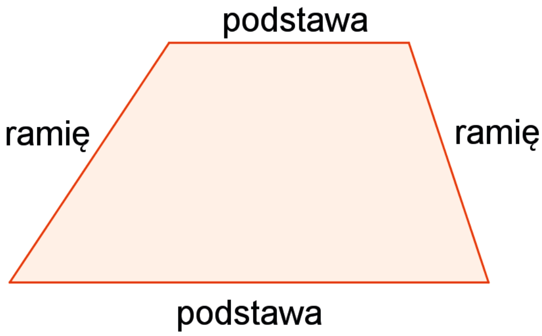
11. TRAPEZY

Czworokąt, który ma przynajmniej jedną parę boków równoległych nazywamy **trapezem.**



Równoległobok, prostokąt, romb, a nawet kwadrat to też trapez.

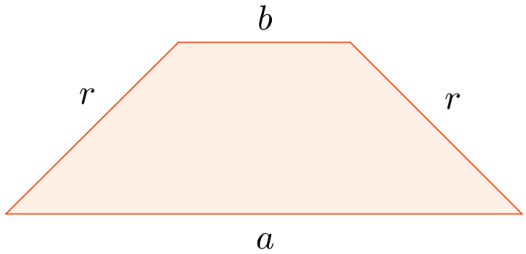
Parę równoległych boków trapezu nazywamy podstawami, a pozostałe dwa boki, które nie są równoległe nazywamy jego ramionami.



Wśród trapezów możemy wyróżnić:

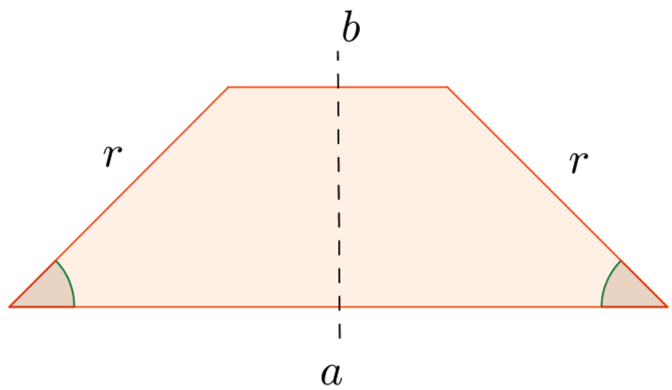
- trapezy równoramienne,
- trapezy prostokątne.

Trapez, którego ramiona mają równe długości nazywamy trapezem **równoramiennym.**



KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

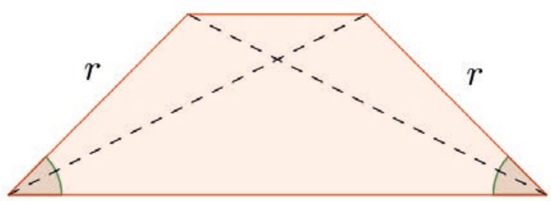
Oś symetrii trapezu równoramiennego przechodzi przez środki podstaw.
Zatem ma on równe nie tylko ramiona, ale również dwie pary kątów.



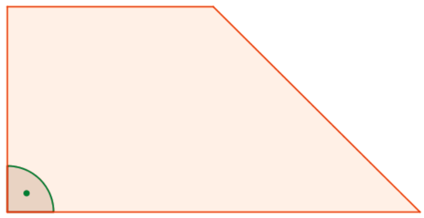
Ćwiczenie 1

Czy potrafisz wskazać drugą parę równych kątów w trapezie powyżej?

Długości przekątnych trapezu równoramiennego są równe.



Trapez, którego jedno z ramion jest prostopadłe do podstaw nazywamy trapezem **prostokątnym**.



11.1. Rysowanie trapezów

Obejrzyj animację na platformie MATI.

Ćwiczenie 1

Narysuj trapez równoramienny, którego długości ramion mają po 6 cm.

Ćwiczenie 2

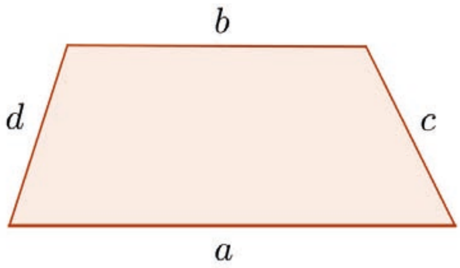
Narysuj trapez równoramienny o podstawach równych 6 cm oraz 4 cm.

Wskazówka:
Pamiętasz, że oś symetrii trapezu równoramiennego przechodzi przez środki jego podstaw.

11.2. Obwód trapezu

Obwód trapezu obliczamy tak samo jak obwód dowolnego innego czworokąta.

Obwodem trapezu nazywamy sumę długości wszystkich jego boków wyrażonych w tej samej jednostce.



Obw = a + b + c + d

Przykład 1

Obwód trapezu równoramiennego wynosi 48 cm. Jedna podstawa ma 15 cm, a druga jest o 4 cm krótsza. Oblicz długości ramion trapezu.

Rozwiązanie:
Obliczamy długości podstaw trapezu:
a = 15 cm
b = 15 cm − 4 cm = 11 cm
Suma długości podstaw trapezu wynosi:
a + b = 26 cm
Długości ramion trapezu wynoszą: $\frac{48-26}{2}cm = \frac{22}{2}cm = 11\,cm$

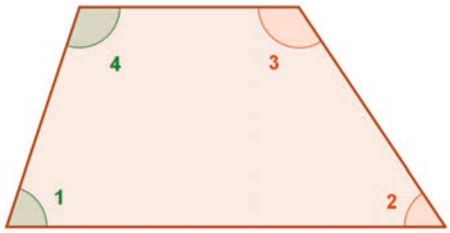
Odpowiedź: *Długości ramion trapezu wynoszą po 11 cm.*

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

11.3. Miary kątów w trapezach

Własności kątów w dowolnym trapezie

W dowolnym trapezie suma kątów przy tym samym ramieniu jest taka sama i wynosi 180°.



$$\angle 1 + \angle 4 = 180^o$$

$$\angle 2 + \angle 3 = 180^o$$

Ćwiczenie 1

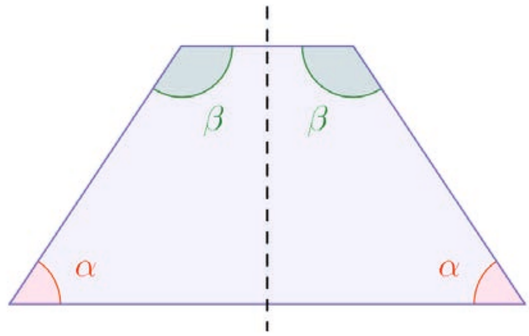
Spróbuj uzasadnić powyższą własność sum kątów trapezu przy tym samym ramieniu. W tym celu przedłuż ramiona trapezu do prostych i poszukaj kątów odpowiadających. Jaką własność mają kąty przyległe?

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Własności kątów w trapezie równoramiennym

Przypominamy, że trapez równoramienny to taki trapez, którego długości ramion mają równe długości. Ponadto osią symetrii trapezu równoramiennego jest prosta przechodząca przez środki jego podstaw. Wynika stąd, że trapez równoramienny ma nie tylko równe długości ramion, ale także kąty przy tej samej podstawie mają równe miary.

W trapezie równoramiennym
miary kątów przy tej samej podstawie są równe

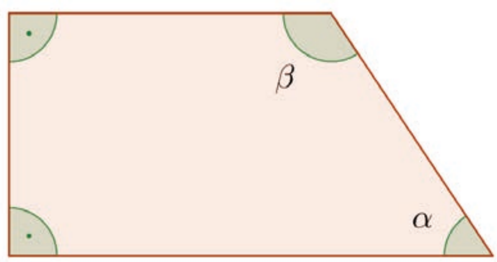


W trapezie równoramiennym, tak jak w każdym trapezie:

$$\alpha + \beta = 180°$$

Własności kątów w trapezie prostokątnym

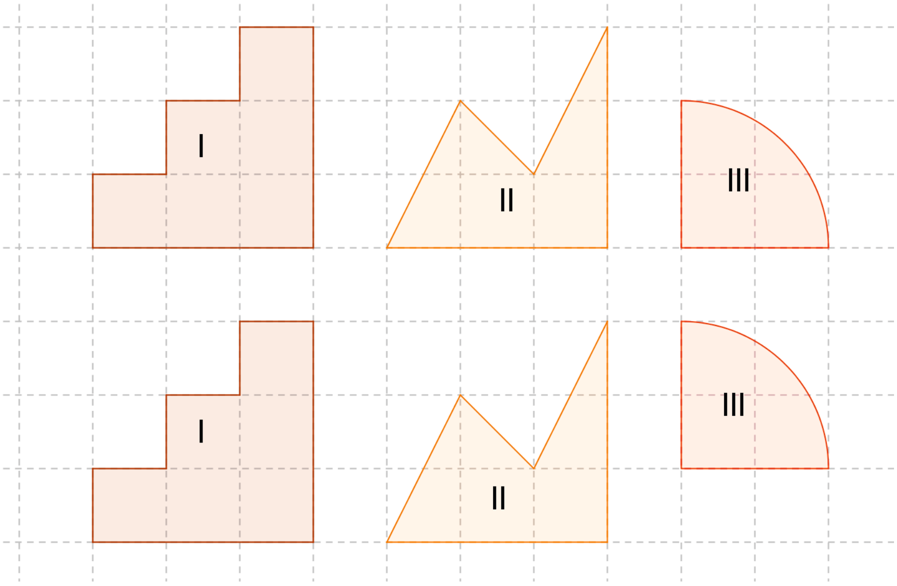
Pamiętamy, że trapezem prostokątnym nazywamy trapez, którego jedno z ramion jest prostopadłe do podstaw.



Ponadto $\alpha + \beta = 180°$

12. FIGURY PRZYSTAJĄCE

Przyjrzyj się poszczególnym parom figur poniżej. Co możemy o nich powiedzieć?



My powiemy, że odpowiadające pary figur są identyczne. Mają taki sam **kształt i wielkość.**

Matematycy zaś powiedzą, że takie figury są **przystające**.

Figury nazywamy **przystającymi**, jeśli możemy je tak nałożyć na siebie, żeby się dokładnie pokryły.

Obejrzyj animację na platformie MATI.

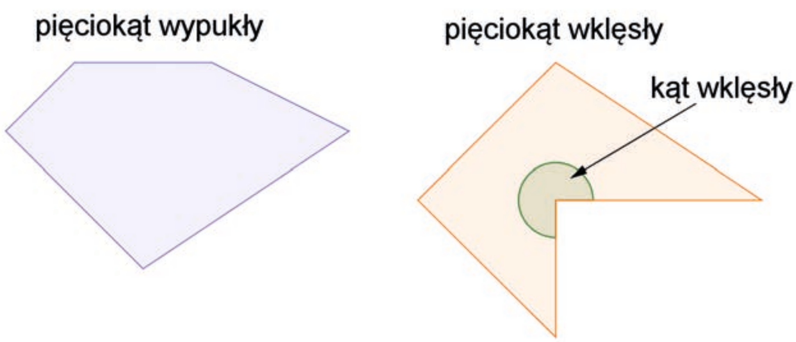
Ćwiczenie 1

1. Narysuj dwa dowolne wielokąty przystające. Wypisz pary boków równych oraz pary kątów o równych miarach.
2. Narysuj trójkąt o podstawie 5 cm i kątach przy podstawie $35°$ i $75°$, a następnie obok figurę do niego przystającą.
3. Narysuj równoległobok o bokach $a = 2$ cm i $b = 4$ cm i kącie ostrym $60°$, a następnie obok narysuj równoległobok do niego przystający.

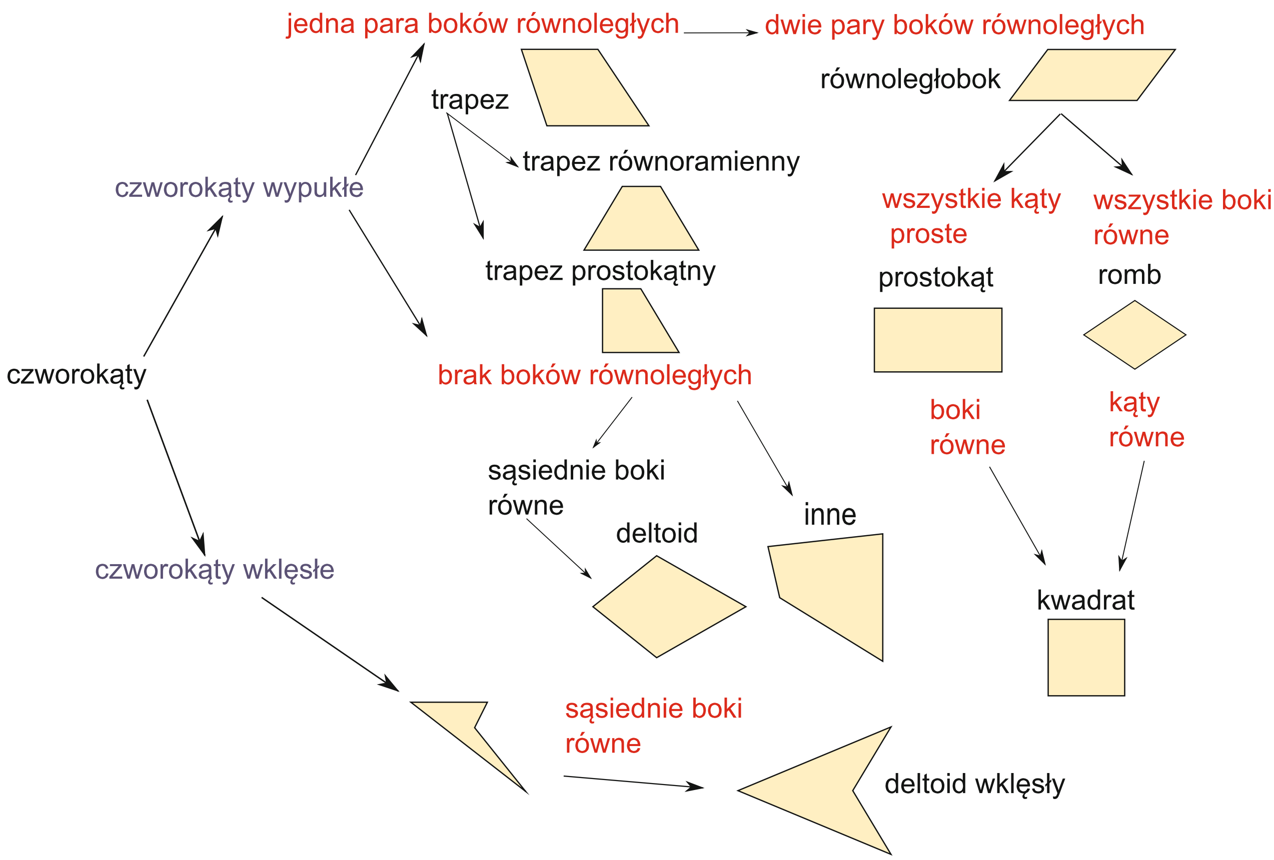
13. KLASYFIKACJA CZWOROKĄTÓW

Wśród czworokątów wyróżniamy czworokąty wypukłe oraz czworokąty wklęsłe.

Wielokąt mający wszystkie kąty wewnętrzne wypukłe nazywamy wielokątem **wypukłym**.
Wielokąt mający chociaż jeden kąt wewnętrzny wklęsły nazywamy wielokątem **wklęsłym**.



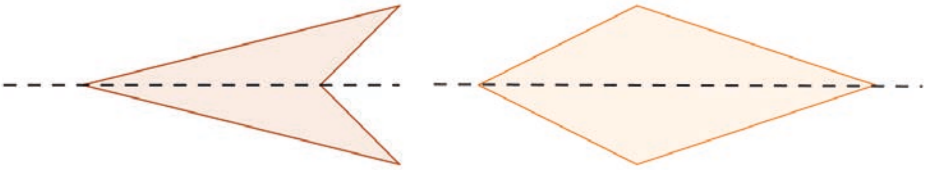
Klasyfikacja czworokątów



KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ TOMP UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

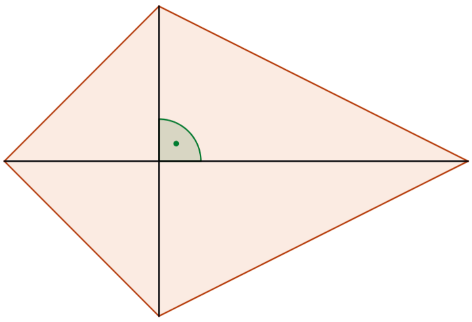
Czworokąty, które wyglądem przypominają latawce nazywamy **deltoidami**.

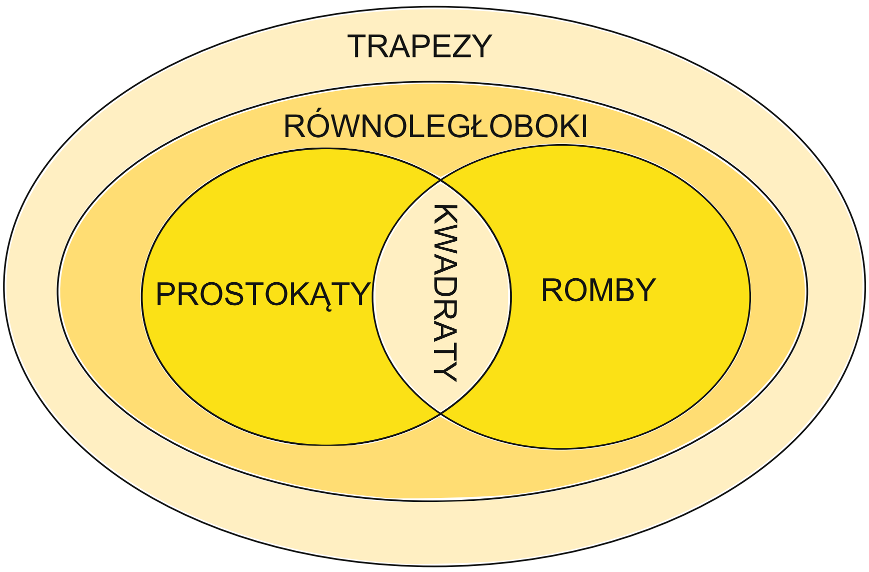
Czworokąt mający dwie pary boków równej długości nazywamy **deltoidem**. Deltoid jest figurą symetryczną względem jednej ze swoich przekątnych.



deltoid wklęsły deltoid wypukły

Ponadto przekątne deltoidu wypukłego są do siebie prostopadłe.

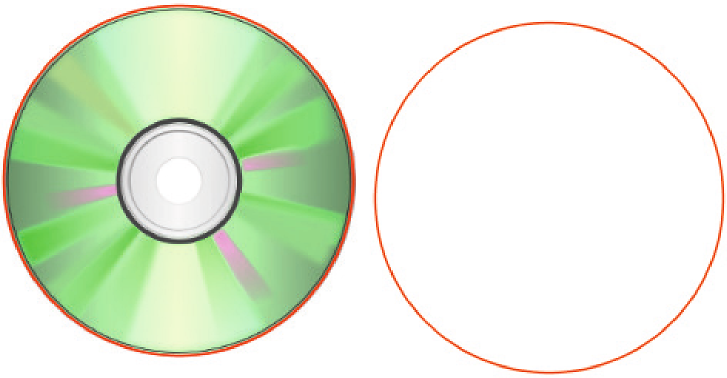




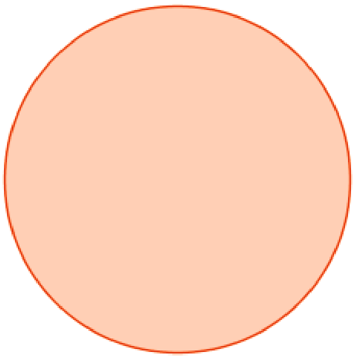
14. OKRĄG I KOŁO

Przykładów kół w otaczającym nas świecie jest bardzo dużo. Rozejrzyj się dookoła, prawie wszędzie są koła, np. koło samochodu, kółko od roweru, koło hula hop itd. Wszystkie mają jedną wspólną cechę - są okrągłe. Jak rysować koła?

Najprościej posłużyć się jakimś okrągłym rekwizytem i go obrysować, np. monetą, płytą CD, guzikiem, szklanką itd. (podaj więcej przykładów) :



Czerwona linia, którą obrysowaliśmy okrągły przedmiot to **okrąg**. Jeśli dodatkowo zamalujemy go w środku, to powstanie **koło**:



Koło jest „pełne", a okrąg jest „pusty" w środku.

Okręgi w zeszycie rysujemy za pomocą cyrkla. W tym celu wbijamy nóżkę cyrkla w środku i zataczamy nim dokoła okrąg. Rozwartość cyrkla to **promień** naszego okręgu, a punkt, w który wbiliśmy nóżkę cyrkla to **środek** okręgu.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 1

Podaj przykład okręgu oraz koła ze swojego otoczenia.

14.1. Promień, średnica, cięciwa okręgu

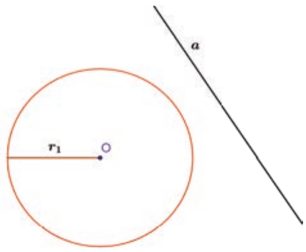
Promieniem okręgu nazywamy dowolny odcinek łączący środek okręgu z dowolnym punktem położonym na okręgu.

Średnicą okręgu nazywamy dowolny odcinek o końcach należących do tego okręgu i przechodzący przez jego środek.

14.2. Wzajemnie położenie okręgów

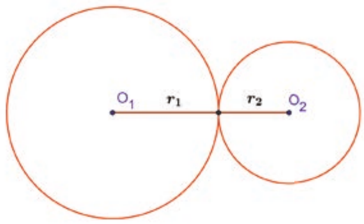
Dwa okręgi mogą być:

- rozłączne zewnętrznie



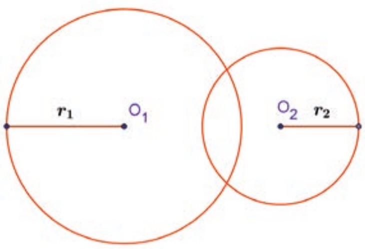
Okręgi rozłączne zewnętrznie nie mają punktów wspólnych.

- styczne zewnętrznie



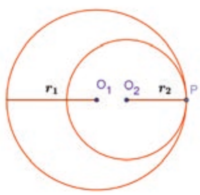
W tym przypadku mają tylko jeden punkt wspólny zwany punktem styczności okręgów.

- przecinające się



Okręgi przecinające się mają dwa punkty wspólne.

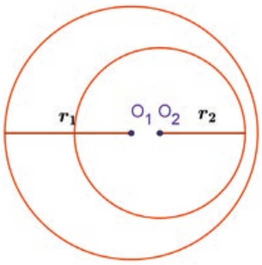
- styczne wewnętrznie



Okręgi styczne wewnętrznie mają tylko jeden punkt wspólny.

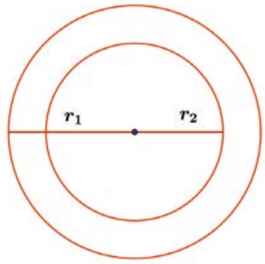
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

- rozłączne wewnętrznie



Okręgi rozłączne wewnętrznie nie mają punktów wspólnych.

- współśrodkowe

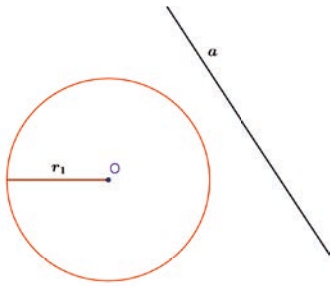


Okręgi współśrodkowe mają wspólny środek okręgu. Okręgi współśrodkowe nie mają punktów wspólnych lub mają ich nieskończenie wiele (dlaczego?)

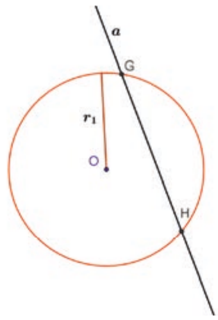
14.3. Wzajemne położenie prostej i okręgu

Prosta i okrąg:

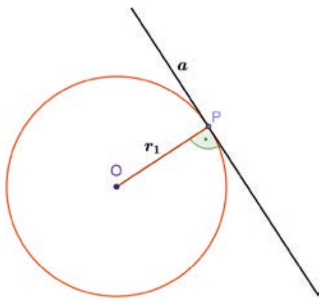
- nie mają punktów wspólnych



- mają dwa punkty wspólne



- są styczne

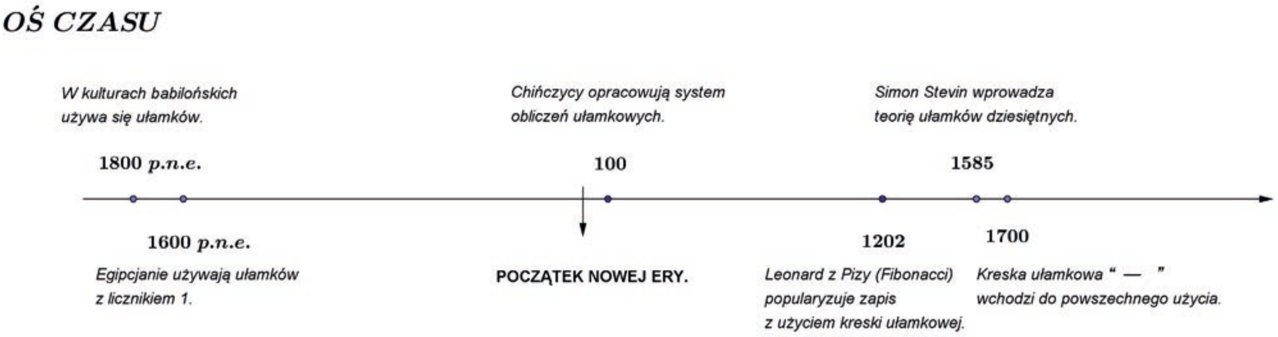


W tym przypadku prosta i okrąg mają tylko jeden punkt wspólny zwany punktem styczności. Ten punkt ma ważną własność. Promień okręgu poprowadzony do punktu styczności jest prostopadły do tej prostej.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

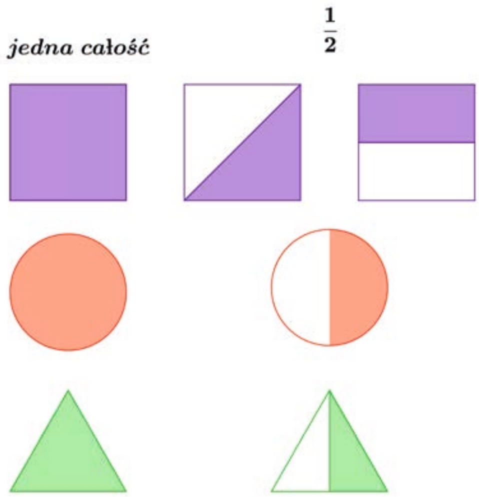
1. UŁAMKI ZWYKŁE I LICZBY MIESZANE

Już w najdawniejszych czasach ludzie posługiwali się ułamkami.

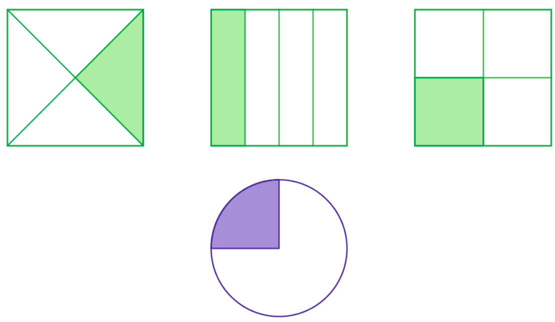


My, w życiu codziennym, również bardzo często używamy ułamków. W klasie czwartej poznaliśmy ułamki zwykłe i dziesiętne. W tym dziale zajmiemy się ułamkami zwykłymi. Przypomnijmy sobie pojęcia z nimi związane.

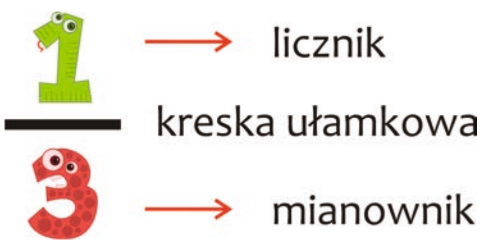
Połowa, czyli $\frac{1}{2}$, powstaje z podziału całości na dwie równe części i wyodrębnieniu jednej z tych części.



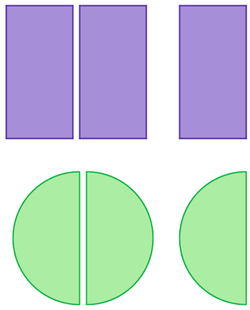
Natomiast ćwierć (ćwiartka), czyli $\frac{1}{4}$, powstaje z podziału całości na cztery równe części.



Budowa ułamka:



Półtora, to inaczej $1\frac{1}{2}$ - jest to liczba mieszana.



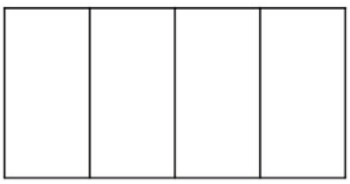
$1\frac{1}{2}$

Liczba mieszana składa się z części całkowitej i części ułamkowej.

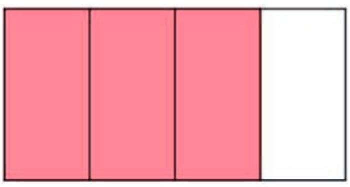
Przykład 1

Pokolorujmy $\frac{3}{4}$ prostokąta.

Mianownik pokazuje, że prostokąt należy podzielić na 4 równe części



Licznik określa, że należy pokolorować 3 z tych części.

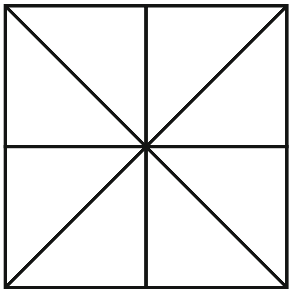


KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

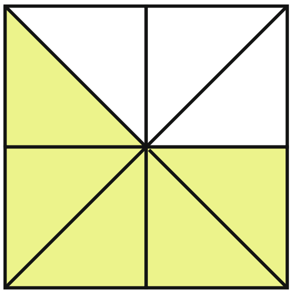
Przykład 2

Pokolorujemy $\frac{5}{8}$ kwadratu.

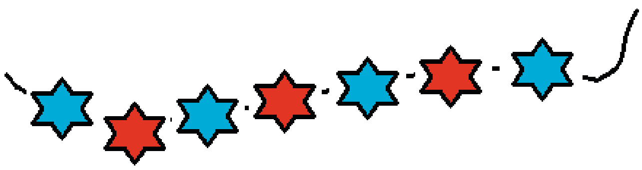
Mianownik pokazuje, że kwadrat należy podzielić na 8 równych części.



Licznik określa, że należy pokolorować 5 z tych części.



Przykład 3



- $\frac{3}{7}$ wszystkich gwiazdek to gwiazdki czerwone
- $\frac{4}{7}$ wszystkich gwiazdek to gwiazdki niebieskie

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ TOMP UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 4

- 3 dni - to $\frac{3}{7}$ tygodnia
- 7 cm - to $\frac{7}{100}$ metra
- 5 miesięcy - to $\frac{5}{12}$ roku
- 5 h - to $\frac{5}{24}$ doby
- 13 minut - to $\frac{13}{60}$ godziny

Ćwiczenie 1

Zapisz w postaci ułamka:

- pięć dziewiątych
- osiem jedenastych
- dziesięć dwudziestych siódmych

Rozwiązanie:

- pięć dziewiątych - $\frac{5}{9}$
- osiem jedenastych - $\frac{8}{11}$
- dziesięć dwudziestych siódmych - $\frac{10}{27}$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 2

Zapisz słowami:

$\frac{3}{4}$

$\frac{5}{18}$

$\frac{27}{100}$

Zadanie 1

W klasie piątej jest 13 dziewczynek i 9 chłopców. Jaką część wszystkich dzieci stanowią dziewczynki, a jaką chłopcy?

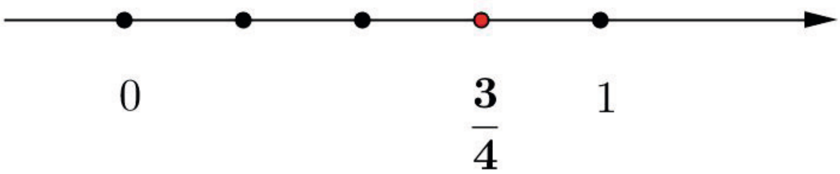
Rozwiązanie:
Obliczamy, ile jest wszystkich osób w klasie V.

$$13 + 9 = 22$$

Odpowiedź: *Dziewczynki stanowią* $\frac{13}{22}$*, a chłopcy -* $\frac{9}{22}$ *wszystkich dzieci w klasie V.*

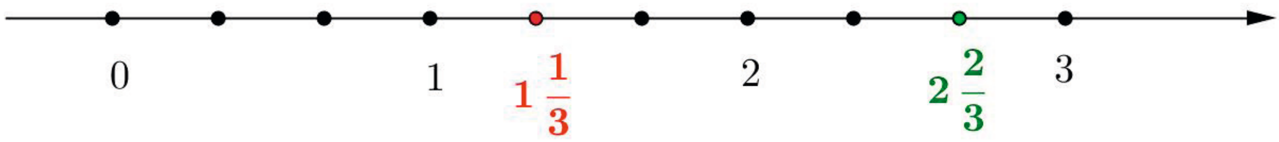
Ułamki, tak jak i inne liczby, możemy zaznaczać na osi liczbowej.

Gdy chcemy zaznaczyć ułamek $\frac{3}{4}$, to odcinek jednostkowy musimy podzielić na 4 równe części.



KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

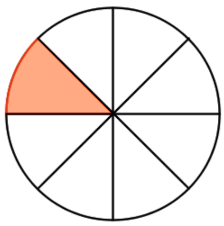
Na osi liczbowej możemy też zaznaczać liczby mieszane.



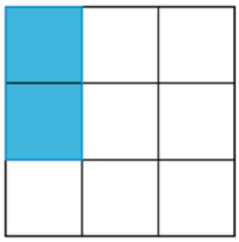
1.1. Ułamki właściwe i niewłaściwe

Ułamek, w którym licznik jest mniejszy od mianownika, nazywamy **ułamkiem właściwym**.

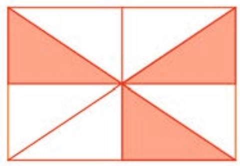
Przykłady:



$$\frac{1}{8}$$



$$\frac{2}{9}$$



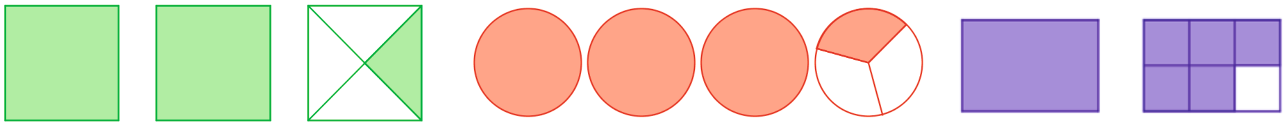
$$\frac{3}{8}$$

Ułamki właściwe są mniejsze od jedności.

Ułamek, w którym licznik jest większy lub równy mianownikowi, nazywamy **ułamkiem niewłaściwym**.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykłady:



$$\frac{9}{4} = 2\,\frac{1}{4} \qquad \frac{10}{3} = 3\,\frac{1}{3} \qquad \frac{11}{6} = 1\,\frac{5}{6}$$

Ułamki niewłaściwe są większe lub równe jedności.

UŁAMKI

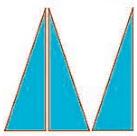
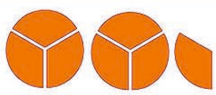
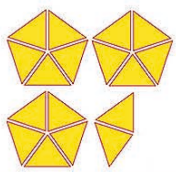
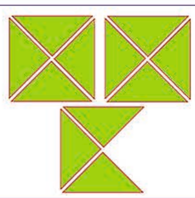
WŁAŚCIWE

NIEWŁAŚCIWE

licznik MNIEJSZY od mianownika

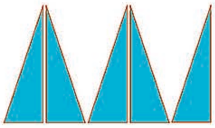
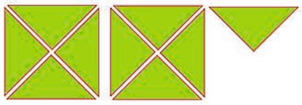
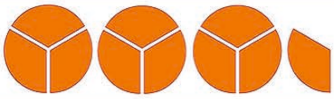
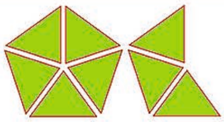
licznik WIĘKSZY od mianownika lub RÓWNY mianownikowi

Zamiana liczby mieszanej na ułamek niewłaściwy:

Liczba mieszana	Ilustracja	Sposób obliczania	Wynik
$1\frac{1}{2}$		$1 \cdot 2 + 1 = 2 + 1 = 3$	$\frac{3}{2}$
$2\frac{1}{3}$		$2 \cdot 3 + 1 = 6 + 1 = 7$	$\frac{7}{3}$
$3\frac{2}{5}$		$3 \cdot 5 + 2 = 15 + 2 = 17$	$\frac{17}{5}$
$2\frac{3}{4}$		$2 \cdot 4 + 3 = 8 + 3 = 11$	$\frac{11}{4}$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zamiana ułamka niewłaściwego na liczbę mieszaną:

Ułamek niewłaściwy	Ilustracja	Sposób obliczania	Wynik
$\frac{5}{2}$		$5 : 2 = 2\, r\, 1$	$2\frac{1}{2}$
$\frac{9}{4}$		$9 : 4 = 2\, r\, 1$	$2\frac{1}{4}$
$\frac{10}{3}$		$10 : 3 = 3\, r\, 1$	$3\frac{1}{3}$
$\frac{8}{5}$		$8 : 5 = 1\, r\, 3$	$1\frac{3}{5}$

Zadanie 1

Zamień liczby mieszane na ułamki niewłaściwe:

a) $2\frac{5}{6}$ b) $7\frac{2}{3}$ c) $8\frac{3}{5}$ d) $9\frac{5}{7}$

Rozwiązanie:

a) $2\frac{5}{6} = \frac{17}{6}$ b) $7\frac{2}{3} = \frac{23}{3}$ c) $8\frac{3}{5} = \frac{43}{5}$ d) $9\frac{5}{7} = \frac{68}{7}$

Zadanie 2

Zamień liczby mieszane na ułamki niewłaściwe:

a) $\frac{7}{5}$ b) $\frac{19}{8}$ c) $\frac{59}{7}$ d) $\frac{70}{9}$

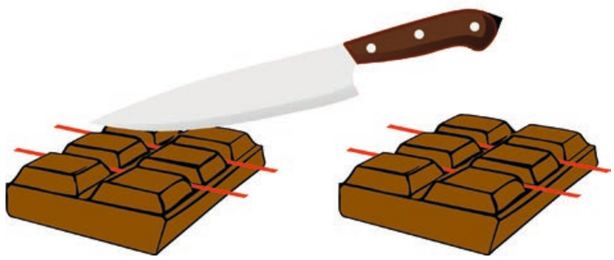
Rozwiązanie:

a) $\frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$ b) $\frac{19}{8} = 2\frac{3}{8}$ c) $\frac{59}{7} = 8\frac{3}{7}$ d) $\frac{70}{9} = 7\frac{7}{9}$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

2. UŁAMEK JAKO ILORAZ

Paweł dostał dwie czekolady. Chciał się nimi podzielić ze swoim bratem i siostrą.
Popatrz, jak to zrobił.
Każdą czekoladę podzielił na 3 równe części.



Otrzymał 6 jednakowych kawałków i podzielił je między 3 osoby.

Każda osoba otrzymała 2 kawałki, czyli $\frac{2}{3}$ tabliczki czekolady.

$$2 : 3 = \frac{2}{3}$$

Iloraz dwóch liczb możemy zapisać w postaci ułamka.

Należy pamiętać, że dzielnik zawsze musi być różny od zera.

Każdy ułamek możemy zapisać w postaci ilorazu dwóch liczb.

$$\frac{3}{5} = 3 : 5$$

Ułamek to iloraz dwóch liczb, z których dzielna jest licznikiem, dzielnik mianownikiem, a kreska ułamkowa zastępuje znak dzielenia.

3. ROZSZERZANIE I SKRACANIE UŁAMKÓW

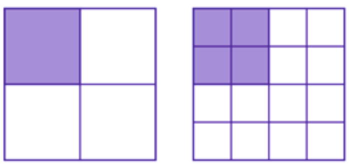
Aby rozszerzyć ułamek, należy jego licznik i mianownik pomnożyć przez tę samą liczbę, różną od zera.

$$\frac{2}{3}\ \underset{\cdot 3}{\overset{\cdot 3}{=}}\ \frac{6}{9}$$

Przykład 1

Ułamek $\frac{1}{4}$ rozszerzmy przez 4.

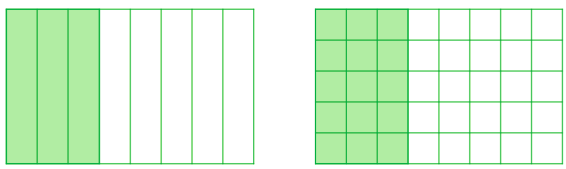
$$\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 4}{4 \cdot 4} = \frac{4}{16}$$



Przykład 2

Ułamek $\frac{3}{8}$ rozszerzmy przez 5.

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 5}{8 \cdot 5} = \frac{15}{40}$$



Aby skrócić ułamek, należy jego licznik i mianownik podzielić przez tę samą liczbę, różną od zera.

$$\frac{8}{12}\ \overset{8 \div 4}{=}\ \frac{2}{3}$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 3

Ułamek $\frac{18}{24}$ skróćmy przez 6.

$$\frac{18}{24} = \frac{18:6}{24:6} = \frac{3}{4}$$

Przykład 4

Ułamek $\frac{52}{72}$ skróćmy przez 4.

$$\frac{52}{72} = \frac{52:4}{72:4} = \frac{13}{18}$$

Ułamkiem nieskracalnym nazywamy taki ułamek, którego nie można skrócić. Licznik i mianownik ułamka nieskracalnego nie ma wspólnego dzielnika większego od jedności.

Na przykład: $\frac{17}{25}, \frac{12}{35}, \frac{9}{10}, \frac{21}{30}, \frac{8}{81}$.

Przykład 5

Ułamek $\frac{108}{120}$ zapisz w postaci ułamka nieskracalnego.

I sposób:

Skracajmy kolejno przez liczby, które są wspólnym dzielnikiem licznika i mianownika.

$$\frac{\overset{\overset{\overset{9}{\cancel{27}}}{\cancel{54}}}{\cancel{108}}}{\underset{\underset{\underset{10}{\cancel{30}}}{\cancel{60}}}{\cancel{120}}} = \frac{9}{10}$$

II sposób:

Skróćmy ułamek przez

NWD(108,120)=2·2·3=12

$$\begin{array}{r|l} 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\frac{108}{120} = \frac{108:12}{120:12} = \frac{9}{10}$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

4. PORÓWNYWANIE UŁAMKÓW

Ułamki, tak jak liczby naturalne, możemy porównywać.

Ćwiczenie 1

Na którym talerzu jest więcej arbuza?

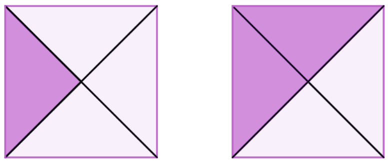
Rozwiązanie:
Oczywiście na pierwszym talerzu jest więcej arbuza.

Jeżeli weźmiemy więcej jednakowych części (kawałków), to mamy więcej arbuza.

Jeżeli dwa ułamki mają jednakowe mianowniki, większy jest ten ułamek, który ma większy licznik.

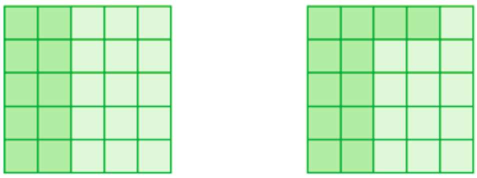
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 1

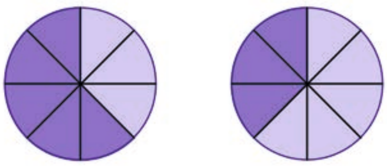


$$\frac{1}{4} < \frac{2}{4}$$

$$\frac{2}{3} > \frac{1}{3}$$



$$\frac{10}{25} < \frac{12}{25}$$



$$\frac{5}{8} > \frac{3}{8}$$

Jeżeli dwa ułamki mają jednakowe liczniki, większy jest ten ułamek, który ma mniejszy mianownik.

takie same liczniki

Przykład 2

Porównaj liczby: $4\frac{2}{5}$ i $4\frac{10}{23}$

Aby porównać te liczby rozszerzymy ułamek $\frac{2}{5}$ do ułamka o liczniku 10.

$$4\frac{2}{5} = 4\frac{10}{25}$$

Zatem,

$$4\frac{10}{25} < 4\frac{10}{23}$$

$$4\frac{2}{5} < 4\frac{10}{23}$$

Zadanie 1

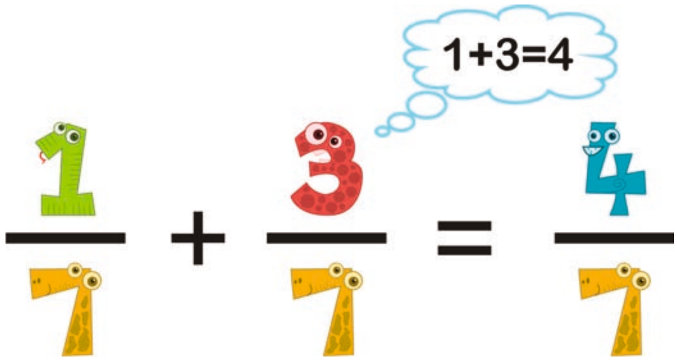
Podane ułamki uporządkuj rosnąco (od najmniejszego do największego):

$$\frac{5}{37} \quad \frac{15}{37} \quad \frac{13}{37} \quad \frac{1}{37} \quad \frac{38}{37} \quad \frac{37}{37}$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

5. DODAWANIE I ODEJMOWANIE UŁAMKÓW O JEDNAKOWYCH MIANOWNIKACH

Aby obliczyć sumę ułamków o takich samych mianownikach, dodajemy ich liczniki i przepisujemy wspólny mianownik.



Przykład 1

$$\frac{4}{17}+\frac{2}{17}=\frac{6}{17}$$

Przykład 2

$$\frac{8}{13}+\frac{7}{13}=\frac{15}{13}=1\frac{2}{13}$$

Jeśli w wyniku otrzymamy ułamek niewłaściwy, to wyłączamy z niego całości.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 3

$$\frac{5}{8}+\frac{1}{8}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

Wynik działań na ułamkach podajemy w postaci ułamka nieskracalnego.

Przykład 4

$$4\frac{5}{16}+2\frac{3}{16}=6\frac{8}{16}=6\frac{1}{2}$$

Gdy dodajemy liczby mieszane, wygodnie jest obliczać osobno sumę części całkowitych i osobno sumę części ułamkowych.

Przykład 5

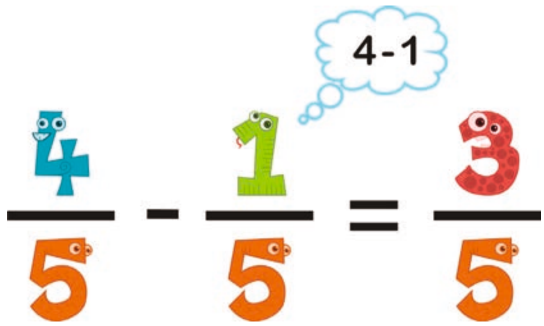
$$5\frac{7}{20}+\frac{9}{20}=5\frac{16}{20}=5\frac{4}{5}$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 6

$$3\frac{17}{25} + 4\frac{23}{25} = 7\frac{40}{25} = 8\frac{15}{25} = 8\frac{3}{5}$$

Aby obliczyć różnicę ułamków o takich samych mianownikach, odejmujemy ich liczniki i przepisujemy wspólny mianownik.



Przykład 7

$$\frac{7}{19} - \frac{3}{19} = \frac{4}{19}$$

Przykład 8

$$5\frac{3}{11} - 2\frac{1}{11} = 3\frac{2}{11}$$

Przykład 9

$$7\frac{8}{15} - \frac{2}{15} = 7\frac{6}{15} = 7\frac{2}{5}$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 10

$$2\frac{2}{5} - \frac{3}{5} = 1\frac{7}{5} - \frac{3}{5} = 1\frac{4}{5}$$

Od ułamka $\frac{2}{5}$ nie można odjąć ułamka $\frac{3}{5}$. W takim przypadku liczbę $2\frac{2}{5}$ zapisujemy w postaci $1\frac{7}{5}$.

Przykład 11

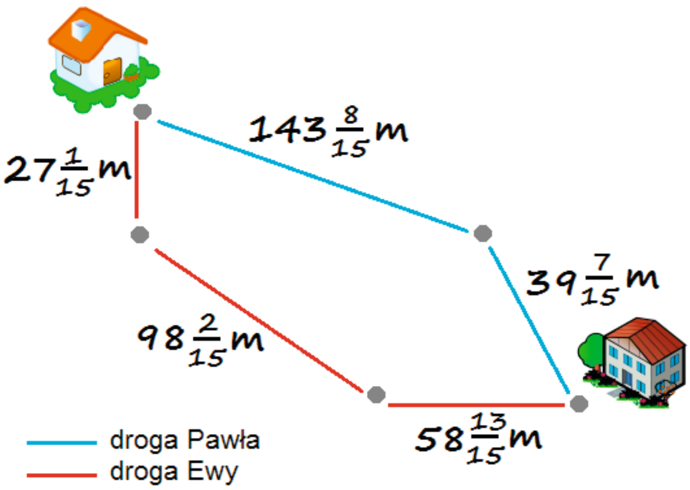
$$5\frac{7}{18} - 2\frac{13}{18} = 4\frac{25}{18} - 2\frac{13}{18} = 2\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

Od ułamka $\frac{7}{18}$ nie można odjąć ułamka $\frac{13}{18}$. W takim przypadku liczbę $5\frac{7}{18}$ zapisujemy w postaci $4\frac{25}{18}$.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 3

Która droga do szkoły jest krótsza - Ewy czy Pawła? O ile metrów?



Rozwiązanie:

Droga Pawła: $143\frac{8}{15} + 39\frac{7}{15} = 182\frac{15}{15} = 183$

Droga Ewy: $27\frac{1}{15} + 98\frac{2}{15} + 58\frac{13}{15} = 183\frac{16}{15} = 184\frac{1}{15}$

Różnica: $184\frac{1}{15} - 183 = 1\frac{1}{15}$

Odpowiedź: *Do szkoły krótszą drogę ma Paweł. Jest ona krótsza o* $1\frac{1}{15}\,m$.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

6. DODAWANIE I ODEJMOWANIE UŁAMKÓW O RÓŻNYCH MIANOWNIKACH

Aby dodać lub odjąć ułamki o różnych mianownikach, należy najpierw sprowadzić je do wspólnego mianownika.

Przykład 1

Obliczmy sumę ułamków: $\frac{5}{6} + \frac{7}{8}$.

Najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb 6 i 8 jest liczba 24, zatem nasze ułamki rozszerzamy do ułamków o mianowniku 24.

$$\frac{5}{6} + \frac{7}{8} = \frac{20}{24} + \frac{21}{24} = \frac{41}{24} = 1\frac{17}{24}$$

Przykład 2

Obliczmy różnicę ułamków: $\frac{7}{9} - \frac{5}{12}$.

Najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb 12 i 9 jest liczba 36, zatem nasze ułamki rozszerzamy do ułamków o mianowniku 36.

$$\frac{7}{9} - \frac{5}{12} = \frac{28}{36} - \frac{15}{36} = \frac{13}{36}$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 3

Oblicz, pamiętając o kolejności wykonywania działań:

$$\frac{2}{3}+\left(\frac{4}{9}-\frac{2}{5}\right)$$

Najpierw wykonujemy działanie w nawiasie. Najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb 9 i 5 jest liczba 45, zatem ułamki $\frac{4}{9}$ i $\frac{2}{5}$ rozszerzamy do ułamków o mianowniku 45.

$$\frac{2}{3}+\left(\frac{4}{9}-\frac{2}{5}\right)=\frac{2}{3}+\left(\frac{20}{45}-\frac{18}{45}\right)=\frac{2}{3}+\frac{2}{45}=\frac{30}{45}+\frac{2}{45}=\frac{32}{45}$$

Przykład 4

Obliczmy różnicę: $5\frac{1}{3}-\frac{3}{4}$.

Najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb 3 i 4 jest liczba 12, zatem nasze ułamki rozszerzamy do ułamków o mianowniku 12.

$$5\frac{1}{3}-\frac{3}{4}=5\frac{4}{12}-\frac{9}{12}=4\frac{16}{12}-\frac{9}{12}=4\frac{5}{12}$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 5

Obliczmy sumę liczb mieszanych: $5\frac{3}{10}+4\frac{5}{12}$.

Najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb 10 i 12 jest liczba 60, zatem nasze ułamki rozszerzamy do ułamków o mianowniku 60.

$$5\frac{3}{10}+4\frac{5}{12}=5\frac{18}{60}+4\frac{25}{60}=9\frac{43}{60}$$

Zadanie 1

O ile suma liczb $9\frac{1}{12}$ i $6\frac{7}{18}$ jest większa od ich różnicy?

<u>Rozwiązanie:</u>

suma liczb: $9\frac{1}{12}+6\frac{7}{18}=9\frac{3}{36}+6\frac{14}{36}=15\frac{17}{36}$

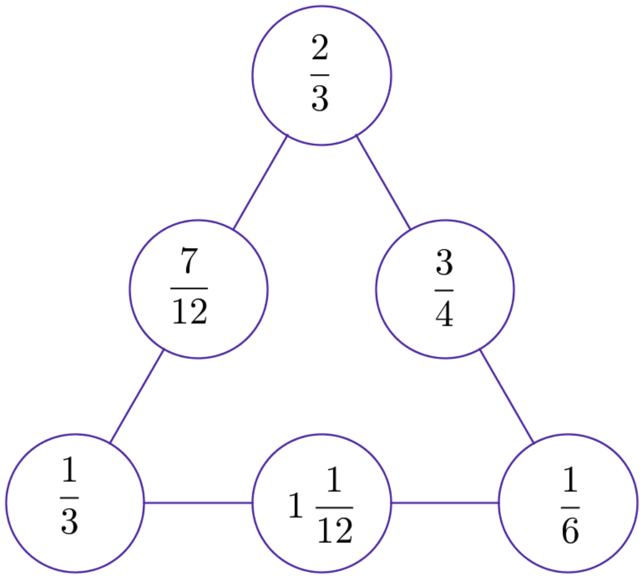
różnicaliczb: $9\frac{1}{12}-6\frac{7}{18}=9\frac{3}{36}-6\frac{14}{36}=8\frac{39}{36}-6\frac{14}{36}=2\frac{25}{36}$

$$15\frac{17}{36}-2\frac{25}{36}=14\frac{52}{36}-2\frac{25}{36}=12\frac{28}{36}=12\frac{7}{9}$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 2

Sprawdź, czy figura jest figurą magiczną?
Wskazówka: Wszystkie sumy wzdłuż linii muszą być takie same!



Rozwiązanie:

$$\frac{1}{3}+\frac{7}{12}+\frac{2}{3}=\frac{4}{12}+\frac{7}{12}+\frac{8}{12}=\frac{19}{12}=1\frac{7}{12}$$

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\frac{8}{12}+\frac{9}{12}+\frac{2}{12}=\frac{19}{12}=1\frac{7}{12}$$

$$\frac{1}{6}+1\frac{1}{12}+\frac{1}{3}=\frac{2}{12}+1\frac{1}{12}+\frac{4}{12}=1\frac{7}{12}$$

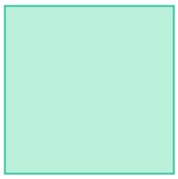
Odpowiedź: *Powyższa figura jest figurą magiczną.*

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

7. MNOŻENIE UŁAMKÓW PRZEZ LICZBY NATURALNE

Ćwiczenie 1

Czy $3\,m$ koronki wystarczą na obszycie obrusu w kształcie kwadratu o boku długości $\frac{4}{5}$ metra?



$\frac{4}{5}\,m$

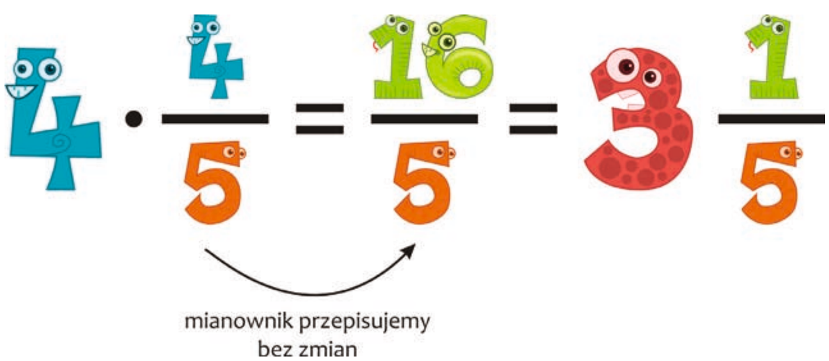
Aby odpowiedzieć na pytanie, musimy wykonać działanie:

$$\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}=\frac{16}{5}=3\,\frac{1}{5}$$

Możemy zapisać to krócej: $4\cdot\frac{4}{5}$.

Odpowiedź: $3\,m$ *koronki nie wystarczą na obszycie tego obrusu.*

Aby pomnożyć ułamek przez liczbę naturalną, mnożymy jego licznik przez tę liczbę, a mianownik pozostawiamy bez zmian.



KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 1

Znajdź liczbę pięć razy większą niż $\frac{7}{9}$.

$$5 \cdot \frac{7}{9} = \frac{5 \cdot 7}{9} = \frac{35}{9} = 3\frac{8}{9}$$

Przykład 2

Oblicz:

$\frac{1}{3}$ ***doby*** - ile to godzin?

Ponieważ 1 doba = 24 godz.

to $\frac{1}{3} \cdot 24 = \frac{1 \cdot 24}{3} = \frac{24}{3} = 8$

Odpowiedź: $\frac{1}{3}$ *doby to 8 godzin.*

Gdy obliczamy iloczyn liczby naturalnej i ułamka, możemy ułatwić sobie obliczenia, wykonując skracanie.

$$\frac{7}{9} \cdot 6 = \frac{7 \cdot \cancel{6}^{\,2}}{\cancel{9}_{\,3}} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$$

Wolno skracać tylko licznik z mianownikiem.

Przykład 3

Oblicz:

$\frac{2}{3}$ ***doby*** - ile to minut ?

1 doba = 24 godz.

czyli 1 doba = 1440 minut

1 godz. = 60 minut

Więc $$\frac{2}{3}\cdot 1440 = \frac{2\cdot \cancel{1440}^{480}}{\cancel{3}_{1}} = 2\cdot 480 = 960$$

Odpowiedź: $\frac{2}{3}$ *doby to 960 minut.*

Przykład 4

Kostka sera waży **25 *dag***. Ile waży $2\frac{1}{5}$ kostki sera?

Aby pomnożyć liczbę mieszaną przez liczbę naturalną, zamieniamy liczbę mieszaną na ułamek niewłaściwy i mnożymy liczbę naturalną przez ten ułamek.

$$2\frac{3}{5}\cdot 25 = \frac{13}{\cancel{5}_{1}}\cdot \cancel{25}^{5} = 13\cdot 5 = 65$$

Odpowiedź: $2\frac{3}{5}$ *kostki sera waży* **65 *dag*.**.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ Tomasz Jakubowski TOMP UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 1

Oblicz obwód kwadratu o boku $\frac{7}{12}$ m.

Rozwiązanie:

$$\frac{7}{12} \cdot 4 = \frac{7 \cdot 4}{12} = \frac{7}{3} = 2\,\frac{1}{3}$$

Odpowiedź: *Obwód tego kwadratu wynosi* $2\,\frac{1}{3}$ m.

Zadanie 2

Oblicz obwód prostokąta o bokach $\frac{5}{8}$ m i $\frac{7}{12}$ m.

Rozwiązanie:

$$2 \cdot \left(\frac{5}{8} + \frac{7}{12}\right) = 2 \cdot \left(\frac{15}{24} + \frac{14}{24}\right) = 2 \cdot \frac{29}{24} = \frac{29}{12} = 2\,\frac{5}{12}$$

Odpowiedź: *Obwód tego prostokąta wynosi* $2\,\frac{5}{12}$ m.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

8. OBLICZANIE UŁAMKA DANEJ LICZBY

Aby obliczyć ułamek danej liczby, należy ten ułamek pomnożyć przez daną liczbę.

Przykład 1

Oblicz: $\mathbf{\frac{8}{9}}$ liczby 36.

$$\frac{8}{\cancel{9}_{1}} \cdot \cancel{36}^{4} = 8 \cdot 4 = 32$$

Przykład 2

Oblicz, ile wynosi: $\mathbf{3\frac{4}{5}}$ liczby 50.

Gdy chcemy pomnożyć liczbę mieszaną przez inną liczbę, najpierw zamieniamy liczbę mieszaną na ułamek niewłaściwy.

$$3\frac{4}{5} \cdot 50 = \frac{19}{\cancel{5}_{1}} \cdot \cancel{50}^{10} = 19 \cdot 10 = 190$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 3

$1\frac{2}{5}\ km$ - ile to metrów?

$$1\ km = 1000\ m$$

$$1\frac{2}{5} \cdot 1000 = \frac{7}{\cancel{5}_{1}} \cdot \cancel{1000}^{200} = 7 \cdot 200 = 1400$$

Przykład 4

Co jest większe: $\frac{5}{6}$ liczby 33 czy $1\frac{1}{9}$ liczby 21?

$$\frac{5}{\cancel{6}_{2}} \cdot \cancel{33}^{11} = \frac{5 \cdot 11}{2} = \frac{55}{2} = 27\frac{1}{2}$$

$$1\frac{1}{9} \cdot 21 = \frac{10}{\cancel{9}_{\boxed{3}}} \cdot \cancel{21}^{7} = \frac{10 \cdot 7}{3} = \frac{70}{3} = 23\frac{1}{3}$$

$$27\frac{1}{2} > 23\frac{1}{3}$$

Odpowiedź: $\frac{5}{6}$ *liczby 33 jest większe niż* $1\frac{1}{9}$ *liczby 21.*

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ TOMP UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 1

W maju klasa piąta brała udział w 3 - dniowym rajdzie pieszym. Trasa całego rajdu liczyła $60\ km$. Pierwszego dnia piątoklasiści przeszli $\frac{1}{3}$ trasy, drugiego dnia $\frac{3}{5}$ pozostałej trasy. Ile km przeszli uczniowie trzeciego dnia?

Rozwiązanie:

Cała trasa - $60\ km$

I dzień:

$\frac{1}{3}$ trasy = $\frac{1}{3} \cdot 60\ km = 20\ km$

Pozostało do przejścia: $60\ km - 20\ km = 40\ km$

II dzień:

$$\frac{3}{5} \cdot 40\ km = 24\ km$$

III dzień:

$$60\ km - (20\ km + 24\ km) = 60\ km - 44\ km = 16\ km$$

Odpowiedź: *Uczniowie trzeciego dnia pokonali trasę liczącą* $16\ km$.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

9. MNOŻENIE UŁAMKÓW ZWYKŁYCH

Aby pomnożyć ułamek przez ułamek, należy licznik pierwszego ułamka pomnożyć przez licznik drugiego ułamka, a mianownik pierwszego ułamka pomnożyć przez mianownik drugiego ułamka.

$1 \cdot 3 = 3$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

$2 \cdot 4 = 8$

Gdy mnożymy ułamki, jeśli to możliwe, upraszczamy obliczenia, skracając ułamki.
Wolno skracać licznik z mianownikiem.

$3 \cdot 1 = 3$

$$\frac{3}{{}_{2}\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{2}^{1}}{5} = \frac{3}{10}$$

$2 \cdot 5 = 10$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 1

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}=\frac{2\cdot 3}{5\cdot 7}=\frac{6}{35}$$

Przykład 2

$$\frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{9}\cdot\frac{1}{\underset{2}{\cancel{8}}}=\frac{1\cdot 1}{9\cdot 2}=\frac{1}{18}$$

Przykład 3

$$\frac{3}{\underset{1}{\cancel{3}}\!\!\!\!\!\!}$$

$$\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{8}}}\cdot\frac{\overset{2}{\cancel{16}}}{\underset{9}{\cancel{27}}}=\frac{1\cdot 2}{1\cdot 9}=\frac{2}{9}$$

Przykład 4

$$3\frac{7}{9}\cdot\frac{3}{17}=\frac{\overset{2}{\cancel{34}}}{\underset{3}{\cancel{9}}}\cdot\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{17}}}=\frac{2\cdot 1}{3\cdot 1}=\frac{2}{3}$$

Gdy chcemy pomnożyć liczbę mieszaną przez ułamek, najpierw musimy liczbę mieszaną zamienić na ułamek niewłaściwy.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 5

$$\frac{14}{25} \cdot 2\frac{1}{7} = \frac{\overset{2}{\cancel{14}}}{\underset{5}{\cancel{25}}} \cdot \frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{1}{\cancel{7}}} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$$

Przykład 6

$$2\frac{2}{3} \cdot 3\frac{3}{10} = \frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} \cdot \frac{\overset{11}{\cancel{33}}}{\underset{5}{\cancel{10}}} = \frac{44}{5} = 8\frac{4}{5}$$

Gdy mnożymy liczby mieszane, musimy najpierw zamienić je na ułamki niewłaściwe.

Zadanie 1

Oblicz pole prostokąta o bokach długości: $2\frac{3}{4}$ *cm* i $1\frac{3}{8}$ *cm*.

$$2\frac{3}{4}\cdot 1\frac{3}{8}=\frac{11}{4}\cdot\frac{11}{8}=\frac{121}{32}=3\frac{25}{32}$$

Odpowiedź: *Pole tego prostokąta jest równe* $3\frac{25}{32}$ cm^2.

Pole prostokąta obliczamy, mnożąc długość prostokąta przez jego szerokość.

Zadanie 2

Pawełek kupił $\frac{1}{6}$ *kg* ciasteczek w cenie $16\frac{1}{2}$ *zł* za kilogram i $\frac{2}{3}$ *kg* cukierków po $14\frac{2}{5}$ *zł* za kilogram. Ile zostało mu reszty, jeżeli miał 15 *zł*?

Rozwiązanie:

1) Obliczamy, ile kosztowały ciasteczka:

$$\frac{1}{6}\cdot 16\frac{1}{2}=\frac{1}{\cancel{6}_{2}}\cdot\frac{\cancel{33}^{11}}{2}=\frac{11}{4}=2\frac{3}{4}$$

2) Obliczamy, ile kosztowały cukierki:

$$\frac{2}{3}\cdot 14\frac{2}{5}=\frac{2}{\cancel{3}_{1}}\cdot\frac{\cancel{72}^{24}}{5}=\frac{48}{5}=9\frac{3}{5}$$

3) Obliczamy, ile kosztowały ciasteczka i cukierki:

$$\boxed{2\frac{3}{4}+9\frac{3}{5}=2\frac{15}{20}+9\frac{12}{20}=11\frac{27}{20}=12\frac{7}{20}}$$

4) Obliczamy, ile reszty zostało Pawełkowi:

$$15-12\frac{7}{20}=2\frac{13}{20}$$

Odpowiedź: *Pawełkowi zostało* $2\frac{13}{20}$ *zł reszty.*

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
WPQ
Tomasz Jakubowski TOMP
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

10. DZIELENIE UŁAMKÓW PRZEZ LICZBY NATURALNE

Obliczmy następujące iloczyny:

$$\frac{{}^{1}\cancel{2}}{{}_{1}\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{2}_{1}} = 1 \qquad \frac{1}{{}_{1}\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}^{1}}{1} = 1$$

Zauważmy, że każdy z tych iloczynów jest równy jedności.

Jeżeli iloczyn dwóch liczb jest równy jedności, to mówimy, że jedna **liczba jest odwrotnością drugiej**.

Przykład 1

Liczba: $\frac{4}{5}$ jest odwrotnością liczby: $\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$

Przykład 2

Liczba: $1\frac{4}{5} = \frac{9}{5}$ jest odwrotnością liczby: $\frac{5}{9}$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 3

Liczba: $\frac{1}{3}$ jest odwrotnością liczby $\frac{3}{1}$ czyli liczby 3.

Aby podzielić ułamek przez liczbę naturalną, mnożymy ten ułamek przez odwrotność liczby naturalnej.

$$\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Przykład 4

$$\frac{7}{13} : 2 = \frac{7}{13} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{26}$$

Przykład 5

$$2\frac{3}{4} : 5 = \frac{11}{4} : 5 = \frac{11}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{11}{20}$$

Gdy dzielimy liczbę mieszaną przez liczbę naturalną, zamieniamy liczbę mieszaną na ułamek niewłaściwy.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
WPQ
Tomasz Jakubowski TOMP
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 6

$$\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}$$

Zadanie 1

Uzupełnij tabelkę:

Liczby	$\frac{3}{4}$		5	$3\frac{1}{3}$
Odwrotność liczby		$3\frac{2}{5}$		

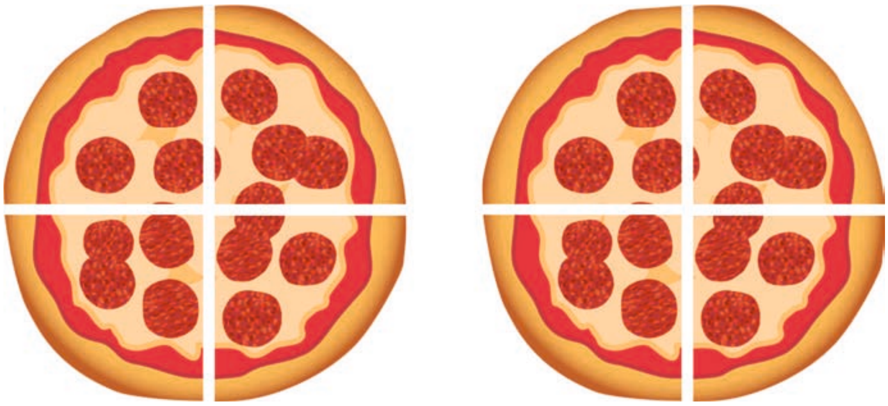
Rozwiązanie:

Liczby	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{17}$	5	$3\frac{1}{3} = \frac{10}{3}$
Odwrotność liczby	$\frac{4}{3}$	$3\frac{2}{5} = \frac{17}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

11. DZIELENIE UŁAMKÓW ZWYKŁYCH

Ania zaprosiła swoich znajomych i kupiła dwie pizze. Każdy z gości zjadł po $\frac{1}{4}$ pizzy. Ile osób zaprosiła Ania?



Ania zaprosiła 8 osób.

Zapiszmy obliczenia: $2 : \frac{1}{4} = 8$, ponieważ $2 \cdot 4 = 8$

Zauważmy, że zamiast podzielić przez $\frac{1}{4}$ mnożymy przez 4, czyli przez odwrotność $\frac{1}{4}$.

$$\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}$$

Pamiętaj, nie wolno dzielić przez zero!

Przykład 1

$$8 : \frac{3}{4} = 8 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8 \cdot 4}{3} = \frac{32}{3} = 10\,\frac{2}{3}$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 2

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$$

Przykład 3

$$\frac{3}{7} - \frac{9}{14} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{7}}} \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{14}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} = \frac{2}{3}$$

Gdy dzielna lub dzielnik jest liczbą mieszaną, należy ją zamienić na ułamek niewłaściwy.

Przykład 4

$$2\frac{1}{2} : \frac{3}{5} = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{25}{6} = 4\frac{1}{6}$$

Przykład 5

$$\boxed{2\frac{1}{6} : 1\frac{2}{3} = \frac{13}{6} : \frac{5}{3} = \frac{13}{\underset{2}{\cancel{6}}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{5} = \frac{13}{10} = 1\frac{3}{10}}$$

Zadanie 1

Iloraz liczb $2\frac{1}{2}$ i $3\frac{1}{3}$ zmniejsz 2 razy.

Rozwiązanie:

$$2\frac{1}{2} : 3\frac{1}{3} = \frac{5}{2} : \frac{10}{3} = \frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{2} \cdot \frac{3}{\underset{2}{\cancel{10}}} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

Zadanie 2

W ciągu 1h pan Piotr przeszedł $3\frac{3}{4}\ km$. W ciągu ilu godzin przejdzie dystans $25\ km$?

Rozwiązanie:

$$25 : 3\frac{3}{4} = 25 : \frac{15}{4} = \overset{5}{\cancel{25}} \cdot \frac{4}{\underset{3}{\cancel{15}}} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$$

Odpowiedź: *Pan Piotr dystans* $25\ km$ *przejdzie w ciągu* $6\frac{2}{3}\ h$.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ TOMP UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

12. DZIAŁANIA NA UŁAMKACH ZWYKŁYCH

W życiu codziennym posługujemy się nie tylko liczbami naturalnymi, ale i ułamkami. Ułamki, jak każde liczby, możemy dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić. Powtórzmy sobie, jak wykonujemy działania na ułamkach zwykłych.

Obejrzyj animację na platformie MATI.

Przykład 1

$$\frac{5}{14}+\frac{7}{14}+\frac{4}{14}=\frac{16}{14}=1\,\frac{2}{14}=1\,\frac{1}{7}$$

Przykład 2

$$10-3\,\frac{7}{15}=9\,\frac{15}{15}-3\,\frac{7}{15}=6\,\frac{8}{15}$$

Przykład 3

$$2\,\frac{1}{6}-1\,\frac{5}{6}=1\,\frac{7}{6}-1\,\frac{5}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 4

$$\frac{5}{6}+\frac{3}{4}=\frac{10}{12}+\frac{9}{12}=\frac{19}{12}=1\frac{7}{12}$$

Przykład 5

$$\frac{3}{7}-\frac{1}{3}=\frac{9}{21}-\frac{7}{21}=\frac{2}{21}$$

Przykład 6

$$6\frac{1}{6}-3\frac{3}{8}=6\frac{4}{24}-3\frac{9}{24}=5\frac{28}{24}-3\frac{9}{24}=2\frac{19}{24}$$

Przykład 7

$$\frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{5}}}\cdot\frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{4}{\cancel{16}}}=\frac{3}{4}$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 8

$$6\frac{3}{4}\cdot 1\frac{3}{7}=\frac{27}{\cancel{4}_{2}}\cdot\frac{\cancel{10}^{5}}{7}=\frac{135}{14}=9\frac{9}{14}$$

Przykład 9

$$2\frac{2}{11}:6\frac{6}{7}=\frac{24}{11}:\frac{48}{7}=\frac{\cancel{24}^{1}}{11}\cdot\frac{7}{\cancel{48}_{2}}=\frac{7}{22}$$

Zadanie 1

Jaką liczbę przykrył kleks?

 $+\ \mathbf{\frac{8}{9}} = \mathbf{3\frac{4}{9}}$

Rozwiązanie:

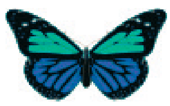
Aby obliczyć jeden ze składników, należy od sumy odjąć drugi składnik.

$$\mathbf{3\frac{4}{9}-\frac{8}{9}=2\frac{13}{9}-\frac{8}{9}=2\frac{5}{9}}$$

Odpowiedź: *Pod kleksem kryje się liczba* $\mathbf{2\frac{5}{9}}$.

Zadanie 2

Jaką liczbę przykrył motyl?

$5\frac{3}{8} \;-$  $= 2\frac{7}{8}$

Rozwiązanie:

Aby obliczyć odjemnik, należy od odjemnej odjąć różnicę.

$$5\frac{3}{8} - 2\frac{7}{8} = 4\frac{11}{8} - 2\frac{7}{8} = 2\frac{4}{8} = 2\frac{1}{2}$$

Odpowiedź: *Pod motylkiem kryje się liczba* $2\frac{1}{2}$.

Zadanie 3

Pan Piotr miał $5\ m$ wstążki. Do zapakowania prezentu dla syna zużył $2\frac{4}{7}\ m$ wstążki. Na zapakowanie prezentu dla córki potrzebował o $\frac{4}{5}\ m$ wstążki mniej.

Ile wstążki zostało panu Piotrowi?

Rozwiązanie:

Obliczamy, ile wstążki użył na zapakowanie prezentu dla córki:

$$2\frac{4}{7} - \frac{4}{5} = 2\frac{20}{35} - \frac{28}{35} = 1\frac{55}{35} - \frac{28}{35} = 1\frac{27}{35}$$

Obliczamy, ile wstążki użył na zapakowanie prezentu dla syna i córki:

$$2\frac{4}{7} + 1\frac{27}{35} = 2\frac{20}{35} + 1\frac{27}{35} = 3\frac{47}{35} = 4\frac{12}{35}$$

Obliczamy, ile wstążki zostało panu Piotrowi: $5 - 4\frac{12}{35} = \frac{23}{35}$

Odpowiedź: *Panu Piotrowi zostało* $\frac{23}{35}\ m$ *wstążki.*

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 4

Samolot wojskowy w ciągu $1\frac{1}{5}$ h przeleciał $1020\ km$. W ciągu ilu godzin przeleci $2125\ km$, jeżeli będzie leciał z tą samą prędkością?

Rozwiązanie:

Obliczamy, w jakim czasie pokona dystans $1\ km$?

$$1\frac{1}{5} : 1020 = \frac{6}{5} : 1020 = \frac{\overset{1}{\cancel{6}}}{5} \cdot \frac{1}{\underset{170}{\cancel{1020}}} = \frac{1}{850}$$

Obliczamy, w jakim czasie pokona dystans $2125\ km$?

$$\frac{1}{\underset{34}{\cancel{850}}} \cdot \overset{84}{\cancel{2125}} = \frac{81}{34} = 2\frac{13}{34}$$

Odpowiedź: *Samolot pokona dystans* $2125\ km$ *w ciągu* $2\frac{13}{34}$ h.

Obliczając wartość wyrażeń arytmetycznych, w których występuje więcej niż jedno działanie, musimy pamiętać o kolejności wykonywania działań.

Obejrzyj animację na platformie MATI.

Przykład 10

$$\frac{4}{5} + \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} \cdot \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{8}{\cancel{16}}} = \frac{4}{5} + \frac{3}{8} = \frac{32}{40} + \frac{15}{40} = \frac{47}{40} = 1\frac{7}{40}$$

Przykład 11

$$4\frac{1}{5} \div \frac{14}{25} - \frac{2}{3} = \frac{21}{5} \div \frac{14}{25} - \frac{2}{3} = \frac{\overset{3}{\cancel{21}}}{\underset{1}{\cancel{5}}} \cdot \frac{\overset{5}{\cancel{25}}}{\underset{2}{\cancel{14}}} - \frac{2}{3} = \frac{15}{2} - \frac{2}{3} = \frac{45}{6} - \frac{4}{6} = \frac{41}{6} = 6\frac{5}{6}$$

Przykład 12

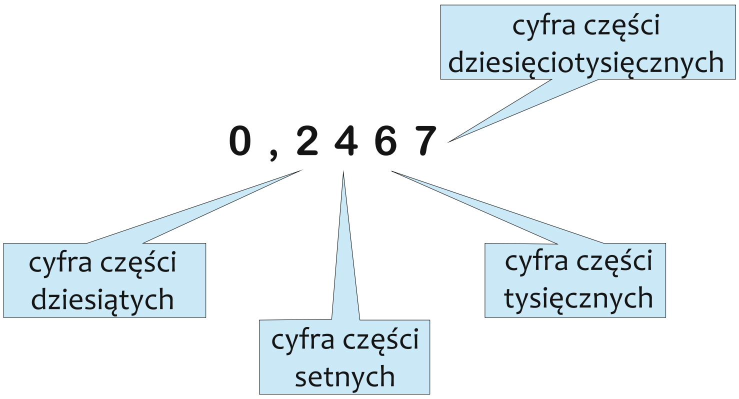
$$(5 \div 1\frac{2}{3} + 6\frac{1}{2}) \cdot 2 = (5 \div \frac{5}{3} + 6\frac{1}{2}) \cdot 2 = (\cancel{5} \cdot \frac{3}{\cancel{5}} + 6\frac{1}{2}) \cdot 2 = 9\frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{19}{2} = 19$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

1. ZAPISYWANIE UŁAMKÓW DZIESIĘTNYCH

Liczby typu:
0,2 0,97 3,5 6,55 1,159 45,32 0,065
nazywają się ułamkami dziesiętnymi.

W zapisie ułamka dziesiętnego kolejne cyfry po przecinku oznaczają, ile ten ułamek ma części dziesiątych, setnych, tysięcznych, dziesięciotysięcznych itd.



Ćwiczenie 1

Przeczytaj prawidłowo liczby umieszczone pod tematem lekcji.
Przeczytaj zamieszczone poniżej ceny owoców.

 3,50 zł / 1 kg	 2,90 zł / 1 kg	 3,25 zł / 1 kg	 2,55 zł / 1 kg
 1,95 zł / 1 kg	 3,80 zł / 1 kg	 4,99 zł / 1 kg	 4,50 zł / 1 kg

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zamiana ułamków

Każdy ułamek dziesiętny możemy zamienić na zwykły, to znaczy zapisać w postaci ułamka zwykłego.

Jeżeli w liczniku i mianowniku ułamka zwykłego będą liczby, które mają wspólny dzielnik – to taki ułamek możemy skrócić.

$$0{,}4 \rightarrow \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \qquad 0{,}35 \rightarrow \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$$

Nie każdy ułamek zwykły można zamienić na dziesiętny – *zastanów się chwilę i pomyśl, kiedy jest to niemożliwe.*

Przykład 1

Wybierz z niżej zapisanych ułamków zwykłych te, które jesteśmy w stanie zamienić na dziesiętne:

$$\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{3}{4}, \frac{3}{6}, \frac{6}{8}, \frac{7}{14}, \frac{8}{9}, \frac{4}{11}, \frac{3}{15}$$

Taką zamianę możemy wykonać, jeśli ułamek zwykły da się skrócić lub rozszerzyć do ułamka o mianowniku 10, 100, 1000 itd.

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{75}{100} = 0{,}75$$

$$\frac{3}{6} = \frac{3:3}{6:3} = \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{5}{10} = 0{,}5$$

$$\frac{6}{8} = \frac{6}{8} \cdot \frac{125}{125} = \frac{750}{1000} = 0{,}750$$

$$\frac{3}{15} = \frac{3:3}{15:3} = \frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{2}{10} = 0{,}2$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

A teraz kilka przykładów zamiany liczb mieszanych i ułamków niewłaściwych (*czy pamiętacie co to za liczby i ułamki?*) – na ułamki dziesiętne.

$$\frac{12}{15} \overset{:3}{=} \frac{4}{5} \overset{\cdot 2}{=} \frac{8}{10} = 0{,}8$$

$$\frac{24}{60} \overset{:6}{=} \frac{4}{10} = 0{,}4$$

$$\frac{40}{16} = \frac{10}{4} = 2\frac{2}{4} \overset{:2}{=} 2\frac{1}{2} \overset{\cdot 5}{=} 2\frac{5}{10} = 2{,}5$$

Warto zapamiętać zamianę ułamka $\frac{1}{125}$ i $\frac{1}{8}$ na postać dziesiętną:

$\frac{1}{125} =$ rozszerzamy ułamek do mianownika 1000 $= \frac{8}{1000} = 0{,}008$

$\frac{1}{8} =$ rozszerzamy ułamek do mianownika 1000 $= \frac{125}{1000} = 0{,}125$

$$\frac{2}{125} = \frac{2 \cdot 8}{1000} = 0{,}016$$

$$\frac{3}{125} = \frac{3 \cdot 8}{1000} = 0{,}024$$

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 125}{1000} = \frac{375}{1000} = 0{,}375$$

$$\frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 125}{1000} = \frac{625}{1000} = 0{,}625$$

Ćwiczenie 2

Zapisz liczbę mieszaną $3\frac{4}{5}$ w postaci dziesiętnej.

$$3\frac{4}{5} = 3\frac{8}{10} = 3{,}8$$

Spróbuj sam podobnie zapisać liczby:

$5\frac{1}{2} =$ $2\frac{3}{4} =$ $6\frac{1}{8} =$

Ćwiczenie 3

Zapisz ułamek niewłaściwy w postaci ułamka dziesiętnego.

$$\frac{9}{2} = 4\frac{1}{2} = 4\frac{5}{10} = 4{,}5$$

Zapisz ułamek niewłaściwy w postaci ułamka dziesiętnego.

$\frac{17}{5} =$ $\frac{25}{4} =$ $\frac{85}{20} =$

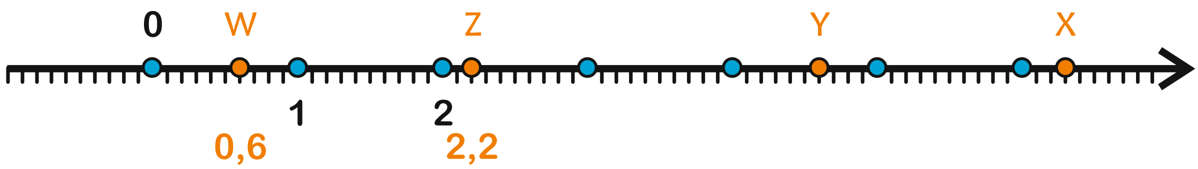
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykłady zaznaczania ułamków dziesiętnych na osi liczbowej

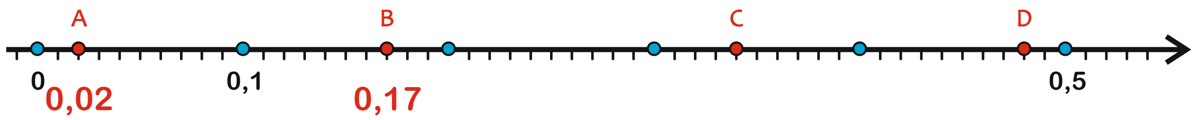
Ćwiczenie 4

Popatrz najpierw na osie i porównaj, jak jest oznaczona jednostka oraz w jaki sposób jest podzielona, następnie postaraj się odpowiedzieć na pytania.

a) Jakim liczbom odpowiadają punkty Y, Z?



b) Jakim liczbom odpowiadają punkty C, D?



2. PORÓWNYWANIE UŁAMKÓW DZIESIĘTNYCH

Przypomnijmy sobie zasadę porównywania ułamków dziesiętnych, rozwiązując ćwiczenie. Uszereguj towary od najdroższego do najtańszego.

2,35 zł

2,89 zł

2,65 zł

1,89 zł

Ułamki dziesiętne porównujemy podobnie jak liczby naturalne. Należy porównać odpowiednie cyfry w ułamkach – *odpowiednie to znaczy w tych samych rzędach:* dziesiątek, jedności, części dziesiątych, części setnych itd., zaczynając od strony lewej do prawej.

Przykład 1

4,35 ? 4,45

Cyfry jedności są takie same, więc przechodzimy do kolejnego rzędu, do części dziesiątych. Tu widzimy, że 3 < 4 i w tym miejscu kończymy porównywanie, bo już wiemy, że 4,35 < 4, 45, a cyfry w rzędzie części setnych są takie same.

Przykład 2

12,5 ? 12,52

Cyfry dziesiątek i jedności są takie same, cyfry części dziesiątych również są takie same, a więc żeby porównać te liczby, musimy porównać cyfry części setnych (ale jaka cyfra stoi na miejscu części setnych w pierwszej liczbie?).

Pamiętajmy, że zawsze możemy dopisać po przecinku zera – rozszerzyć ułamek dziesiętny, czyli porównujemy:

12,50 ? 12,52 – widzimy, że 0 < 2, więc 12,50 < 12,52.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ TOMP UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 1

Porównaj liczby, wpisując znak <, >, =

5,1 …… 3,9
13,98 …… 13,78
25,6 …… 25,61
143,52 …… 142,99
32,09 …… 32,001

Ćwiczenie 2

Wyniki finału skoku w dal kobiet na Igrzyskach Olimpijskich w roku 2012 w Londynie:

Janay DeLoach (USA) 6,89 m
Nastazja Mironczyk-Iwanowa (Białoruś) 6,72 m
Ineta Radevica (Łotwa) 6,88 m
Brittney Reese (USA) 7,12 m
Anna Nazarowa (Rosja) 6,77 m
Jelena Sokołowa (Rosja) 7,07 m
Ludmiła Kołczanowa (Rosja) 6,76 m

Uporządkuj wyniki malejąco – czyli od najwyższego do najniższego.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 3

Zapisz w postaci dziesiętnej, ile to kilogramów i uporządkuj pudełka od najlżejszego do najcięższego.

3 kg **12** dag

1 kg **125** g

2 kg **985** g

2 kg **98** g

1 kg **50** dag

Więcej zadań znajdziesz na platformie edukacyjnej MATI.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

3. RÓŻNE SPOSOBY ZAPISYWANIA DŁUGOŚCI I MASY

Postać dwumianowana – to taki sposób zapisu wielkości, w którym występują dwie jednostki, np.: złote i grosze, metry i centymetry, centymetry i milimetry, kilogramy i dekagramy, dekagramy i gramy.

Postać dziesiętna - to sposób zapisu wielkości w ułamku dziesiętnym, z wykorzystaniem zależności między jednostkami.

Przypomnij sobie, jakie znasz jednostki długości i jakie są zależności między nimi.

Długości odcinków i masę możemy zapisywać za pomocą różnych jednostek. Korzystamy przy tym z ułamków dziesiętnych lub wyrażeń dwumianowanych.

W Polsce i w większości krajów europejskich stosuje się wspólny system miar, w którym podstawową jednostką długości jest 1 metr.

1 km = 1000 m $\qquad$ 1 m = $\frac{1}{1000}$ km = 0,001 km

1 m = 100 cm $\qquad$ 1 cm = $\frac{1}{100}$ m = 0,01 m

1 dm = 10 cm $\qquad$ 1 cm = $\frac{1}{10}$ dm = 0,1 dm

1 cm = 10 mm $\qquad$ 1 mm = $\frac{1}{10}$ cm = 0,1 cm

Ćwiczenie 1

Narysuj kilka odcinków, zmierz ich długości i zapisz na dwa różne sposoby: w centymetrach i milimetrach oraz w centymetrach.

Przykład 1

Ile to centymetrów? Zauważ metodę pozwalającą na szybkie wykonywanie tych przeliczeń.

5,84 m = □□□ cm **8,83 m = □□□ cm** **7,05 m = □□□ cm**

5,84 m = 584 cm 8,83 m = 883 cm 7,05 m = 705 cm

Ćwiczenie 2

Uzupełnij samodzielnie:

13,74 m = ……… cm
6,40 m = ……… cm
78,02 m = …….... cm
254,05 m = ……… cm

Więcej przykładów i ćwiczeń znajdziesz na platformie edukacyjnej MATI.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ TOMP UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

W Polsce i w większości krajów europejskich stosuje się wspólny system miar, w którym podstawową jednostką masy jest 1 kilogram.

1 kg = 1000 g

1 kg = 100 dag

1 dag = 10 g

1 t = 1000 kg

1 g = $\frac{1}{1000}$ kg = 0,001 kg

1 dag = $\frac{1}{100}$ kg = 0,01 kg

1 g = $\frac{1}{10}$ dag = 0,1 dag

1 kg = $\frac{1}{1000}$ t = 0,001 t

Przykład 1

Ile to kilogramów, dekagramów i gramów? Tutaj też postaraj się zauważyć metodę pozwalającą na szybkie wykonywanie tych przeliczeń.

2 kg 15 dag = □□□ kg

2 kg 15 dag = 2,15 kg

8 kg 7 dag = 8 kg 07 dag = □□□ kg

8 kg 7 dag = 8 kg 07 dag = 8,07 kg

15 dag 9 g = □□□ dag

15 dag 9 g = 15,9 dag

1 kg 675 g = □□□□ kg

1 kg 675 g = 1,675 kg

1,87 kg = □ kg □□ dag = □ kg □□□ g

1,87 kg = 8 kg 87 dag = 8 kg 870 g

4,69 kg = □ kg □□ dag = □ kg □□□ g

4,69 kg = 4 kg 69 dag = 4 kg 690 g

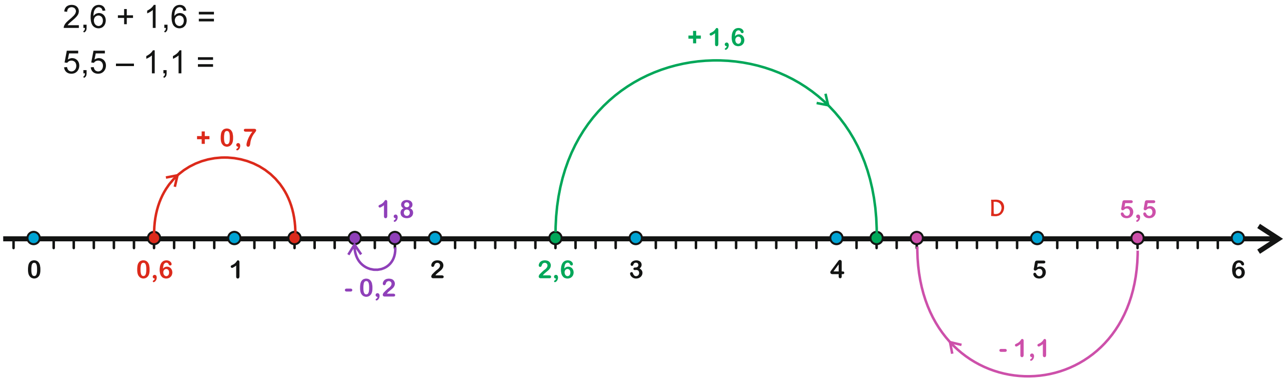
3,56 t = □ t □□□ kg

3,56 t = 3 t 560 kg

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

4. DODAWANIE I ODEJMOWANIE UŁAMKÓW DZIESIĘTNYCH

Ćwiczenie na początek:
Oblicz sumy i różnice liczb:
0,6 + 0,7 =
1,8 – 0,2 =
2,6 + 1,6 =
5,5 – 1,1 =



Dodawanie i odejmowanie ułamków dziesiętnych możemy wykonywać w pamięci, ale nie zawsze jest to proste. Możemy sobie pomóc, dodając lub odejmując sposobem pisemnym.

Pamiętamy, że w sposobie pisemnym ważne jest dokładne podpisywanie liczb w rzędach: dziesiątki pod dziesiątkami, jedności pod jednościami, przecinek pod przecinkiem, części dziesiąte pod częściami dziesiątymi, części setne pod częściami setnymi itd. Następnie postępujemy tak samo, jak przy dodawaniu i odejmowaniu liczb naturalnych.

	2	5	,	5	0
+	1	2	,	4	5
	3	7	,	9	5

	4	5	,	9	3
–	2	4	,	8	0
	2	1	,	1	3

Pamiętajmy o dopisywaniu zer, aby liczby miały tyle samo cyfr w rzędach.
Sprawdzenie – odejmowanie zawsze sprawdzamy dodawaniem:

	2	1	,	1	3
+	2	4	,	8	0
	4	5	,	9	3

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 1

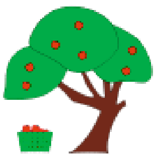
Dodajemy i porównujemy ceny zabawek.

Wybierzcie po dwie zabawki, obliczcie, ile razem kosztują, następnie porównajcie ceny waszych zakupów z zakupami koleżanki lub kolegi.

 16,50 zł	 8,99 zł	 5 zł 30 gr
 4 zł 59 gr	 15,99 zł	 16,99 zł
 7,99 zł	 17 zł 50 gr	 12 zł 99 gr

Nie wykonując dokładnych obliczeń, oszacujcie, które dwie zabawki są najtańsze, a które najdroższe.

Przykład 1



Zebrano jabłka do skrzynki.
Pusta skrzynka waży 2,05 kg – to jest tara,
skrzynka z jabłkami waży 11,65 kg – to jest waga brutto,
jabłka ważą 11,65 kg – 2,05 kg = 9,60 kg – to jest waga netto.

	0	11			
	~~1~~	~~1~~	,	6	5
–		2	,	0	5
		9	,	6	0

Sprawdzenie:

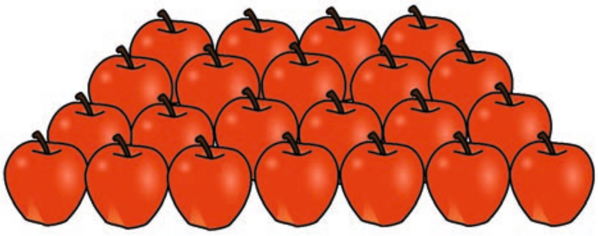
		9	,	6	0
+		2	,	0	5
	1	1	,	6	5

Więcej zadań znajdziesz na platformie edukacyjnej MATI.

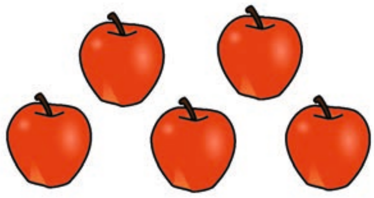
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

5. MNOŻENIE UŁAMKÓW DZIESIĘTNYCH PRZEZ 10, 100, 1000 ...

Ćwiczenie na początek



Cena hurtowa
0,85 zł / kg



Cena detaliczna
1,50 zł / kg

Chcemy obliczyć, ile kosztuje 10 kg jabłek po cenie hurtowej, a ile zapłacimy za 10 kg jabłek w cenie detalicznej.

Można to obliczyć na dwa, znane już nam, sposoby:

a) korzystamy z wyrażeń dwumianowanych,
b) zamieniamy ułamki dziesiętne na ułamki zwykłe.

Spróbujcie samodzielnie obliczyć, a później sprawdźcie:

a) 0,85 zł · 10 = 85 gr · 10 = 850 gr = 8,50 zł

1,50 zł · 10 = 1 zł 50 gr · 10 = 1 zł · 10 + 50 gr · 10 = 10 zł + 500 gr = 15 zł

b) $\frac{85}{100} \cdot 10 = \frac{85}{10} = 8\,\frac{5}{10} = 8{,}5\ zł$

$$1\frac{50}{100} \cdot 10 = \frac{150}{100} \cdot 10 = \frac{150}{10} = 15\ zł$$

Zadanie 1

A teraz samodzielnie obliczcie:

2,4 · 10
1,2 · 10
0,75 · 10

i porównajcie położenie przecinka w wynikach z położeniem przecinka w liczbie, którą mnożymy przez 10.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

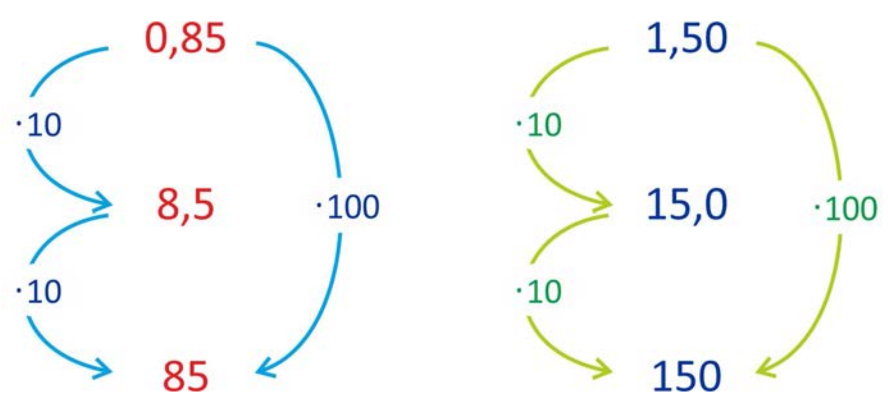
Mnożąc ułamek dziesiętny przez 10, przesuwamy przecinek o jedno miejsce w prawo.

Przykład 1

2,4 · 10 = 24
1,2 · 10 = 12
0,75 · 10 = 7,5
0,08 · 10 = 0,8
5,673 · 10 = 56,73

Zobaczmy, jak będzie się zachowywał przecinek w ułamkach dziesiętnych przy mnożeniu przez 100.

100 = 10 · 10
Możemy działanie pokazać graficznie:



W ten sposób obliczyliśmy koszt 100 kg jabłek zakupionych po cenach hurtowych i detalicznych.

hurt: 100 · 0,85 zł = 85 zł
detal: 100 · 1,5 zł = 150 zł

Mnożąc ułamek dziesiętny przez 100, przesuwamy przecinek o dwa miejsca w prawo.

Przykład 1

3,57000 · 100 = 357,000 = 357 ; 6,095 · 100 = 60,95

4,5 · 100 = 4,50 · 100 = 450 ; 0,005 · 100 = 0,5

Mnożąc ułamek dziesiętny przez 1000, przesuwamy przecinek o trzy miejsca w prawo.

Przykład 2

2,567 · 1000 = 2567 ; 23,55 · 1000 = 23,550 · 1000 = 23550

1,5 · 1000 = 1,500 · 1000 = 1500 ; 0,025 · 1000 = 25

Odpowiedz na pytanie, jak się zmienia położenie przecinka przy mnożeniu ułamka dziesiętnego przez liczbę naturalną zapisaną za pomocą jedynki i następujących po niej zer?

- 10 000
- 100 000
- 1000 000
- itd.

W wyniku mnożenia ułamka dziesiętnego przez 10, 100, 1000 otrzymujemy wynik (iloczyn) większy od tego ułamka dziesiętnego.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ Tomasz Jakubowski TOMP UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

6. DZIELENIE UŁAMKÓW DZIESIĘTNYCH PRZEZ 10, 100, 1000 ...

Ćwiczenie na początek

Mamy 1,50 kg sera i chcemy go podzielić równo na 10 porcji. Ile będzie ważyła jedna porcja?

Wykorzystując zależności między jednostkami masy, zapiszemy:

1,50 kg = 150 dag

150 dag : 10 = 15 dag = 0,15 kg

Wykorzystując zapis w postacie ułamków zwykłych, mamy:

$$1,50 = 1\,\frac{50}{100} = \frac{15}{10}$$

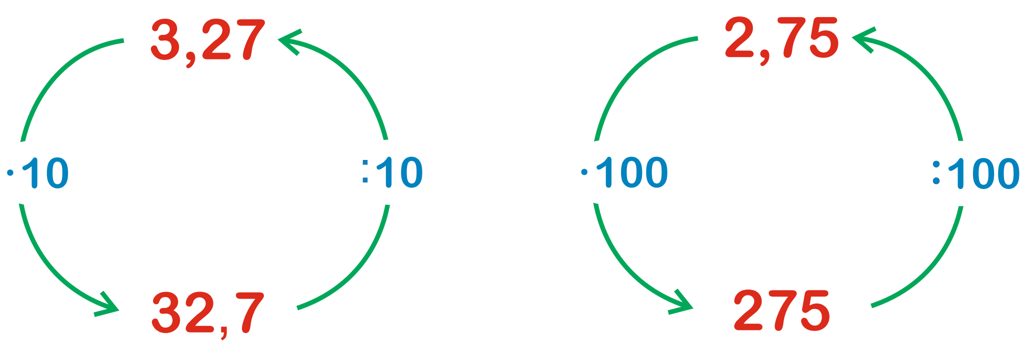
$$\frac{15}{10} : 10 = \frac{15}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{15}{100} = 0{,}15\text{kg}$$

Mieliśmy 1,5 kg sera, po podzieleniu go na 10 równych porcji każda porcja waży 0,15 kg.

Przypomnijmy sobie, jak się nazywają liczby w dzieleniu:
dzielna : dzielnik = iloraz

10, 100, 1000 są dzielnikami, ułamek dziesiętny, który dzielimy to dzielna.

Czy zauważyliście, jak się zmienia położenie przecinka w ilorazie w stosunku do przecinka w dzielnej?



A jaka jest zależność między położeniem przecinka a ilością zer w dzielniku?

Przykład 1

12,3 : 100 = 0,123 ; 2,04 : 10 = 0,204
26,85 : 100 = 0,2685 ; 450,5 : 1000 = 0,4505

Dzieląc ułamek dziesiętny przez 10, 100, 1000, przesuwamy przecinek w lewo o tyle miejsc, ile jest zer w dzielniku.

Wykonując dzielenie ułamka dziesiętnego przez 10, 100, 1000, przesuwamy przecinek odpowiednio o 1, 2 lub 3 miejsca w lewo.

0,5 : 100 = 0,005
1,6 : 1000 = 0,0016
35 : 1000 = 0,035

Zauważ, że dla dodatnich ułamków dziesiętnych:

W wyniku dzielenia ułamka dziesiętnego przez 10, 100, 1000 otrzymujemy wynik (iloraz) mniejszy od dzielnej.

W wyniku mnożenia ułamka dziesiętnego przez 10, 100, 1000 otrzymujemy wynik (iloczyn) większy od tego ułamka dziesiętnego.

Ćwiczenie 1

Oblicz:

21,24 : 10 =	21,24 :100 =	21,24 : 1000 =
5,86 : 10 =	5,86 : 100 =	5,86 : 1000 =
0,75 : 10 =	0,75 : 100 =	0,75 : 1000 =

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

7. MNOŻENIE UŁAMKÓW DZIESIĘTNYCH PRZEZ LICZBY NATURALNE

Ćwiczenie 1

Oblicz w pamięci, zastąp mnożenie dodawaniem:

$2 \cdot 0,5 = 0,5 + 0,5 = 1$

$3 \cdot 0,3 =$

$4 \cdot 0,2 =$

$5 \cdot 0,1 =$

$2 \cdot 0,02 =$

$3 \cdot 0,03 =$

$4 \cdot 0,01 =$

$5 \cdot 0,001 =$

$4 \cdot 0,002 =$

$3 \cdot 0,003 =$

Przykład 1

Mama zrobiła zapas płatków z suszonymi owocami. Kupiła 5 pudełek po 0,25 kg płatków w każdym.

Ile kilogramów płatków kupiła mama?

Można to zadanie rozwiązać trzema sposobami:

1. Wykorzystując liczby mianowane:
   0,25 kg = 25 dag
   25 dag · 5 = 125 dag = 1,25 kg
2. Wykorzystując ułamki zwykłe:

$$5 \cdot \frac{25}{100} = \frac{125}{100} = 1\frac{25}{100} = 1,25\ [\mathrm{kg}]$$

3. Obliczając działaniem pisemnym – i tego sposobu będziemy się dzisiaj uczyć.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Liczby mnożymy tak jak liczby naturalne, podpisujemy jedna pod drugą, nie zwracając uwagi na przecinek (ale nie zapominamy, że on jest w liczbie).
Miejsce przecinka ustalamy po wykonaniu działania.

			2	
		0,	2	5
	·			5
		1,	2	5

0,25 · 5 = 1,25

Miejsce przecinka w iloczynie jest zależne od liczby miejsc po przecinku w ułamku dziesiętnym, który mnożymy przez liczbę naturalną.

Przykład 2

3 · 4,6 = 13,6

		1	1		
			4,	6	jedno miejsce po przecinku
	·			3	
		1	3,	8	jedno miejsce po przecinku

7 · 2,542 =

		1	1		
	2,	5	4	2	trzy miejsca po przecinku
·				7	
1	7,	7	9	4	trzy miejsca po przecinku

Ćwiczenie 2

Oblicz w pamięci:

a) 6 · 0,5 ; b) 2 · 0,8 ; c) 7 · 0,9 ; d) 5 · 0,4 ; e) 8 · 0,6 ; f) 4 · 0,7 ; g) 3 · 0,9

Zadanie 1

Do ciężarówki, która ważyła 3,5 t, załadowano 25 stołów i 6 razy więcej krzeseł. Jeden stół waży 3 razy więcej niż krzesło, a jedno krzesło waży 3,45 kg.
Ile kilogramów ważą meble przewożone przez ciężarówkę?
Ile kilogramów waży załadowana ciężarówka?

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

8. MNOŻENIE UŁAMKÓW DZIESIĘTNYCH PRZEZ UŁAMKI DZIESIĘTNE

Ćwiczenie 1

Pomnóżmy liczby, zamieniając każdą z nich na ułamek zwykły, a wynik przedstawimy w postaci dziesiętnej:

$$0{,}2 \cdot 0{,}5 = \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{10}{100} = 0{,}10$$

$$0{,}3 \cdot 0{,}4 = \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{12}{100} = 0{,}12$$

$$0{,}4 \cdot 0{,}6 = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{24}{100} = 0{,}24$$

$$0{,}2 \cdot 0{,}03 = \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{100} = \frac{6}{1000} = 0{,}006$$

$$0{,}3 \cdot 0{,}04 = \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{100} = \frac{12}{1000} = 0{,}012$$

$$0{,}4 \cdot 0{,}01 = \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{100} = \frac{4}{1000} = 0{,}004$$

Przyjrzyj się tym iloczynom i dla każdego z nich ustal, ile cyfr po przecinku występuje w obu czynnikach, a ile w iloczynach.

Liczba miejsc po przecinku w iloczynie ułamków dziesiętnych jest równa sumie miejsc po przecinku w czynnikach.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 1

Pomnóżmy pisemnie ułamki 1,27 · 0,5:

Zapisujemy liczby jedna pod drugą,

		1	2	7
	•			5
		6	3	5

tak jakby nie było przecinków, ale pamiętamy, że w jednej liczbie są 2 miejsca, a drugiej 1 miejsce po przecinku.
2 + 1 = 3

		1	3		
		1,	2	7	dwa miejsca po przecinku
	•		0,	5	jedno miejsce po przecinku
	0,	6	3	5	trzy miejsca po przecinku

Przykład 2

Pomnóżmy pisemnie ułamki 28 · 46 = 1288

			2	8
	•		4	6
		1	6	8
+	1	1	2,	
	1,	2	8	8

Pomnóżmy pisemnie ułamki 0,28 · 4,6

		1	3		
		1	4		
		0,	2	8	dwa miejsca po przecinku
	•		4,	6	jedno miejsce po przecinku
		1	6	8	
+	1	1	2		
	1,	2	8	8	trzy miejsca po przecinku

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ TOMP UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 3

Wiemy, że 59 · 32 = 1888

			3	2
	·		5	9
		2	8	8
+	1	6	0	
	1	8	8	8

Pomnóżmy pisemnie ułamki 5,9 · 0,032

		1	1		
		2	1		
	0,	0	3	2	trzy miejsca po przecinku
	·		5	9	jedno miejsce po przecinku
		2	8	8	
+	1	6	0		
0,	1	8	8	8	cztery miejsca po przecinku

Ćwiczenie 2

Wykonaj działania w pamięci:
2,56 · 0,1
2,56 · 0,01
2,56 · 0,001
2,56 · 0,0001
Co można zauważyć?
Jakie wyniki uzyskasz, mnożąc:
- 25,6 · 0,1
- 25,6 · 0,01
- 25,6 · 0,001
- 25,6 · 0,0001

Czy za każdym razem została dobrze określona liczba cyfr po przecinkach?

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 1

Korzystając z równości **9 · 78 = 702**, oblicz iloczyny:

0,9 · 78 0,9 · 7,8 9 · 0,78 9 · 7,8 0,9 · 0,78

Teraz przypomnimy sobie, jakie działanie musimy wykonać, aby obliczyć ułamek danej liczby.

Przykład 4

0,5 liczby 12 = 0,5 · 12 = 6,
można też inaczej, w tym wypadku dla niektórych wygodniej 0,5 to $\frac{1}{2}$,
więc $\frac{1}{2} \cdot 12 = \frac{12}{2} = 6$;

nie zawsze warto zamieniać ułamek dziesiętny na zwykły, wystarczy pomnożyć pisemnie i pamietać o odpowiednim miejscu przecinka.

0,8 liczby 45 = 0,8 · 45 = 36

		3	4	
			4	5
•			0,	8
		3	6,	0

0,75 liczby 98 = 0,75 · 98 = 73,50

			5	
		4	4	
			9	8
•		0,	7	5
		4	9	0
+	6	8	6	
	7	3,	5	0

Więcej zadań znajdziesz na platformie edukacyjnej MATI.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

8.1. Potęgowanie ułamków dziesiętnych

$2^2 = 2 \cdot 2 = 4$

$(0{,}2)^2 = 0{,}2 \cdot 0{,}2$ w sumie dwa miejsca po przecinku $= 0{,}\underline{04}$ dwa miejsca po przecinku

$(0{,}02)^2 = 0{,}02 \cdot 0{,}02$ w sumie cztery miejsca po przecinku $= 0{,}\underline{0004}$

$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

$(0{,}2)^3 = 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2$ w sumie trzy miejsca po przecinku $= 0{,}\underline{008}$ trzy miejsca po przecinku

$(0{,}02)^3 = 0{,}02 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}02$ w sumie sześć miejsc po przecinku $= 0{,}\underline{000008}$

Pamiętaj, że liczba miejsc po przecinku w wyniku potęgowania jest równa sumie liczby miejsc po przecinku w czynnikach.

Ćwiczenie 1

Oblicz potęgi ułamków dziesiętnych, wiedząc ile wynosi potęga liczb naturalnych.

$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$

$(0{,}3)^2 =$

$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

$(0{,}3)^3 =$

$(0{,}03)^3 =$

$4^2 = 4 \cdot 4 = 16$

$(0{,}04)^2 =$

$0{,}04^2 =$

$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

$(0{,}4)^3 =$

$(0{,}04)^3 =$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

9. DZIELENIE UŁAMKÓW DZIESIĘTNYCH PRZEZ LICZBY NATURALNE

Ćwiczenie 1

Spróbuj zgadnąć, jakie są wyniki dzielenia.
Przypomnij sobie, jakim działaniem sprawdzamy dzielenie i sprawdź swoje przypuszczenia.

0,6 : 2 =
0,9 : 3 =
1,2 : 4 =
1,5 : 3 =
2,5 : 5 =

Niektóre ilorazy ułamków dziesiętnych przez liczby naturalne daje się obliczyć w pamięci.

Czy dobrze obliczyliśmy - sprawdzamy za pomocą mnożenia.

0,6 : 2 = 0,3 bo 0,3 · 2 = 0,6
0,9 : 3 = 0,3 bo 0,3 · 3 = 0,9

Przykład 1

Paczka, w której jest 9 sztuk lizaków, kosztuje 4,05 zł. Ile złotych kosztuje jeden lizak?

Możemy zamienić złote na grosze: 4,05 zł = 405 gr

Teraz dzielimy: 405 gr : 9
405 gr : 9 = 45 gr = 0,45 zł

		4	5		
	4	0	5	:	9
−	3	6			
		4	5		
		4	5		
		−	−		

Odpowiedź: *Jeden lizak kosztuje 0,45 zł.*

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 1 *cd.*

Możemy te rachunki wykonać, dzieląc od razu koszt paczki lizaków w złotych przez liczbę lizaków w paczce:

4,05 zł : 9

Liczby zapisujemy tak, jak przy dzieleniu liczb naturalnych.
Ponieważ w 4 całościach nie mieści się żadna 9, nad 4 wpisujemy 0 i stawiamy przecinek:

	0,				
	4,	0	5	:	9
−					

W 40 - 9 mieści się 4 razy:

	0,	4			
	4,	0	5	:	9
−	3	6			
		4			

W 45 – 9 mieści się 5 razy:

	0,	4	5		
	4,	0	5	:	9
−	3	6			
		4	5		
		4	5		
		−	−		

4,05 : 9 = 0,45

Sprawdzamy to działanie mnożeniem:

	4	4	
	0,	4	5
·			9
	4,	0	5

Odpowiedź: *Jeden lizak kosztuje 0,45 zł.*

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Aby podzielić ułamek dziesiętny przez liczbę naturalną, wykonujemy działanie tak jak na liczbach naturalnych, a w wyniku stawiamy przecinek dokładnie w tym samym miejscu, w którym jest w dzielnej.

Przykład 2

92,8 : 8

	1	1,	6		
	9	2,	8	:	8
−	8				
	1	2			
		8			
		4	8		
		4	8		
		−	−		

Sprawdzenie:

	1	4	
	1	1,	6
·			8
	9	2,	8

Przykład 3

18 : 25

		0,	7	2		
	1	8,	0	:	2	5
−	1	8	0			
	1	7	5			
	−	−	5	0		
			5	0		
			−	−		

Sprawdzenie:

	1	3	1	
		0,	7	2
·			2	5
		3	6	0
+	1	4	4	
	1	8,	0	0

Pamiętajmy, że zawsze możemy dopisać zera po przecinku, czyli rozszerzyć ułamek dziesiętny oraz do reszty dopisać zero i kontynuować dzielenie.

Kolejny przykład znajdziesz na platformie edukacyjnej MATI.

Zadanie 1

Zuzia ma 128,07 zł oszczędności. Wojtek ma 9 razy mniej pieniędzy. Ile oszczędności ma Wojtek?

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

9.1. Średnia arytmetyczna liczb

Średnia arytmetyczna dwóch liczb to iloraz sumy tych liczb przez dwa.

Średnia arytmetyczna trzech liczb to iloraz sumy tych liczb przez trzy.

Średnia arytmetyczna czterech liczb to iloraz sumy tych liczb przez cztery.

Aby obliczyć średnią arytmetyczną liczb należy te liczby dodać i ich sumę podzielić przez ich ilość.

Przykład 4

Obliczmy średnią liczb 2,5 i 4,8:

Najpierw sumujemy dane liczby: 2,5 + 4,8 = 7,3

Teraz sumę dzielimy przez dwa, bo są dwie liczby 7,3 : 2

	3,	6	5	
	7,	3	:	2
–	6			
	1	3		
–	1	2		
		1	0	
	–	1	0	
		–	–	

Sprawdzenie:

	3,	6	5
·			2
	7,	3	0

Średnia liczb 2,5 i 4,8 wynosi 3,65.

Zadanie 2

Małgosia na świadectwie miała dwie 4, pięć 5 i trzy 6. Jaką średnią ocen uzyskała dziewczynka?

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

10. PISEMNE DZIELENIE UŁAMKÓW DZIESIĘTNYCH

Ćwiczenie 1

Rozszerz ułamki dziesiętne przez 10, 100, 1000:

2,5 34,21 55,798 123,7 19,125 8,45

Aby rozszerzyć ułamki dziesiętne przez 10, 100, 1000, wystarczy przesunąć przecinek w prawo o tyle miejsc, ile występuje zer po jedynce.

Rozszerzanie ułamków dziesiętnych jest potrzebne przy dzieleniu ułamków dziesiętnych, ponieważ musimy przed wykonaniem działania doprowadzić liczby do takiej postaci, aby dzielna była liczbą naturalną.

Jeżeli zwiększymy lub zmniejszymy dzielną i dzielnik tyle samo razy, to iloraz się nie zmieni.

Przykład 1

Obliczmy: 7,15 : 0,5

Aby wykonać to działanie musimy rozszerzyć ułamki tak, aby w dzielniku nie było przecinka, musimy doprowadzić dzielnik do postaci liczby naturalnej:

dzielna 7,15

dzielnik 0,5 – aby zlikwidować przecinek musimy pomnożyć ułamek przez 10.

Tak samo musimy postąpić z dzielną:

7,15 10 = 71,5

0,5 10 = 5

Działanie 7,15 : 0,5 = przesuwamy przecinek w prawo o jedno miejsce = 71,5 : 5

i dalej dzielimy tak, jak ułamek dziesiętny przez liczbę naturalną.

7,15 : 0,5 = 14,3

	1	4,	3		
	7	1,	5	:	5
–	5				
	2	1			
–	2	0			
		1	5		
	–	1	5		
		–	–		

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 1

Zamień działanie na dzielenie przez liczbę naturalną i oblicz w pamięci:

1,2 : 0,4 = ; 4,8 : 0,8 = ; 5,6 : 0,7 = ; 0,3 : 0,15 = ; 6,4 : 0,08 =

7,2 : 0,09 = ; 1,44 : 0,12 = ; 25 : 0,25 = ; 0,65 : 0,05 =

Czy dobrze obliczyliśmy? - sprawdzamy za pomocą mnożenia.

Przykład 2

0,583 : 0,11

Aby wykonać działanie 0,583 : 0,11, musimy rozszerzyć ułamki tak, aby w dzielniku nie było przecinka:

dzielna 0,583

dzielnik 0,11 – aby zlikwidować przecinek musimy pomnożyć ułamek przez 100, tak samo musimy postąpić z dzielną.

Działanie 0,583 : 0,11 = przesuwamy przecinek, w prawo o dwa miejsca = 58,3 : 11 i dalej dzielimy tak jak ułamek dziesiętny przez liczbę naturalną.

		5,	3			
	5	8,	3	:	1	1
−	5	5				
		3	3			
−		3	3			
		−	−			

Sprawdzenie:

		5,	3
•		1	1
		5	3
+	5	3	
	5	8,	3

0,583 : 0,11 = 58,3 : 11 = 5,3

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ TOMP UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 1

Najmniejszy ptak na świecie – koliber – waży ok. 0,016 kg, a kukułka ok. 0,12 kg. Ile razy kukułka jest cięższa od kolibra?

Zadanie 2

Cena 1 kilograma sera wynosiła 20,50 zł.
Ile kilogramów sera kupił tata, jeżeli zapłacił 4,92 zł?

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

11. SZACOWANIE WYNIKÓW DZIAŁAŃ NA UŁAMKACH DZIESIĘTNYCH*

Szacowaniem możemy nazwać przybliżone określanie wartości jakiejś wielkości (ceny, długości, wysokości, masy, głębokości itp.) przy posiadaniu niepełnych danych lub przy posiadaniu danych bardzo dokładnych, np. do kilku miejsc po przecinku, podczas gdy nas interesuje ile to jest „około" lub „w przybliżeniu".

Szacowanie stosuje się w wielu naukach i dziedzinach wiedzy, handlu i działalności gospodarczej.

Nasze zadania będą dotyczyły głównie:

- wyników działań,
- cen, np. robiąc zakupy mamy w portfelu określoną ilość pieniędzy i szacujemy czy nam wystarczy na zakup określonych produktów,
- pomiarów długości,
- ładowności, pomiarów masy.

Ćwiczenie 1

Oszacuj wynik działania – nie licz dokładnie, nie używaj kalkulatora, oblicz go w przybliżeniu w pamięci:

– oszacuj, czy wynik działania jest większy od 1:

2,01 + 0,01
0,92 + 0,15
0,37 + 0,698
0,24 + 0,18

– oszacuj, czy wynik działania jest mniejszy od 10:

12,9 – 3,4
17,5 – 6,9
21,85 – 11,4
16,26 – 7,01

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 1

Oszacujmy, czy za 10 zł można kupić paczkę płatków  w cenie 4,40 zł

i karton mleka 

w cenie 3,80 zł?

4,40 zł to ok. 5 zł 3,80 to ok.4 zł

5 zł + 4 zł = 9 zł – na pewno wystarczy 10 zł na zakupy

Przykład 2

Mamy oferty dwóch biur podróży. Oszacujmy, ile będzie kosztowała trzydniowa wycieczka w Pieniny dla dwóch osób w obu biurach i porównajmy oferty.

I oferta

Wycieczka w Pieniny
przejazd (w obie strony) - 27,50 zł
całodzienne wyżywienie - 25 zł
nocleg - 12 zł

II oferta

Wycieczka w Pieniny
przejazd (w jedną stronę) - **14** zł
całodzienne wyżywienie - **23,50** zł
nocleg - **15** zł

I oferta:
przejazd ok. 30 zł dla jednej osoby – to dla dwóch ok. 60 zł

całodzienne wyżywienie dla dwóch osób 50 zł – trzy dni – to 150 zł

nocleg dla dwóch osób ok. 25 zł – dwie noce – ok. 50 zł

całość około 60 + 150 + 50 = 260 zł

II oferta:
przejazd ok. 30 zł dla jednej osoby - to dla dwóch ok. 60 zł

całodzienne wyżywienie dla jednej osoby ok. 25 zł – to dla dwóch osób ok.50 zł – trzy dni – to ok.150 zł

nocleg dla dwóch osób 30 zł – dwie noce – 60 zł

całość około 60 + 150 + 60 = 270 zł

Oferty tych biur nie różnią się dużo, szacunkowo oferta I jest tańsza.
Pewne kwoty przybliżaliśmy, inne od razu było wiadomo, ile wynoszą, ale całość wyznaczyliśmy, szacując.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 2

Poniżej przedstawione są zestawy obiadowe w stołówce szkolnej. Oszacuj, ile kosztują zestawy i określ, który jest najtańszy, a który najdroższy.

Zestaw obiadowy I	Zestaw obiadowy II	Zestaw obiadowy III
Zupa pomidorowa........2,80 zł	Rosół ....2,10 zł	Barszcz czerwony........2,60 zł
Kotlet mielony ....3,60 zł	Kopytka.......................3,50 zł	Ziemniaki ....2,10 zł
Ziemniaki ....2,10 zł	Gulasz ....3,80 zł	Kurczak pieczony ....4,30 zł
Surówka	Buraczki......................1,70 zł	Surówka z marchewki..1,80 zł
z kapusty kiszonej ....1,50 zł		
		

- Najtańszy jest zestaw …………..
- Najdroższy jest zestaw …………

Zadanie 1

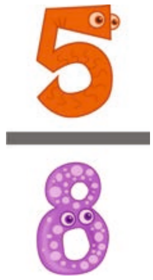
Pan Kowalski obliczył, że jego samochód spala średnio ok. 8,25 l benzyny na 100 km. W baku mieści się 45 litrów benzyny.
Czy taka ilość benzyny wystarczy na przejechanie 500 km ?

Zadanie 2

Ciężarówka ważąca 2,875 t wiozła ładunek o masie 1,94 t. Oszacuj, czy ta ciężarówka z ładunkiem może wjechać na most ze znakiem drogowym ograniczającym przejazd samochodów do 5 t.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

12. DZIAŁANIA NA UŁAMKACH ZWYKŁYCH I DZIESIĘTNYCH



Umiemy już wykonywać działania na ułamkach zwykłych i wiemy, jak rozwiązywać zadania z ułamkami dziesiętnymi, ale w niektórych zadaniach spotkamy się równocześnie z ułamkami zwykłymi i dziesiętnymi.

Aby rozwiązywać takie zadania, musimy ujednolicić postać ułamków.

Czasami będziemy zamieniać ułamki zwykłe na dziesiętne, a w innych przypadkach wygodniej będzie liczyć, zamieniając najpierw ułamki dziesiętne na zwykłe.

Przypomnijmy sobie, jak zamieniamy ułamki dziesiętne na zwykłe:

$$0{,}17 = \frac{17}{100}$$

$$3{,}241 = 3\,\frac{241}{1000}$$

$0{,}6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ -> po zamianie zawsze trzeba sprawdzić, czy ułamek można doprowadzić do prostszej postaci, czyli czy można go skrócić

Przypomnijmy sobie, jak zamieniamy ułamki zwykłe na dziesiętne:

I sposób:

Taką zamianę możemy wykonać, jeśli ułamek zwykły da się skrócić lub rozszerzyć do ułamka o mianowniku 10, 100, 1000 itd.

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{75}{100} = 0{,}75$$

$$\frac{3}{6} = \frac{3:3}{6:3} = \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{5}{10} = 0{,}5$$

$$\frac{6}{8} = \frac{6}{8} \cdot \frac{125}{125} = \frac{750}{1000} = 0{,}750$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

II sposób:

Dzielimy licznik przez mianownik, bo pamiętamy, że kreska ułamkowa zastępuje znak dzielenia.

$$\frac{11}{50} = 11 : 50 = 0{,}22$$

		0,	2	2	
	1	1	:	5	0
	1	1			
	1	1	0		
–	1	0	0		
		1	0	0	
	–	1	0	0	
		–	–		

$$\frac{3}{8} = 3 : 8 = 0{,}375$$

	0,	3	7	5
	3	:	8	
	3			
	3	0		
–	2	4		
		6	0	
	–	5	6	
			4	0
		–	4	0
			–	–

Ćwiczenie 1

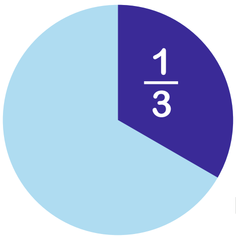
Zapisz w postaci ułamka zwykłego i skróć:

0,3 = ; 0,8 = ; 2,75 = ; 0,225 = ; 5,125 =

Zapisz w postaci ułamka dziesiętnego :

$$\frac{7}{10} = \qquad \frac{41}{100} = \qquad \frac{4}{25} = \qquad \frac{7}{20} =$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



Ułamków takich jak $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{7}{12}, \frac{11}{15}$ i wielu innych nie można zamienić na ułamek dziesiętny – dzielenie licznika przez mianownik nigdy się nie kończy - możesz to sprawdzić na kalkulatorze. Jeżeli takie ułamki występują w zadaniu, to rozwiązujemy zadanie na ułamkach zwykłych – czyli dziesiętne zamieniamy na zwykłe.

Przydatna zasada dotycząca ułamków nieskracalnych:

Np. $\frac{2}{9}$ - mianownik 9 = 3 · 3 –> nie możemy zamienić tego ułamka na dziesiętny

$\frac{11}{15} = \frac{11}{5 \cdot 3}$ -> nie możemy zamienić tego ułamka na dziesiętny

Jeśli w rozkładzie na czynniki pierwsze mianownika występują tylko liczby 2 lub 5 (lub obie razem),
to taki ułamek można zamienić na dziesiętny.
Natomiast jeżeli w rozkładzie mianownika występują inne liczby,
to takiego ułamka nie można zamienić na ułamek dziesiętny.

Przykład 1

Oblicz:

$$3{,}84 \cdot 100 - 21\,\frac{2}{5} + 1\,\frac{3}{5} =$$

Musimy pamiętać o kolejności wykonywania działań - NAJPIERW MNOŻENIE, POTEM KOLEJNO ODEJMOWANIE I DODAWANIE:

$$= 384 - 21{,}4 + 1{,}6 = 362{,}6 + 1{,}6 = 364{,}2$$

Oczywiście moglibyśmy wykonać działania, nie zamieniając ułamków:

$$3{,}84 \cdot 100 - 21\,\frac{2}{5} + 1\,\frac{3}{5} = 384 - 21\,\frac{2}{5} + 1\,\frac{3}{5} = 362\,\frac{3}{5} + 1\,\frac{3}{5} = 364\,\frac{1}{5}$$

Obie odpowiedzi i rozwiązania są prawidłowe.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ Tomasz Jakubowski TOMP UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 2

Ułamki dziesiętne zamień na zwykłe i wykonaj działania:

a) $2\frac{3}{4} + 0{,}65 =$

b) $3\frac{3}{5} \cdot 1{,}5 =$

c) $0{,}45 : \frac{1}{2} =$

d) $0{,}5 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$

Ćwiczenie 3

Ułamki zwykłe zamień na dziesiętne i wykonaj działania (możesz liczyć sposobem pisemnym):

a) $\frac{1}{2} - 0{,}85 =$

b) $\frac{3}{8} + 1{,}56 =$

c) $\frac{12}{15} \cdot 5{,}6 =$

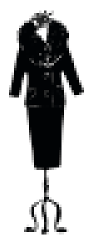
Zadanie 1

Oblicz pamiętając o kolejności wykonywania działań:

$$\left(4\frac{1}{3} - 2\frac{5}{6}\right) : 1{,}8 =$$

Zadanie 2

Krawcowa potrzebuje na uszycie kostiumu 4,8 m materiału. Na spódnicę potrzeba $\frac{2}{5}$ materiału, a resztę materiału na żakiet. Ile metrów materiału potrzeba na żakiet, a ile na spódnicę ?



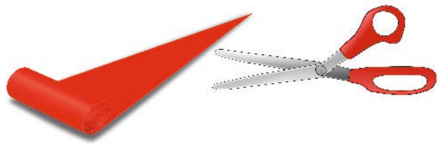
Więcej zadań znajdziesz na platformie edukacyjnej MATI.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

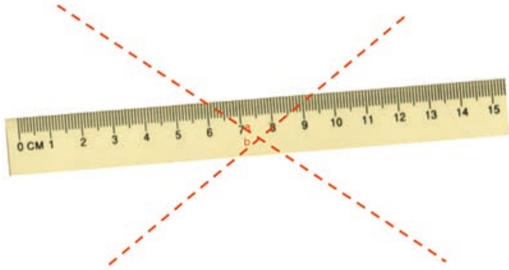
NOTATKI

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

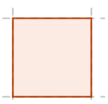
1. POJĘCIE POLA POWIERZCHNI



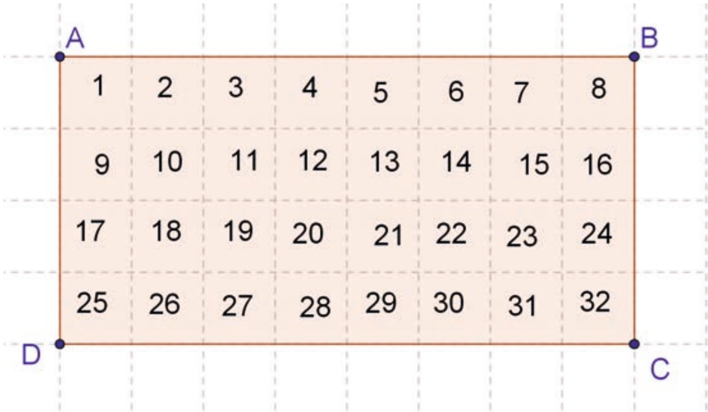
Wyobraźmy sobie, że chcielibyśmy wymienić wykładzinę w naszym pokoju. Zanim pójdziemy do sklepu, powinniśmy odpowiedzieć na pytanie: Jak duży jest obszar lub jaka jest powierzchnia zajmowana przez wykładzinę? Pomiaru nie możemy dokonać za pomocą linijki, ponieważ nie nadaje się ona do pomiaru powierzchni.



Zastosujmy inną metodę. Jako jednostkę przyjmijmy kawałek powierzchni, który dobrze znamy i potrafimy go zmierzyć. Niech to będzie np. kwadrat. Narysujmy plan naszego pokoju i podzielmy go na równe kwadraty, tak jak na rysunku poniżej:

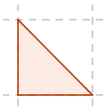
Pojedynczy kwadrat  nazywamy figurą jednostkową, a liczbę wszystkich kwadratów jednostkowych zawartych w naszym prostokącie w matematyce nazywamy polem figury. Policzmy, ile wszystkich kwadratów jednostkowych znajduje się w naszym prostokącie:

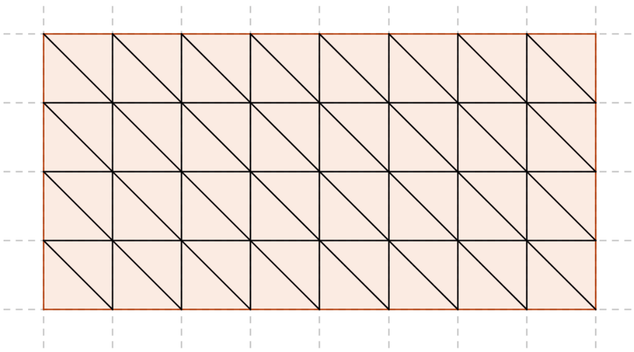
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



Jak widać, jest ich wszystkich 32.

Zatem zamiast mówić: „Jaki jest obszar?” lub: „Jaka jest powierzchnia?” w matematyce powiemy fachowo: „Jakie jest pole powierzchni figury lub po prostu jakie jest pole figury?”. Pole powierzchni powyższego prostokąta wynosi 32 kwadraty jednostkowe.

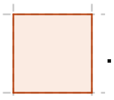
Oczywiście figurą jednostkową nie musi być kwadrat, może to być dowolna inna figura, na którą da się podzielić nasz prostokąt. Jednak najczęściej dzielimy figury na kwadraty jednostkowe. Poniżej podzieliliśmy nasz kwadrat na trójkąty prostokątne. W tym przypadku pojedynczy trójkąt  jest figurą jednostkową.

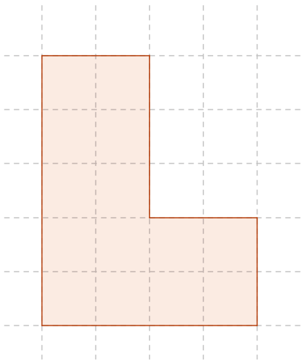


Czy potrafisz policzyć, ile ich wszystkich jest?

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ TOMP UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

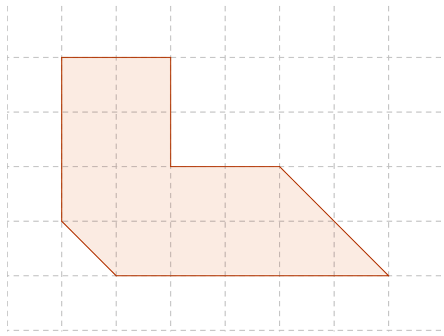
Ćwiczenie 1

Oblicz pole poniższej figury, przyjmując za jednostkę kwadrat jednostkowy  .



Ćwiczenie 2

Przyjmując za jednostkę odpowiednią figurę, oblicz pole powierzchni poniższego wielokąta w tej jednostce.



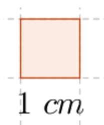
1.1. Jednostki pola powierzchni

Powiedzieliśmy sobie, że pole powierzchni figury jest liczbą wszystkich figur jednostkowych zawartych w tej figurze. Jednak zamiast rysować za każdym razem figury jednostkowe, na jakie została podzielona nasza figura, prościej jest podać dokładne jej wymiary.

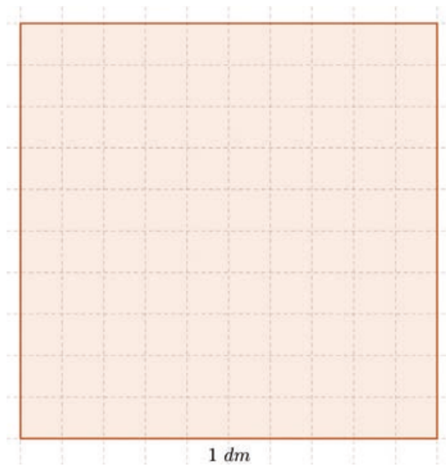
Oto przykłady jednostek pól powierzchni, których będziemy używać w szkole podstawowej, zaczynając od tej najmniejszej:

1 mm^2 - figura jednostkowa - kwadracik o boku równym 1 mm. 

1 cm^2 - figura jednostkowa - kwadrat o boku równym 1 cm.



1 dm^2 - figura jednostkowa - kwadrat o boku równym 1 dm.



Czy wiesz, ile razy bok kwadratu 1 dm^2 jest większy od boku kwadratu 1 cm^2?

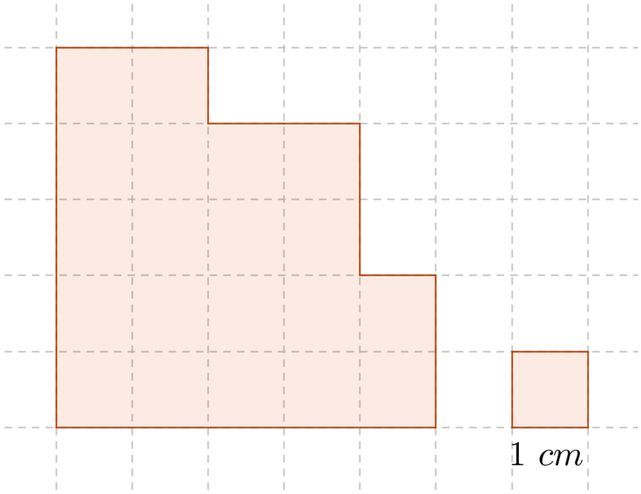
Czy wiesz, ile razy pole powierzchni kwadratu 1 dm^2 jest większe od pola kwadratu 1 cm^2?

1 m^2 - figura jednostkowa - kwadrat o boku 1 m.

1 km^2 - figura jednostkowa - kwadrat o boku 1 km.

Ćwiczenie 1

Ile cm^2 wynosi pole wielokąta pokazanego na rysunku?

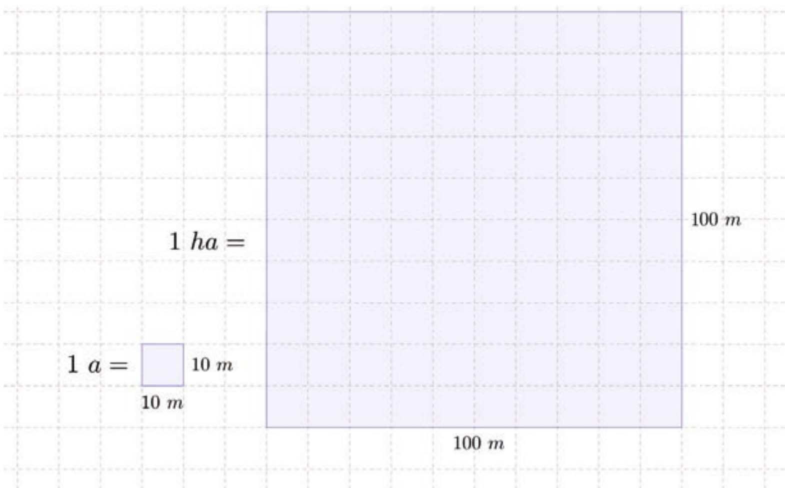


Jednostki używane w rolnictwie:

W rolnictwie i leśnictwie używamy następujących jednostek:

1 ha (czyt. jeden hektar) - jest to powierzchnia kwadratu o boku 100 m.

1 a (czyt. jeden ar) - jest to powierzchnia kwadratu o boku 10 m.



KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zatem:

$1\ ha = 100\ m \cdot 100\ m = 10000\ m^2$

$1\ a = 10\ m \cdot 10\ m = 100\ m^2$

$1\ a = 0{,}01\ ha = 100\ m^2$ *czyt. jeden ar*

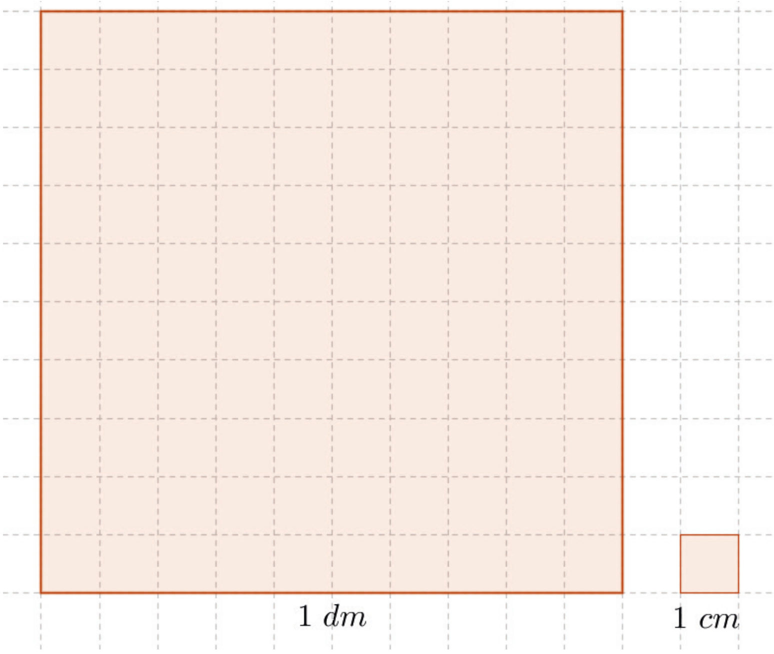
$1\ ha = 100\ a = 10000\ m^2$ *czyt. jeden hektar*

1.2. Zależności między jednostkami pola - zamiana jednostek pól powierzchni

Przykład 1

Zamień 1 dm^2 na cm^2

Musimy policzyć, ile małych kwadratów o boku 1 cm zmieści się w dużym kwadracie o boku 1 dm.



Nietrudno zauważyć, że w dużym kwadracie jest ich wszystkich $10 \cdot 10 = 100$

Zatem:

$$1\ dm^2 = 1\ dm \cdot 1\ dm = 10\ cm \cdot 10\ cm = 100\ cm^2$$

Podobnie:

$$1\ m^2 = 1\ m \cdot 1\ m = 10\ dm \cdot 10\ dm = 100\ dm^2$$
$$1\ cm^2 = 1\ cm \cdot 1\ cm = 10\ mm \cdot 10\ mm = 100\ mm^2$$
$$1\ km^2 = 1\ km \cdot 1\ km = 1000\ m \cdot 1000\ m = 1000000\ m^2$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

W matematyce iloczyn dwóch jednakowych liczb np. $7 \cdot 7$ zapisujemy krócej jako 7^2 i czytamy siedem do kwadratu lub 7 do potęgi drugiej. Zapis ten w matematyce używany jest mniej więcej od XVII wieku.

W skrócie metoda przeliczania jednostek pól powierzchni polega na przeliczaniu jednostek i podnoszeniu ich do kwadratu.

Przykład 2

Zamień 23 cm^2 na mm^2

$$23\ cm^2 = 23 \cdot 1\ cm^2 = 23 \cdot (10\ mm)^2 = 23 \cdot 100\ mm^2 = 2300\ mm^2$$

Przykład 3

Zamień 124 dm^2 na cm^2

$$124\ dm^2 = 124 \cdot 1\ dm^2 = 124 \cdot (10\ cm)^2 = 124 \cdot 100\ cm^2 = 12400\ cm^2$$

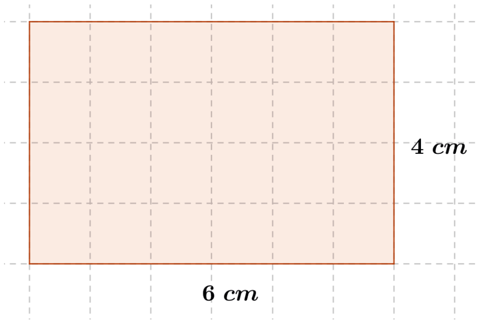
Więcej przykładów znajdziesz na platformie edukacyjnej MATI.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

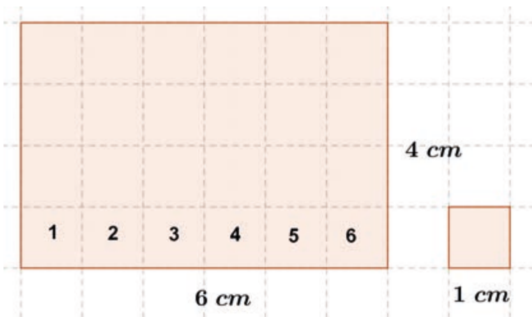
2. POLE PROSTOKĄTA I KWADRATU

Wiemy, że polem dowolnej figury jest liczba wszystkich kwadratów jednostkowych, na jakie możemy podzielić naszą figurę. Zastanówmy się więc, jak policzyć pole powierzchni prostokąta o wymiarach 6 cm x 4 cm. Zapis 6 cm x 4 cm (czyt. 6 cm na 4 cm) oznacza, że nasz prostokąt ma długość równą 6 cm i szerokość 4 cm.

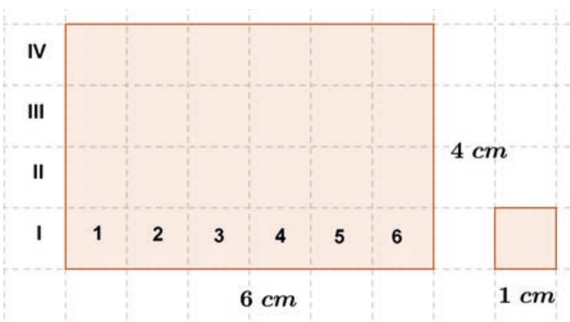
Podzielmy nasz prostokąt na kwadraty jednostkowe o boku 1 cm, tak jak na rysunku.



Czy wiesz jak je szybko policzyć?
Policzmy najpierw, ile kwadratów o boku 1 cm mieści się w pojedynczym rzędzie?
W pojedynczym rzędzie mieści się 6 kwadracików.



Ile jest takich rzędów w naszym prostokącie?
W naszym prostokącie są 4 rzędy po 6 kwadracików.

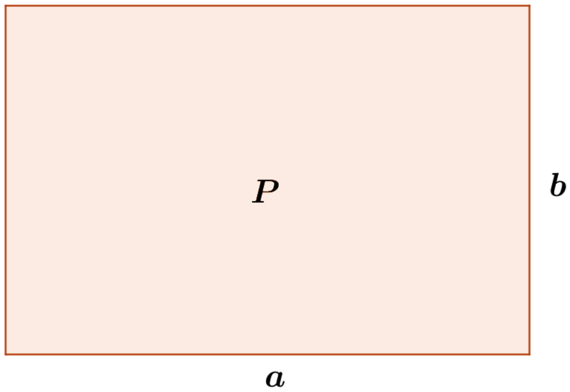


Zatem wszystkich kwadracików o boku 1 cm jest $6 \cdot 4 = 24$. Z poprzedniej lekcji wiemy, że kwadrat o boku 1 cm oznaczamy jako 1 cm^2. Zatem pole P naszego prostokąta wynosi 24 cm^2, co zapisujemy:

$$P = 6\ cm \cdot 4\ cm = 24\ cm^2$$

Zapiszmy i zapamiętajmy wzór na pole prostokąta:

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
WPQ
TOMP
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



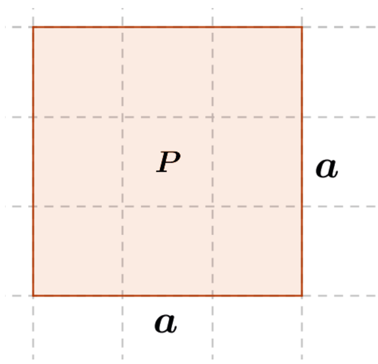
Pole powierzchni P prostokąta obliczamy ze wzoru:

$$P = a \cdot b$$

$a,\ b$ - długości boków prostokąta wyrażone w tej samej jednostce (długość razy szerokość)

Pole kwadratu

Ponieważ kwadrat jest prostokątem, którego wszystkie boki są równe, jego pole liczymy w ten sam sposób.



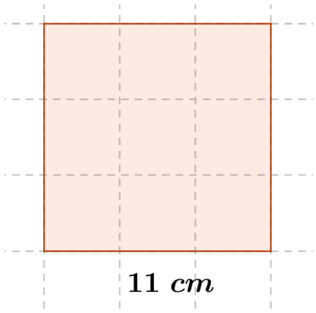
$P = a \cdot a$
$P = a^2$
a - długość boku kwadratu

2.1. Obliczanie pola prostokąta (kwadratu)

Długości boków prostokąta wyrażone w tej samej jednostce:

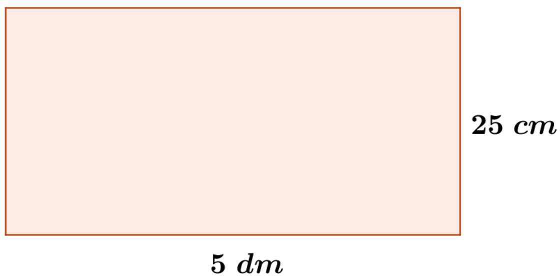
Zadanie 1

Obliczyć pole kwadratu o boku długości 11 cm.



Zadanie 2

Obliczyć pole prostokąta o bokach długości 5 dm i 25 cm.



Zadanie 3

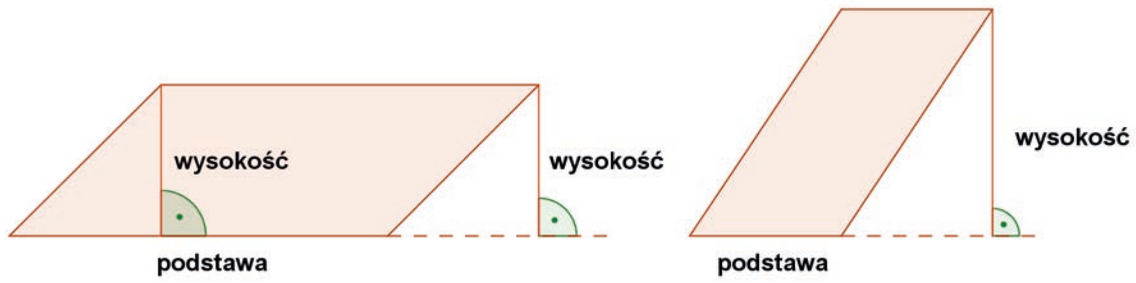
Wyznaczyć długość boku kwadratu, wiedząc, że jego pole wynosi 16 cm^2.

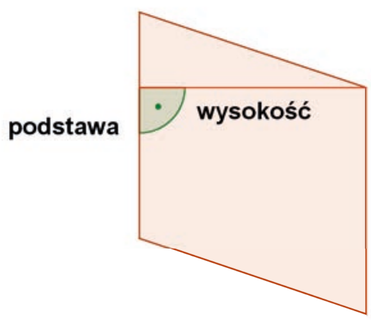
Więcej zadań znajdziesz na platformie edukacyjnej MATI.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

3. WYSOKOŚĆ RÓWNOLEGŁOBOKU

Wysokość równoległoboku kreślimy z dowolnego punktu podstawy górnej równoległoboku prostopadle do podstawy lub przedłużenia podstawy. Najczęściej jednak wysokość równoległoboku wyprowadzamy z jednego z jego wierzchołków górnej podstawy w kierunku dolnej podstawy. Wysokość figury zawsze opada na podstawę tej figury, dlatego mówimy, że wysokość oraz podstawa figury tworzą nierozłączną parę (występują razem).





Wysokość równoległoboku jest to odległość miedzy parą boków równoległych. Wysokość równoległoboku jest odcinkiem prostopadłym do jego podstaw.

Rysowanie wysokości równoległoboku

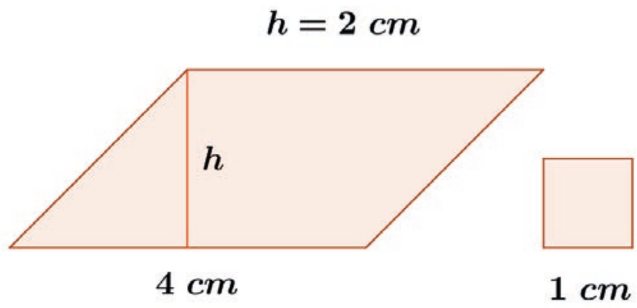
Żeby narysować jedną z wysokości równoległoboku, powinniśmy posłużyć się ekierką.

Obejrzyj animację na platformie MATI.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

4. POLE RÓWNOLEGŁOBOKU

Jak policzyć pole równoległoboku?



Ile kwadratów jednostkowych znajduje się w równoległoboku przedstawionym na rysunku powyżej?

W tym przypadku można to policzyć. W równoległoboku jest 6 całych kwadracików oraz 4 połówki kwadratów (czy możesz je wskazać?). Zatem w sumie jest ich 8. Pole tego równoległoboku wynosi 8 cm^2.

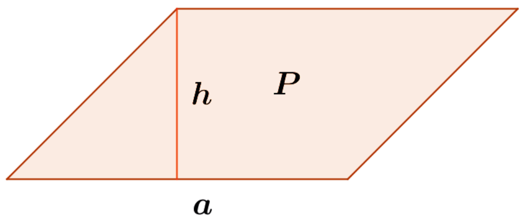
Nie zawsze jednak obliczanie pola powierzchni równoległoboku metodą liczenia kwadratów jednostkowych jest takie proste. Dzieje się tak dlatego, że kwadraciki nie zawsze dokładnie wypełniają obszar równoległoboku. Zastosujemy inną metodę.

Narysujmy równoległobok na kartce papieru, dorysujmy wysokość poprowadzoną z wierzchołka górnej podstawy, a następnie wytnijmy nożyczkami trójkąt wzdłuż wysokości. Wycięty trójkąt przykładamy do drugiego ramienia równoległoboku.

Obejrzyj animację na platformie MATI.

Pole tak otrzymanego prostokąta jest równe polu równoległoboku.

$$P = a \cdot h$$



Pole równoległoboku o podstawie równej a i wysokości h wynosi:

$$P = a \cdot h$$

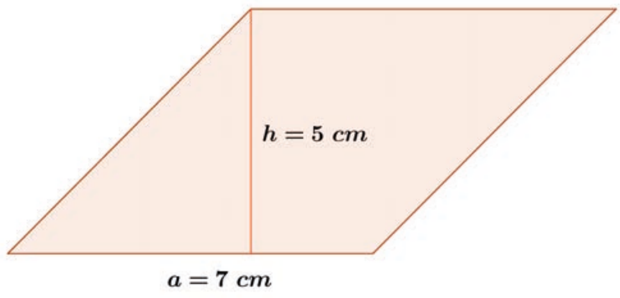
$a,\ h$ - muszą być wyrażone w tej samej jednostce

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

4.1. Obliczanie pola równoległoboku

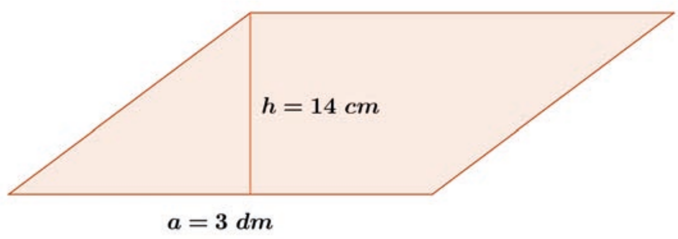
Zadanie 1

Oblicz pole powierzchni równoległoboku, którego podstawa ma długość 7cm, a wysokość jest równa 5cm.



Zadanie 2

Oblicz pole równoległoboku, którego podstawa jest równa 3 dm, a wysokość wynosi 14 cm.



Zadanie 3

Długość podstawy równoległoboku ma 7 dm. Wysokość równoległoboku jest 3 razy dłuższa od jego podstawy. Oblicz pole powierzchni tego równoległoboku.

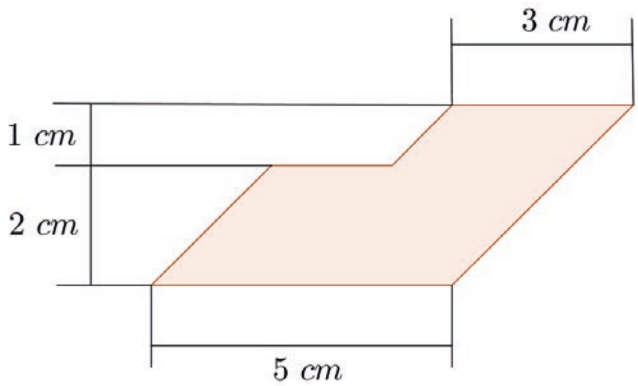
Więcej zadań znajdziesz na platformie edukacyjnej MATI.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

4.2. Obliczanie pól powierzchni figur - równoległoboki

Zadanie 1

Obliczyć pole powierzchni figury przedstawionej na rysunku poniżej:

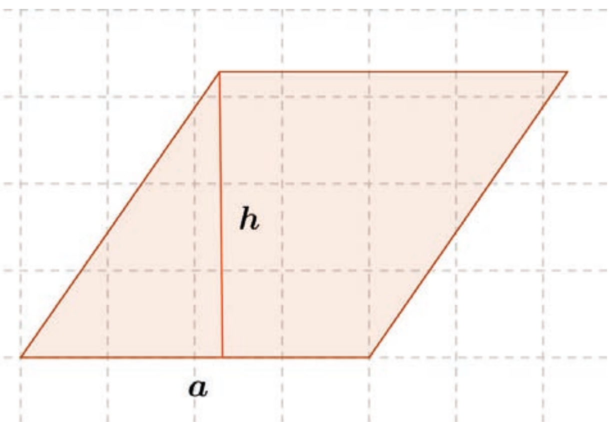


4.3. Pole rombu

Pole rombu możemy policzyć na dwa sposoby:

I sposób:
Obliczanie pola rombu o danej podstawie i wysokości

Romb jest w szczególności równoległobokiem, więc jego pole liczymy ze wzoru na pole równoległoboku.



$$P = a \cdot h$$

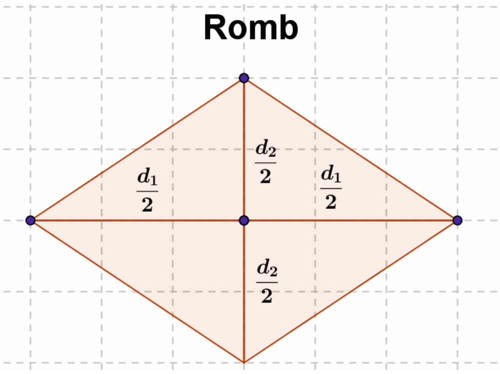
$a,\ h$ - długości podstawy i wysokości rombu wyrażone w tej samej jednostce

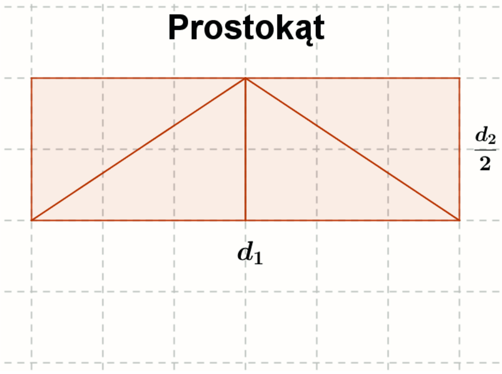
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ TOMP UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

II sposób:

Obliczanie pola rombu o danych przekątnych

W tym przypadku przekątne rombu podzieliły nasz romb na cztery trójkąty prostokątne. Umiejętne przełożenie tych trójkątów sprowadza nasz romb do prostokąta o takim samym polu, którego pole powierzchni umiemy już policzyć.





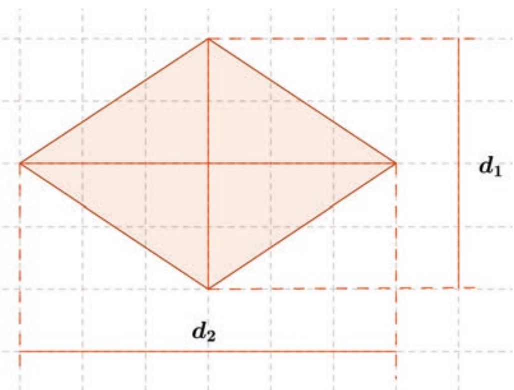
Obejrzyj animację na platformie MATI.

$$P = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$$

Ćwiczenie 1

Narysuj obok siebie dwa romby o przekątnych d_1, d_2, przekątne podzielą każdy z rombów na 4 trójkąty prostokątne, następnie z tych 8 trójkątów spróbuj zbudować prostokąt. Jaki wniosek wyciągniesz z tego ćwiczenia?

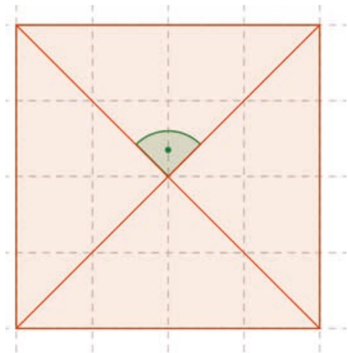
Pole rombu P o długościach przekątnych równych d_1 i d_2 wynosi:



$$P = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wiemy, że kwadrat jest szczególnym przypadkiem rombu. Dobrze wiesz, że w kwadracie obie przekątne są równe.
Zatem możemy obliczyć pole powierzchni kwadratu, gdy mamy daną jego przekątną.



Czy wiesz, jak policzyć pole kwadratu, którego jedna z przekątnych jest równa ***d***?

Pole rombu o przekątnych ***d*** wynosi:

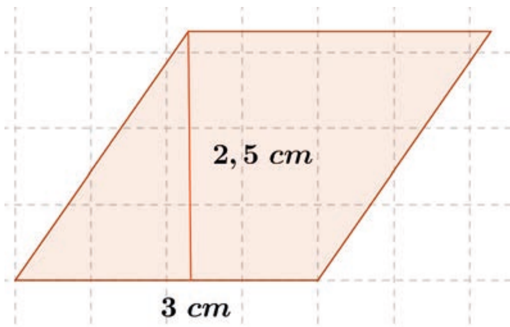
$$P = \frac{1}{2} \cdot d \cdot d$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot d^2$$

4.4. Obliczanie pola powierzchni rombu

Zadanie 1

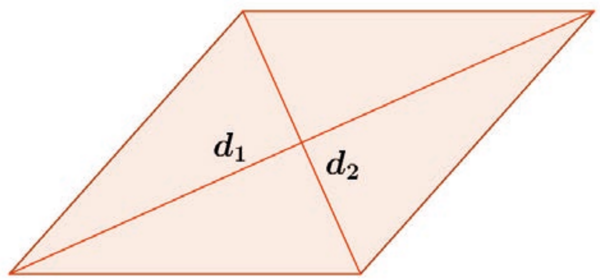
Oblicz pole powierzchni rombu o podstawie długości 3 cm oraz wysokości 2,5 cm.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 2

Oblicz pole powierzchni rombu, którego przekątne wynoszą $d_1 = 4$ dm oraz $d_2 = 55$ cm.



Zadanie 3

Pole powierzchni rombu wynosi 65 cm^2. Oblicz wysokość rombu, jeżeli długość jego podstawy jest równa 8 cm.

Więcej zadań znajdziesz na platformie edukacyjnej MATI.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

5. WYSOKOŚĆ TRÓJKĄTA

Wysokość trójkąta, podobnie jak równoległoboku, rysujemy z jednego z wierzchołków trójkąta prostopadle do boku będącego naprzeciwko tego wierzchołka i oznaczamy ją literką h. Długość boku, na który opuszczona została wysokość trójkąta, nazywamy jego podstawą i zwykle oznaczamy literką a. W tym samym trójkącie możemy narysować tyle wysokości, ile mamy wierzchołków, pamiętając o tym, że każda wysokość ma swoją podstawę i jest do niej prostopadła. Aby narysować poprawnie wysokość w zeszycie, należy posłużyć się ekierką (dlaczego?).

Rysowanie wysokości z wierzchołka A opuszczonej na podstawę BC:

Obejrzyj animację na platformie MATI.

Rysowanie wysokości z wierzchołka C opuszczonej na podstawę AB:

Obejrzyj animację na platformie MATI.

Zauważ, że w tym przypadku wysokość z wierzchołka C rysujemy na zewnątrz trójkąta do przedłużenia boku AB.

Wysokością trójkąta nazywamy długość odcinka poprowadzonego z jednego z jego wierzchołków i opadającego prostopadle na podstawę (lub przedłużenie podstawy).

Ćwiczenie 1

Narysuj w zeszycie trójkąt prostokątny, a następnie narysuj jego trzy wysokości.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ TOMP UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

6. POLE TRÓJKĄTA

I sposób

Zbudujmy z naszego trójkąta prostokąt tak, jak pokazuje animacja na platformie MATI.

Pole powstałego prostokąta wynosi:

$$P = a \cdot \frac{1}{2}h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$$

II sposób

Równoległobok, którego pole potrafimy już policzyć, dzielimy przekątną na dwa przystające (identyczne) trójkąty, a następnie jeden z trójkątów odrzucamy. Powstały trójkąt ma identyczną podstawę oraz wysokość z równoległobokiem, ale jego pole jest o połowę mniejsze (dlaczego?).

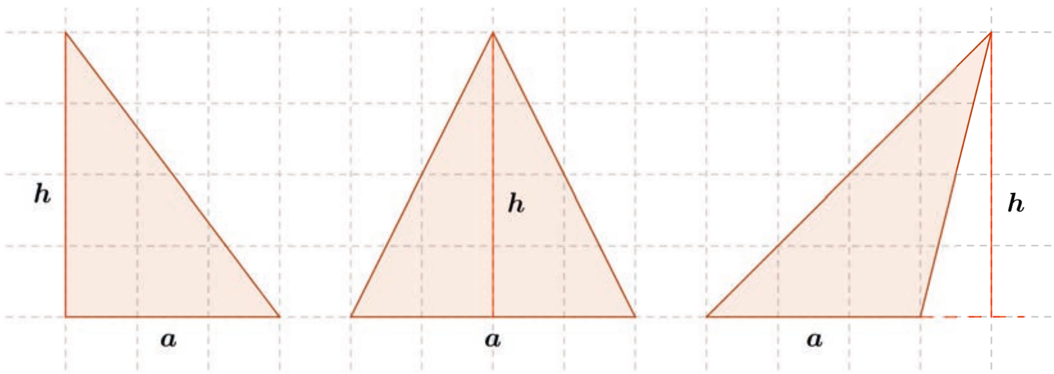
$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$$

Obejrzyj animację na platformie MATI.

Pole trójkąta P o podstawie równej a i wysokości h opuszczonej na tę podstawę obliczamy ze wzoru:

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$$

a oraz h wyrażone są w tej samej jednostce



KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

6.1. Obliczanie pola powierzchni trójkąta

Zadanie 1

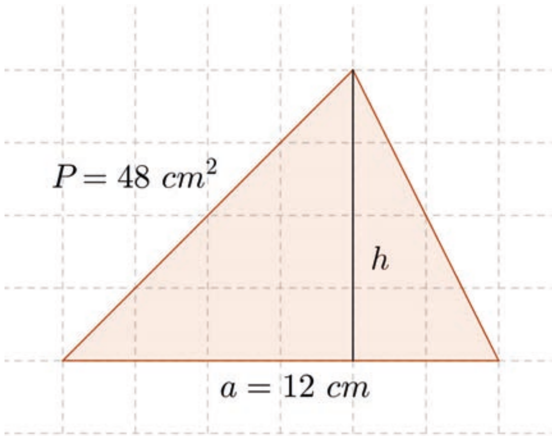
Oblicz pole powierzchni trójkąta o podstawie równej 3 cm i wysokości 5 cm.

Zadanie 2

Oblicz pole powierzchni trójkąta o podstawie równej 75 cm i wysokości 5 dm.

Zadanie 3

Pole powierzchni trójkąta wynosi 48 cm^2. Długość podstawy trójkąta jest równa 12 cm. Oblicz wysokość tego trójkąta.



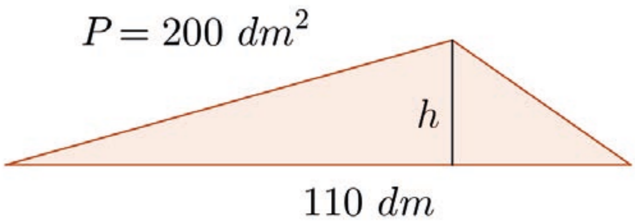
Więcej zadań znajdziesz na platformie edukacyjnej MATI.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

6.2. Obliczanie długości wysokości w trójkącie

Zadanie 1

Pole powierzchni trójkąta wynosi 220 dm^2. Oblicz długość wysokości trójkąta, jeżeli długość jego podstawy wynosi 1100 cm.

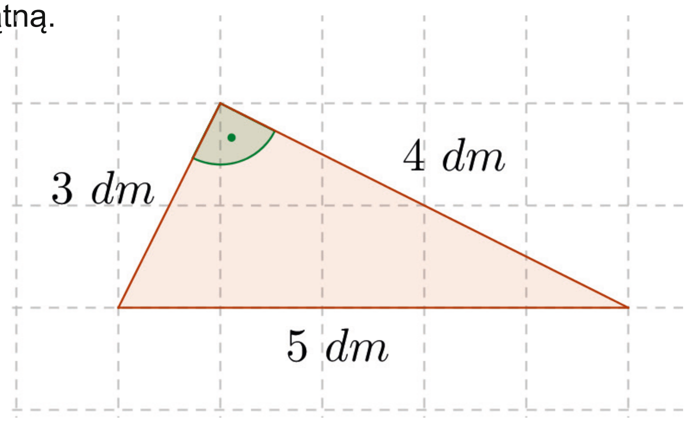


Zadanie 2

Oblicz długość podstawy trójkąta, o polu powierzchni 78 cm^2 i wysokości 8 cm.

Zadanie 3

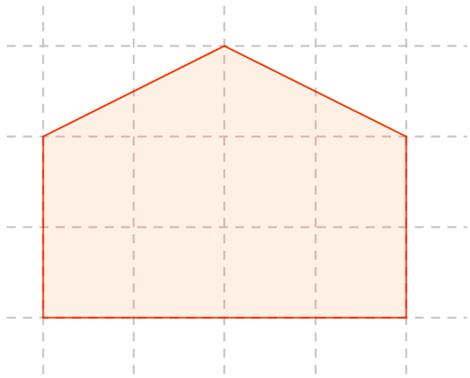
W trójkącie prostokątnym długości boków wynoszą odpowiednio: 3 dm, 4 dm oraz 5 dm. Oblicz długość wysokości w tym trójkącie, poprowadzonej na przeciwprostokątną.



6.3. Pola powierzchni figur - trójkąty

Zadanie 1

Przyjmując za jednostkę 1 cm, oblicz pole powierzchni figury przedstawionej na rysunku poniżej:



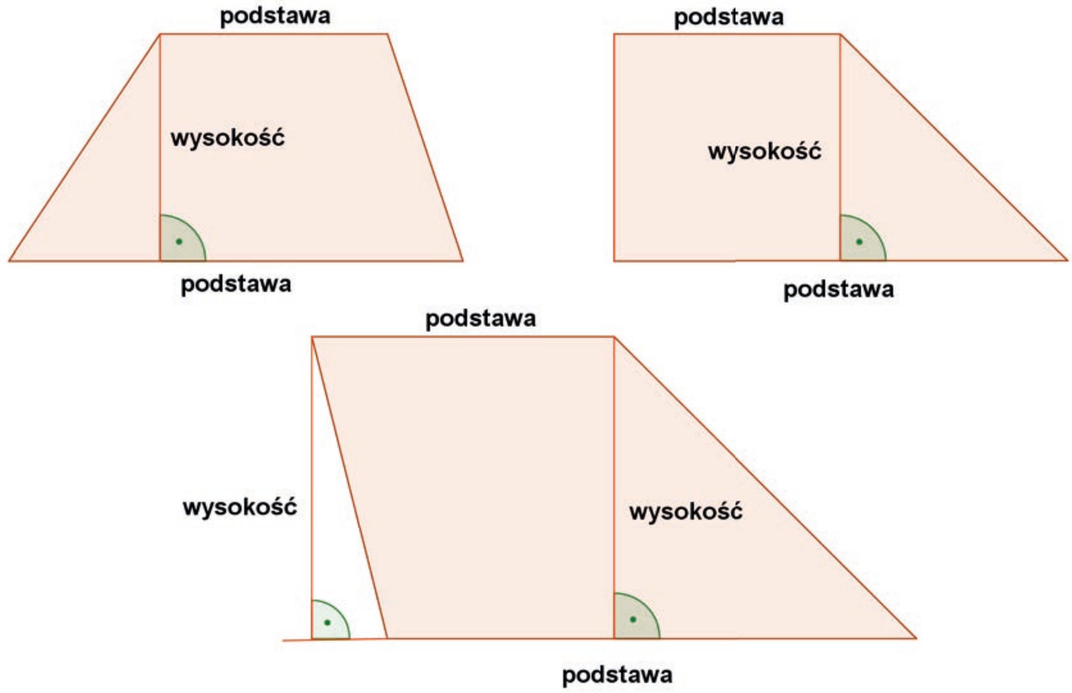
Więcej zadań znajdziesz na platformie edukacyjnej MATI.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

7. WYSOKOŚĆ TRAPEZU

Trapezem, jak pamiętamy, jest czworokąt, który ma jedną parę boków równoległych. Boki równoległe w trapezie nazywamy podstawami, natomiast pozostałe dwa boki ramionami trapezu. Długość odcinka łączącego ramiona trapezu, prostopadle do nich, nazywamy wysokością trapezu.

Oto przykłady trapezów oraz ich wysokości:



W zadaniach najczęściej rysujemy tylko jedną wysokość z dowolnego wierzchołka trapezu. Aby dokładnie narysować wysokość, powinniśmy posłużyć się ekierką (dlaczego?).

Długości podstaw trapezu najczęściej oznaczamy jako a oraz b, natomiast wysokość trapezu jako h.

7.1. Rysowanie wysokości trapezu

Obejrzyj animację na platformie MATI.

Wysokością trapezu nazywamy odległość między jego podstawami. Wysokość trapezu jest to długość odcinka łączącego podstawy trapezu i prostopadłego do nich.

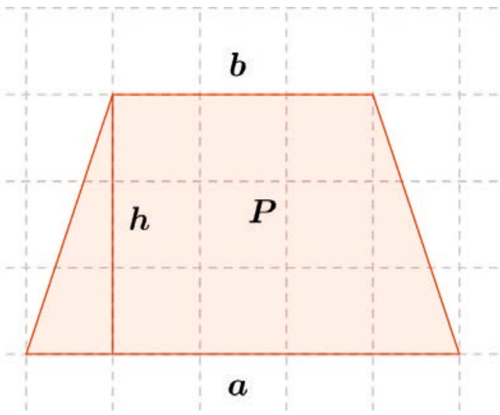
8. POLE TRAPEZU

Przyjrzyj się animacjom oraz uzasadnij wzór na pole trapezu.

Obejrzyj animację na platformie MATI.

Pole P trapezu o podstawach równych a i b i wysokości h wynosi:

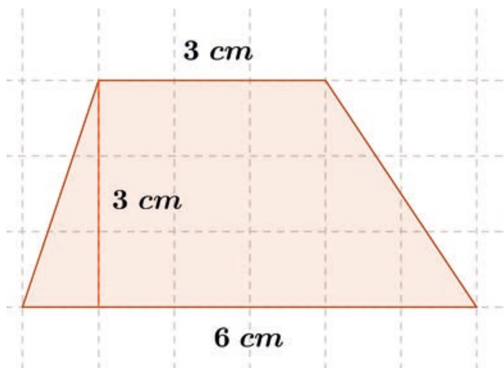
$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$$



8.1. Obliczanie pola powierzchni trapezu

Zadanie 1

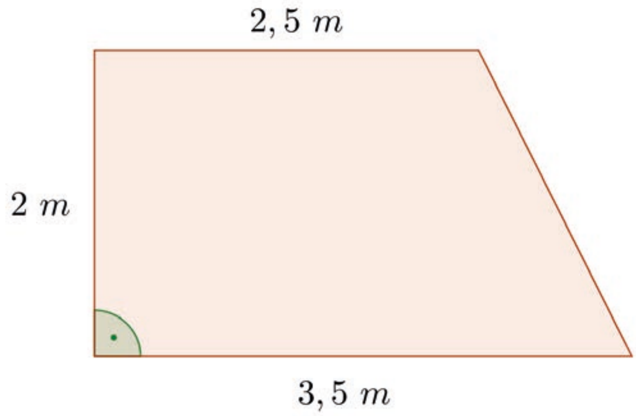
Oblicz pole powierzchni trapezu o podanych wymiarach:



KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 2

Pan Wojtek ma działkę, której plan przedstawiony jest na rysunku poniżej.



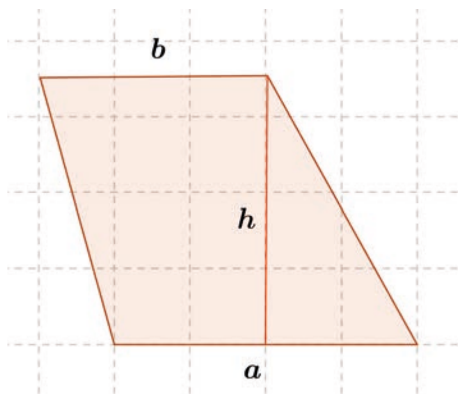
Ile drzewek może posadzić na tej działce Pan Wojtek, jeżeli jedno drzewko zajmuje 1 m^2?

Więcej zadań znajdziesz na platformie edukacyjnej MATI.

8.2. Obliczanie pola powierzchni trapezu 2

Zadanie 1

Obliczyć pole trapezu o podstawach równych 4 dm oraz 3 dm i wysokości równej 35 cm.



Zadanie 2

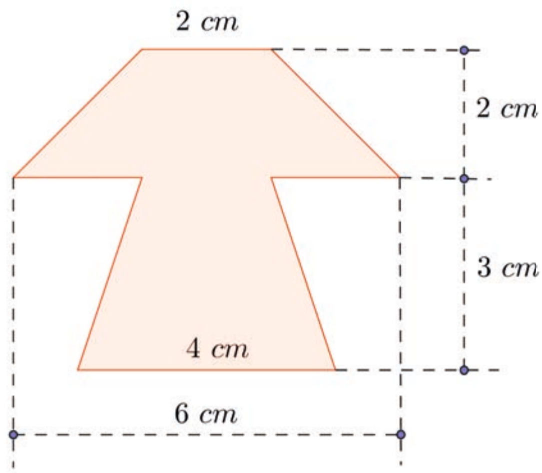
Oblicz sumę długości podstaw trapezu o polu powierzchni równym 18 dm^2, jeżeli długość jego wysokości wynosi 8 dm.

Więcej zadań znajdziesz na platformie edukacyjnej MATI.

8.3. Obliczanie pól powierzchni figur - trapezy

Zadanie 1

Zmierz potrzebne długości odcinków oraz policz pole powierzchni figury przedstawionej na rysunku.

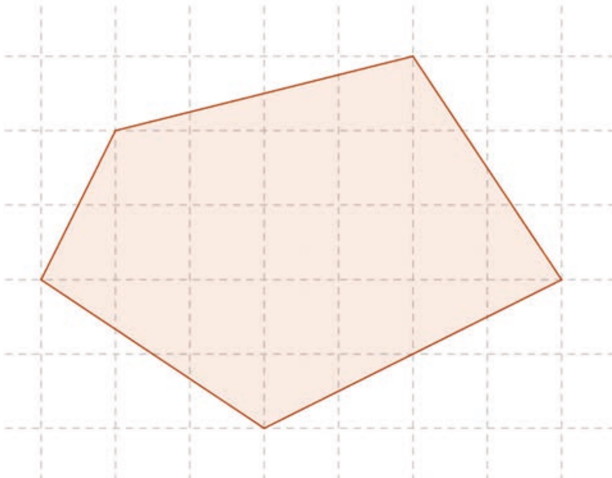


Więcej zadań znajdziesz na platformie edukacyjnej MATI.

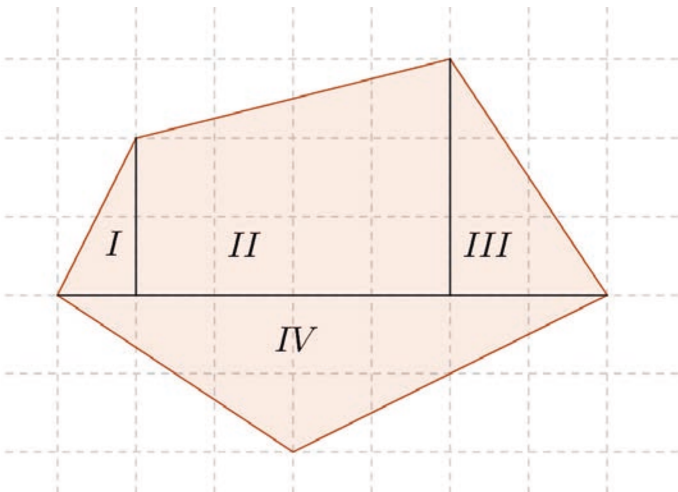
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

9. POLE WIELOKĄTA 1

Chcąc policzyć pole wielokąta, zazwyczaj dzielimy go na figury, których pola potrafimy policzyć i obliczamy sumę pól otrzymanych figur. Przykładowo, chcemy policzyć pole powierzchni wielokąta przedstawionego na rysunku:



Możemy go podzielić na znane nam figury na wiele sposobów, wybierzmy jeden z nich:

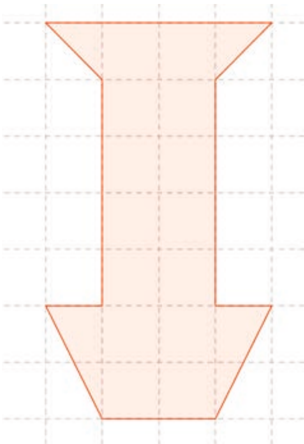


Z rysunku widać, że podzieliliśmy nasz wielokąt na cztery figury (jakie?), których pola powierzchni, po odczytaniu odpowiednich długości odcinków, potrafimy już liczyć. Suma pól powierzchni otrzymanych w wyniku podziału figur jest polem powierzchni naszego całego wielokąta.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 1

Podziel figurę przedstawioną na rysunku na jak najmniejszą liczbę znanych Ci figur.



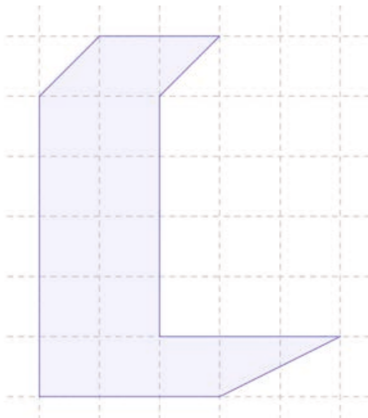
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

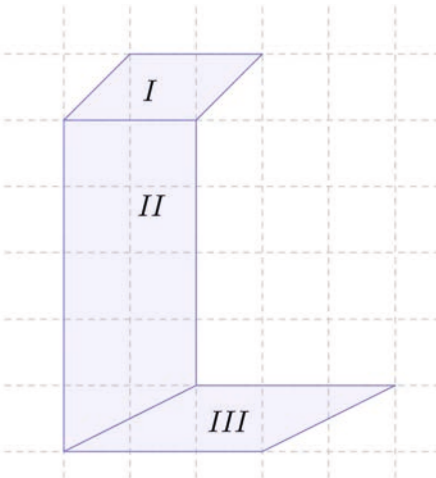
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 1

Przyjmując za jednostkę kwadrat o boku ***j***, oblicz pole powierzchni wielokąta przedstawionego na rysunku poniżej:



Podzielmy naszą figurę na wielokąty, których pola potrafimy liczyć:



$$P = P_I + P_{II} + P_{III}$$

Odczytujemy długości odpowiednich boków i obliczamy pole powierzchni równoległoboku I

$$P_I = a \cdot h$$
$$P_I = 2\,j \cdot 1\,j$$
$$P_I = 2\,j^2$$

Obliczamy pole powierzchni trapezu prostokątnego II

$$P_{II} = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$$
$$P_{II} = \frac{1}{2} \cdot (5\,j + 4\,j) \cdot 2\,j$$
$$P_{II} = 9\,j^2$$

Obliczamy pole powierzchni równoległoboku III

$$P_{III} = a \cdot h$$
$$P_{III} = 3\,j \cdot 1\,j$$
$$P_{III} = 3\,j^2$$

Obliczamy pole całego wielokąta:

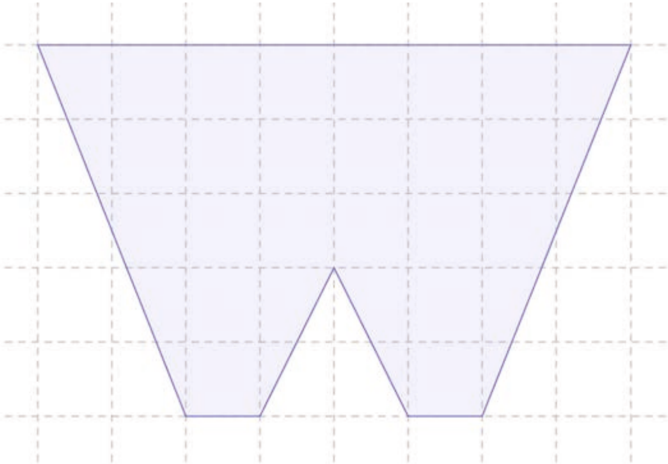
$$P = 2\,j^2 + 9\,j^2 + 3\,j^2$$
$$P = 14\,j^2$$

Odpowiedź: *Pole rozważanego wielokąta wynosi 14 j^2.*

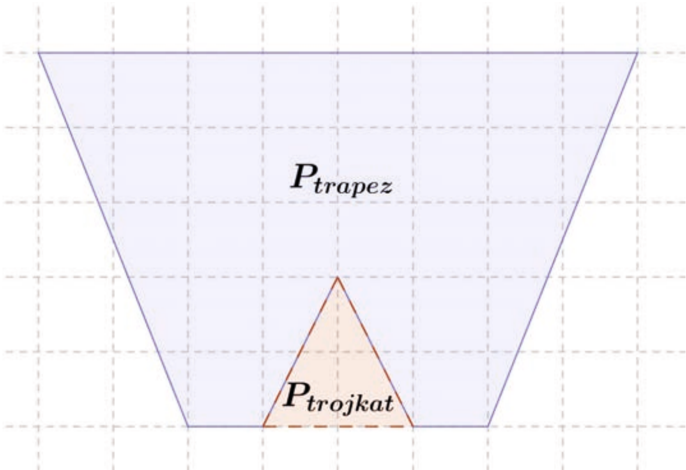
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

10. POLE WIELOKĄTA 2

W niektórych sytuacjach zamiast dzielić wielokąt na mniejsze figury i liczyć sumę pól powierzchni otrzymanych figur wygodniej jest postąpić inaczej. Rozważmy jako przykład wielokąt przedstawiony na rysunku poniżej:



Chcąc policzyć pole powierzchni powyższego wielokąta, możemy dorysować trójkąt i obliczyć pole powierzchni całego trapezu:



Pole naszej całej figury policzymy,W odejmując od pola całego trapezu pole zaznaczonego trójkąta, zatem:

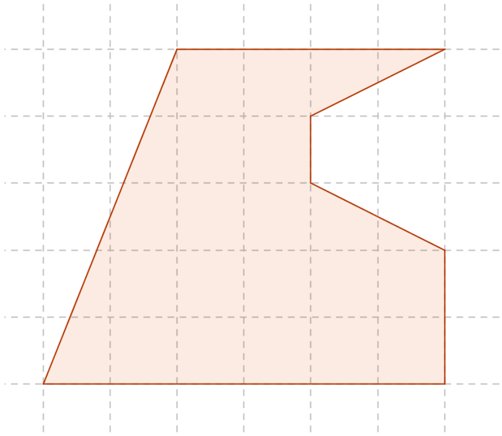
$$P = P_{trapez} - P_{trojkat}$$

Pamiętaj, że sposób rozwiązania zadania zależy głównie od Ciebie. W niektórych sytuacjach do poprawnego rozwiązania zadania można dojść o wiele szybciej. Dlatego warto się zastanowić przez chwilę, czy naszego zadania nie można rozwiązać innymi metodami.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ Tomasz Jakubowski TOMP UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

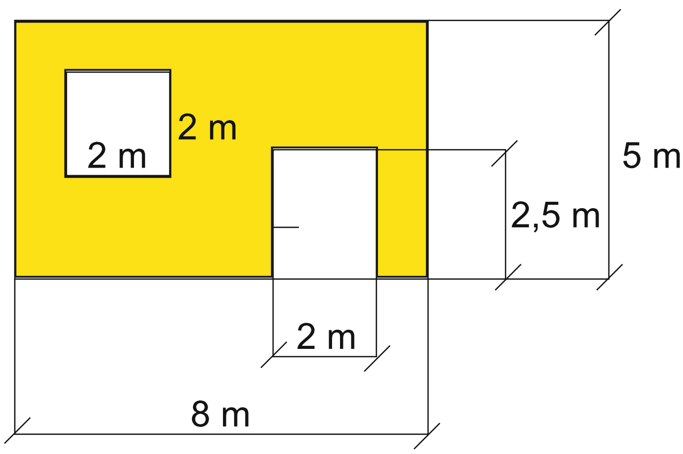
Ćwiczenie 1

Przyjmując za jednostkę 1 cm^2 (pojedyncza kratka), oblicz pole powierzchni wielokąta przedstawionego na rysunku poniżej. Zastanów się nad najszybszą metodą rozwiązania tego zadania.



Przykład 1

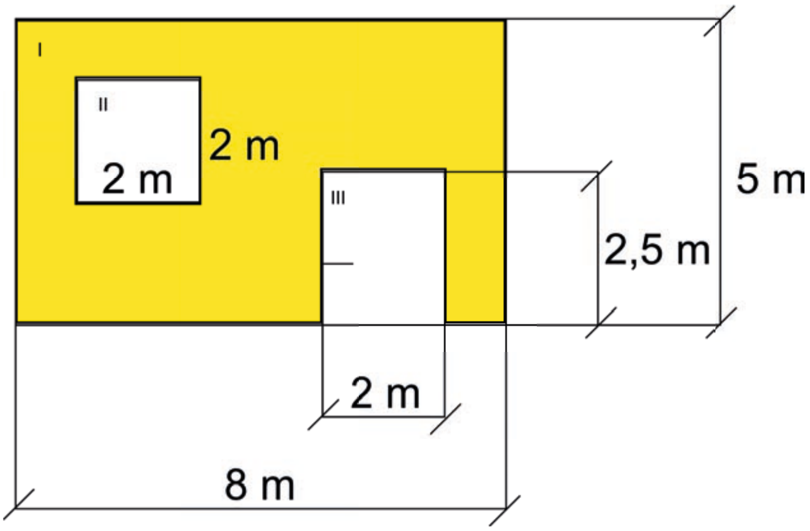
Oblicz koszt pomalowania ściany budynku, którego plan przedstawiony jest na rysunku, wiedząc, że koszt pomalowania 1 m^2 ściany wynosi 15 zł.



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 1 - cd.

Obliczamy pole powierzchni zaznaczonej kolorem żółtym



$$P = P_I - P_{II} - P_{III}$$

Obliczamy pole powierzchni prostokąta I:

$P_I = a \cdot b$
$P_I = 8\ m \cdot 5\ m$
$P_I = 40\ m^2$

Obliczamy pole powierzchni kwadratu II:

$P_{II} = a^2$
$P_{II} = (2\ m)^2$
$P_{II} = 4\ m^2$

Obliczamy pole powierzchni prostokąta III:

$P_{III} = a \cdot b$
$P_{III} = 2\ m \cdot 2{,}5\ m$
$P_{III} = 5\ m^2$

Obliczamy pole zaznaczonej ściany:

$P = 40\ m^2 - 4\ m^2 - 5\ m^2$
$P = 31\ m^2$

Obliczamy koszt malowania:

$31 \cdot 15$ zł $= 465$ zł.

Odpowiedź: *Koszt pomalowania ściany wynosi 465 zł.*

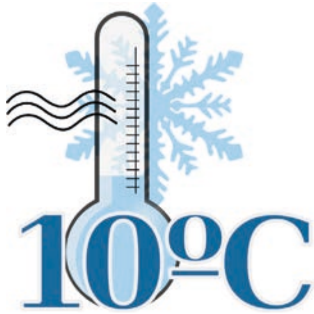
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

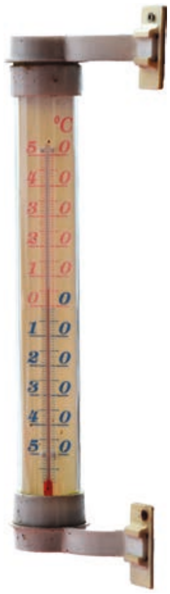
1. LICZBY UJEMNE NA OSI LICZBOWEJ

Z liczbami ujemnymi spotykamy się dość często, szczególnie w zimie, kiedy to temperatura spada poniżej 0° C.

Także na innych lekcjach niż lekcje matematyki rozmawiamy o liczbach ujemnych:

- na historii mamy do czynienia z osią czasu, na której umieszczone są daty naszej ery (liczby dodatnie) oraz daty okresu przed naszą erą (liczby ujemne);
- na przyrodzie rozmawiamy o wyżynach i górach (wysokości jako liczby dodatnie) oraz depresjach lub miejscach poniżej morza (liczby ujemne).





LICZBY CAŁKOWITE TO LICZBY NATURALNE I PRZECIWNE DO NICH (liczba 0 nie jest ani dodatnia, ani ujemna).

liczby całkowite

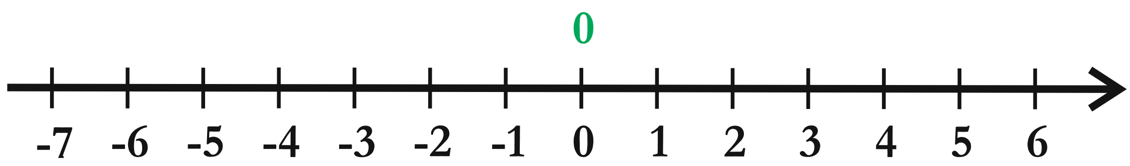
liczby całkowite ujemne

liczba zero

liczby całkowite dodatnie

liczby naturalne

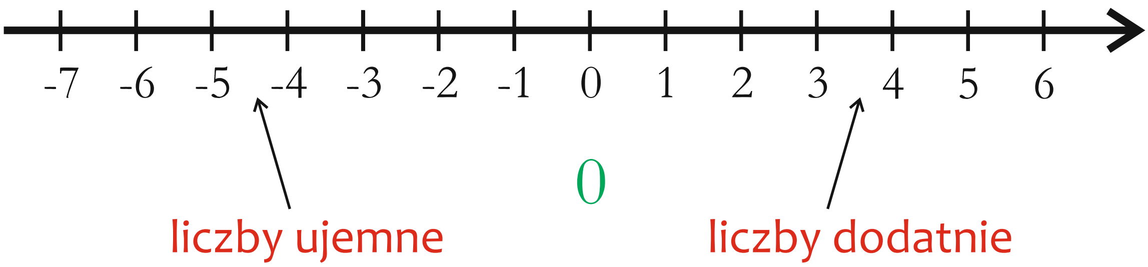
Oś liczbowa jest to prosta, na której wyróżniono kierunek, punkt zerowy oraz jednostkę.



KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

2. PORÓWNYWANIE LICZB CAŁKOWITYCH

Liczby na osi liczbowej leżące na lewo od danej liczby są od niej mniejsze, a liczby leżące na prawo od niej są większe.



Jeżeli weźmiemy pod uwagę np. liczbę -4, to liczba po jej lewej stronie, czyli -5, jest od niej mniejsza. Liczba leżąca po jej prawej stronie, czyli -3, jest od niej większa,

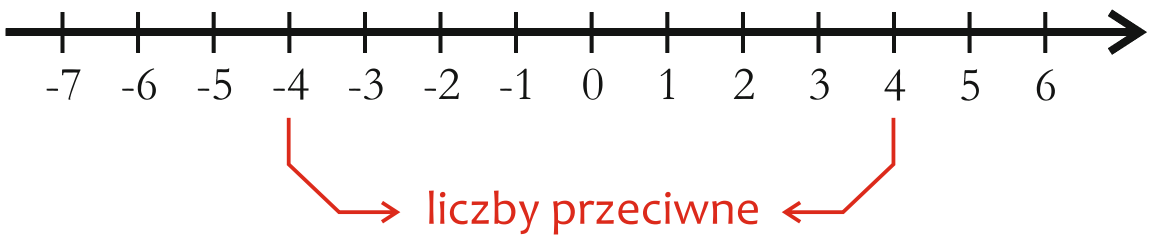
czyli: $-5 < -4 < -3$

Z dwóch liczb ujemnych ta jest większa, która znajduje się bliżej zera, np.:

$-4 < -1$

$-9 < -8$

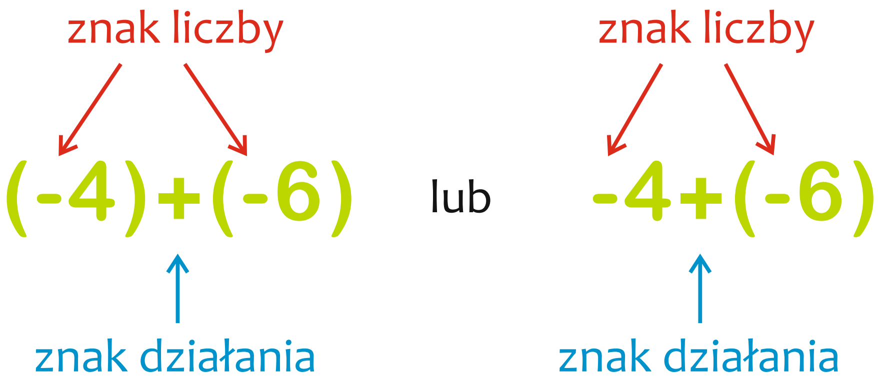
Liczby, które znajdują się w takiej samej odległości od zera, po przeciwnych jego stronach, są liczbami przeciwnymi.



KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

3. DODAWANIE LICZB CAŁKOWITYCH

Przy zapisywaniu dodawania liczb ujemnych należy odróżnić znak działania od znaku liczby. W tym celu będziemy liczby ujemne wyróżniali nawiasami zwykłymi ().



Przykład 1

(-3) + (- 8) = -11 **Suma liczb ujemnych jest liczbą ujemną.**

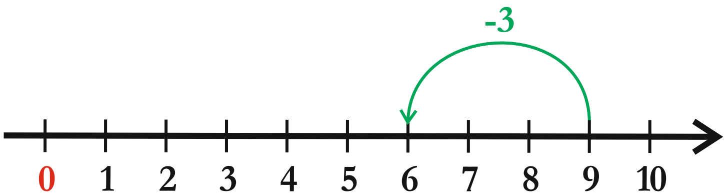
(-5) + (-7) = -12

(-14) + 14 = 0 **Suma liczb przeciwnych jest równa 0.**

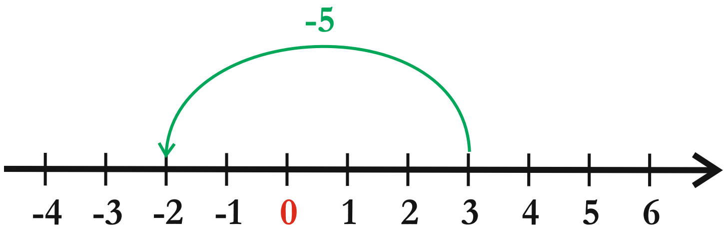
Jeśli przy zapisywaniu dodawania liczb całkowitych „+" i „–" znajdują się obok siebie to, dodawanie można zamienić na odejmowanie.

Przykład 2

9 + (- 3) = 9 - 3 = 6



3 + (-5) = 3 - 5 = -2



PAMIĘTAJMY, ŻE DODAWANIE JEST PRZEMIENNE!

Można łączyć w grupy liczby ujemne i dodatnie, dodawać liczby o tym samym znaku, a potem wykonać kolejne działania.

Przykład 3

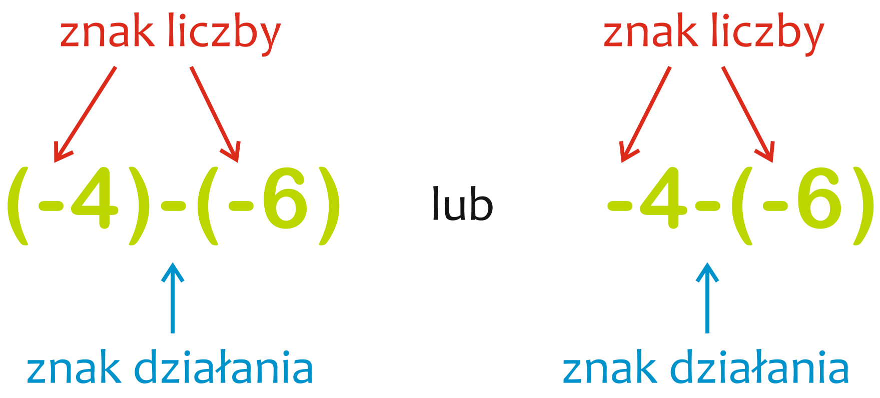
Grupujemy liczby ujemne: -12 + 13 + (-16) = -12 + (-16) + 13 = (-28) + 13 = -15

Grupujemy liczby dodatnie: -36 +14 + 28 = 14 + 28 + (-36) = 42 + (-36) = 42 – 36 = 6

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

4. ODEJMOWANIE LICZB CAŁKOWITYCH

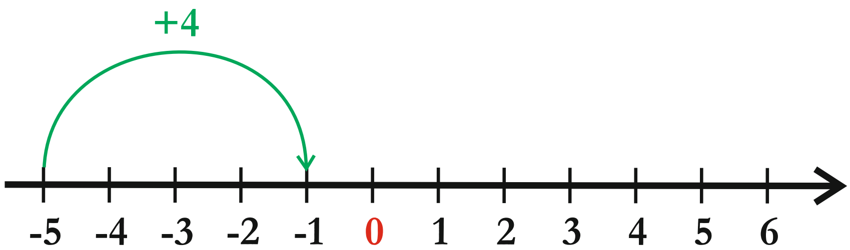
Zapisując różnicę liczb całkowitych, podobnie jak w dodawaniu, należy odróżnić znak działania od znaku liczby.



Różnicę dwóch liczb całkowitych można zastąpić sumą odjemnej i liczby przeciwnej do odjemnika.

Przykład 1

-5 – (-4) = -5 + 4 = -1



5. MNOŻENIE LICZB CAŁKOWITYCH

$$5 \cdot 6 = 30 \leftarrow \text{iloczyn}$$

czynnik czynnik

Mnożenie dwóch liczb o jednakowych znakach daje w wyniku liczbę dodatnią.

$12 \cdot 3 = 36$

$-15 \cdot (-5) = 75$

Mnożenie dwóch liczb o różnych znakach daje w wyniku liczbę ujemną.

$18 \cdot (-3) = -54$

$(-27) \cdot 3 = -81$

Mnożenie parzystej liczby czynników o jednakowych znakach daje w wyniku liczbę dodatnią.

$-2 \cdot (-3) \cdot (-5) \cdot (-4) = 120$

$-12 \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-2) = 144$

$6 \cdot (-5) \cdot (-7) \cdot (-3) \cdot (-6) = 3780$

Mnożenie nieparzystej liczby czynników ujemnych daje w wyniku liczbę ujemną.

$(-5) \cdot (-9) \cdot (-4) = -180$

$4 \cdot (-6) \cdot (-3) \cdot (-8) = -576$

Potęgowanie to skrócony zapis mnożenia - potęgując pamiętamy o powyższych zasadach.

$(-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 16$

$(-6)^3 = (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) = -216$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

6. DZIELENIE LICZB CAŁKOWITYCH

20:4=5 iloraz

dzielna dzielnik

Dzielenie dwóch liczb o jednakowych znakach daje w wyniku liczbę dodatnią.

12 : 3 = 4

-15 : (-5) = 3

Dzielenie dwóch liczb o różnych znakach daje w wyniku liczbę ujemną.

18 : (-3) = -6

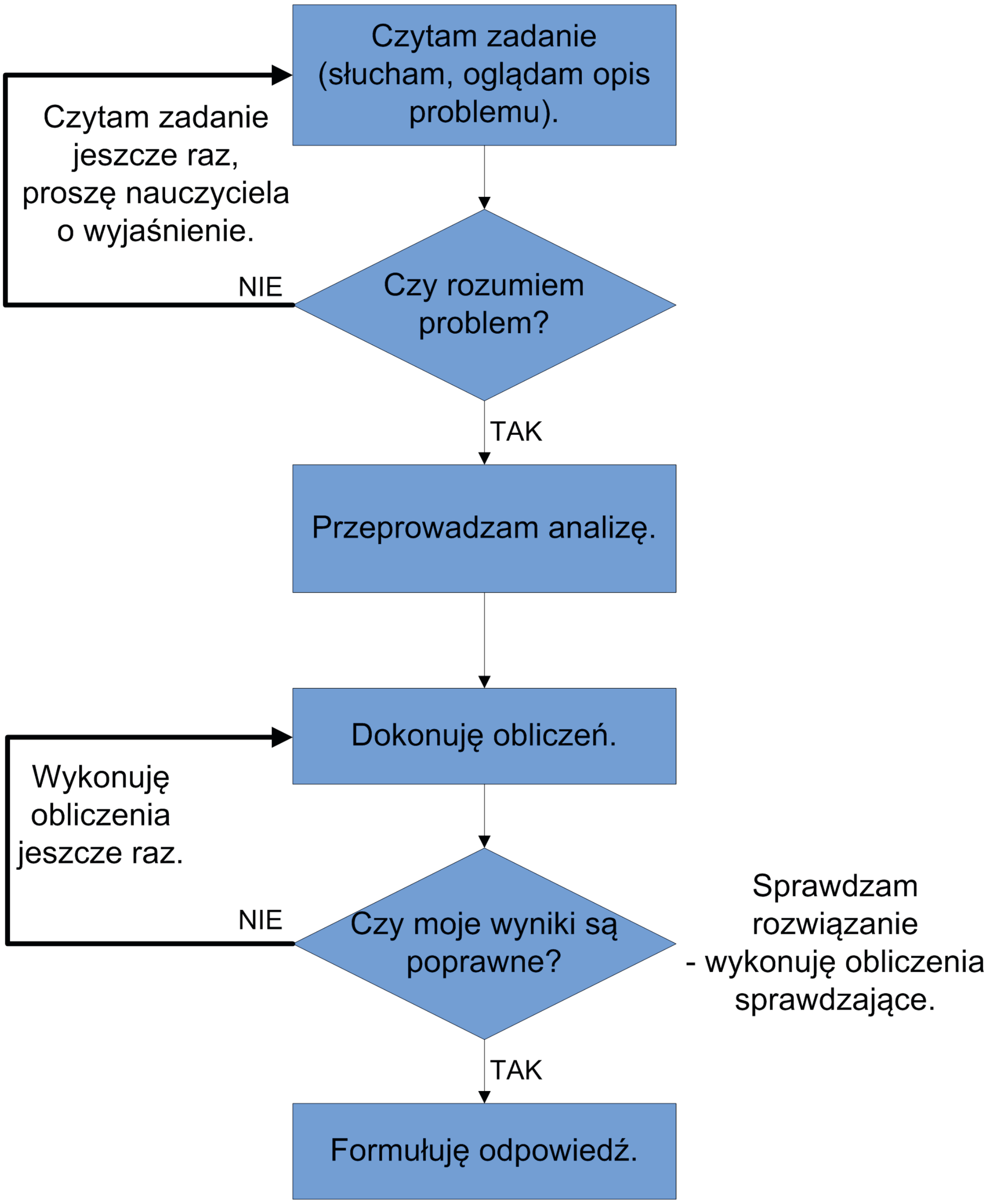
(-27) : 3 = -9

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ TOMP UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

7. LICZBY CAŁKOWITE – ZADANIA TEKSTOWE

Zadania tekstowe rozwiązujesz na każdej lekcji. Codziennie spotykasz się z sytuacjami, które wymagają przeprowadzenia obliczeń.

Przypomnij sobie sposób postępowania przy rozwiązywaniu zadania tekstowego.



Dane: (Co wiem z treści zadania?)	**Szukane:** (Czego chcę się dowiedzieć?)
Obliczenia:	
Odpowiedź:	

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 1

Pan Władysław pożyczył pieniądze w dwóch bankach. W jednym banku wziął kredyt w wysokości 4500 zł, a w drugim 5600 zł. Ile razem długu ma pan Władysław?

Dane: 1. kredyt – 4 500 zł 2. kredyt – 5 600 zł	**Szukane:** Ile razem długu ma pan Władysław?
Obliczenia: -4500 + (-5600) = -10 100 zł	
Odpowiedź: Pan Władysław ma razem 10 100 zł długu.	

NOTATKI

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

1. WSTĘP - FIGURY GEOMETRYCZNE

Geometria to dziedzina matematyki, która zajmuje się własnościami figur.

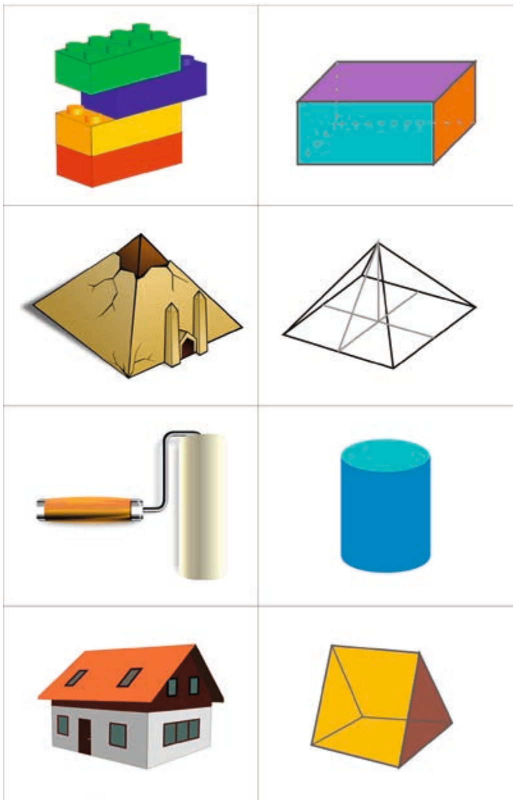
Wyraz **geometria** pochodzi z języka greckiego: geo - ziemia, metria - miara. Nauka ta prawdopodobnie narodziła się w Egipcie. Wykorzystywano ją do rozwiązywania zadań praktycznych np. pomiaru ziemi.

Figury geometryczne to:
- Punkty - nie posiadają żadnego wymiaru.
- Linie - mają jeden wymiar: długość.
- Powierzchnie - mają dwa wymiary: długość i szerokość.
- Bryły - mają trzy wymiary: długość, szerokość i wysokość.

Rozejrzyj się wokół siebie. Wszędzie otaczają Cię przedmioty, które zajmują pewną przestrzeń.

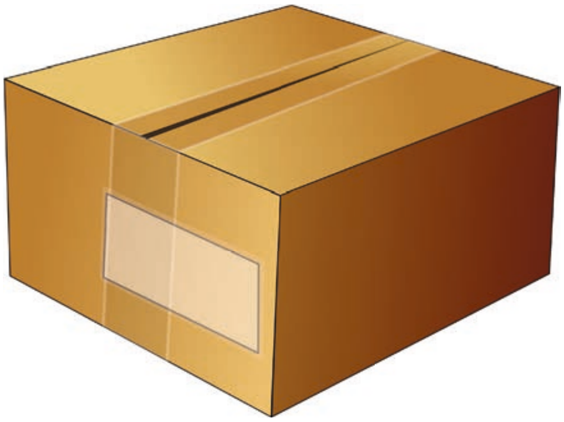
Część przestrzeni, którą zajmuje przedmiot, nazywamy **bryłą geometryczną**.

Figury przestrzenne



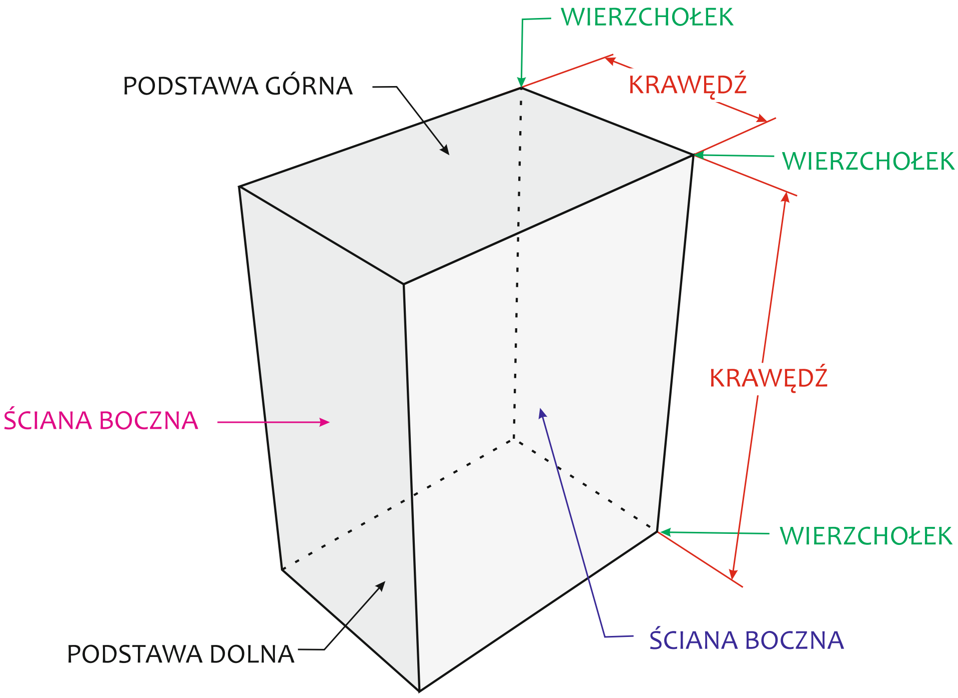
2. PROSTOPADŁOŚCIANY I SZEŚCIANY

Pierwszą bryłą geometryczną, którą poznałeś w czwartej klasie, był prostopadłościan.



Prostopadłościan ma **6 ścian**: 4 boczne i 2 podstawy.

Każda z nich jest prostokątem. Ściany leżące naprzeciw siebie są identyczne. Wszystkie kąty w prostopadłościanie są kątami prostymi.

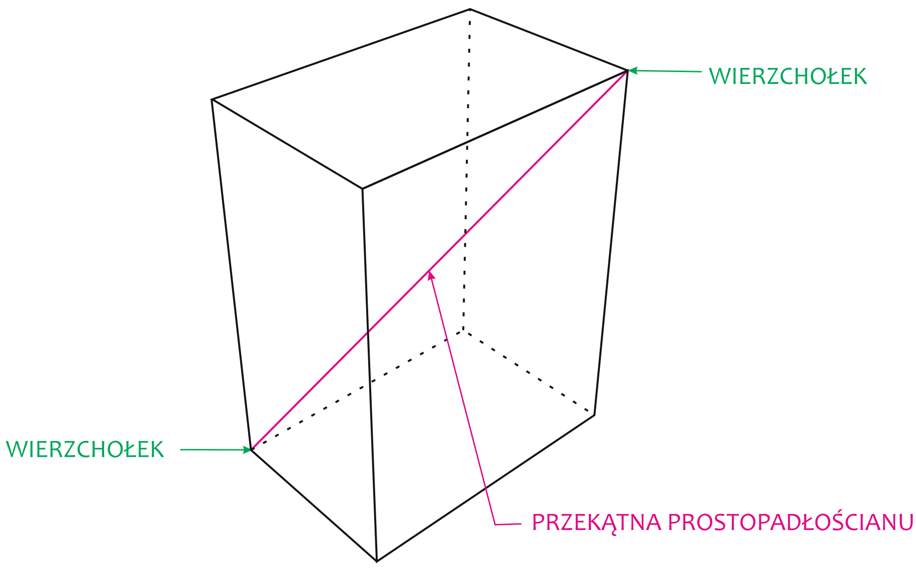


Ile wierzchołków ma prostopadłościan?

- prostopadłościan ma 12 krawędzi,
- dwie sąsiednie ściany o wspólnej krawędzi są do siebie prostopadłe,
- dwie przeciwległe ściany są do siebie równoległe.

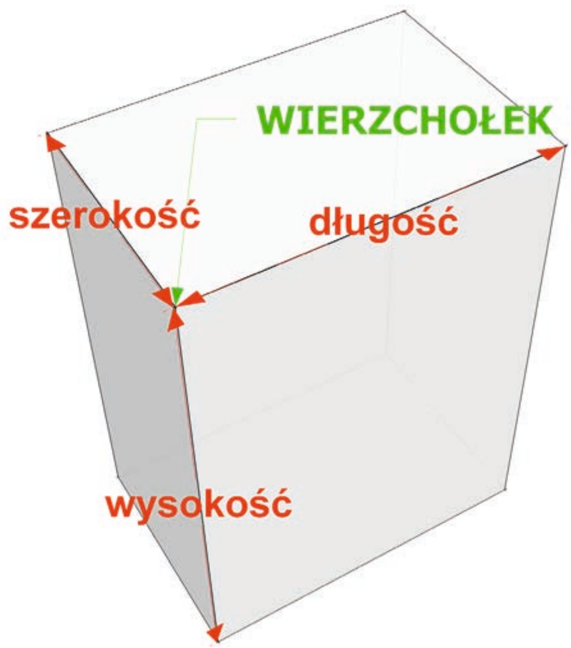
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przekątna prostopadłościanu to odcinek łączący dwa wierzchołki, niezawierający się w żadnej ze ścian prostopadłościanu.



Ile przekątnych ma prostopadłościan?

Prostopadłościan jest figurą trójwymiarową. Długości trzech krawędzi prostopadłościanu, wychodzących z jednego wierzchołka, nazywamy jego wymiarami.

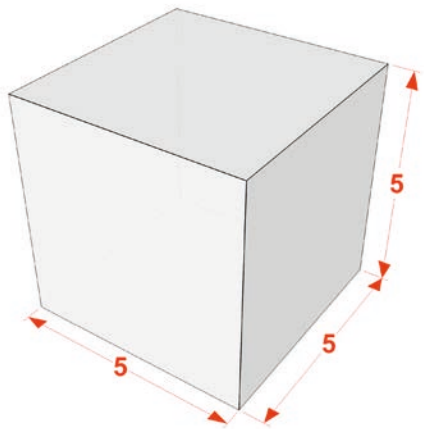


- długość i szerokość to krawędzie podstawy
- wysokość to krawędź boczna
- każdy wymiar to 4 krawędzie tej samej długości

Wymiary prostopadłościanu zapisujemy tak: długość x szerokość x wysokość

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Sześcian jest szczególnym przypadkiem prostopadłościanu:
- każda ściana jest kwadratem
- wszystkie krawędzie są jednakowej długości



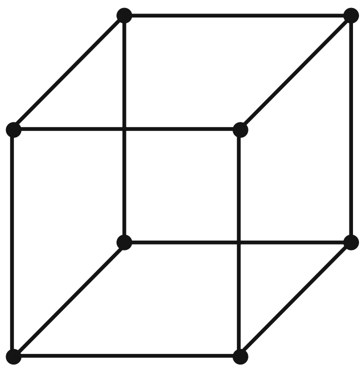
Wymiary tego sześcianu: 5 x 5 x 5

Zadanie 1

Krawędzie wychodzące z jednego wierzchołka prostopadłościanu maja długości:
5 cm, 20 mm, 1 cm.
Jaka jest łączna długość krawędzi tego prostopadłościanu?

Zadanie 2

Z drutu o długości 24 cm zbudowano szkielet sześcianu.
Ile wynosi długość krawędzi tego sześcianu?

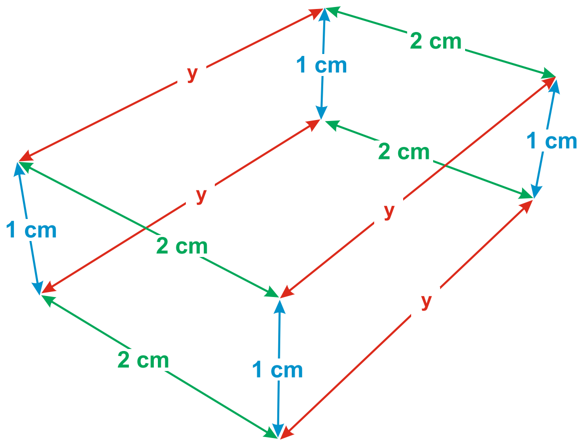


KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 3

Z drutu o długości 16 cm zbudowano szkielet prostopadłościanu. Dwie krawędzie wychodzące z jednego wierzchołka mają długości 1 cm i 2 cm.

Jaką długość ma trzecia krawędź?

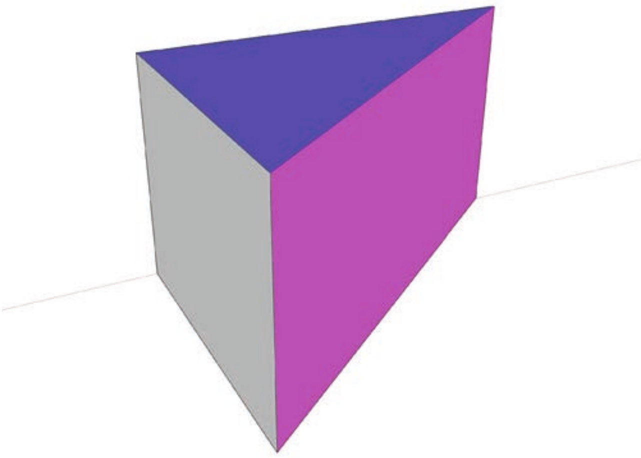


Ćwiczenie 1

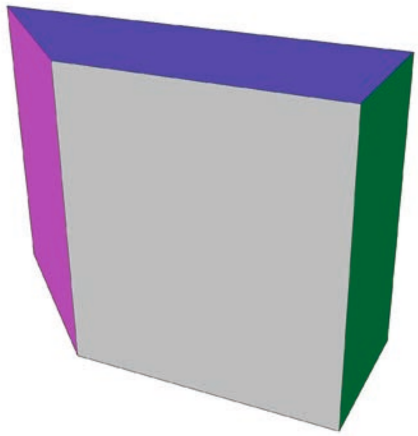
1. Czy istnieje prostopadłościan, w którym tylko jedna ściana jest kwadratem?
2. Czy istnieje prostopadłościan o czterech ścianach kwadratowych?
3. Ile ścian prostopadłościanu może być kwadratami? Podaj ich maksymalną liczbę.
4. Ile jest odcinków, których końcami są wierzchołki prostopadłościanu. Jaką inną wspólną nazwę mają te odcinki?
5. Rozejrzyj się po domu i poszukaj przedmiotów, które mają kształt prostopadło-ścianu.

3. GRANIASTOSŁUPY PROSTE

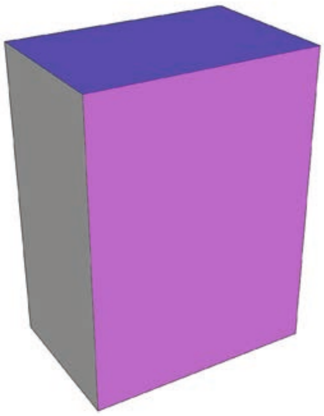
Popatrz na te bryły. To graniastosłupy proste:



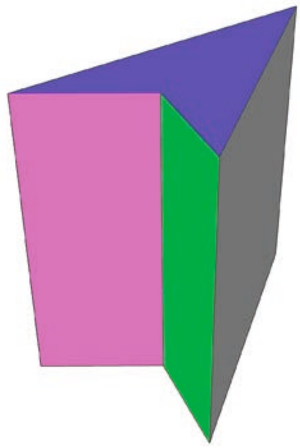
Graniastosłup prosty trójkątny



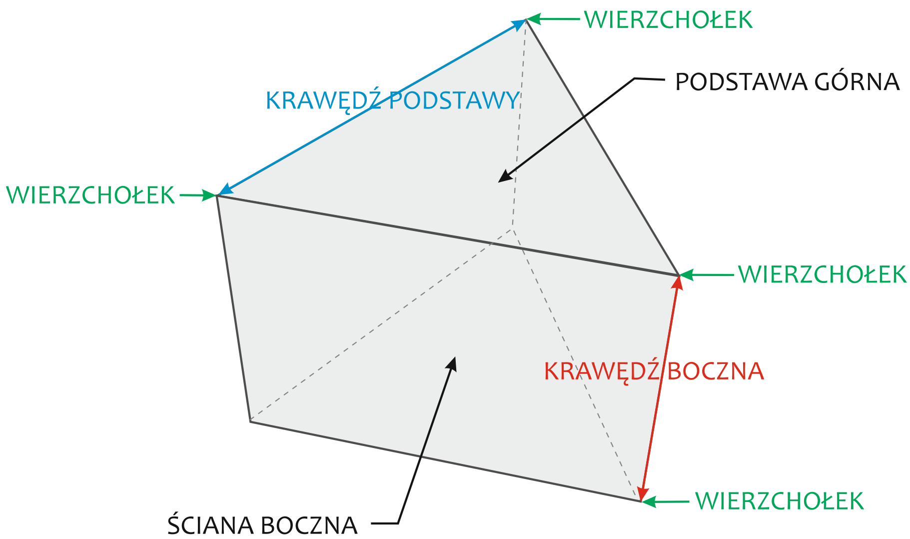
Graniastosłup prosty czworokątny



Graniastosłup prosty czworokątny



Graniastosłup prosty pięciokątny



KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

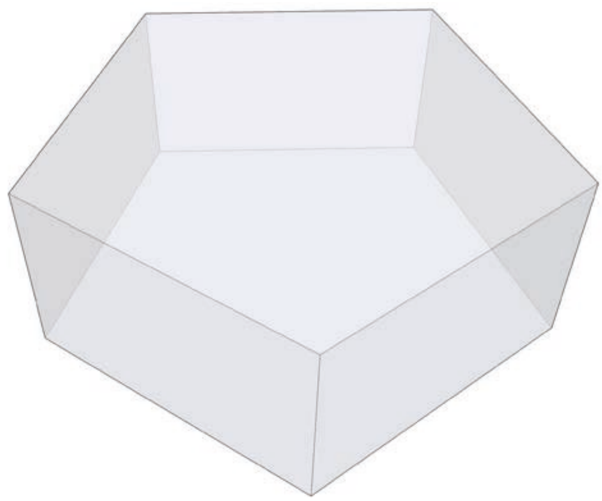
W graniastosłupie prostym **krawędź boczna jest wysokością**.

1. Zastanów się, od czego zależy liczba ścian bocznych tych figur przestrzennych?
2. Jaką najmniejszą liczbę wszystkich ścian może mieć graniastosłup?

Graniastosłup przyjmuje nazwę od wielokąta, który jest jego podstawą.

Cechy charakterystyczne graniastosłupów prostych:

- obie podstawy (górna i dolna) są równoległymi wielokątami przystającymi;
- wszystkie ściany boczne są prostokątami;
- ściany boczne są prostopadłe do obu podstaw.



Jeśli w podstawie graniastosłupa jest wielokąt foremny, to taki graniastosłup nazywamy prawidłowym.

1. Wielokąt foremny ma wszystkie boki równej długości, a wszystkie jego kąty wewnętrzne są równe.
2. Wielokąty przystające mają identyczny kształt i wielkość.

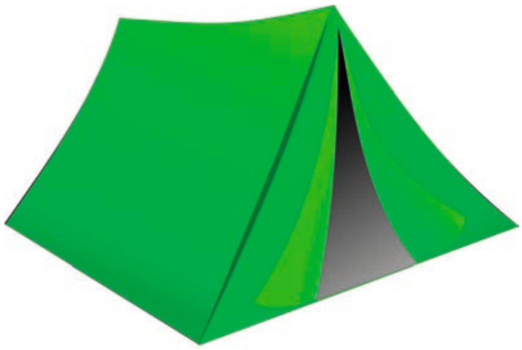
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 1

1. Co możesz powiedzieć o ścianach bocznych graniastosłupa prawidłowego?
2. Czy krawędzie boczne w graniastosłupie prostym mają jednakową długość?
3. Czy graniastosłup prosty ma parzystą, czy nieparzystą liczbę wierzchołków?

Rozejrzyj się dookoła, a znajdziesz wiele przykładów graniastosłupów prostych:

Graniastosłup prawidłowy trójkątny:



- ma 2 podstawy, które są przystającymi (identycznymi) trójkątami równobocznymi,
- ma 3 ściany boczne, które są przystającymi prostokątami,
- ma najmniejszą liczbę ścian.

Graniastosłup prosty czworokątny:
- ma 2 podstawy, które są przystającymi czworokątami,
- ma ściany boczne, które są prostokątami.

Prostopadłościan jest przykładem graniastosłupa prostego czworokątnego.

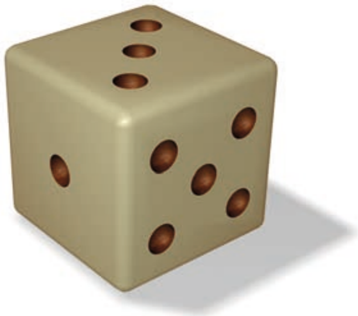
Zauważ, że w zależności od ustawienia, każda ściana prostopadłościanu może być podstawą lub ścianą boczną.

Jaki wielokąt musi mieć w podstawie prostopadłościan, żeby można go nazwać graniastosłupem prawidłowym czworokątnym?

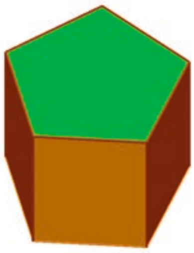
Graniastosłup prawidłowy czworokątny:
- ma 2 podstawy, które są przystającymi czworokątami foremnymi, tzn. kwadratami,
- ma 4 ściany boczne, które są przystającymi prostokątami.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Sześcian to szczególny przykład graniastosłupa prawidłowego czworokątnego: wszystkie jego ściany są kwadratami.

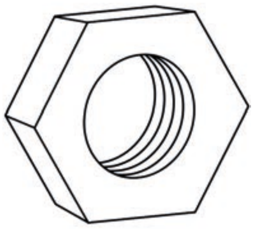


Graniastosłup prawidłowy pięciokątny:



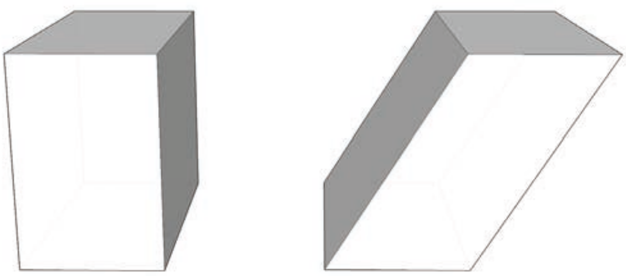
- ma 2 podstawy, które są przystającymi pięciokątami foremnymi,
- ma 5 ścian bocznych, które są przystającymi prostokątami.

Graniastosłup prosty sześciokątny:

- ma 2 podstawy, które są przystającymi sześciokątami foremnymi,
- ma 6 ścian bocznych, które są przystającymi prostokątami.

Popatrz na te dwie bryły:



Obie są graniastosłupami.

Graniastosłup to figura przestrzenna, której obie podstawy są wielokątami przystającymi, leżącymi w płaszczyznach równoległych, a ściany boczne są równoległobokami.

1. Który z tych graniastosłupów jest prosty, a który pochyły?
2. Czy w graniastosłupie pochyłym krawędź boczna jest wysokością?

Wysokością graniastosłupa nazywamy jdługość odcinka prostopadłego do obu podstaw i łączącego te podstawy.

Ćwiczenie utrwalające

1. Zaproponuj nazwę graniastosłupa prostego, który ma łącznie dziewięć ścian.
2. Jaki wielokąt jest podstawą graniastosłupa o 16 wierzchołkach?
3. Czy istnieje graniastosłup, który ma 21 wierzchołków?

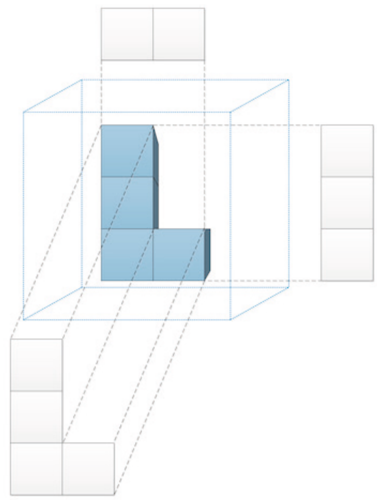
3.1. Rysowanie graniastosłupów prostych

Jak narysować trójwymiarową bryłę na dwuwymiarowej kartce papieru?

Odpowiedź na to pytanie muszą znać architekci, konstruktorzy, projektanci i Ty.

Do wykonania rysunku, w którym zachowane będą wymiary, niezbędna jest znajomość rzutów: poziomego, pionowego i bocznego.

Dzięki nim wiesz, jaki wygląd ma twoja bryła:



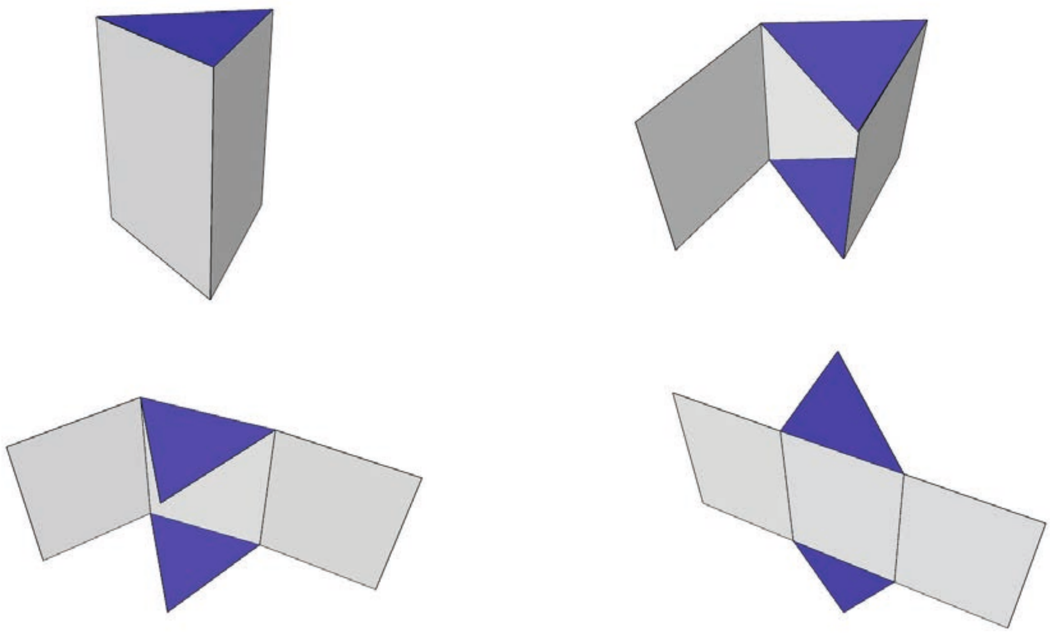
Rzut poziomy pokazuje, jak bryła wygląda z góry, rzut pionowy - jak wygląda z przodu, a boczny - z boku.

Spróbuj narysować widok z góry, z przodu i z boku domu, którego podstawą jest prostopadłościan, a dach jest graniastosłupem prostym trójkątnym.

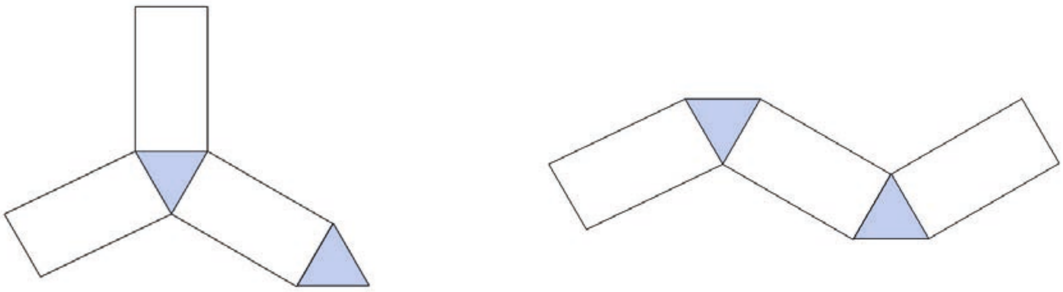
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

4. SIATKI GRANIASTOSŁUPÓW

Siatka bryły powstaje wtedy, gdy jej powierzchnię rozłożymy (np. przez rozcięcie niektórych krawędzi) na płaszczyźnie tak, aby jedna ściana przylegała do sąsiedniej.



W przypadku graniastosłupa prawidłowego trójkątnego można otrzymać 9 rodzajów siatek.

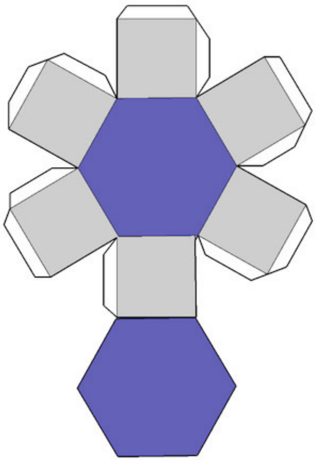


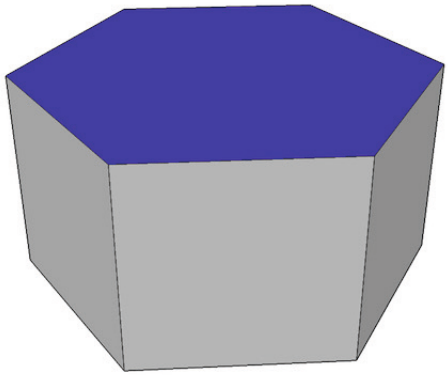
Spróbuj narysować pozostałe siatki tego graniastosłupa prawidłowego trójkątnego. Pamiętaj, że podstawami są trójkąty równoboczne, a ściany boczne nachylone są pod kątem prostym.

Nie każda bryła ma siatkę, np. powierzchni kuli nie można rozłożyć na płaszczyźnie.

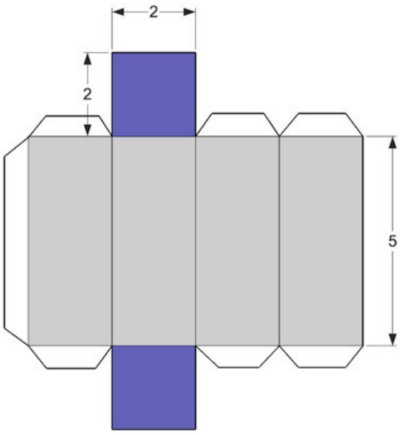
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

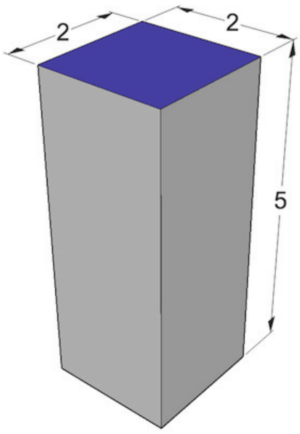
Aby zbudować dowolny model graniastosłupa, należy narysować jego siatkę z zakładkami.



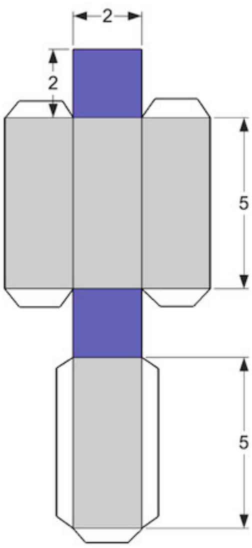


Graniastosłup prawidłowy sześciokątny





Graniastosłup prawidłowy czworokątny



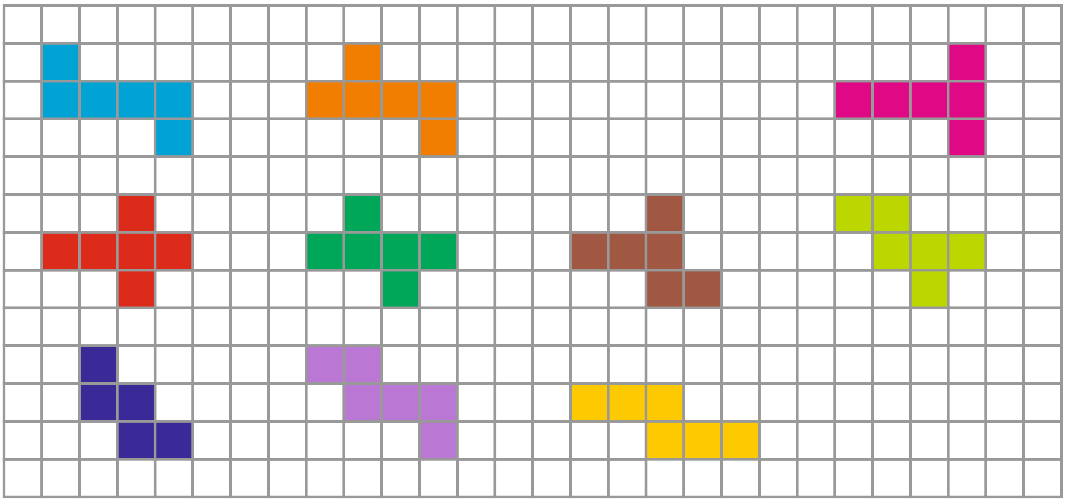
Umiejętność tworzenia siatek brył przydaje się:

- do tworzenia makiet - modeli, które przedstawiają (wiernie lub w przybliżeniu) różne obiekty (często wykonane w zmniejszonej skali), np. budynki, pojazdy, ludzie,
- do projektowania opakowań.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie utrwalające

1. Rozejrzyj się po domu i poszukaj niepotrzebnych opakowań po produktach. Ze znalezionych figur trójwymiarowych spróbuj (rozcinając wzdłuż wybranych krawędzi) otrzymać ich dwuwymiarowe siatki.
2. Czy z każdej siatki na rysunku uda Ci się złożyć sześcian?



3. Narysuj siatkę składającą się z 6 przystających kwadratów, z której nie można złożyć sześcianu.
4. Narysuj (pamiętając o zakładkach), a następnie wytnij siatkę prostopadłościanu o wymiarach 10 mm x 20 mm x 40 mm. Pokoloruj jednakowym kolorem przystające (identyczne) ściany. Sklej model i powiedz, jak położone są względem siebie ściany w tym samym kolorze.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

5. POLE POWIERZCHNI GRANIASTOSŁUPA

Wyobraź sobie, że chcesz wykonać trójwymiarową makietę swojego osiedla. Wiele budynków to różnego rodzaju graniastosłupy:

Zanim zaczniesz tworzyć modele poszczególnych graniastosłupów, warto znać odpowiedź na pytanie: Ile materiału potrzeba do budowy konkretnego graniastosłupa?

Dowiesz się tego, obliczając jego pole powierzchni.

Pole powierzchni graniastosłupa jest sumą pól powierzchni wszystkich jego ścian.

Pole powierzchni = suma pól podstaw + suma ścian bocznych

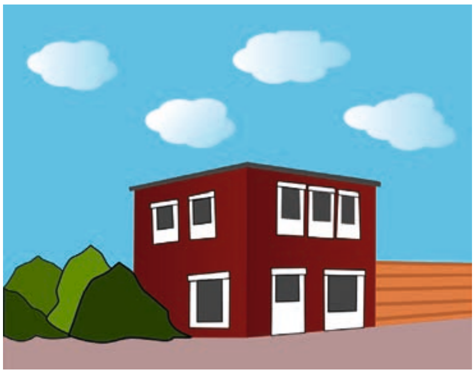
Instrukcja obliczania pola powierzchni graniastosłupa „krok po kroku”:

1. Narysuj siatkę graniastosłupa.
2. Oblicz pole powierzchni każdej ściany.
3. Dodaj do siebie pola powierzchni wszystkich ścian.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 1

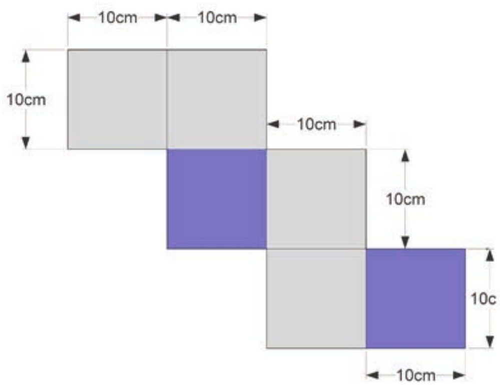
Popatrz na ten dom, którego wymiary rzeczywiste to 10 m x 10 m x 10 m. Chcesz zbudować jego model z papieru - miniaturkę sześcianu.



Zacznij od pomniejszenia jego krawędzi np. stokrotnie. Wymiary tego sześcianu w skali 1:100 to: 10 cm x 10 cm x 10 cm.

Instrukcja „krok po kroku” obliczania pola powierzchni sześcianu (P) o wymiarach 10 cm x 10 cm x 10 cm:

- Zrób rysunek siatki tego sześcianu. Nanieś na nią długość jego krawędzi.



- Oblicz pole powierzchni każdej z sześciu ścian.

Zauważ, że każda ściana jest kwadratem o jednakowym polu powierzchni.
Pole powierzchni kwadratu (P_k) to iloczyn długości jego dwóch boków:
P_k = 10 cm • 10 cm = 100 cm^2

- Dodaj do siebie pola powierzchni wszystkich ścian.

Sześcian ma 6 kwadratów, każdy o polu 100 cm^2.
Pole powierzchni sześcianu (P) = 6 • 100 cm^2 = 600 cm^2

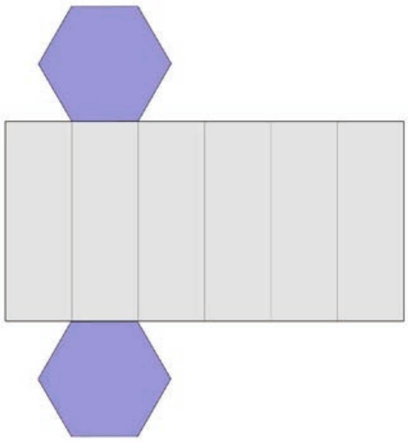
Odpowiedź: *Do zbudowania miniaturki domu potrzeba 600 cm^2 papieru. Czy jedna kartka papieru formatu A4 o wymiarach 210 mm x 297 mm wystarczy do zbudowania tego modelu?*

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 2

Na pomalowanie powierzchni 5 m^2 wystarcza 1 litr farby. Oblicz, ile litrów farby trzeba kupić, aby wystarczyło jej do pomalowania wnętrza (ściany, podłoga, sufit) windy, która jest graniastosłupem prawidłowym sześciokątnym.
Wiesz, że pole powierzchni podstawy, która jest sześciokątem, wynosi 12 m^2, a pole powierzchni jednej ściany bocznej, która jest prostokątem, równa się 3 m^2.
Zacznij od obliczenia pola powierzchni wszystkich ścian, czyli pola powierzchni graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego.

1. Wykonaj rysunek siatki graniastosłupa.
2. Oblicz pola powierzchni dwóch podstaw i 6 ścian bocznych.
3. Dodaj do siebie pola powierzchni tych 8 ścian.



Zauważ, że wszystkie ściany boczne graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego są przystającymi (identycznymi) prostokątami o jednakowym polu powierzchni, równym 3 m^2.

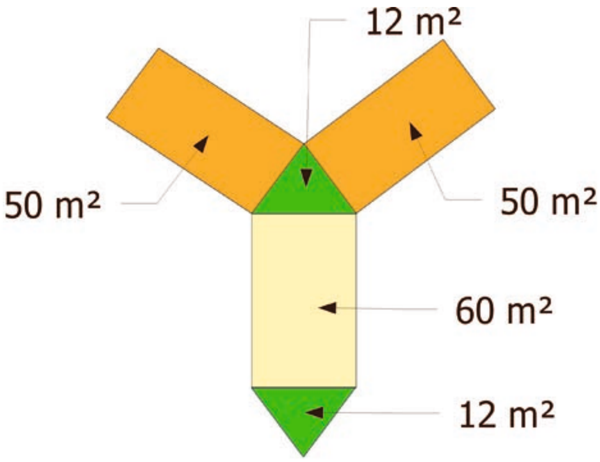
P_1 - pole powierzchni podstawy, która jest sześciokątem
$P_1 = 12 \text{ m}^2$
P_2 - pole powierzchni ściany bocznej, która jest prostokątem
$P_2 = 3 \text{ m}^2$
P_c - pole powierzchni graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego
$P_c = 2P_1 + 6\,P_2$
$P_c = 2 \cdot 12 \text{ m}^2 + 6 \cdot 3 \text{ m}^2 = 42 \text{ m}^2$
Chcesz pomalować 42 m^2 powierzchni. Jeśli 1 litr wystarcza na 5 m^2, to wykonując działanie 42 m^2 ÷ 5 m^2, obliczysz, ile litrów farby trzeba kupić.

Odpowiedź: *Do pomalowania podłogi, sufitu i sześciu ścian windy potrzeba 9 litrów farby.*

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zastanów się nad innymi przykładami, w których znajomość pola powierzchni graniastosłupów jest przydatna.

Ćwiczenie utrwalające 1



1. Oblicz całkowite pole powierzchni graniastosłupa prostego trójkątnego. Na rysunku podano pola powierzchni poszczególnych ścian.
2. Ile cm^2 papieru potrzeba na oklejenie graniastosłupa prostego trójkątnego, jeżeli pole powierzchni trójkąta równa się 6 cm^2, a pole powierzchni ścian bocznych wynosi 120 cm^2.
3. Pole powierzchni sześcianu wynosi 600 dm^2. Oblicz pole powierzchni jednej ściany.
4. Pole powierzchni sześcianu w skali 1:100 wynosi 600 cm^2 *. Ile wynosi pole powierzchni tego sześcianu w skali 1:1?

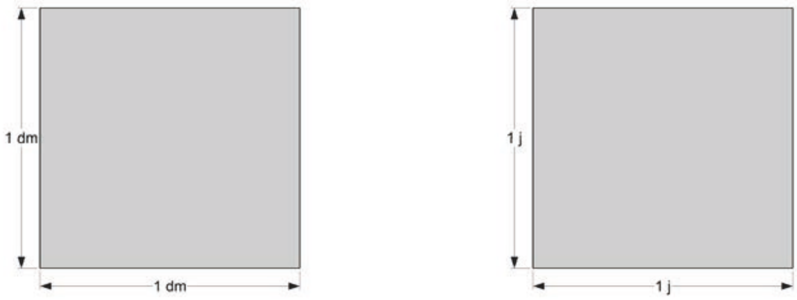
* Wskazówka: Pole powierzchni kwadratu o boku 4 cm wynosi 16 cm^2. Jeśli ten kwadrat narysujemy w skali 1:2, to długość jego boku zmniejszy się dwukrotnie. A jak zmieni się jego pole?

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ TOMP UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

5.1. Jednostki pola powierzchni

Jednostką pola powierzchni jest pole kwadratu o długości boków 1 j.



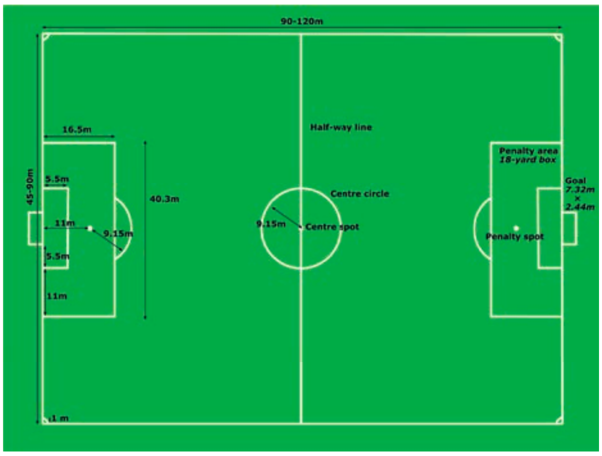
Pole powierzchni kwadratu jednostkowego równa się 1 j^2.

Pole powierzchni jest liczbą, która mówi nam, ile kwadratów jednostkowych potrzeba do wypełnienia tej powierzchni.

Przykładowe jednostki **pola powierzchni**:

- 1 kilometr kwadratowy (1 km^2) to pole powierzchni kwadratu o długości boku 1 km.
- 1 metr kwadratowy (1 m^2) to pole powierzchni kwadratu o długości boku 1 m.
- 1 decymetr kwadratowy (1 dm^2) to pole powierzchni kwadratu o długości boku 1 dm.
- 1 centymetr kwadratowy (1 cm^2) to pole powierzchni kwadratu o długości boku 1 cm.
- 1 milimetr kwadratowy (1 mm^2) to pole powierzchni kwadratu o długości boku 1 mm.

Pole powierzchni tego boiska wynosi 7000 m^2. Do wypełnienia tej powierzchni potrzeba 7000 kwadratów o powierzchni 1 m^2.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
WPQ
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Pole powierzchni kartki pocztowej wynosi 126 cm^2. Do wypełnienia tej powierzchni potrzeba 126 kwadratów o powierzchni 1 cm^2.

Pole powierzchni skrzynki pocztowej wynosi .... Do jej wypełnienia potrzeba ..... kwadratów o powierzchni ..... dm^2.

Dla różnych powierzchni stosuje się różne jednostki. Jak myślisz, dlaczego?

5.2. Zależności między jednostkami pola powierzchni

Popatrz na następujące jednostki pola powierzchni:

1 mm^2 (milimetr kwadratowy) = 1 mm • 1 mm
1 cm^2 (centymetr kwadratowy) = 1 cm • 1 cm
1 dm^2 (decymetr kwadratowy) = 1 dm • 1 dm
1 m^2 (metr kwadratowy) = 1 m • 1 m
1 km^2 (kilometr kwadratowy) = 1 km • 1 km

Centymetr kwadratowy (cm^2) jest tylko symbolem. W matematyce nie ma działania cm • cm.
To samo odnosi się do innych jednostek powierzchni.

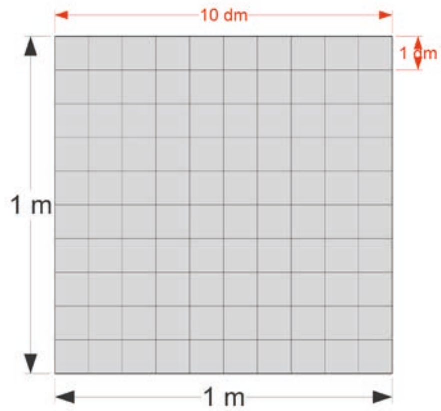
Która z tych jednostek pola powierzchni jest największa, a która najmniejsza?

Teraz przypomnisz sobie, w jaki sposób zamieniać większe jednostki na mniejsze i odwrotnie. Ponieważ jednostka pola powierzchni związana jest z jednostką długości, niezbędna jest znajomość takich zależności:

1 km = 1000 m
1 m = 10 dm = 100 cm
1 dm = 10 cm = 100 mm
1 cm = 10 mm

Zadanie 1

Zamień metry kwadratowe (m^2) na decymetry kwadratowe (dm^2).
Zauważ, że:
1 m = 10 dm,
100 kwadratów o polu powierzchni $1dm^2$ pokrywa całkowicie powierzchnię kwadratu o boku 1 m.



$1\ m^2 = 1\ m \cdot 1\ m = 10\ dm \cdot 10\ dm = 100\ dm^2$

Zadanie 2

Zamień metry kwadratowe (m^2) na decymetry kwadratowe (dm^2).

Zauważ, że metr kwadratowy jest jednostką 100 razy większą od decymetra kwadratowego.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ TOMP UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 3

Zamień decymetry kwadratowe (dm^2) na metry kwadratowe (m^2).

Zauważ, że decymetr kwadratowy jest jednostką 100 razy mniejszą od metra kwadratowego. Dzielenie przez 100 jest równoważne mnożeniu przez 0,01.

Zadanie 4

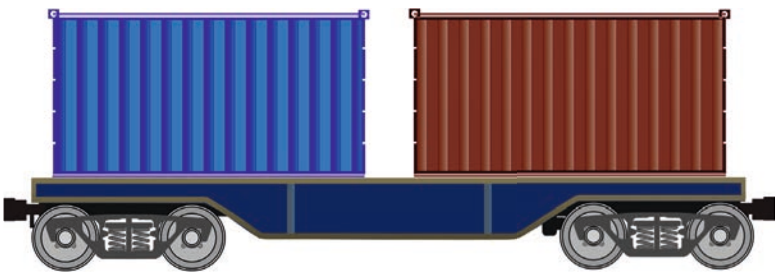
Ile centymetrów kwadratowych (cm^2) mieści się w jednym metrze kwadratowym (m^2)?

Analogicznie wyprowadza się pozostałe zależności:
$1\ cm^2 = 100\ mm^2$
$1\ mm^2 = 0{,}01\ cm^2$
$1\ dm^2 = 100\ cm^2$
$1\ cm^2 = 0{,}01\ dm^2$
$1\ km^2 = 1\ 000\ 000\ m^2$
$1\ m^2 = 0{,}000001\ km^2$

Zadanie 5

Pole powierzchni metalowego kontenera równa się $132\ m^2$.

Korzystając z zależności między jednostkami, wyraź powierzchnię tego kontenera w innych jednostkach.

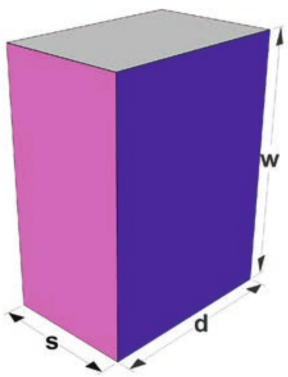


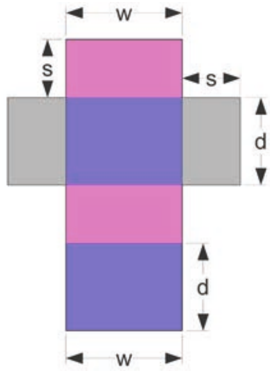
Warto znać też jednostkę powierzchni, której używa się m.in. w rolnictwie i leśnictwie.
$1\ ar = 1\ a = 100\ m^2$
$1\ hektar = 1\ ha = 100\ a = 10\ 000\ m^2$

5.3. Obliczanie pola powierzchni prostopadłościanu

Wiesz już, że prostopadłościan to bryła ograniczona sześcioma prostokątami.

Pole powierzchni prostopadłościanu jest sumą pól powierzchni wszystkich jego prostokątnych ścian.
Pole powierzchni każdego **prostokąta** - to iloczyn długości jego dwóch różnych boków.





Jeśli literami *d, s, w* oznaczymy długości krawędzi prostopadłościanu, to jego pole powierzchni P można obliczyć, korzystając ze wzoru:

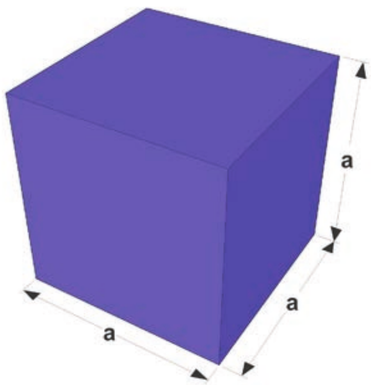
$P = 2 \cdot (d \cdot s) + 2 \cdot (d \cdot w) + 2 \cdot (s \cdot w)$

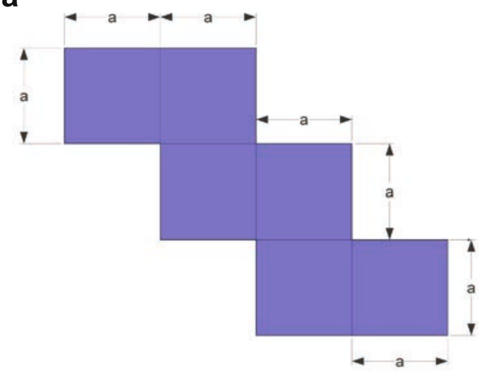
Sześcian jest szczególnym przypadkiem prostopadłościanu: wszystkie jego krawędzie są jednakowej długości.

Pole powierzchni sześcianu jest sumą pól powierzchni wszystkich jego ścian, które są przystającymi (identycznymi) kwadratami.

Pole powierzchni każdego kwadratu, to iloczyn długości jego dwóch boków.

Jeśli literą a oznaczymy długość krawędzi sześcianu, to jego pole powierzchni P można obliczyć, korzystając ze wzoru: $\mathbf{P = 6 \cdot (a \cdot a) = 6 \cdot a^2}$



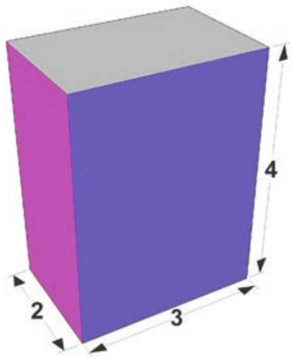


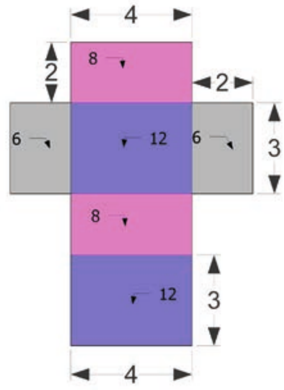
Jak zmieni się pole powierzchni sześcianu, jeśli jego krawędź dwukrotnie się wydłuży?

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

- Prostopadłościany to graniastosłupy proste czworokątne.
- Jeśli prostopadłościan ma trzy różne wymiary (np. 2 x 3 x 4), oznacza to, że ma trzy rodzaje przystających prostokątów.

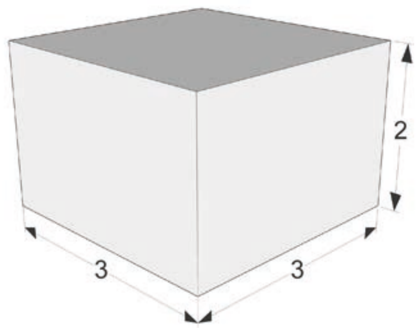
P = 2 • 6 + 2 • 8 + 2 • 12 = 2 • (6 + 8 +12) = 52

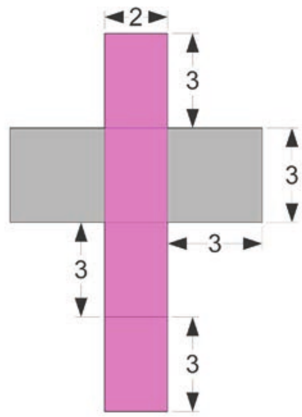




- Jeśli prostopadłościan ma dwa takie same wymiary, a trzeci inny (np. 3 x 3 x 2), oznacza to, że ma dwa rodzaje przystających prostokątów.

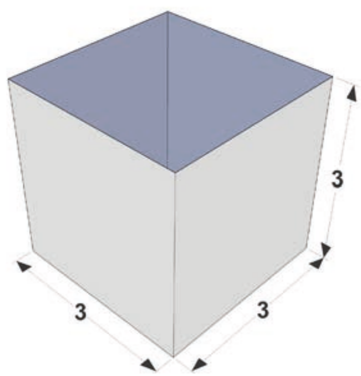
P = 2 • 9 + 4 • 6 = 18 + 24 = 42

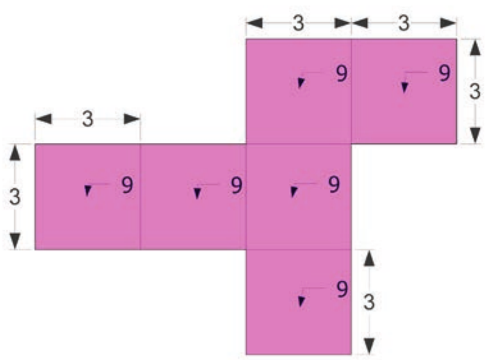




- Jeśli wszystkie trzy wymiary prostopadłościanu są identyczne, oznacza to, że jest sześcianem a jego ściany to kwadraty.

P = 6 • 9 = 54





Zadanie 1

Ile dm^2 kartonu potrzeba do złożenia prostopadłościennego pudełka o wymiarach (długość x szerokość x wysokość): 3 dm x 1 dm x 2 dm.

Zadanie 2

Pole powierzchni sześcianu wynosi 600 dm^2. Oblicz długość jego krawędzi.

Zadanie 3

Do pomalowania wszystkich ścian sześcianu zużyto 2 litry farby. Ile litrów farby potrzeba do pomalowania wszystkich ścian sześcianu o krawędziach dwa razy dłuższych?

Ćwiczenie utrwalające

1. Jakiego kształtu są ściany prostopadłościanu, którego krawędzie mają długość 4 cm, 4 cm, 2 cm? Narysuj siatkę tego prostopadłościanu i oblicz pole powierzchni.
2. Jakimi figurami są ściany prostopadłościanu, którego wszystkie krawędzie mają długość 5 cm? Oblicz pole powierzchni tego prostopadłościanu.

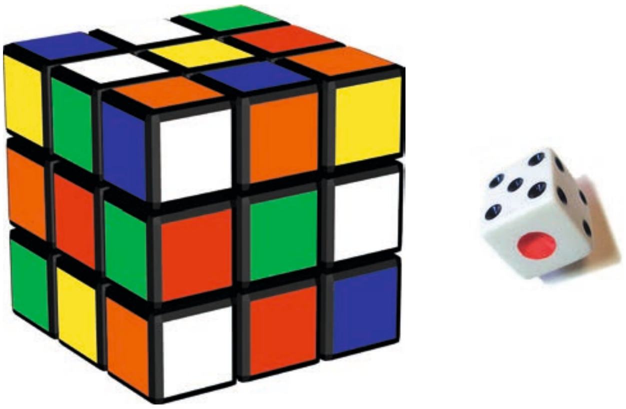
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

6. OBJĘTOŚĆ BRYŁY

Objętość to miara przestrzeni, którą zajmuje przedmiot.

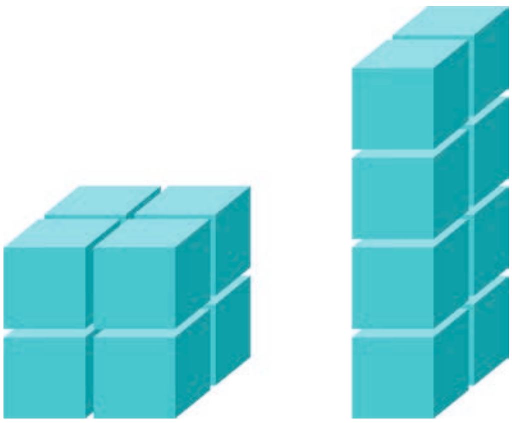
Popatrz na zamek w Malborku:

Czy umiesz wskazać bryły o tej samej objętości?
Popatrz na te dwie bryły:



Objętość kostki Rubika jest większa od objętości kostki do gry.

Teraz przyjrzyj się uważnie tym bryłom, które zbudowane są z jednakowych kostek sześciennych:



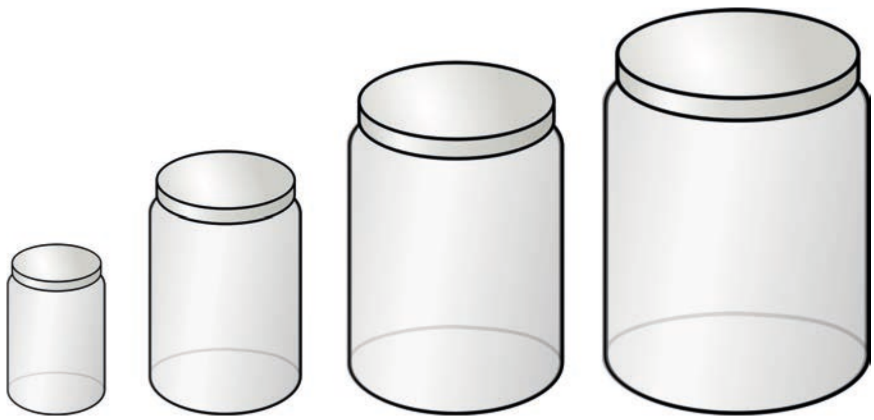
Objętość tych brył jest jednakowa! Jak myślisz, dlaczego?

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
WPQ
Tomasz Jakubowski TOMP
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Różne bryły mogą mieć taką samą objętość. Popatrz na te piłki:

Jeśli piłki są podobnych rozmiarów, to możesz tylko oszacować, która z nich ma największą objętość. Pewność zdobędziesz, gdy obliczysz ich objętość.

Spójrz na te słoiki. Ustawione są one według rosnącej objętości:



Jeśli zechcesz wypełnić je miodem, to zauważysz, że pojemność tych słoików jest różna. Najmniej miodu zmieści się w pierwszym słoiku od lewej. Największy słoik ma największą pojemność.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

6.1. Sposoby pomiaru objętości prostopadłościanu

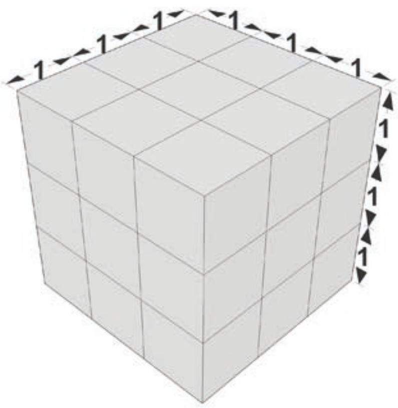
Mierzyć - znaczy porównywać!

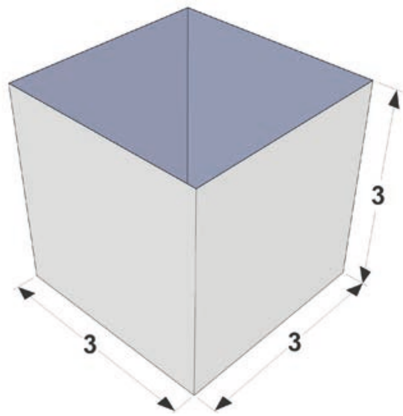
Czy pamiętasz, jak mierzyłeś pole powierzchni prostopadłościanu? Korzystałeś z kwadratu jednostkowego o znanym polu powierzchni równym 1. Pokrywałeś tymi kwadratami wszystkie ściany prostopadłościanu.

Pole powierzchni to liczba kwadratów na wszystkich sześciu prostokątnych ścianach.

Podobnie postępuje się w przypadku pomiaru objętości prostopadłościanu. Tym razem należy wypełnić przestrzeń, którą zajmuje prostopadłościan, np. sześcianem jednostkowym o długości krawędzi 1.

Objętość sześcianu jednostkowego równa się 1.



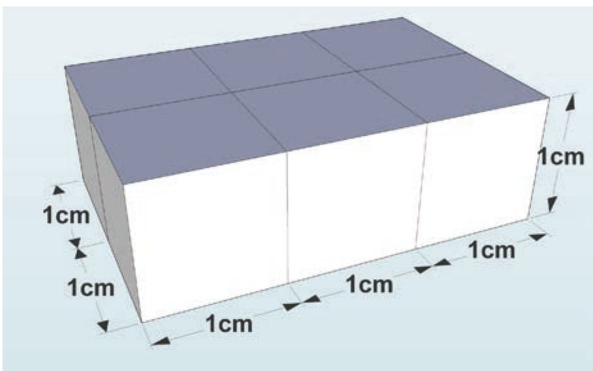


Objętość prostopadłościanu to liczba sześcianów jednostkowych, którymi dokładnie go wypełniamy.

Zadanie 1

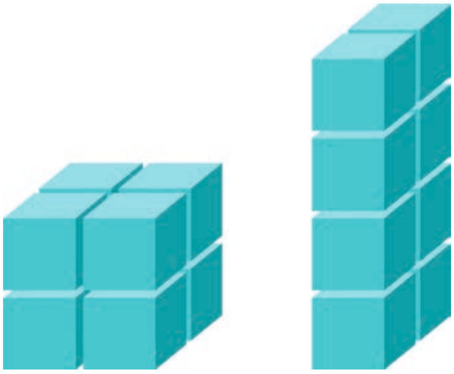
Oblicz objętość prostopadłościanu o wymiarach 3 x 2 x 1.

Policz, ile sześcianów jednostkowych szczelnie i bez zachodzenia na siebie wypełni prostopadłościan.



Zadanie 2

Oblicz objętość sześcianu i prostopadłościanu, które widzisz na rysunku poniżej. Obie bryły zbudowane są z jednostkowych sześcianów.

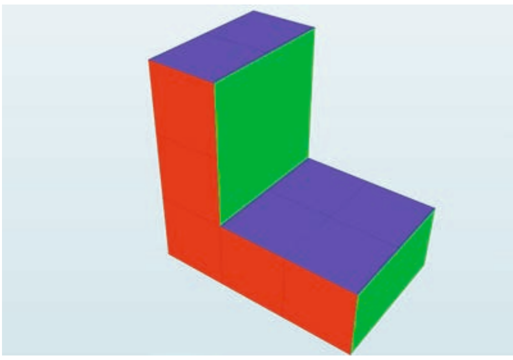


Objętość sześcianu o krawędzi 1 wynosi 1, a objętość sześcianu o krawędzi 2 wynosi 8.

Jaką objętość będzie miał sześcian o długości krawędzi 3? Ile razy większa jest objętość tego sześcianu od objętości sześcianu jednostkowego?

Zadanie 3

Oblicz objętość bryły (rys.) zbudowanej z sześcianów jednostkowych

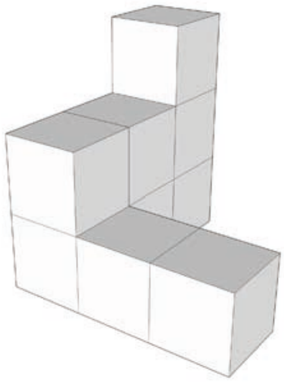


Więcej zadań znajdziesz na platformie edukacyjnej MATI.

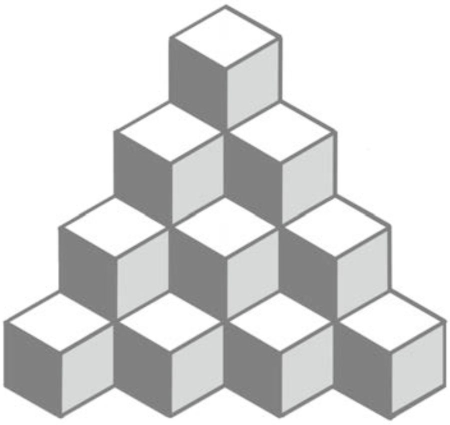
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie utrwalające

1. Oblicz objętość tej zbudowanej z sześcianów jednostkowych bryły.



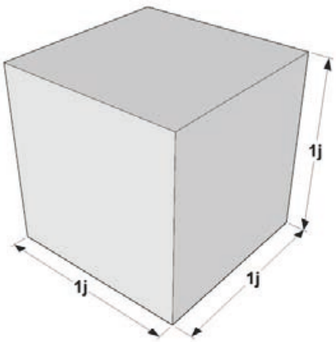
2. Oblicz objętość sześcianu o wymiarach 3 x 3 x 3.
3. Objętość prostopadłościanu zbudowanego z sześcianów jednostkowych wynosi 18. Jakie wymiary może mieć taki prostopadłościan? Spróbuj podać jak najwięcej przykładów. Możesz sobie pomóc, rysując je na kartce w kropki.
4. Oblicz objętość prostopadłościanu o wymiarach 5 x 2 x 3.
5. Ile kostek sześciennych widzisz na tym obrazku? Czy za każdym razem dostajesz ten sam wynik?

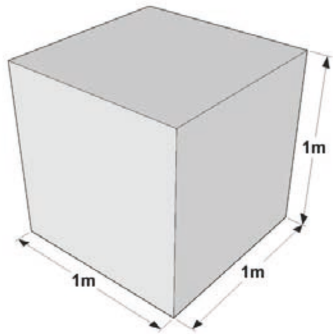


6.2. Jednostki objętości

Poznałeś już jednostki długości (np. metr) i jednostki pola powierzchni (np. metr kwadratowy). Teraz czas na jednostki objętości.

Jako jednostkę objętości przyjęto sześcian o krawędzi 1 jednostki.





Przykład 1

Przykładowe jednostki objętości:

1 metr sześcienny (1 m^3) oznacza objętość sześcianu o krawędzi 1 m.

1 decymetr sześcienny (1 dm^3) oznacza objętość sześcianu o krawędzi 1 dm.

1 centymetr sześcienny (1 cm^3) oznacza objętość sześcianu o krawędzi 1 cm.

1 milimetr sześcienny (1 mm^3) oznacza objętość sześcianu o krawędzi 1 mm.

Czy znasz jednostkę objętości większą niż 1 m^3?

Spójrz na jednostki objętości tych brył:

cm^3

dm^3

m^3

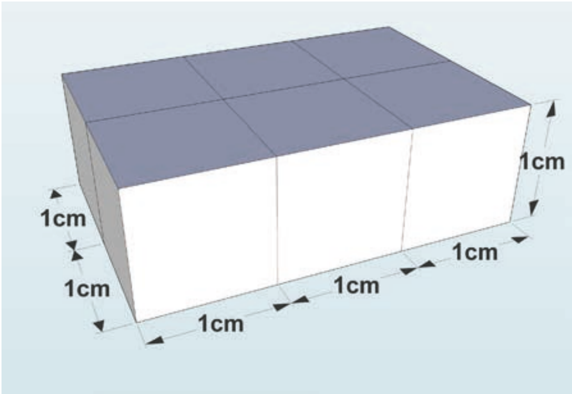
km^3

Dla objętości brył o różnej wielkości stosuje się różne jednostki.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 2

Oblicz objętość baterii ze zdjęcia powyżej.
Jest ona prostopadłościanem o wymiarach: 3 cm x 2 cm x 1 cm.



Objętość prostopadłościanu o wymiarach 3 cm x 2 cm x 1cm to liczba sześcianów jednostkowych o długości krawędzi 1 cm i objętości 1 cm^3.
Liczba sześcianów jednostkowych: 6.
Objętość prostopadłościanu: 6 • 1cm^3 = 6 cm3

Objętość tej baterii to nic innego, jak iloczyn jej trzech wymiarów:

3 cm • 2 cm • 1 cm = 6 cm^3

Czy wiesz, dlaczego wygodniej jest podać objętość domu w metrach sześciennych, a nie np. w milimetrach sześciennych?

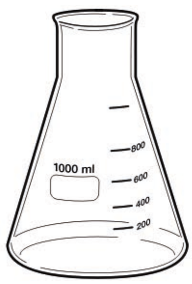
W życiu codziennym często stosowaną jednostką pojemności jest litr.

Pojemność rozumiemy jako objętość naczynia, tzn. ilość cieczy, którą może ono zmieścić.

1/4 litra

5 litrów

Jak zmierzyć pojemność garnka?
Użyć wyskalowanego naczynia:



Ćwiczenie utrwalające

1. Narysuj w zeszycie sześcian o objętości 1 dm^3. Dasz radę narysować sześcian o objętości 1m^3?
2. Ustaw w kolejności malejącej (od największej do najmniejszej) następujące jednostki objętości: m^3, mm^3, dm^3, km^3, cm^3.
3. Jaką jednostką warto byłoby określić objętość:

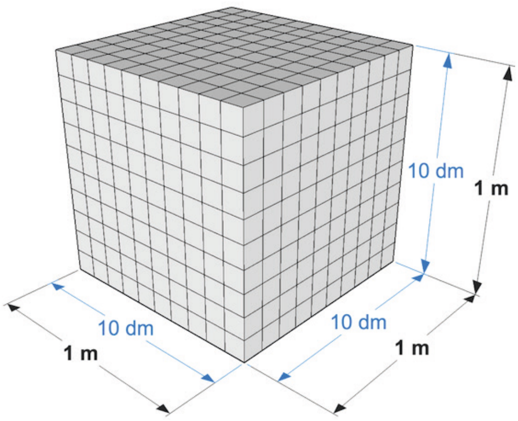
- lodówki,
- szkoły,
- kostki cukru,
- tubki pasty do zębów?

6.3. Zależności między jednostkami objętości

W poprzednim rozdziale poznaliśmy różne jednostki objętości.
Teraz dowiesz się, w jaki sposób zamieniać większe jednostki na mniejsze i odwrotnie.

Przykład 1

Zamień metry sześcienne (m3) na decymetry sześcienne (dm^3).



Zauważ, że:
1 m = 10 dm,
w sześcianie o krawędzi 1 m mieści się 1000 sześcianów o krawędzi 1 dm.
$1\ m^3 = 1\ m \cdot 1\ m \cdot 1\ m =$
$= 10\ dm \cdot 10\ dm \cdot 10\ dm = 1000\ dm^3$

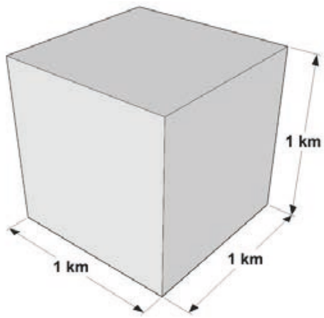
Odpowiedź: *1 metr sześcienny (1 m^3) jest jednostką tysiąc razy większą od 1 decymetra sześciennego (1 dm^3).*

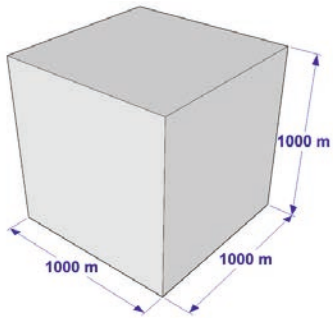
$1\ m^3 = 1000\ dm^3$
$1\ dm^3 = 1/1000\ m^3 = 0{,}001\ m^3$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 2

Zamień kilometry sześcienne (km^3) na metry sześcienne (m^3).



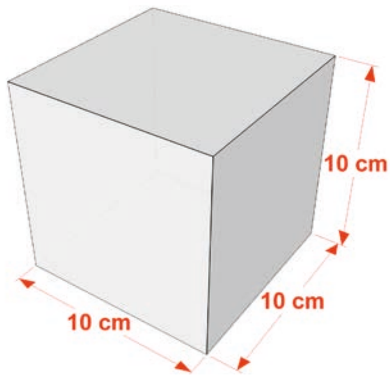


Zauwa
1 km = 1000 m,
w sześcianie o krawędzi 1 km mieści się 1000 x 1000 x 1000 sześcianów o krawędzi 1 m.
1 km^3 = 1 km • 1 km • 1 km = 1000 m • 1000 m • 1000 m = 1 000 000 000 m^3

1 kilometr sześcienny (1 km^3) jest jednostką .... razy większą od 1 metra sześciennego (1 m^3).
1 km^3 = 1 000 000 000 m^3
1 m^3 = 0,000 000 001 km^3

Analogicznie rozumując, otrzymasz następujące zależności:
1 cm^3 = 1000 mm^3
1 mm^3 = 1/1000 cm^3 = 0,001 cm^3
1 dm^3 = 1000 cm^3
1 cm^3 = 1/1000 dm^3 = 0,001 dm^3

Popatrz na ten sześcian. Długość jego krawędzi równa się 10 cm, czyli 1 dm. Objętość tego sześcianu jednostkowego wynosi 1 dm^3, a pojemność (maksymalna ilość cieczy, która w nim się zmieści) - dokładnie 1 litr.



1litr = 1 decymetr sześcienny
1 l = 1 dm^3
1litr = 1000 mililitrów
1 l = 1000 ml
1 hektolitr = 100 litrów
1 hl = 100 l

Więcej zadań znajdziesz na platformie edukacyjnej MATI.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 1

Zamień jednostki:

a) 5 m^3 na dm^3

b) 1000 dm^3 na m^3

c) 0,5 dm^3 na cm^3

d) 1000 mm^3 na cm^3

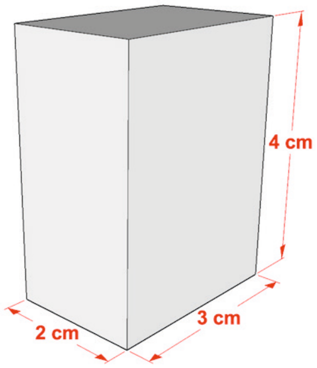
Ćwiczenie utrwalające

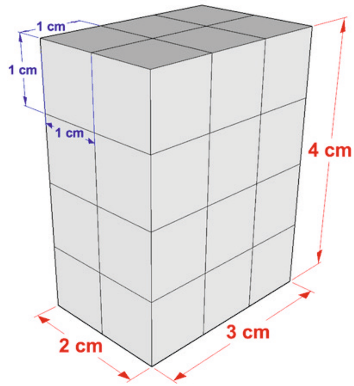
1. Ile mililitrów mleka znajduje się w litrowym pojemniku?
2. Litr soku rozlano do 4 identycznych szklanek. Ile wynosi objętość (cm^3) każdej szklanki?
3. Uzupełnij:
   a) 2 m^3 = ... dm^3
   b) 0,2 m^3 = ... dm^3
   c) 40 dm^3 = ... m^3
   d) 4 dm^3 = ... m^3
   e) 3 dm^3 = ... cm^3
   f) 0,005 dm^3 = ... cm^3
   g) 2 cm^3 = ... mm^3
   h) 0,2 cm^3 = ... mm^3
4. Porównaj objętości wpisując odpowiedni znak <, =, >
   a) 10 dm^3... 1l
   b) 1000 cm^3 ... 1 l
   c) 100 dm^3 ... 1 hl
   d) 1m^3 ... 100 l
   e) 2m^3 ... 2000 l
   f) 1,2 dm^3 ... 12 l
   g) 100 cm^3 ... 1000 ml
5. Rozejrzyj się dookoła i zwróć uwagę na objętość/pojemność przedmiotów, których używasz.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

6.4. Objętość prostopadłościanu - zadania

Wiesz już, że objętość prostopadłościanu to liczba sześcianów jednostkowych, którymi dokładnie go wypełniasz.





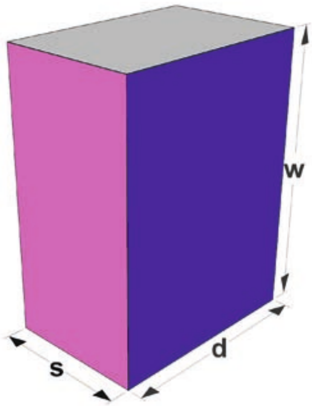
Aby obliczyć liczbę tych sześcianów, wystarczy pomnożyć przez siebie trzy wymiary prostopadłościanu: długość, szerokość i wysokość.

Objętość prostopadłościanu o wymiarach 2 cm x 3 cm x 4 cm to 24 cm^3.

Jednostką objętości jest np. centymetr sześcienny (cm^3). Jest to symbol, a nie operacja potęgowania.

Zanim zaczniesz obliczać objętość figury trójwymiarowej, sprawdź, czy jednostki długości, szerokości i wysokości są jednakowe.

Objętość (V) prostopadłościanu obliczamy, mnożąc przez siebie długość (d), szerokość (s) i wysokość (w).



Objętość = długość • szerokość • wysokość

V = d • s • w

V - objętość (od ang. volume)

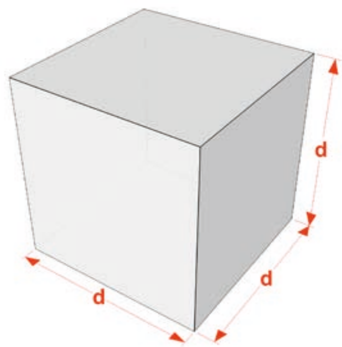
Sześcian jest szczególnym przypadkiem prostopadłościanu. Wszystkie jego krawędzie (d) mają taką samą długość.

V = d • d • d

$V = d^3$

d^3 czytamy: „d do potęgi trzeciej”

lub „d do sześcianu”.



KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 1

Podaj wymiary (tylko liczby naturalne) kilku prostopadłościennych kartonów, których pojemność wynosi dokładnie 1 litr.

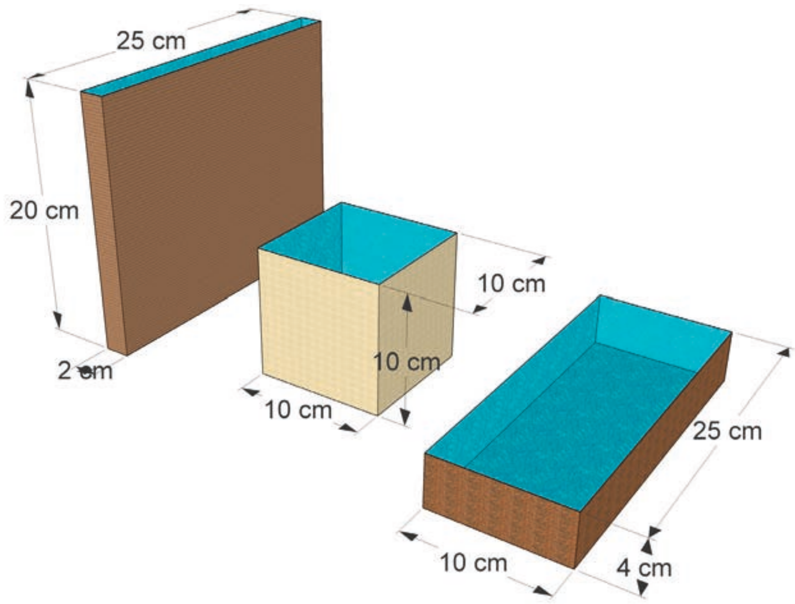
Aby podać wymiary prostopadłościanów, musisz pojemność, czyli objętość naczynia wyrażoną w litrach, zamienić na dm^3.
$1\ l = 1\ dm^3$
$1\ dm^3 = 1000\ cm^3$

Wiesz, że prostopadłościan musi mieć objętość $1\ dm^3$ lub $1000\ cm^3$.
Objętość prostopadłościanu to iloczyn trzech wymiarów: długości (d), szerokości (s), wysokości (w).
$1\ dm^3 = d \cdot s \cdot w$
$1000\ cm^3 = d \cdot s \cdot w$

Przykład 1: sześcian o długości krawędzi 1 dm.
$1dm \cdot 1\ dm \cdot 1dm = 1dm^3$

Przykład 2: prostopadłościan o wymiarach 2 cm x 25 cm x 20 cm.
$2\ cm \cdot 25\ cm \cdot 20\ cm = 1000\ cm^3$

Przykład 3: prostopadłościan o wymiarach 10 cm x 25 cm x 4 cm.



Czy potrafisz podać więcej przykładów?

Różne prostopadłościany mogą mieć taką samą objętość.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 1

Oblicz objętość akwarium w kształcie prostopadłościanu o wymiarach 50 cm x 1 dm x 20 cm.

Ile litrów wody zmieści się w nim?

Zadanie 2

Do prostopadłościennego akwarium o wymiarach 2 m x 100 cm x 2 m chcesz wpuścić jeden gatunek ryb. Na jedną rybę powinno przypadać 100 l wody.

Ile ryb może pływać w akwarium?

Ćwiczenie utrwalające

1. Oblicz objętość prostopadłościanu o wymiarach: 10 cm x 5 cm x 100 mm.
2. Oblicz objętość prostopadłościanu, który w podstawie ma prostokąt o polu 10 dm^2. Wysokość tego prostokąta wynosi 50 cm.
3. Podaj wymiary (tylko liczby naturalne) prostopadłościennego akwarium, którego pojemność wynosi 100 litrów.
4. Oblicz długość krawędzi sześcianu, którego objętość równa się 27 mm^3.

Więcej zadań znajdziesz na platformie edukacyjnej MATI.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ TOMP UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

NOTATKI

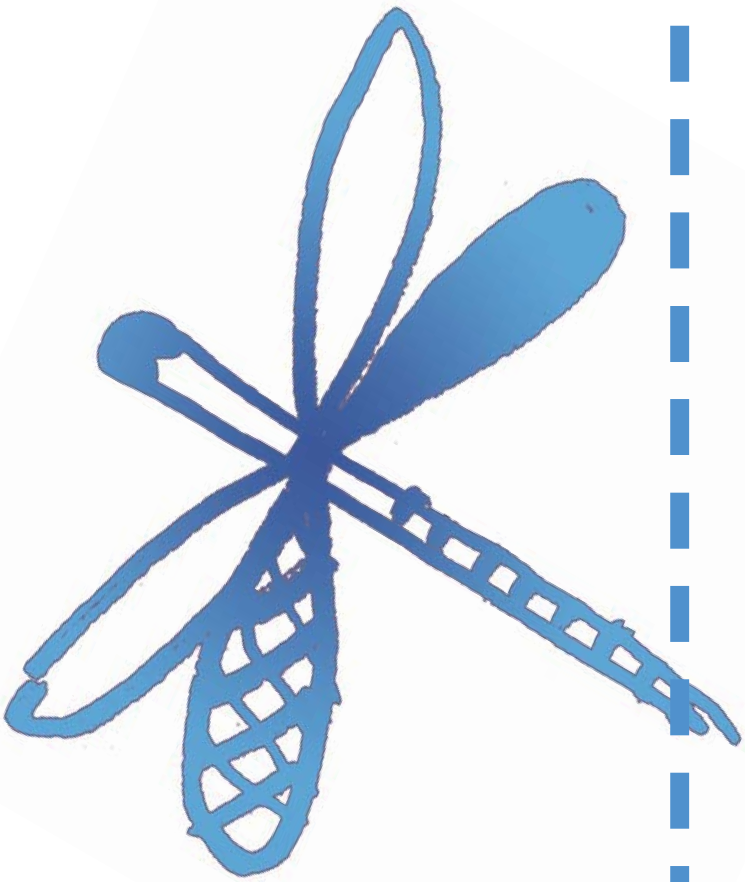
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

NOTATKI

Książka zawiera część materiałów zgromadzonych na platformie edukacyjnej MATI opracowanych w ramach projektu *e-Matematyka i zajęcia komputerowe - skuteczne programy nauczania.*

Stanowi materiał pomocniczy dla dzieci z klasy V szkoły podstawowej, ich rodziców i nauczycieli.

Wersję instalacyjną platformy MATI można pobrać m.in. ze strony www.ematematyka.edu.pl



ISBN-978-83-941707-1-4

9 788394 170714