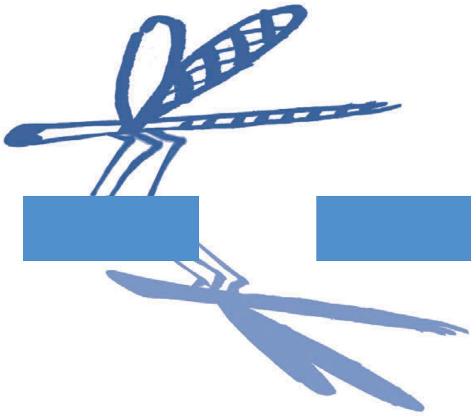
e-Matematyka
klasa VI

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
WPQ
Tomasz Jakubowski TOMP
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY



e-Matematyka klasa VI

Wydanie I
Pruszków 2015

Książka **e-Matematyka klasa VI** powstała w ramach projektu
e-Matematyka i zajęcia komputerowe – skuteczne programy nauczania
współfinansowanego ze środków Unii Europejskiej w ramach
Europejskiego Funduszu Społecznego.

Koordynator projektu – Wojciech Piotrowski
Koordynator ds. IT – Tomasz Jakubowski

Pierwotnie książka miała być jedynie dostępna na edukacyjnej
platformie MATI opracowanej w ramach projektu. W czasie realizacji
projektu podjęto decyzję o przygotowaniu jej w formacie PDF
ułatwiającym publikację w wydaniu papierowym.

Autorami materiałów dydaktycznych dla klasy VI zamieszczonych na platformie
edukacyjnej MATI, a tym samym książki są:
Marcin Wojnowski, Agnieszka Bąk, Monika Jasińska, Ewa Uljasz, Agnieszka Suwalska,
Justyna Paszkiewicz, Arkadiusz Młyński, Wojciech Piotrowski.

Znaczna część rysunków i zdjęć została wykonana przez autorów.
Szczególnie za przygotowanie rysunków i poprawki materiałów
graficznych dziękujemy Małgorzacie Tarnachowicz i Marcinowi Wojnowskiemu.

Niektóre rysunki zamieszczone w książce pochodzą z zasobów
openclipart.org.

Projekt graficzny – Marcin Piotrowski.

Przygotowanie książki w formie, którą właśnie przeglądasz zrealizował Wojciech Piotrowski
i Tomasz Jakubowski.

Skład i przygotowanie do druku – Marcin Pawlik.

Wersje instalacyjne platformy MATI oraz książka w formie cyfrowej
są dostępne m.in. na stronie internetowej projektu
www.ematematyka.edu.pl

ISBN-978-83-941701-2-1

9 788394 170721

Wydawca:
WPQ Wojciech Piotrowski
ul. Dolna 39
05-802 Pruszków

Spis treści

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
WPQ
Tomasz Jakubowski TOMP
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

ROZDZIAŁ III. LICZBY NA CO DZIEŃ

ROZDZIAŁ IV. PRĘDKOŚĆ, DROGA, CZAS

ROZDZIAŁ V. BRYŁY

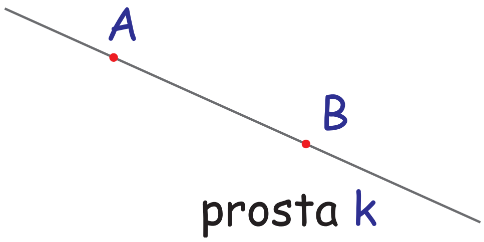
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

1. PROSTE I ODCINKI

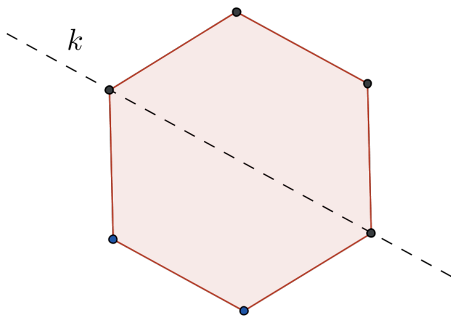
Prosta

Prosta to linia, która nie ma ani początku, ani końca. Gdyby Punkt A lub B rozpoczął wędrówkę po prostej w dowolnym kierunku - nigdy nie dotarłby do jej końca. Prostą oznaczamy za pomocą dwóch punktów należących do prostej np. prosta AB lub za pomocą małej litery alfabetu, np. prosta k.



Przykład 1

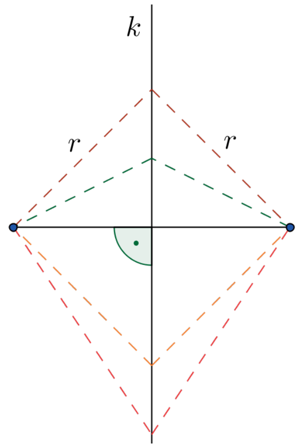
Oś symetrii figury - prosta dzieląca figurę na dwie przystające części



Ile wszystkich osi symetrii ma sześciokąt foremny?

Przykład 2

Prosta symetralna - zbiór punktów równo oddalonych od końców odcinka. Symetralna dzieli odcinek na połowę oraz jest do niego prostopadła.

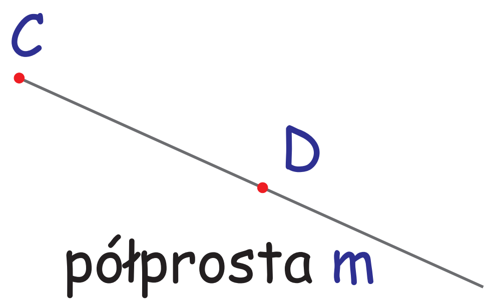


Proste mają szereg właściwości, np.:

- przez dwa nieidentyczne punkty przestrzeni przejść może tylko jedna prosta,
- prosta ma nieskończoną liczbę osi symetrii,
- każdy punkt na prostej dzieli ją na dwie części zwane półprostymi,
- prosta przechodząca przez dwa różne punkty płaszczyzny zawiera się w tej płaszczyźnie,
- każda prosta dzieli płaszczyznę, w której się zawiera, na dwa obszary zwane półpłaszczyznami i jest brzegiem każdego z nich.

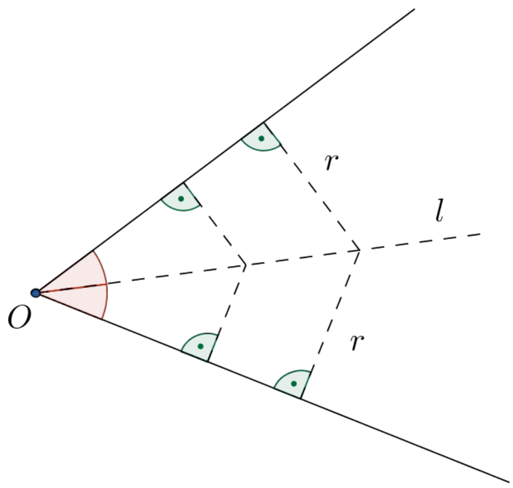
Półprosta

Półprosta to część prostej, ograniczona jednym punktem należącym do niej. Półprosta ma punkt początkowy, ale nie ma punktu końcowego. Oznaczamy ją podobnie jak prostą.



Przykład 3

Dwusieczna kąta - zbiór punktów równo oddalonych od ramion kąta. Dwusieczna kąta dzieli kąt na połowę.



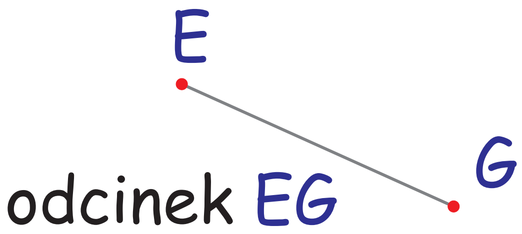
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Odcinek

Odcinek, w pojęciu matematycznym, to część prostej, która przechodzi przez dwa dowolne punkty na tej prostej razem z tymi punktami.

Odcinki (względem siebie) mogą być:

- równe (równej długości),
- nierówne (różnej długości),
- równoległe,
- prostopadłe,
- skośne.



Przykład 4

Droga, jaką przebywa światło słoneczne do ziemi, jest odcinkiem. Gdzie leży początek a gdzie koniec tego odcinka?

Zadanie 1

Narysuj prostą p i zaznacz na niej cztery różne punkty: A, B, C, D. Wypisz wszystkie powstałe odcinki.

Zadanie 2

Zaznacz dwa różne punkty A i B. Z punktu A poprowadź półprostą AB, a z punktu B półprostą BA. Jaka figura powstała?

Zadanie 3

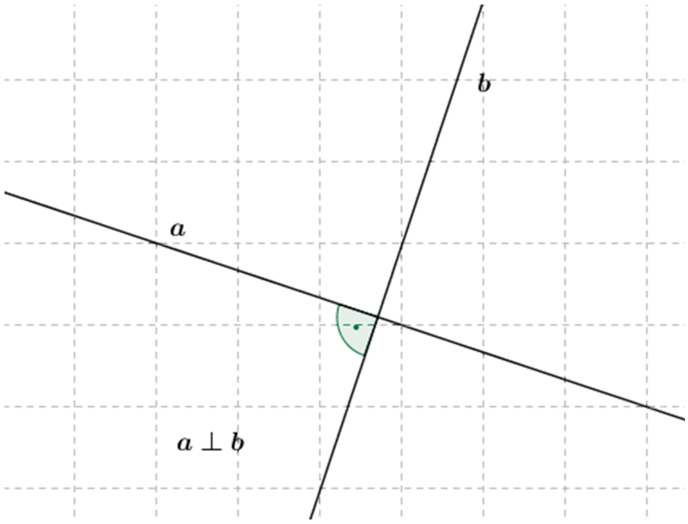
Zaznacz sześć różnych punktów: A, B, C, D, E i F. Przez punkty A i C poprowadź prostą a. Z punku B poprowadź prostą BF. Punkt przecięcia się prostych oznacz punktem G. Z punktu D poprowadź półprostą b. Punkty D i F połącz odcinkiem. Ile różnych odcinków powstało na tym rysunku?

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

1.1. Proste równoległe i prostopadłe

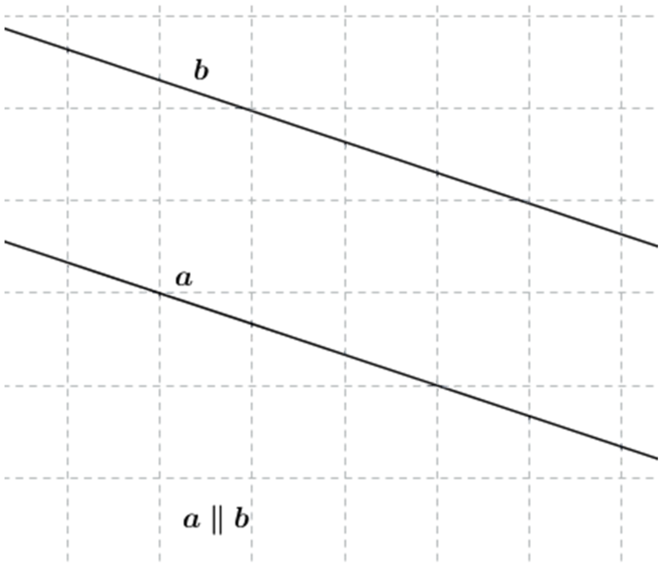
Proste prostopadłe:

Mówimy, że dwie proste są do siebie prostopadłe, jeśli przecinają się pod kątem prostym (90^o). Matematycy prostopadłość prostych zapisują za pomocą symbolu $\perp$ i oznaczają kropką wewnątrz łuku.



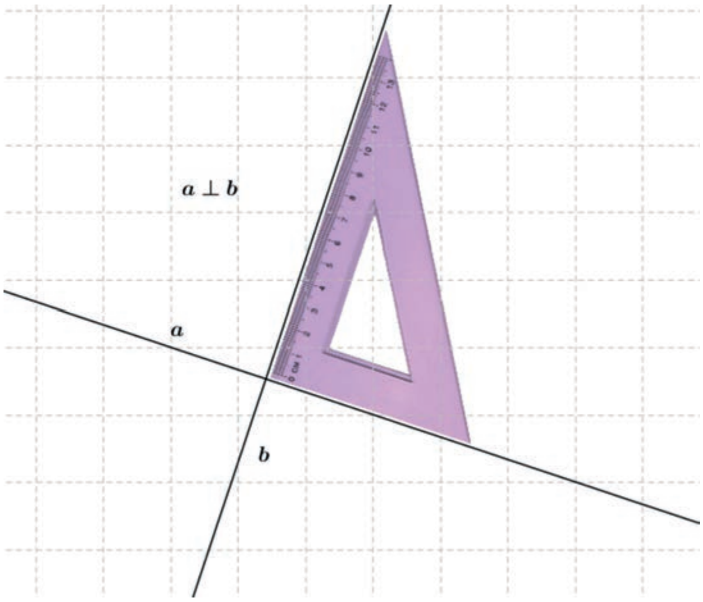
Proste równoległe:

Mówimy, że dwie proste są do siebie równoległe, jeżeli nie mają ze sobą punktów wspólnych albo mają wszystkie punkty wspólne.



Sprawdzenie prostopadłości prostych:

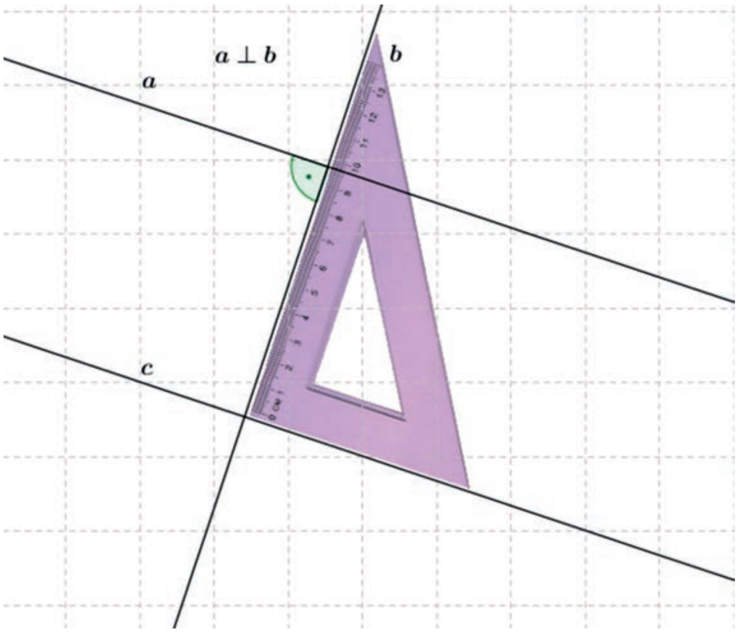
Sprawdzamy, czy proste przecinają się pod kątem prostym. Najłatwiej posłużyć się do tego celu ekierką.



Sprawdzenie równoległości prostych

Dwie proste są do siebie równoległe, jeśli są prostopadłe do wspólnej prostej.

Rysujemy prostą prostopadłą do jednej z tych prostych i sprawdzamy, czy ta druga prosta jest do niej prostopadła.



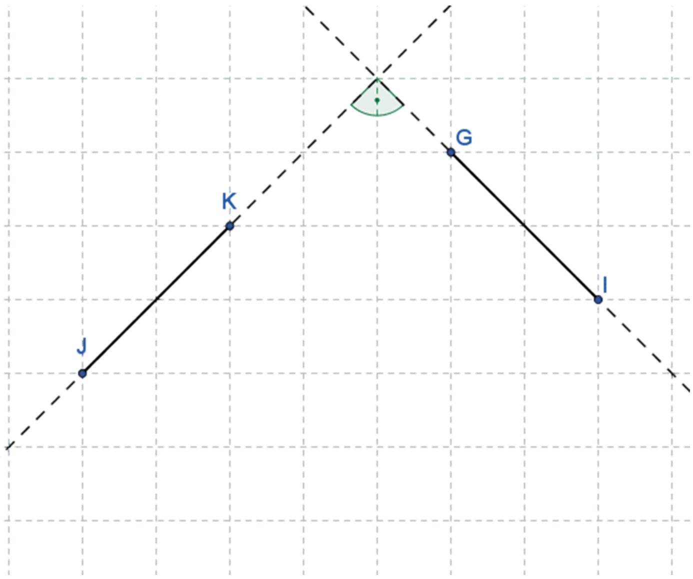
Z rysunku widać, że prosta **c** jest prostopadła do prostej **b**, czyli jest równoległa do prostej **a**.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

1.2. Odcinki równoległe i prostopadłe

Mówimy, że dwa odcinki są prostopadłe,
jeśli zawierają się w dwóch prostych prostopadłych.

Mówimy, że dwa odcinki są równoległe,
jeśli zawierają się w dwóch prostych równoległych.



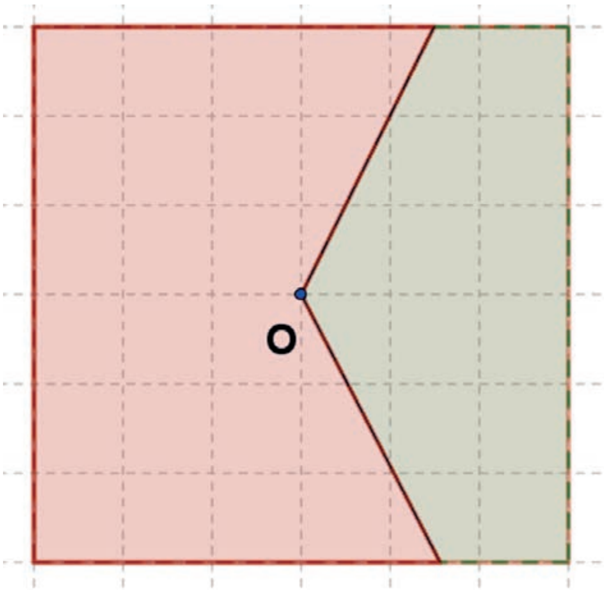
Odcinki JK oraz GI zawierają się w prostych prostopadłych, więc są prostopadłe.

Ćwiczenie 1

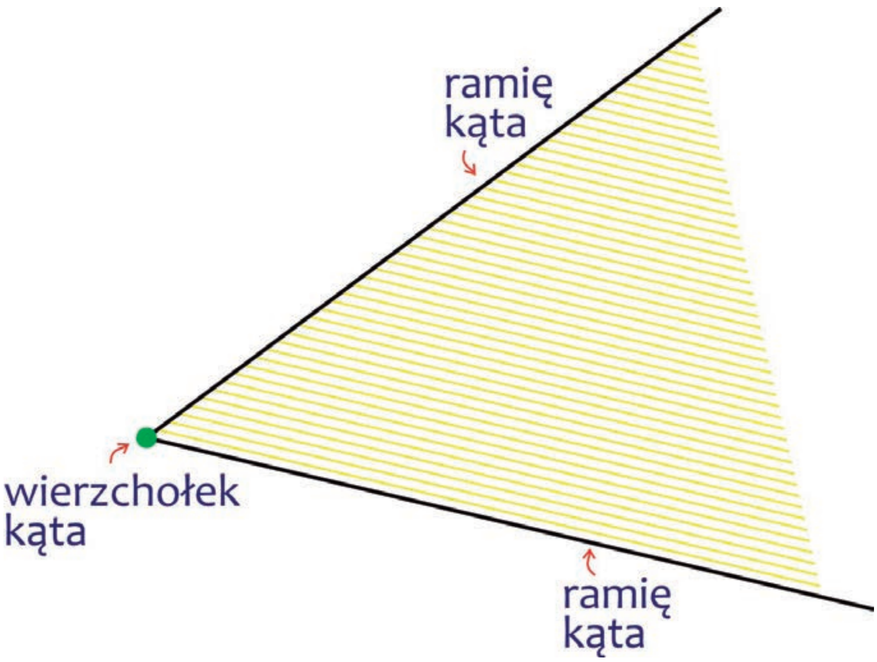
Zaproponuj definicję równoległości odcinków i wykonaj odpowiedni rysunek w zeszycie.

2. KĄTY

Dwie **półproste** o wspólnym początku dzielą płaszczyznę na dwie części.
Każdą z tych części wraz z półprostymi nazywamy **kątem**



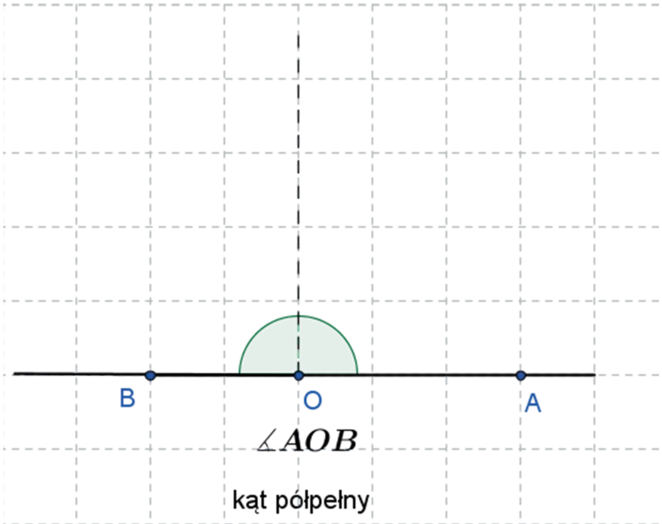
Elementy kąta:



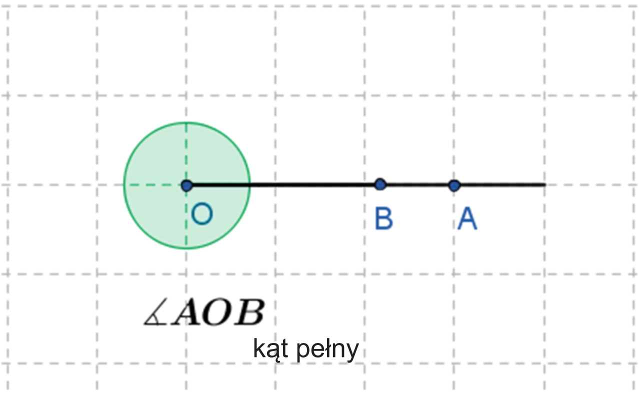
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

2.1. Rodzaje kątów

Kąt, którego ramiona są swoimi przedłużeniami nazywamy **kątem półpełnym**.
Kąt półpełny ma miarę **180º**.

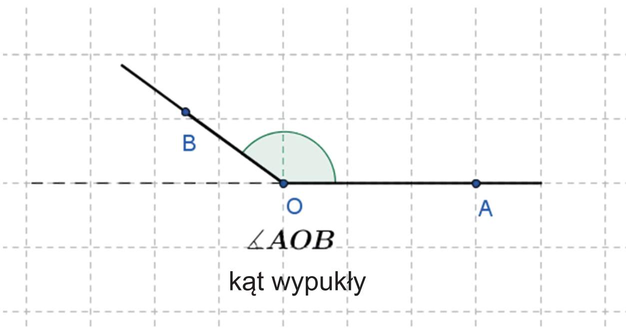


Kąt, którego ramiona pokrywają się ze sobą, nazywamy **kątem pełnym**.
Kąt pełny ma miarę **360º**.

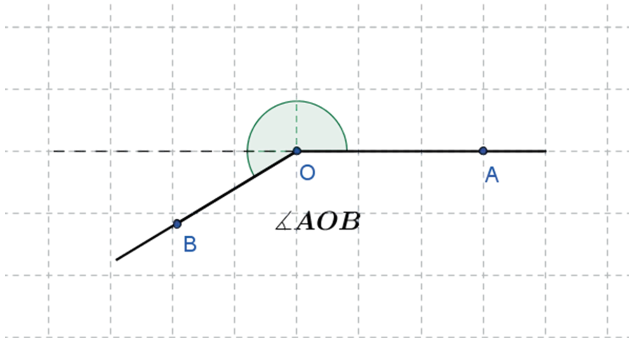


Kąt wypukły to kąt mniejszy lub równy kątowi półpełnemu (również 0º).
Kąt pełny to także kąt wypukły.
Kąt wklęsły to kąt większy od kąta półpełnego, ale mniejszy od kąta pełnego.

Kąt wypukły ma miarę mniejszą lub równą **180º**.



Kąt wklęsły ma miarę większą niż **180⁰**, ale mniejszą niż **360ᵒ**.



kąt wklęsły

Wśród kątów wypukłych rozróżniamy:
- kąty ostre (kąty większe od kąta zerowego, ale mniejsze od kąta prostego),
- kąty proste (kąty, których ramiona położone są na półprostych wzajemnie do siebie prostopadłych),
- kąty rozwarte (kąty większe od kąta prostego, ale mniejsze od kąta półpełnego).

Kąt pełny jest kątem wypukłym.

Ćwiczenie 1

Narysuj w zeszycie różne rodzaje kątów wypukłych.

Ćwiczenie 2

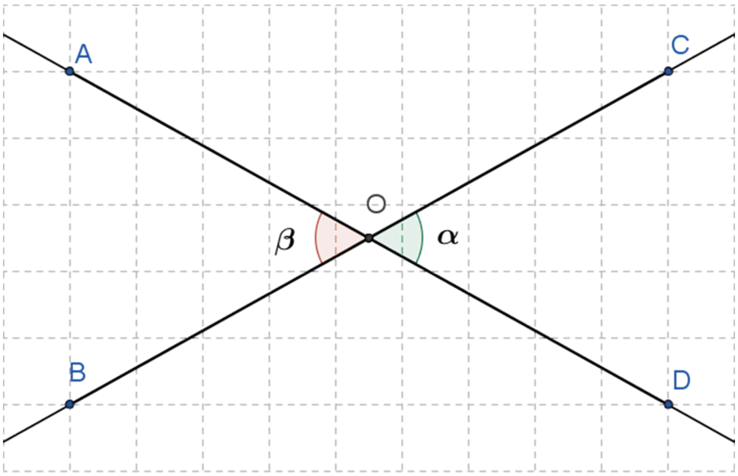
Używając miary stopniowej, zdefiniuj następujące kąty:
- kąt ostry,
- kąt prosty,
- kąt rozwarty.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

2.2. Rodzaje kątów ze względu na położenie

Kąty wierzchołkowe – pary kątów wypukłych o wspólnym wierzchołku, w których ramiona jednego kąta stanowią przedłużenia ramion drugiego. Kąty wierzchołkowe w takiej parze mają równe miary.

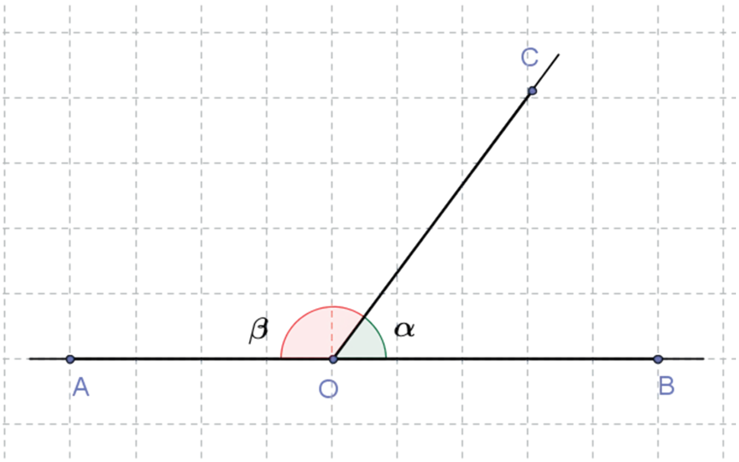
Dwie pary kątów wierzchołkowych powstają w wyniku przecięcia dwóch prostych:



Miary kątów wierzchołkowych są równe:

$$\alpha = \beta$$

Kąty przyległe - kąty mające wspólne ramię, których pozostałe ramiona dopełniają się do prostej. Kąty przyległe tworzą razem kąt półpełny.

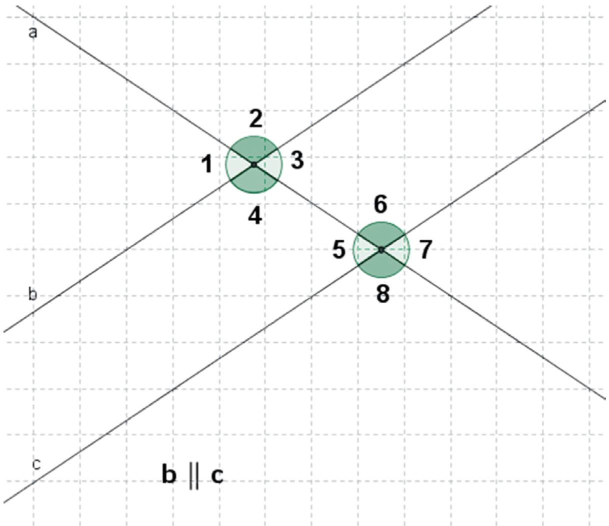


Suma miar kątów przyległych wynosi 180^0

$$\alpha + \beta = 180^o$$

Z powyższej własności wynika, że kąty wklęsłe nie mają kątów przyległych.

Kąty naprzemianległe – pary kątów utworzonych przez przecięcie dwóch prostych równoległych b i c trzecią prostą a, leżące po przeciwnych stronach siecznej. **Kąty naprzemianległe** mają **jednakowe miary**.
Kąty odpowiadające - pary kątów utworzonych przez przecięcie dwóch prostych równoległych b i c trzecią prostą a, leżące po tej samej stronie siecznej. Kąty **odpowiadające** mają **jednakowe miary**.



Na rysunku: pary kątów 1 i 7 oraz 2 i 8 to kąty naprzemianległe zewnętrzne, pary 4, 6 i 3, 5 to kąty naprzemianległe **wewnętrzne**.

Pary 1, 5; 4, 8; 2, 6 i 3, 7 to kąty **odpowiadające**.

Wreszcie, pary 4, 5 i 3, 6 to kąty **jednostronne wewnętrzne**, a pary 1, 8 i 2, 7 to kąty **jednostronne zewnętrzne**.

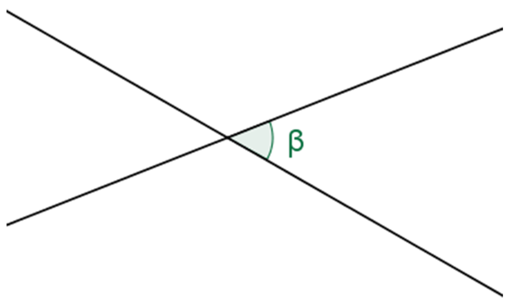
Proste b i c będą równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy którekolwiek z kątów odpowiadających lub naprzemianległych są równe.

Ćwiczenie 1

Narysuj dwie proste przecinające się pod kątem 50°. Ile wynoszą pozostałe kąty?

Ćwiczenie 2

Narysuj dwie proste przecinające się. Oblicz kąty przyległe do kąta β.



KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 3

Jaki kąt pokazują wskazówki zegara?

Zadanie 1

Odpowiedz na pytania:

1. Co to jest kąt?
2. Jaki kąt jest kątem prostym, jaki ostrym, a jaki rozwartym?
3. Dane są dwa kąty α i β takie, że $0^0 < \alpha \le 180^0$ i $180^0 < \beta < 360^0$. Który z tych kątów jest wypukły, a który wklęsły?
4. Jakim kątem jest kąt 2 razy większy od kąta prostego, a jakim kąt 4 razy większy od kąta prostego?
5. Kiedy dwa kąty przyległe są równe?
6. Kiedy dwa kąty są kątami wierzchołkowymi?
7. Kiedy dwie proste a i b, przecięte trzecią prostą c, są równoległe?
8. Jakim kątem jest kąt przyległy do kąta ostrego, a jakim przyległy do kąta rozwartego?

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

3. OKRĘGI I KOŁA

W dzisiejszych czasach koła znajdują zastosowanie niemal wszędzie - w samochodach, pociągach, samolotach i różnego rodzaju maszynach. Trudno sobie wyobrazić bez nich świat. Koło wymyślono około 3500 roku p.n.e w Mezopotamii, krainie położonej między rzekami Tygrys i Eufrat, na obszarze obecnego Iraku. Zastosowano je po raz pierwszy w wozach, używanych do transportu ciężkich ładunków, oraz w rydwanach, które stały się ulubionymi pojazdami wojennymi starożytnych Egipcjan i Hetytów (ludu żyjącego niegdyś na terenie dzisiejszej Turcji).

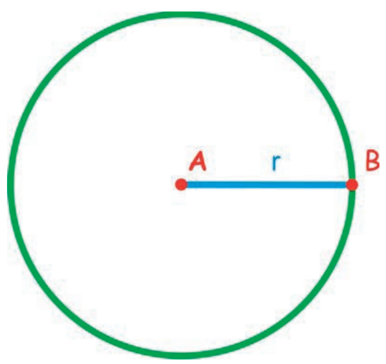
Ćwiczenie 1

Ile widzisz kół?

Okrąg i koło

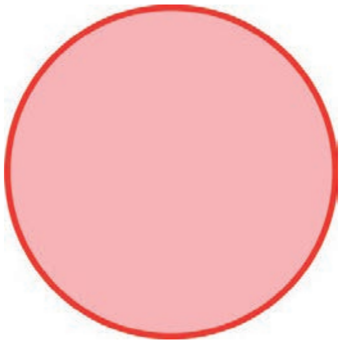
Z pojęciem koła wiąże się pojęcie okręgu. Okrąg jest zbiorem punktów równoodległych od środka okręgu A - wyznacza go koniec odcinka obracającego się dokoła punktu A.

Okręgiem nazywamy krzywą, której wszystkie punkty leżą w tej samej odległości od danego punktu zwanego środkiem okręgu.



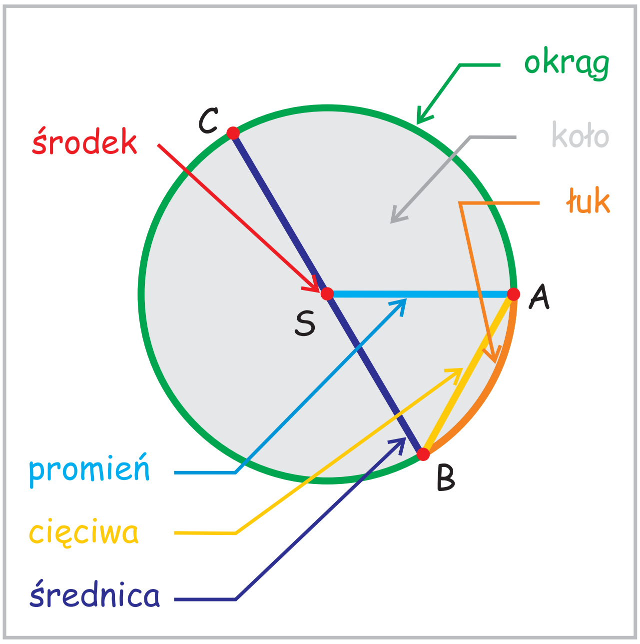
r - promień okręgu
A - środek okręgu

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



Koło to część płaszczyzny ograniczona okręgiem wraz z tym okręgiem.

Odcinek, który łączy dowolny punkt okręgu ze środkiem okręgu (koła), to promień okręgu (koła).
Okrąg o środku S i promieniu długości r oznaczamy o(S, r).
Punkt będący w środku, w takiej samej odległości od każdego punktu na okręgu, nazywamy środkiem okręgu lub koła.



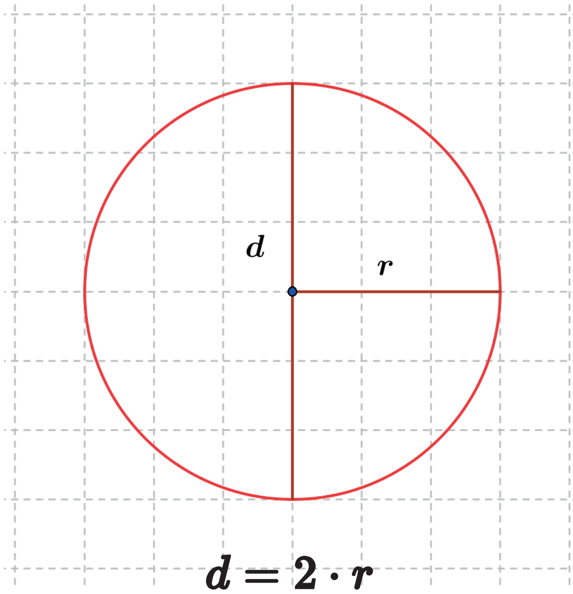
Odcinek SA, SB, SC łączący środek z punktem na okręgu nazywamy promieniem.

Odcinek AB łączący dwa punkty na okręgu nazywamy cięciwą.

Cięciwę przechodzącą przez środek okręgu nazywamy średnicą - odcinek CB.

Cięciwa AB wyznacza na okręgu łuk.

Średnica okręgu jest dwa razy większa od jego promienia.



$$d = 2 \cdot r$$

d - długość średnicy okręgu
r - długość promienia okręgu

Zadanie 1

Odpowiedz na pytania:

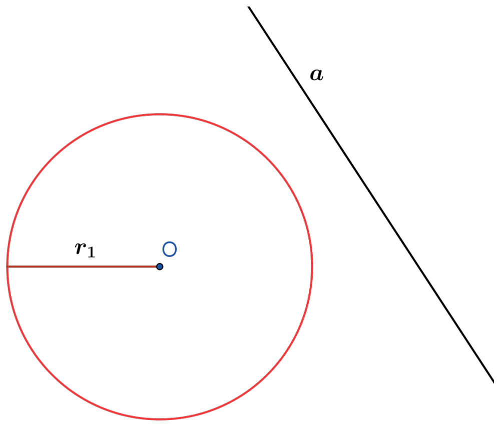
1. Co nazywamy okręgiem, a co kołem?
2. Co to jest promień koła (okręgu)?
3. Co nazywamy cięciwą koła (okręgu)?
4. Jaka jest najdłuższa cięciwa w okręgu?
5. Czy środek okręgu należy do okręgu?
6. Czy środek koła należy do koła?

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

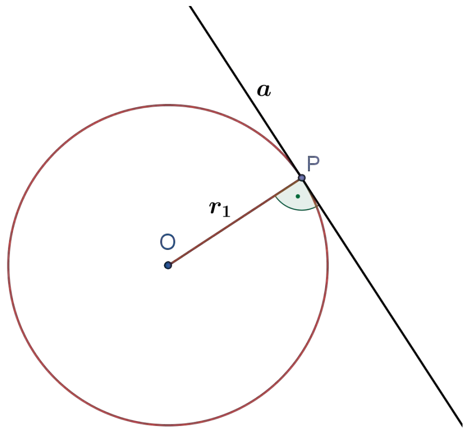
3.1. Wzajemne położenie prostej i okręgu

Prosta i okrąg mogą:

- **nie mieć punktów wspólnych**



- **być styczne (mieć jeden punkt wspólny)**

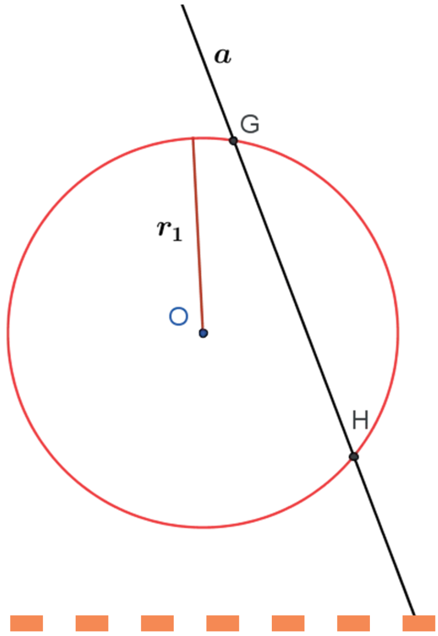


W tym przypadku promień okręgu poprowadzony do punktu styczności jest prostopadły do prostej. Prostą ***a*** przechodzącą przez punkt styczności nazywamy prostą styczną do okręgu.

Prostą, która ma z okręgiem tylko jeden punkt wspólny, nazywamy styczną. Styczna do okręgu jest prostopadła do promienia łączącego punkt styczności ze środkiem okręgu.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

- **mieć dwa punkty wspólne**



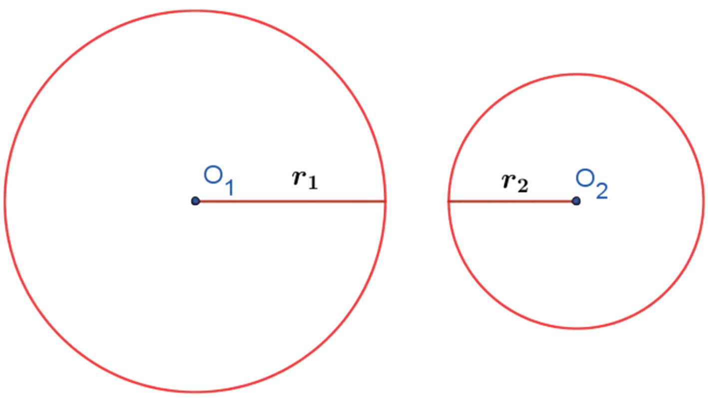
Prostą, która ma z okręgiem dwa punkty wspólne, nazywamy prostą sieczną.

Czy prosta może przecinać okrąg w 3 punktach?

3.2 Wzajemnie położenie okręgów

Dwa okręgi mogą być:

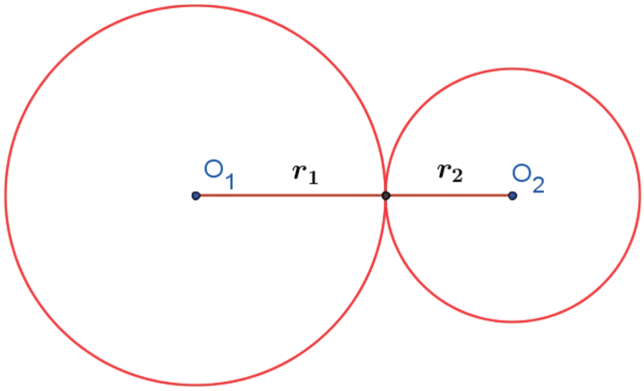
- **rozłączne zewnętrznie**



$$|O_1O_2| > r_1 + r_2$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

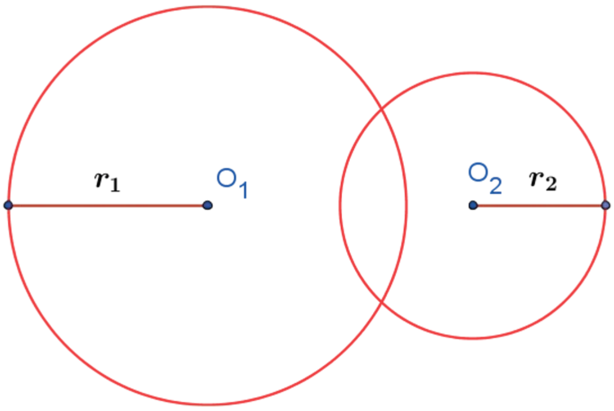
- **styczne zewnętrznie**



$$|O_1O_2| = r_1 + r_2$$

Zaproponuj nazwę punktu styczności tych okręgów. Ile ich jest?

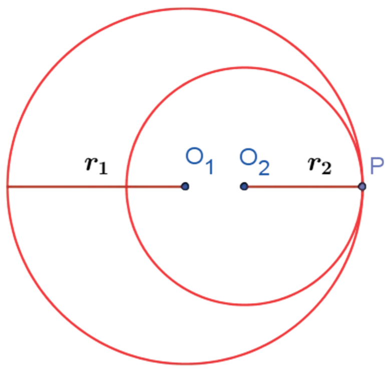
- **przecinające się**



$$r_1 - r_2 < |O_1O_2| < r_1 + r_2 \text{ gdzie } r_1 \geq r_2$$

Zaproponuj nazwy punktów przecięcia się tych okręgów. Ile ich jest?

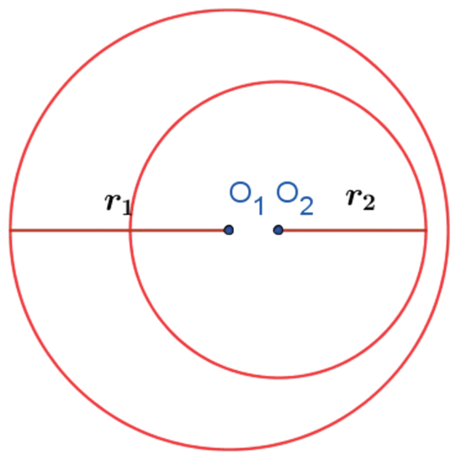
- **styczne wewnętrznie**



$$|O_1O_2| = r_1 - r_2 \text{ gdzie } r_1 > r_2$$

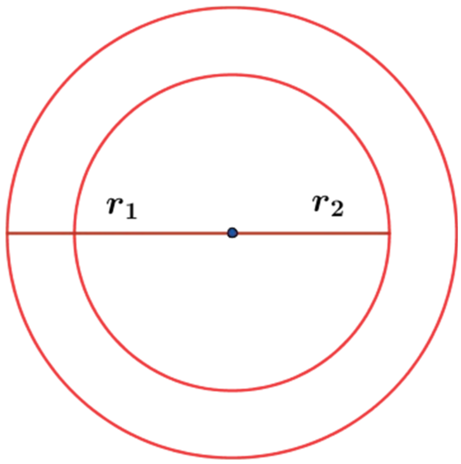
Jak nazywa się punkt styczności tych okręgów?

- **rozłączne wewnętrznie**



$$|O_1O_2| < r_1 - r_2 \text{ gdzie } r_1 > r_2$$

- **współśrodkowe**



Nazwij punkt będący wspólnym środkiem tych okręgów.

Ćwiczenie 1

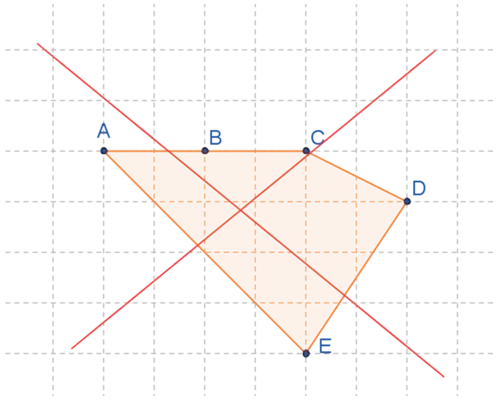
Czy można narysować dwa okręgi o równych promieniach, które są rozłączne wewnętrznie?

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

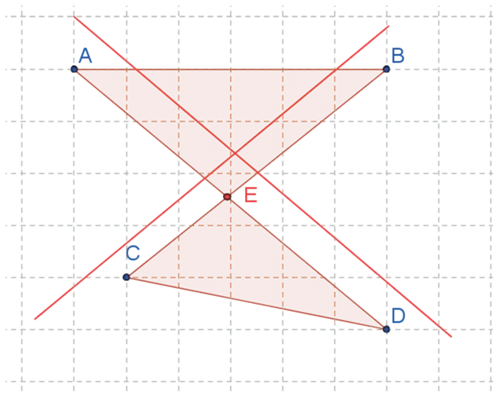
4. WIELOKĄTY

Wielokątem nazywamy taką figurę geometryczną, w której możemy wyróżnić wierzchołki i boki w taki sposób, że:

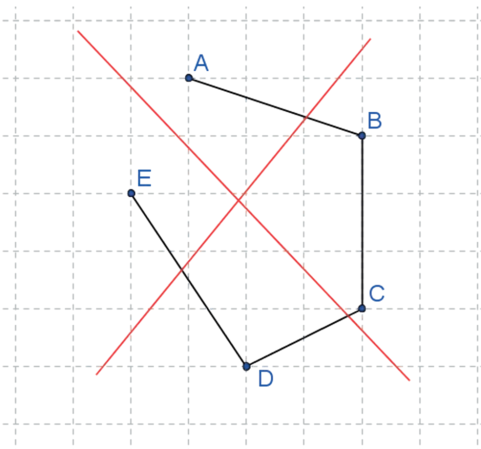
- żadne dwa boki o wspólnym wierzchołku nie zawierają się w jednej prostej,



- żadne dwa boki nie mające wspólnego wierzchołka nie mają punktów wspólnych,



- każdy wierzchołek jest częścią wspólną dokładnie dwóch boków.



Wielokąt o *n* bokach nazywamy również *n*-kątem.

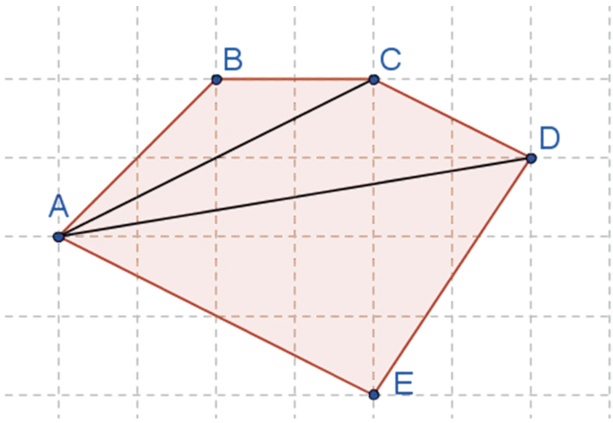
Odcinki, tworzące wielokąt, nazywamy jego **bokami**, a punkty ich przecięcia **wierzchołkami** wielokąta.

Sumę wszystkich boków nazywamy **obwodem** wielokąta.

Wielokąty **wklęsłe** i **wypukłe**
Jeżeli wszystkie kąty wewnętrzne wielokąta są kątami wypukłymi, to wielokąt ten nazywamy **wielokątem wypukłym**.

Jeżeli co najmniej jeden kąt wewnętrzny wielokąta jest kątem wklęsłym, to wielokąt ten nazywamy **wielokątem wklęsłym**.

Przekątną wielokąta nazywamy odcinek, który łączy dwa niesąsiednie wierzchołki wielokąta.



Ponieważ z każdego wierzchołka n-kąta wypukłego możemy poprowadzić n-3 przekątnych, więc z n wierzchołków możemy poprowadzić $n \cdot (n-3)$ przekątnych. Ponieważ każda przekątna w wielokącie policzona została dwa razy, np. odcinek |AC| oraz |CA| to ta sama przekątna, więc:

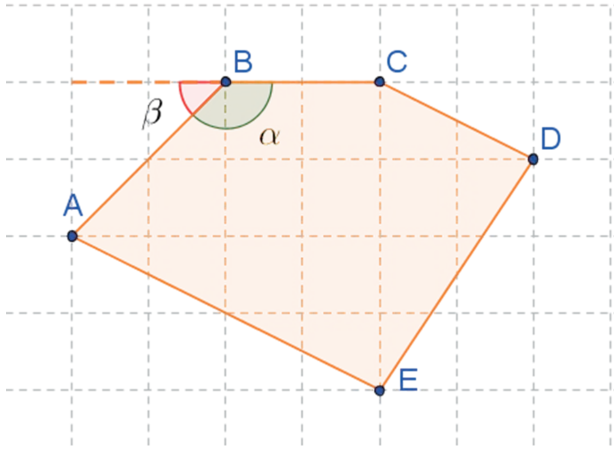
Liczba przekątnych n-kąta wypukłego jest równa $\dfrac{n\cdot(n-3)}{2}$

Czy powyższy wzór prawdziwy jest dla n-kąta wklęsłego?

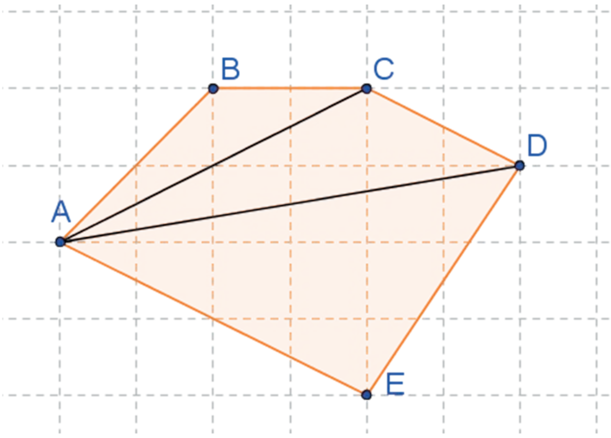
Kąty wewnętrzne i zewnętrzne wielokąta
Kąty utworzone przez dowolne dwa kolejne boki nazywamy **kątami wewnętrznymi** wielokąta.

Kąt zewnętrzny wielokąta - to kąt przyległy do kąta wewnętrznego tego wielokąta.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



α - kąt wewnętrzny wielokąta
β - kąt zewnętrzny wielokąta



Ponieważ każdy wielokąt (n - kąt) można podzielić przekątnymi na n - 2 trójkątów, a suma miar kątów wewnętrznych każdego trójkąta wynosi 180^0, to:

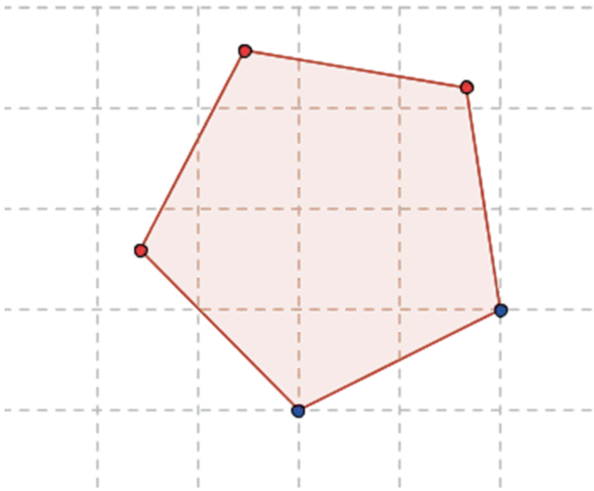
Suma miar kątów wewnętrznych n-kąta jest równa $(n-2) \cdot 180$

Czy powyższy wzór prawdziwy jest dla dowolnego wielokąta wypukłego i wklęsłego?

Suma miar kątów zewnętrznych każdego wielokąta wypukłego jest równa 360°

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wielokąty foremne
W wielokątach foremnych wszystkie boki mają równe długości i wszystkie kąty mają równe miary.



pięciokąt foremny

Zadanie 1

Ile wynosi suma miar kątów wewnętrznych sześciokąta?

Zadanie 2

Ile wynosi liczba przekątnych dziesięciokąta wypukłego?

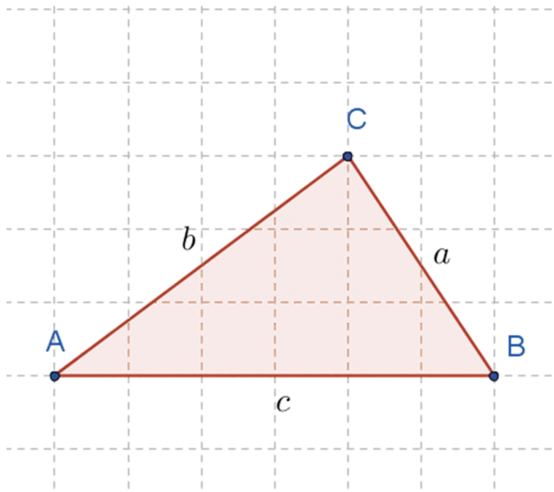
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

4.1. Rodzaje trójkątów

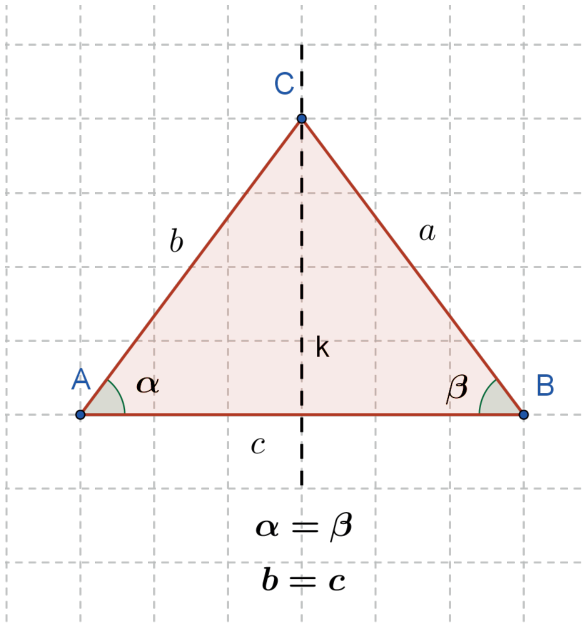
Trójkąty możemy podzielić ze względu na:
- długości boków,
- kąty.

Podział trójkątów ze względu na boki:
- trójkąt różnoboczny,
- trójkąt równoramienny,
- trójkąt równoboczny.

Trójkąt różnoboczny ma trzy boki różnej długości. (a ≠ b ≠ c)

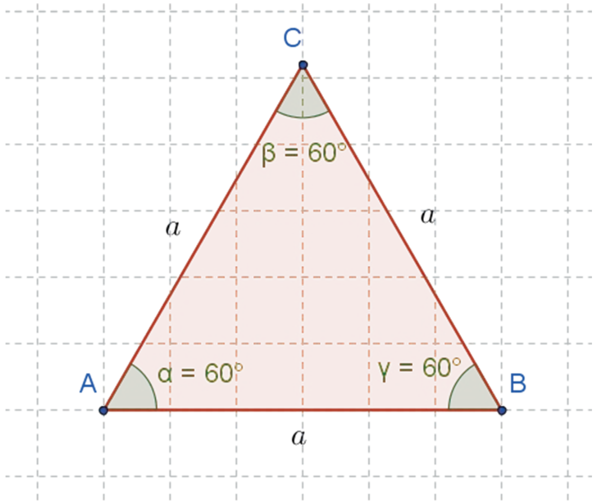


Trójkąt równoramienny ma dwa boki (ramiona) równej długości (a = b lub a = c lub b = c). Pozostały trzeci bok trójkąta równoramiennego nazywamy podstawą. Trójkąt równoramienny ma jedną oś symetrii. Kąty przy podstawach trójkąta równoramiennego mają równe miary.



prosta k jest osią symetrii trójkąta równoramiennego

Trójkąt równoboczny ma trzy boki równej długości (a = b = c) oraz trzy osie symetrii. Stąd wynika, że wszystkie kąty trójkąta równobocznego mają równe miary i wynoszą po $\frac{180}{3} = 60^o$.

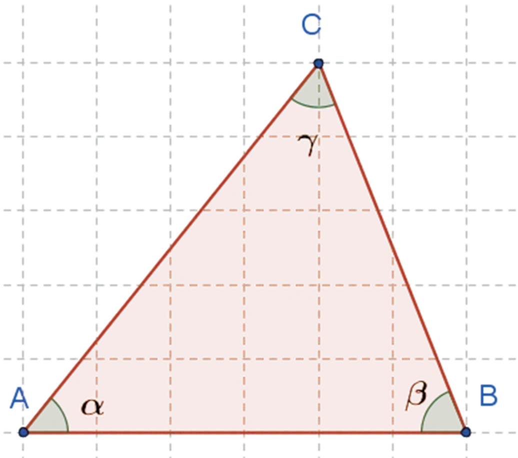


Ćwiczenie 1

Narysuj w zeszycie trójkąt równoboczny i zaznacz w nim wszystkie osie symetrii.

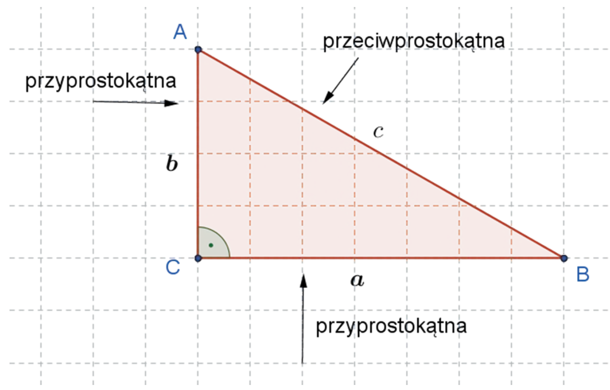
Podział trójkątów ze względu na kąty:
- trójkąt ostrokątny
- trójkąt prostokątny
- trójkąt rozwartokątny

Trójkąt ostrokątny ma 3 kąty ostre $0^o < \alpha < 90^o, 0^o < \beta < 90^o, 0^o < \gamma < 90^o$.

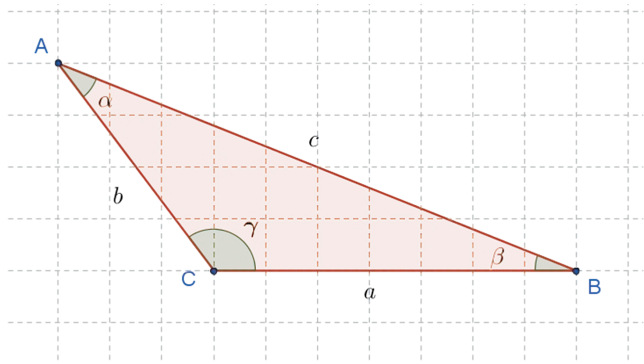


KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Trójkąt prostokątny ma jeden kąt prosty, a pozostałe kąty są ostre.
Boki przyległe do kąta prostego nazywamy przyprostokątnymi.
Trzeci najdłuższy bok nazywamy przeciwprostokątną.



Trójkąt rozwartokątny ma jeden kąt rozwarty. Pozostałe kąty trójkąta rozwartokątnego są ostre.



$$90^o < \gamma < 180^o, 0^o < \alpha < 90^o, 0^o < \beta < 90^o$$

Ćwiczenie 2

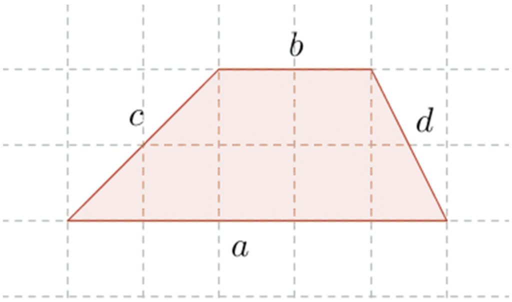
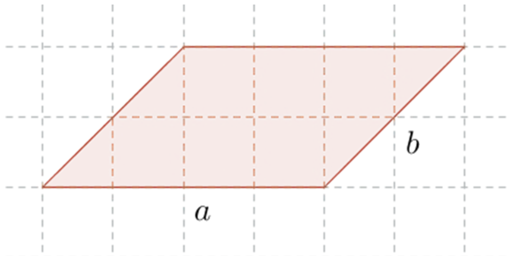
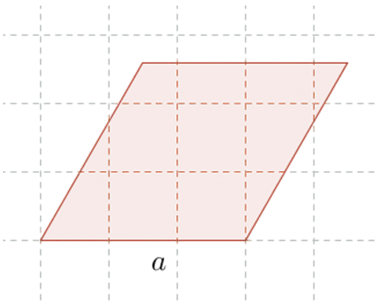
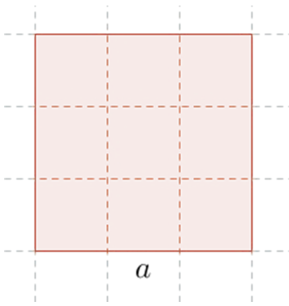
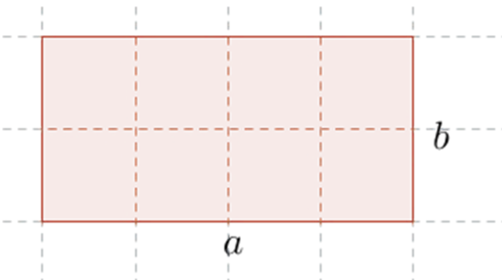
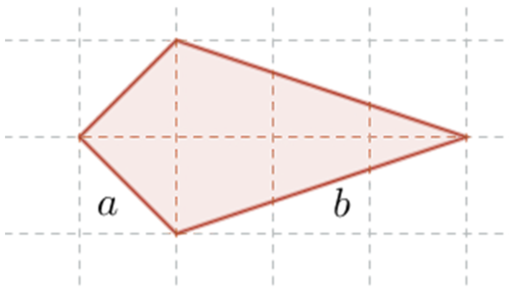
Czy istnieje trójkąt prostokątny równoramienny?

Czy istnieje trójkąt rozwartokątny równoboczny?

Czy trójkąt równoboczny możemy nazwać trójkątem równoramiennym?

4.2. Rodzaje czworokątów

Przegląd czworokątów:

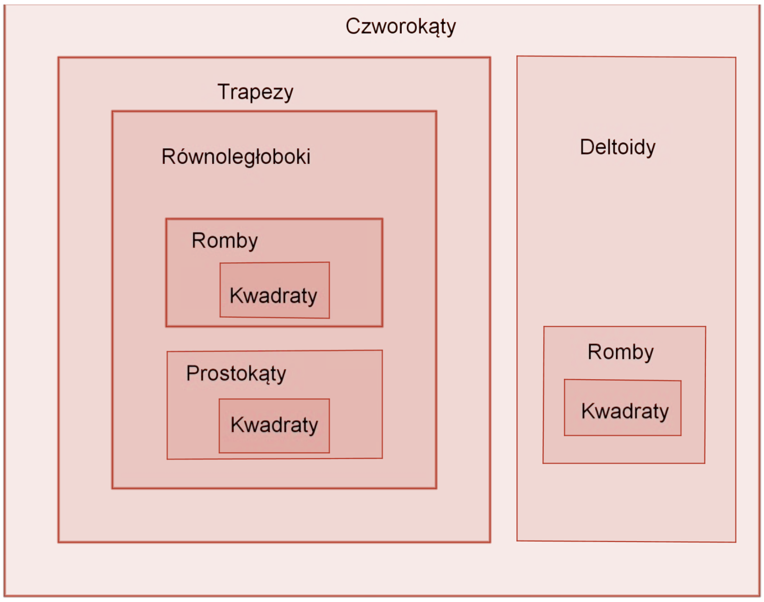
<table>
<tr><td>Trapezy - czworokąty o przynajmniej jednej parze boków równoległych.</td><td>Równoległoboki - czworokąty mające dwie pary boków równoległych.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Romby - równoległoboki o wszystkich bokach równych.</td><td>Kwadraty - równoległoboki o wszystkich bokach i kątach równych.
Kwadraty - prostokąty o wszystkich bokach równych.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Prostokąty - równoległoboki o wszystkich kątach równych (prostych).</td><td>Deltoidy - czworokąty o dwóch parach sąsiednich boków równych.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Wśród trapezów wyróżniamy:

- trapezy równoramienne - trapezy, których ramiona mają równe długości,
- trapezy prostokątne - trapezy, których jedno z ramion jest prostopadłe do obu podstaw.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rodzinę czworokątów możemy sklasyfikować za pomocą diagramu:



Uwaga: wszystkie zbiory na diagramie zaznaczono w sposób rozłączny dla lepszej przejrzystości rysunku.

Widzimy, że do rodziny czworokątów należą:

- **Trapezy** (do rodziny trapezów należą)
  - **Równoległoboki** (do rodziny równoległoboków należą)
    - **Romby** (do rodziny rombów należą)
      - **Kwadraty**
    - **Prostokąty** (do rodziny prostokątów należą)
      - **Kwadraty**
- **Deltoidy**
  - **Romby**
    - **Kwadraty**

Z powyższej klasyfikacji łatwo odczytujemy zależności (zaczynając od najbardziej wewnętrznego zbioru), np. „Każdy równoległobok jest trapezem", „Każdy kwadrat jest prostokątem".

Ćwiczenie 1

Patrząc na powyższy diagram, podaj wszystkie możliwe zależnośći, np.
Do rodziny *„prostokątów należą kwadraty"*, albo *„Każdy kwadrat jest prostokątem"*.

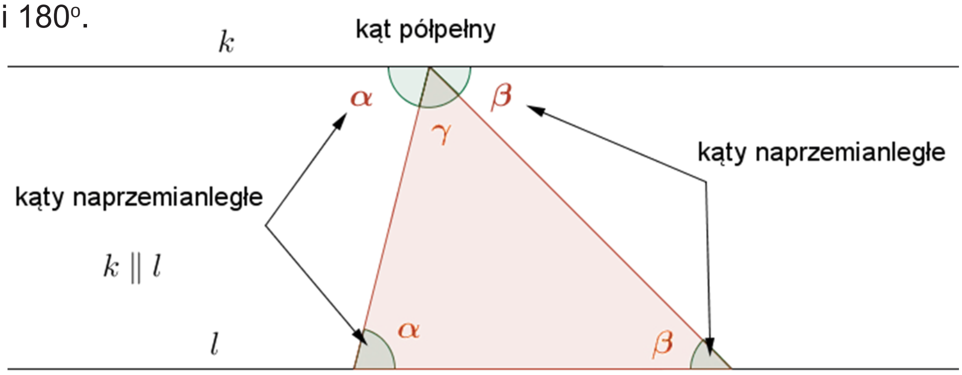
Ćwiczenie 2

Narysuj każdy z poznanych czworokątów i dorysuj w nim wszystkie jego osie symetrii.

4.3. Związki miarowe kątów w trójkątach

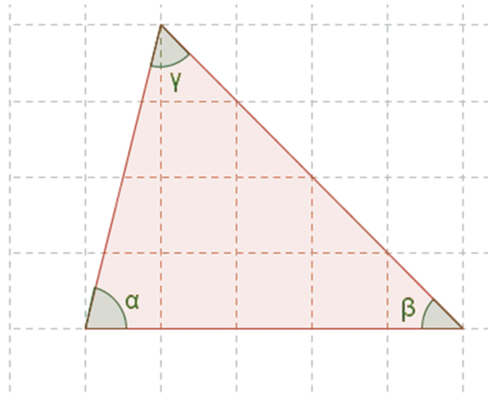
Ćwiczenie 1

Wyjaśnij swoimi słowami, dlaczego suma miar kątów wewnętrznych w trójkącie wynosi 180°.



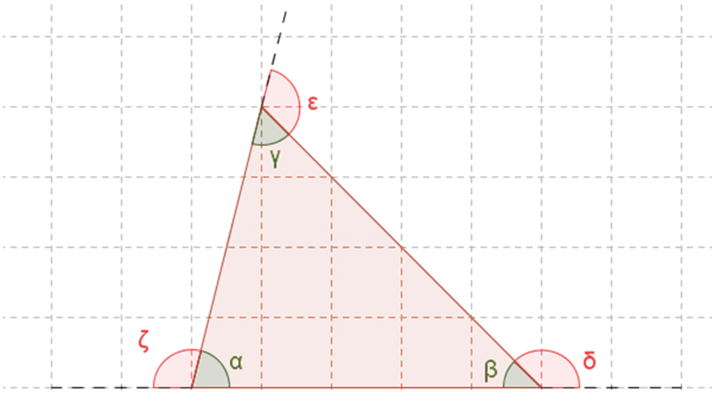
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^o$$

Suma miar kątów wewnętrznych w trójkącie jest równa 180°.



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^o$$

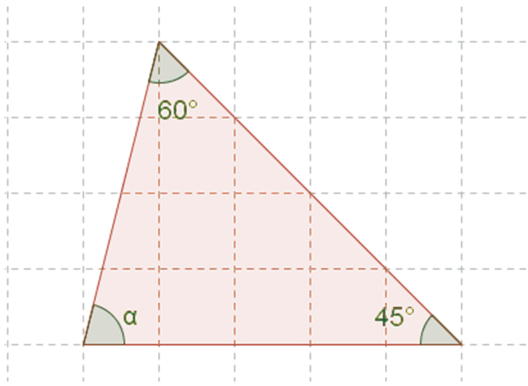
Suma miar kątów zewnętrznych w trójkącie wynosi 360°.



KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 1

Oblicz brakującą miarę kąta α w trójkącie.



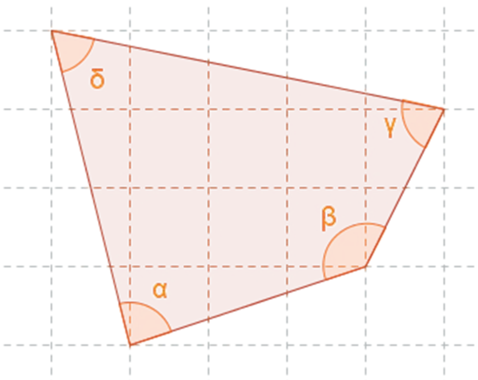
4.4. Związki miarowe kątów w czworokątach

Czworokąty:

Pamiętamy, że suma miar kątów wewnętrznych n-kąta wynosi $(n-2)\cdot 180^o$.

Dla czworokąta przyjmujemy $n=4$ czyli $(4-2)\cdot 180^o = 2\cdot 180 = 360^o$

Suma miar kątów wewnętrznych w dowolnym czworokącie wynosi 360°.



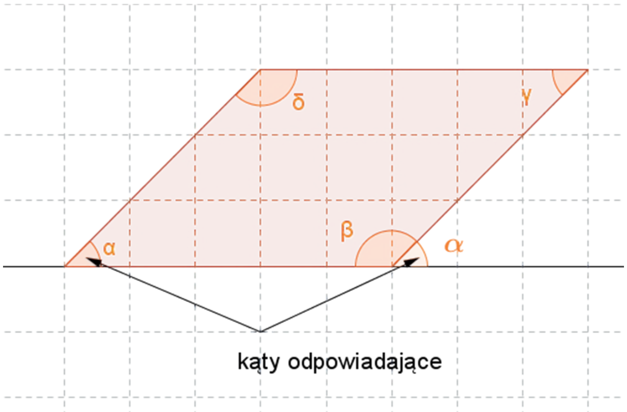
$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=360^o$$

(czyt. alfa, beta, gamma, delta)

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

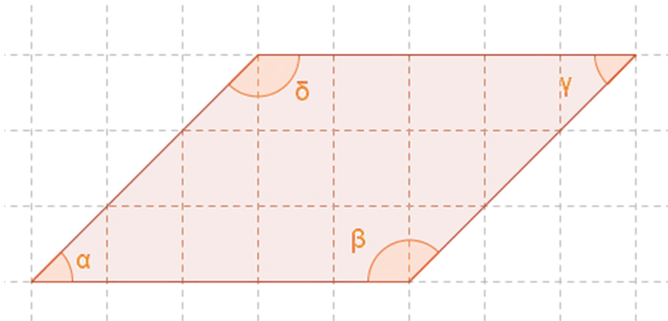
Równoległoboki:

Tosiek sporządził rysunek równoległoboku i zauważył pewną zależność dotyczącą miar kątów przy tym samym boku równoległoboku:



Kąt zewnętrzny kąta wewnętrznego β jest równy kątowi α (są to kąty odpowiadające). Suma kątów α + β tworzy kąt półpełny. Zatem α + β = 180°

Suma miar kątów wewnętrznych równoległoboku przy tym samym boku wynosi 180°.



$$\alpha + \beta = 180^o$$

$$\delta + \gamma = 180^o$$

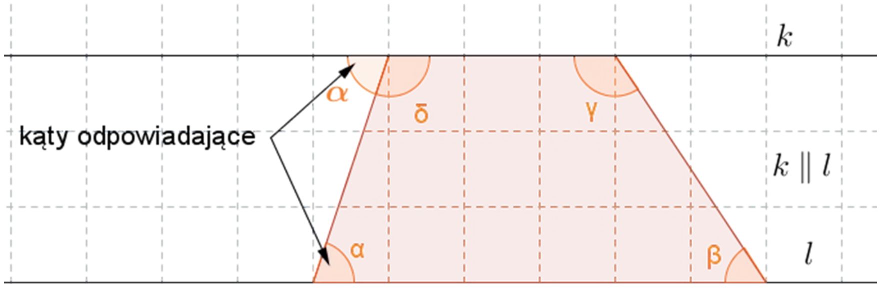
$$\alpha + \delta = 180^o$$

$$\beta + \gamma = 180^o$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

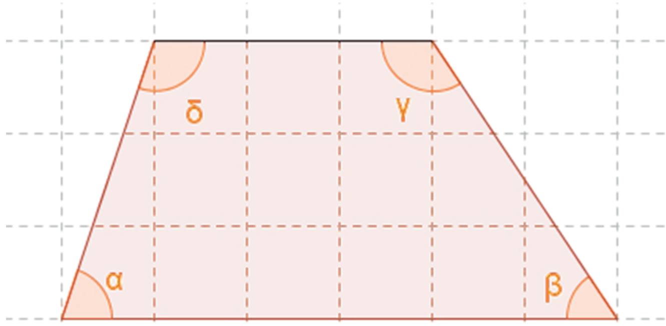
Trapezy:

Tosiek, podekscytowany sukcesem z poprzedniego zadania, postanowił znaleźć zależność miar kątów w trapezie.



Miara kąta zewnętrznego kąta δ jest równa mierze kąta α (są to kąty odpowiadające). Suma kątów α + δ tworzy kąt półpełny. Zatem α + δ = 180°.

Suma miar kątów wewnętrznych trapezu przy tym samym ramieniu wynosi 180°.

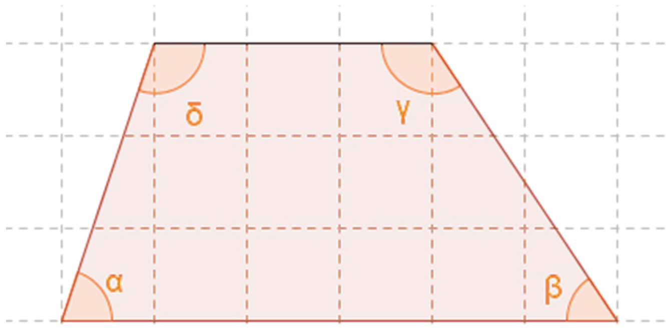


$$\alpha + \delta = 180^o$$

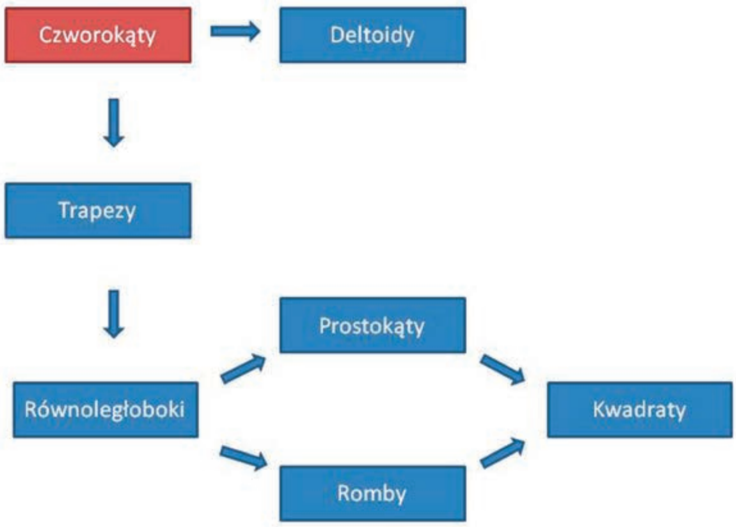
$$\beta + \gamma = 180^o$$

Ćwiczenie 1

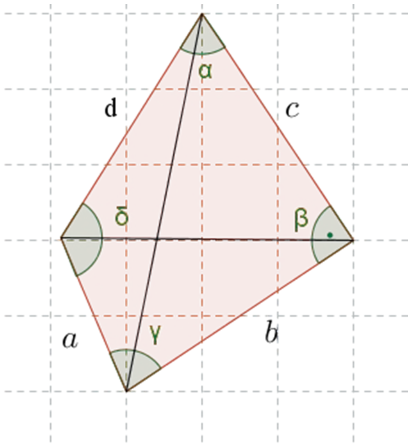
Wiedząc, że α = 70°, β = 55° oblicz pozostałe kąty wewnętrzne trapezu.



4.5. Własności czworokątów

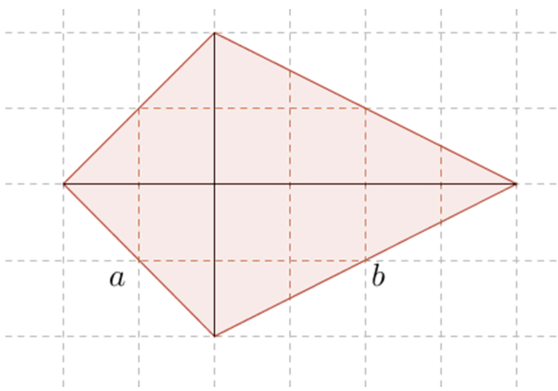


Czworokąty



- Czworokąt to wielokąt, który ma cztery boki.
- Obwód czworokąta to suma długości wszystkich jego boków: Obw = a + b + c + d.
- Suma kątów wewnętrznych czworokąta wynosi 360°: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$.
- Przekątną czworokąta nazywamy odcinek łączący dwa niekolejne jego wierzchołki.

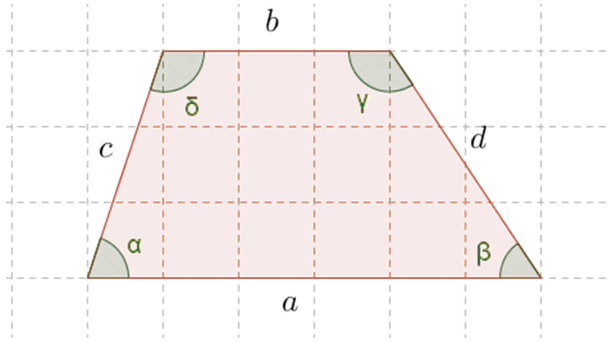
Deltoidy



- Czworokąty, których dwie pary sąsiednich boków są równej długości.
- Jedna z przekątnych jest osią symetrii figury.
- Ich przekątne są do siebie prostopadłe.

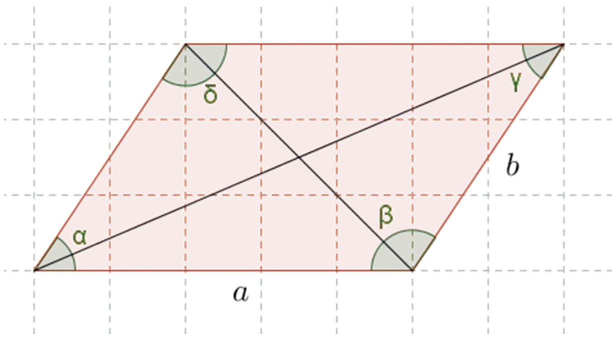
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Trapezy



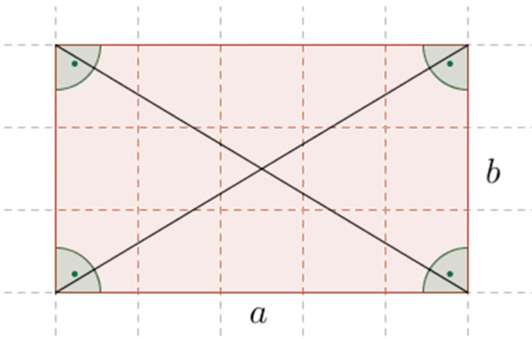
- Czworokąty posiadające przynajmniej jedną parę boków równoległych.
- Boki równoległe trapezu nazywamy podstawami.
- Boki nierównoległe nazywamy ramionami.
- Suma miar kątów wewnętrznych leżących przy tych samych ramionach jest równa 180^o: $\alpha + \delta = 180^o$ oraz $\beta + \gamma = 180^o$.
- Wśród trapezów wyróżniamy:
  - trapezy równoramienne - trapezy, których długości ramion są równe,
  - trapezy prostokątne - trapezy, których ramię jest prostopadłe do podstaw.

Równoległoboki



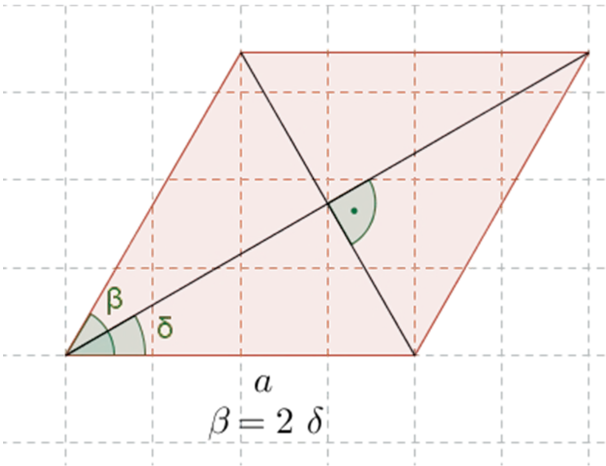
- Czworokąty mające dwie pary boków równoległych.
- Ich przeciwległe boki są równej długości.
- Przeciwległe kąty są równe $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$.
- Suma miar kątów wewnętrznych przy tym samym boku wynosi 180^o : $\alpha + \beta = 180^o$.
- Przekątne dzielą się na połowy.

Prostokąty



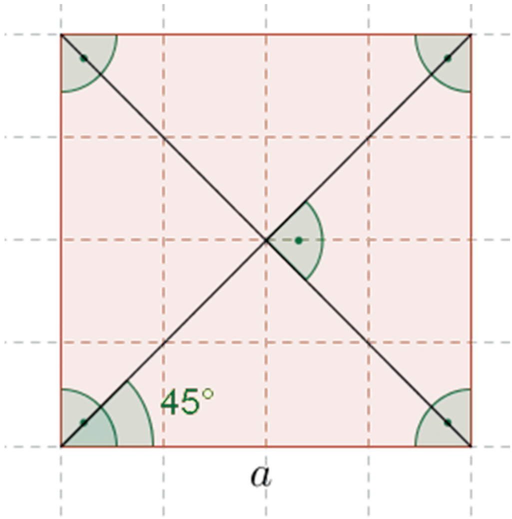
- Równoległoboki, których wszystkie kąty są proste.
- Ich przekątne są równej długości i dzielą się na połowy.

Romby



- Równoległoboki o wszystkich bokach równych.
- Przekątne przecinają się pod kątem prostym, dzielą się na połowy i dzielą kąty na połowy.

Kwadraty

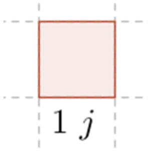


- Prostokąty o wszystkich bokach równych.
- Ich przekątne są równe, przecinają się pod kątem prostym, dzielą się na połowy i dzielą kąty na połowy.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

5. POLE POWIERZCHNI FIGURY

Kwadrat, którego długość boku jest równa jednej jednostce (1j), nazywamy kwadratem jednostkowym.

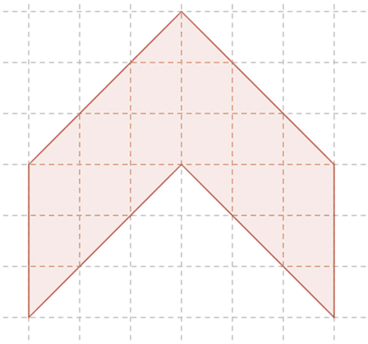


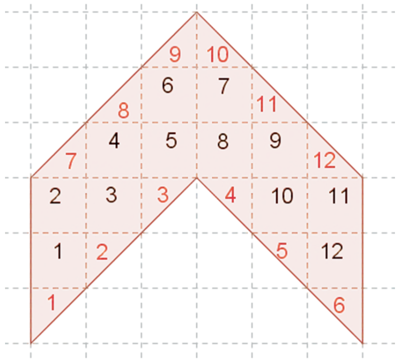
Pole powierzchni figury to miara przyporządkowująca danej figurze liczbę nieujemną, określającą jej rozmiar.

Pole dowolnej figury to liczba oznaczająca, ile kwadratów jednostkowych mieści się wewnątrz figury.

Przykład 1

Oblicz pole figury:
Za kwadrat jednostkowy przyjmujemy pojedynczą kratkę.
Liczymy, ile całych kwadratów jednostkowych mieści się w figurze:





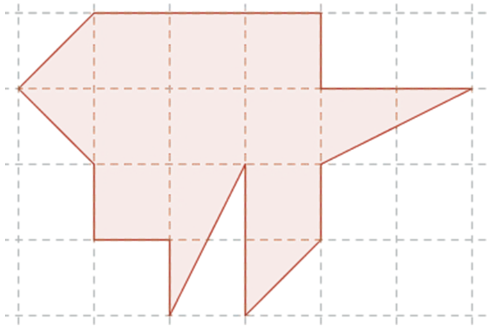
W figurze mieści się 12 całych oraz 12 połówek kwadratów jednostkowych. Zatem liczba wszystkich kwadratów jednostkowych pokrywających tę figurę to 12 + 6 = 18.

$P = 18\, j^2$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 1

Przyjmując za jednostkę pojedynczą kratkę, oblicz pole figury:

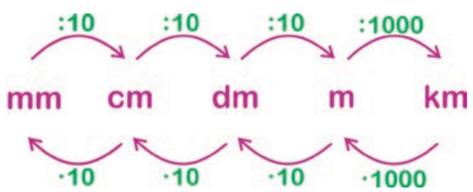


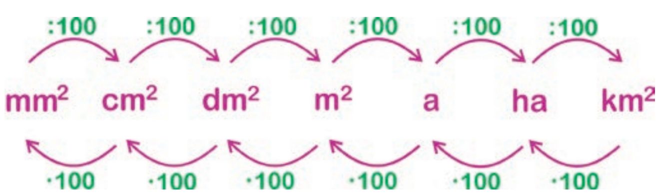
5.1. Jednostki miary pola

Najczęściej używane są przedstawione poniżej jednostki:

- **1 mm²** (milimetr kwadratowy) - kwadrat o boku 1 mm
- **1 cm²** (centymetr kwadratowy) - kwadrat o boku 1 cm
- **1 dm²** (decymetr kwadratowy) - kwadrat o boku 1 dm
- **1 m²** (metr kwadratowy) - kwadrat o boku 1 m
- **1 km²** (kilometr kwadratowy) - kwadrat o boku 1 km
- **1 a (ar)** - pole kwadratu o boku 10 m
- **1 ha (hektar)** - pole kwadratu o boku 100 m

Zależności między jednostkami pola				
JEDNOSTKI DŁUGOŚCI			JEDNOSTKI POWIERZCHNI	
1 cm = 10 mm	1 mm = 0,1 cm		$1\ cm^2 = 100\ mm^2$	$1\ mm^2 = 0{,}01\ cm^2$
1 dm = 10 cm = 100 mm	1 cm = 0,1 dm		$1\ dm^2 = 100\ cm^2$	$1\ cm^2 = 0{,}01\ dm^2$
1 m = 10 dm = 100 cm	1 dm = 0,1 m		$1\ m^2 = 100\ dm^2$	$1\ dm^2 = 0{,}01\ m^2$
1 km = 1000 m	1 m = 0,001 km		$1\ a = 100\ m^2$	$1\ m^2 = 0{,}01\ a$
			1 ha = 100 a	1 a = 0,01 ha





KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przyjrzyjmy się przykładom:

0,5 mm = 0,05 cm 12,3 dm =123 cm = 1230 mm	0,5 mm^2 = 0,005 cm^2 12,3 dm^2 = 1230 cm^2 = 123000 mm^2
0,15 m = 1,5 dm = 15 cm = 150 mm 24 m = 240 dm	0,15 m^2 = 15 dm^2 = 1500 cm^2 240 m^2 = 2,4 a = 24000 dm^2 15,23 a = 0,1523 ha = 1523 m^2

Ćwiczenie 1

Zamienić 12,34 km^2 na ary.

Ćwiczenie 2

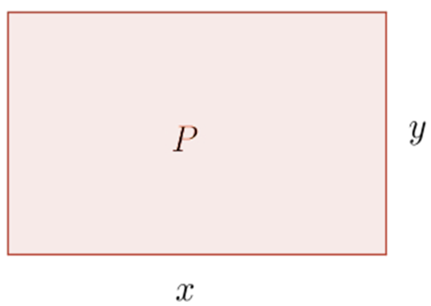
Zamienić 0,3445 m^2 na mm^2.

5.2. Pole prostokąta

Pole powierzchni prostokąta, oznaczone zazwyczaj literą P, obliczamy, mnożąc długość przez szerokość prostokąta.

P = długość · szerokość

W krótszym zapisie:
x - oznacza długość prostokąta
y - oznacza szerokość prostokąta



$$P = x \cdot y$$

Pole powierzchni kwadratu obliczamy mnożąc przez siebie długości dwóch boków kwadratu.

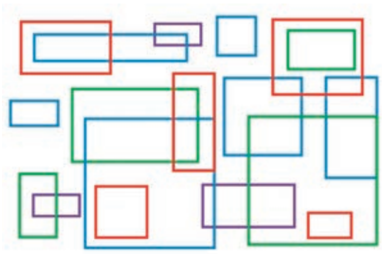
$$P = x \cdot x = x^2$$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Długość i szerokość muszą być wyrażone w takich samych jednostkach.

Ćwiczenie 1

Ile widzisz prostokątów?

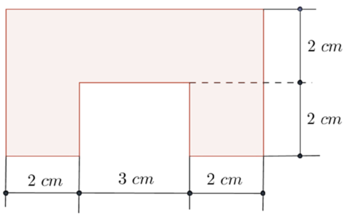


Ćwiczenie 2

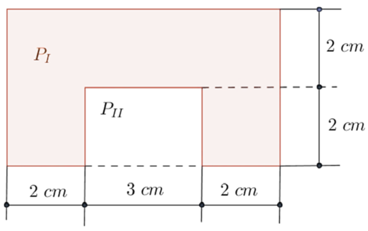
Lustereczko powiedz przecie...
Ramka lusterka zbudowana jest z kwadratów o boku 1 cm. Jaka jest powierzchnia lusterka?

Przykład 1

Oblicz pole figury przedstawionej na rysunku.



Podzielmy figurę na dwa prostokąty:



Pole figury P jest równe różnicy pól prostokątów P_I i P_{II}.

$$P = P_I - P_{II}$$
$$P_I = 7\ cm \cdot 4\ cm = 28\ cm^2$$
$$P_{II} = 3\ cm \cdot 2\ cm = 6\ cm^2$$
$$P = 28\ cm^2 - 6\ cm^2$$
$$P = 22\ cm^2$$

Ćwiczenie 1

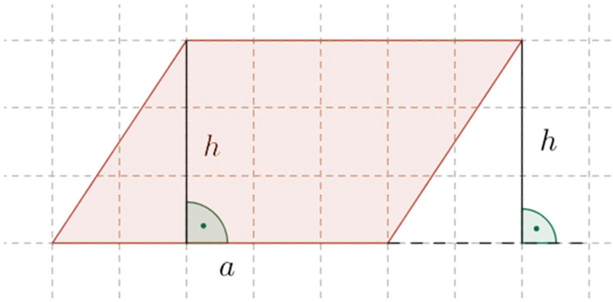
Oblicz pole figury z powyższego przykładu jako sumę pól trzech prostokątów. Czy otrzymałeś taki sam wynik?

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

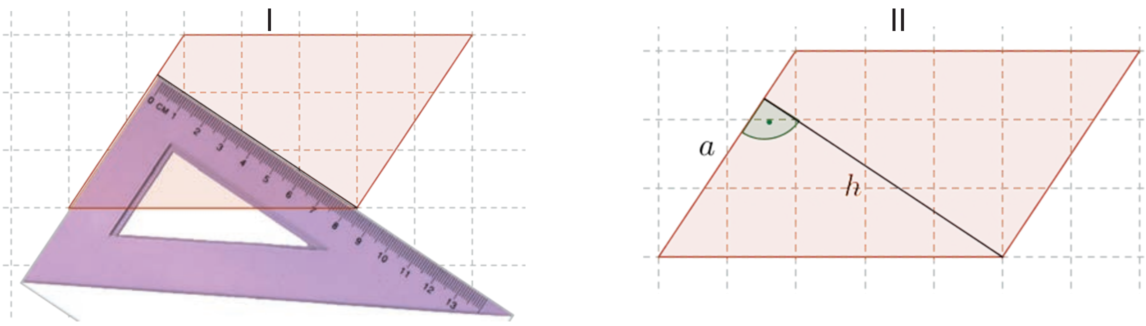
6. POLE RÓWNOLEGŁOBOKU I ROMBU

Wysokość równoległoboku (rombu)

Wysokość równoległoboku - długość odcinka prostopadłego do obu podstaw i łączącego obie podstawy (przedłużenia podstaw).

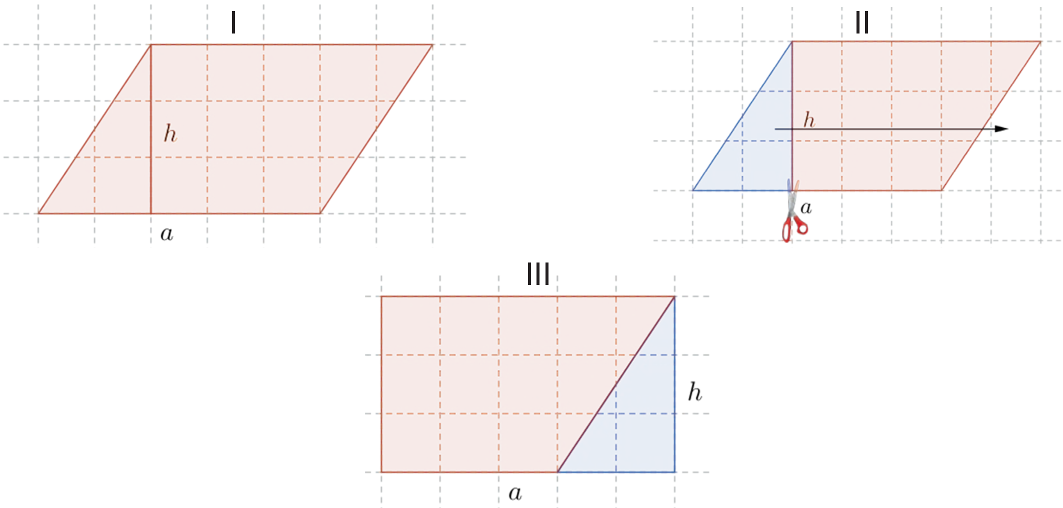


h - wysokość równoległoboku
a - podstawa równoległoboku

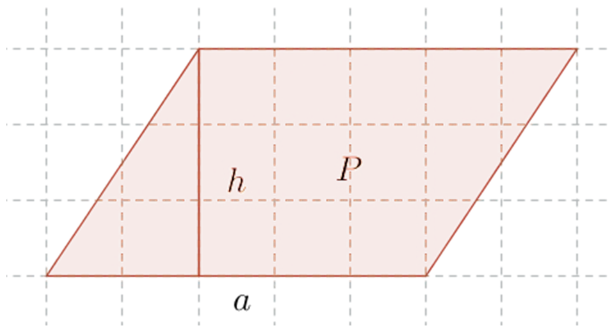


Pole równoległoboku

Z równoległoboku łatwo możemy otrzymać prostokąt o takim samym polu.



$$P = a \cdot h$$



Pole równoległoboku o podstawie a i wysokości h obliczamy ze wzoru:

$$P = a \cdot h$$

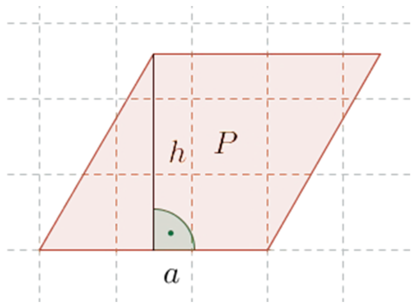
Pole rombu

Pole rombu obliczamy na dwa sposoby:

I sposób:

Obliczanie pola rombu o danej podstawie i wsokości

Romb jest w szczególności równoległobokiem, więc jego pole obliczamy tak samo jak pole równoległoboku:

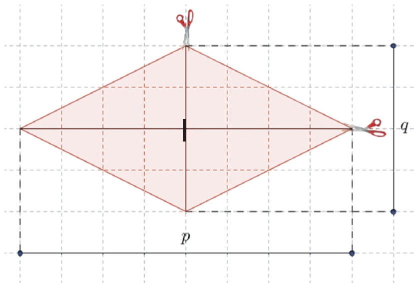


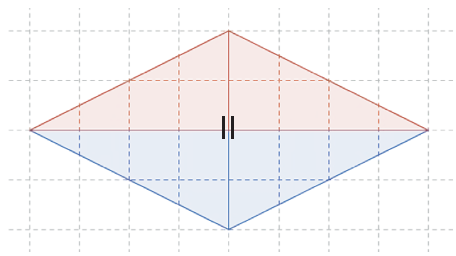
$$P = a \cdot h$$

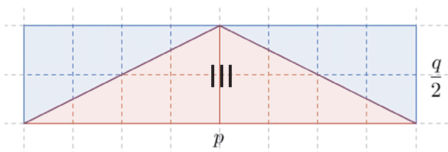
II sposób:

Obliczanie pola rombu o danych przekątnych

Z równoległoboku o danych przekątnych łatwo zbudować prostokąt o takim samym polu:



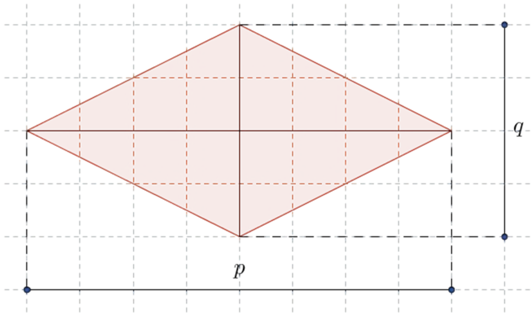




$$P = p \cdot \frac{q}{2} \qquad P = \frac{1}{2} \cdot p \cdot q$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Pole rombu P o długościach przekątnych p i q jest równe połowie iloczynu długości jego przekątnych:



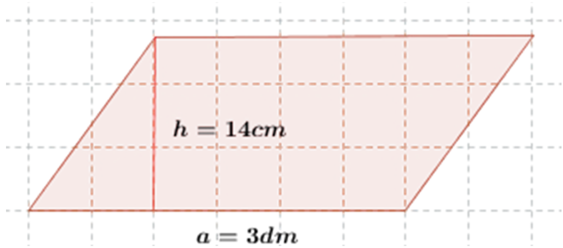
$$P = \frac{1}{2} \cdot p \cdot q$$

Ćwiczenie 1

Podaj wzór na pole kwadratu, mając daną jego przekątną. Z jakiego wzoru możesz skorzystać?

Przykład 1

P = 14 cm · 30 cm = 420 cm^2



Ćwiczenie 2

Oblicz pole równoległoboku, w którym bok ma długość 7 cm, wysokość opuszczona na ten bok wynosi 8 cm.

Dane:	Szukane:
a=7 cm	P=?
h=8 cm	

Ćwiczenie 3

Pole równoległoboku wynosi 29,25 cm^2, jeden z boków ma długość 6,5 cm. Oblicz długość wysokości opuszczonej na ten bok.

Dane:	Szukane:
P=29,25 cm^2	h=?
a=6,5 cm	

Ćwiczenie 4

Jedna z przekątnych rombu ma długość 19 cm, a druga przekątna jest o 5 cm krótsza. Oblicz pole tego rombu.

Dane:
$d_1 = 19$ cm
d_1 - d2 = 5 cm

Szukane:
P = ?

Ćwiczenie 5

Pole rombu wynosi 36 cm^2 , a wysokość ma długość 9 cm. Oblicz długość boku tego rombu.

Dane:
P = 36 cm^2
h = 9 cm

Szukane:
a = ?

Ćwiczenie 6

Krótszy bok równoległoboku wynosi 3,6 cm , a drugi jest trzy razy dłuższy. Wysokość opuszczona na dłuższy bok wynosi 2,5 cm. Oblicz pole tego równoległoboku.

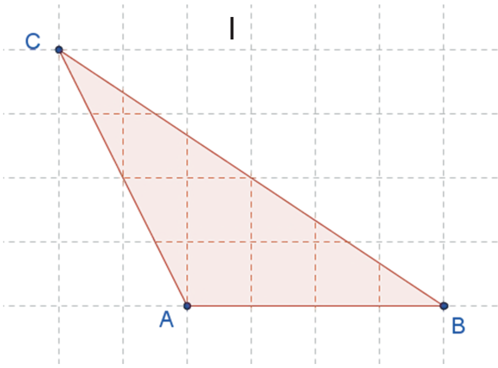
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

7. POLE TRÓJKĄTA

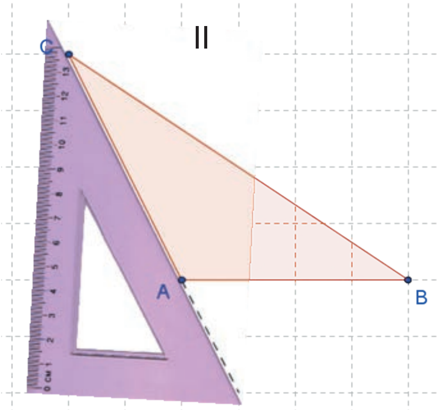
Wysokość trójkąta

Wysokością trójkąta nazywamy długość odcinka wychodzącego z jednego z wierzchołków trójkąta i opadającego prostopadle na jego podstawę (przedłużenie podstawy).

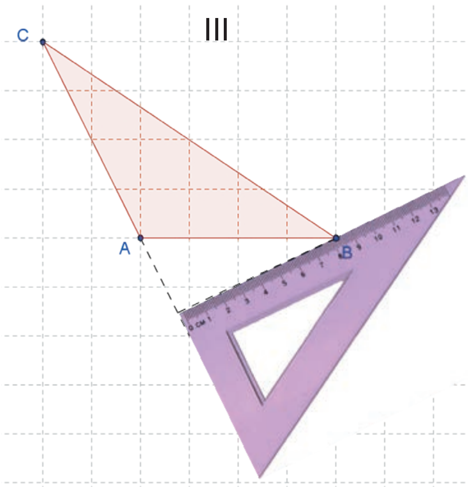
Wysokość trójkąta rysujemy za pomocą ekierki.



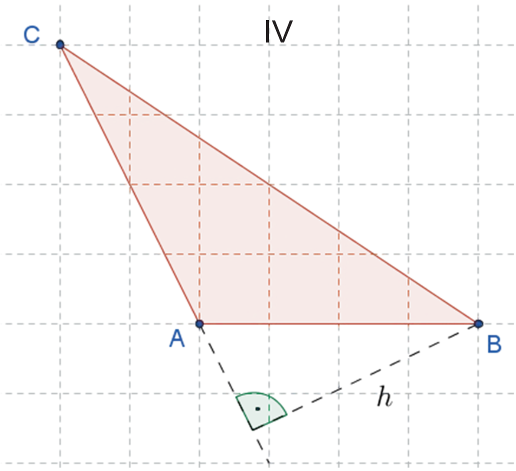
Poprowadzimy wysokość w trójkącie ABC z wierzchołka B.
Przedłużamy bok AC



Poprowadzimy wysokość w trójkącie ABC z wierzchołka B.
Przedłużamy bok AC



Oznaczamy kąt prosty oraz wysokość trójkąta:

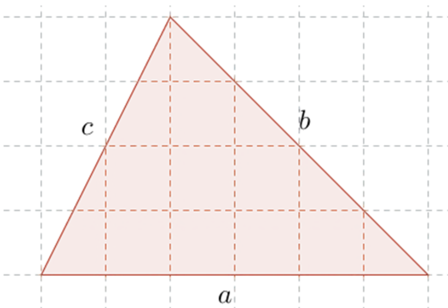


Ćwiczenie 1

Narysuj w zeszycie dowolny trójkąt oraz wszystkie jego wysokości.

Obwód trójkąta

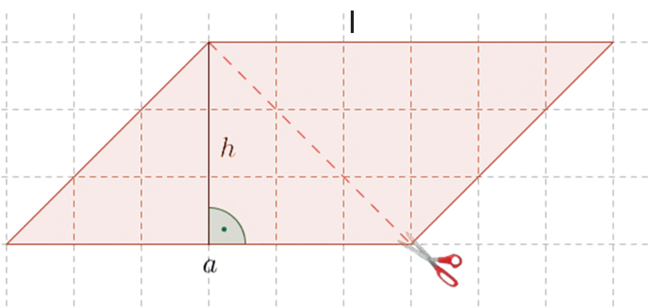
Obwodem trójkąta nazywamy sumę długości jego boków.



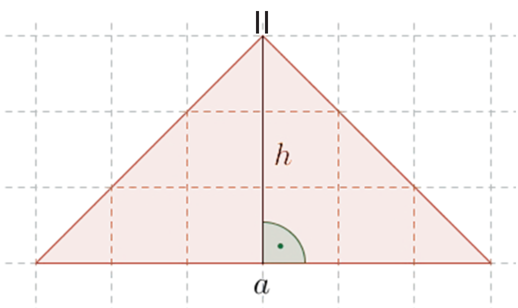
$$O = a + b + c$$

Pole trójkąta

Z równoległoboku można łatwo zbudować trójkąt o dwa razy mniejszym polu.



$$P = a \cdot h$$

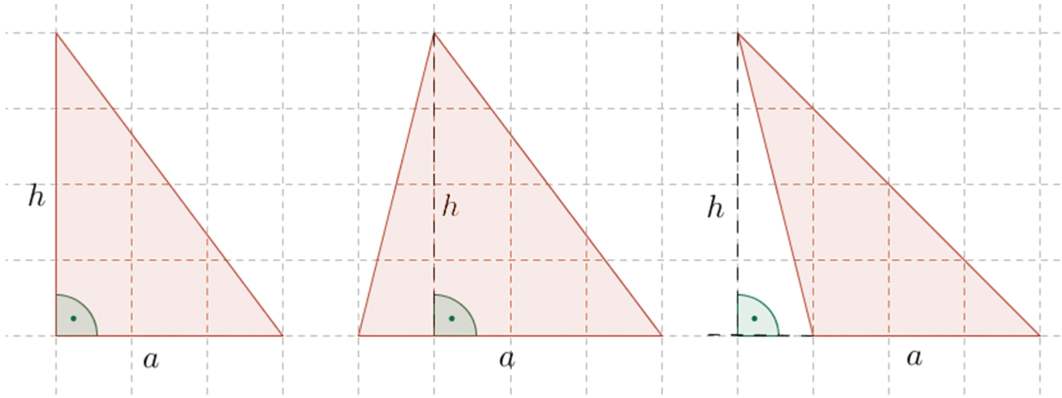


$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

POLE DOWOLNEGO TRÓJKĄTA

Wzór z wykorzystaniem długości boku i długości wysokości opuszczonej na ten bok.



$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$$

Przykład 1

Oblicz obwód trójkąta, którego długości boków są równe odpowiednio:
5 cm, 6 cm, 7 cm.

Przykład 2

Oblicz pole trójkąta prostokątnego, którego długości przyprostokątnych wynoszą: 15 cm i 2 cm.

Przykład 3

Oblicz pole trójkąta, którego podstawa ma długość 6 cm oraz wysokość opuszczona na tę podstawę ma długość 5 cm.

7.1. Pole trójkąta - zadania

Zadanie 1

Podstawa trójkąta wynosi 2 cm, a wysokość opuszczona na ten bok 3 cm. Oblicz pole tego trójkąta.

Zadanie 2

Pole trójkąta wynosi 15 cm^2, jeden z jego boków jest równy 5 cm. Oblicz wysokość opuszczoną na ten bok.

Zadanie 3

Pole trójkąta wynosi 32 cm^2, a jedna z jego wysokości jest równa 8 cm. Oblicz długość boku, na który opada ta wysokość.

Zadanie 4

Pole trójkąta prostokątnego wynosi 5 cm^2. Jedna przyprostokątna ma długość 2 cm. Znajdź długość drugiej przyprostokątnej.

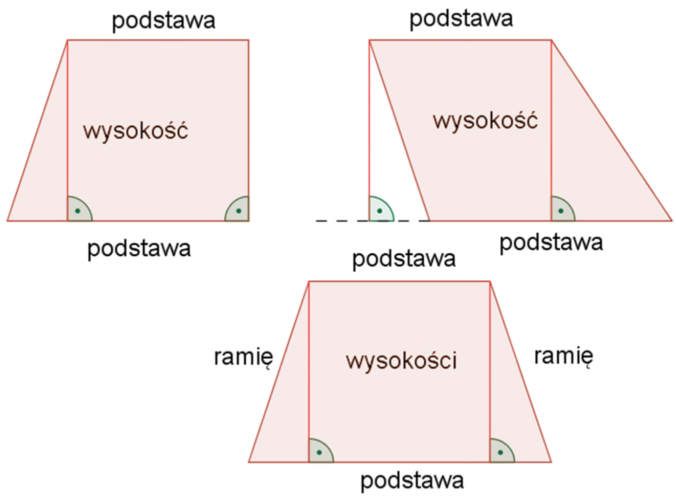
Zadanie 5

Wysokość trójkąta jest 3 razy dłuższa od boku, na który jest opuszczona i wynosi 12cm. Jakie pole ma ten trójkąt?

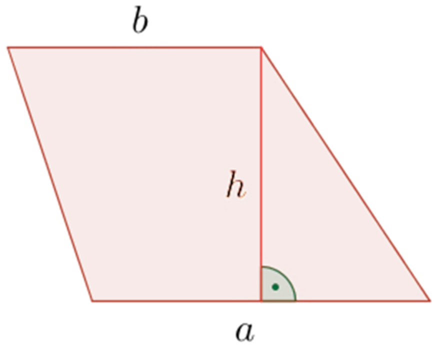
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

8. POLE TRAPEZU

Wysokością trapezu nazywamy odcinek prostopadły do prostych zawierających podstawy trapezu..

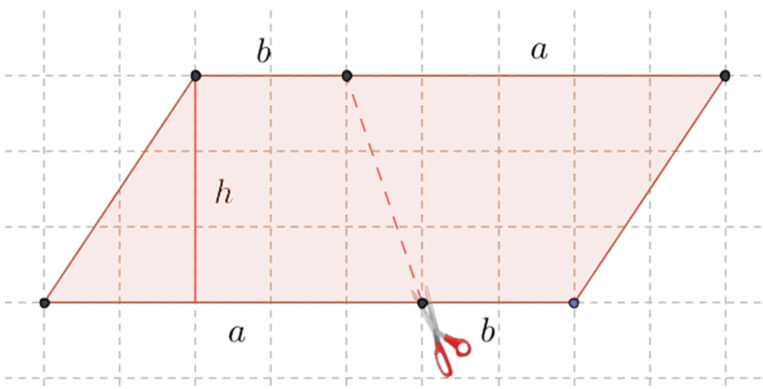


Wysokość trapezu rysujemy, posługując się ekierką. W praktyce rysujemy tylko jedną wysokość z dowolnego wierzchołka trapezu. Długości podstaw trapezu zwykle oznaczamy jako a i b, długość wysokości natomiast jako h.



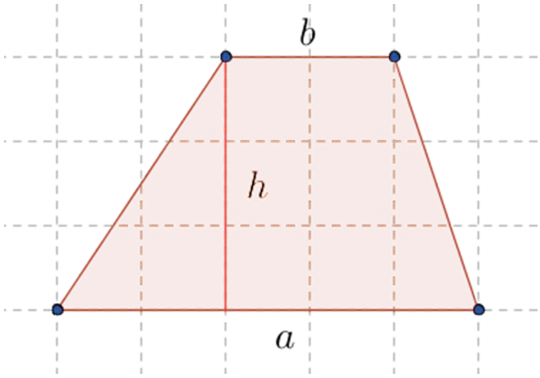
Pole trapezu

Równoległobok możemy podzielić na dwa przystające trapezy, dokonując cięcia w odpowiednim miejscu:



$$P = (a + b) \cdot h$$

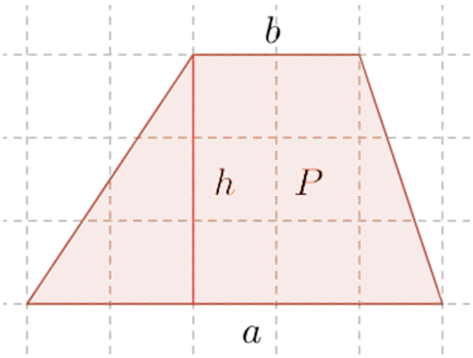
Stąd pole trapezu:



$$P = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$$

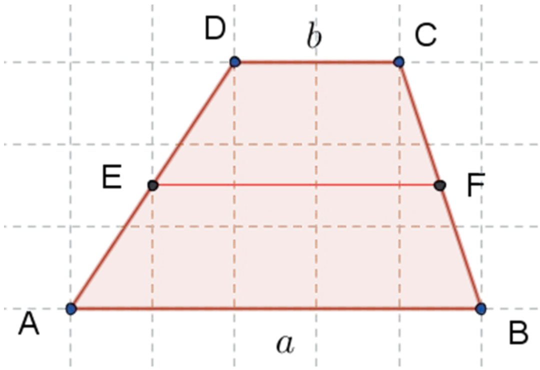
Pole P trapezu o podstawach równych a i b oraz wysokości h wynosi:

$$P = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$$



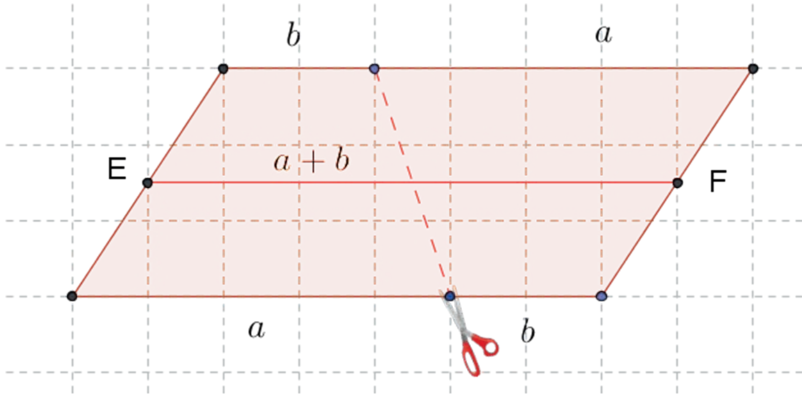
8.1. Środkowa trapezu

Środkową trapezu nazywamy odcinek łączący środki jego ramion.
Środkowa trapezu jest równoległa do jego podstaw.



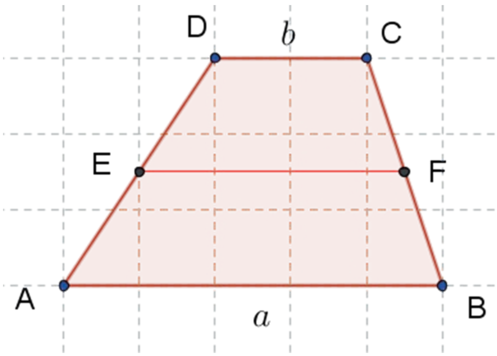
$$EF \parallel AB$$

Wykorzystując graficzną metodę obliczania pola powierzchni trapezu, możemy znaleźć długość środkowej trapezu, którego długości podstaw wynoszą a oraz b.



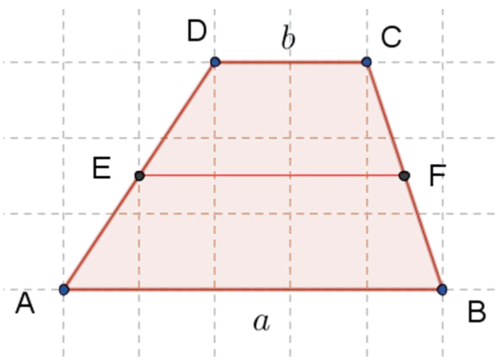
$$|EF| = a + b$$

Wycięte trapezy są przystające:



$$|EF| = \frac{1}{2} \cdot (a + b)$$

Środkowa trapezu jest równoległa do podstaw trapezu i jej długość jest równa średniej arytmetycznej długości jej podstaw.



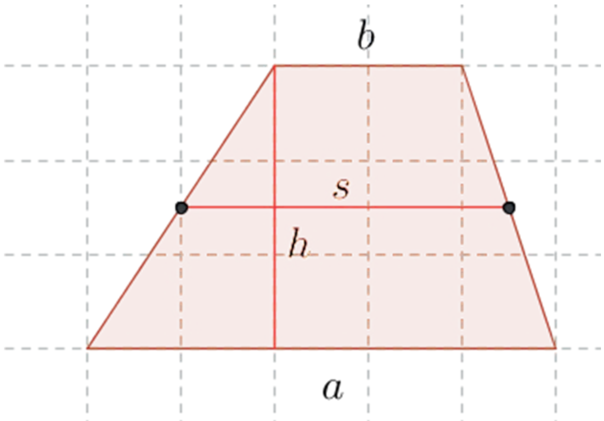
$$|EF| = \frac{1}{2} \cdot (a + b)$$

$$|EF| = a + b$$

Pole trapezu możemy zatem wyrazić również, używając długości środkowej trapezu.

Pole P trapezu o długości środkowej s oraz wysokości h jest równe iloczynowi długości środkowej trapezu oraz jego wysokości:

$$P = s \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$$



8.2. Zadania

Zadanie 1

W trapezie jedna z podstaw ma długość 26 cm, druga podstawa jest dwa razy od niej krótsza. Wysokość trapezu jest równa 12 cm. Oblicz pole tego trapezu.

Zadanie 2

Oblicz pole trapezu, w którym wysokość ma długość 4 cm, jedna z podstaw ma długość 12 cm, a druga jest o 5 cm od niej krótsza.

Zadanie 3

Suma długości podstaw trapezu wynosi 7 cm, a wysokość ma 4 cm. Jakie jest pole tego trapezu?

Zadanie 4

Obwód trapezu równoramiennego wynosi 28 cm, każde ramię ma długość 5 cm, a wysokość ma długość 4 cm. Oblicz pole tego trapezu.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

NOTATKI

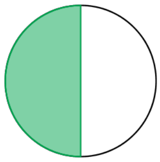
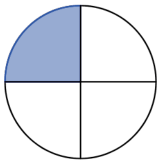
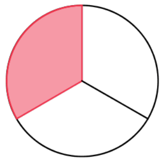
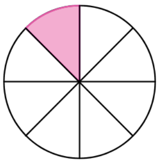
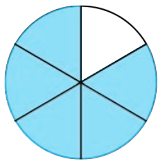
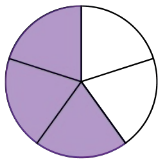
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

1. UŁAMKI I ICH ZASTOSOWANIE

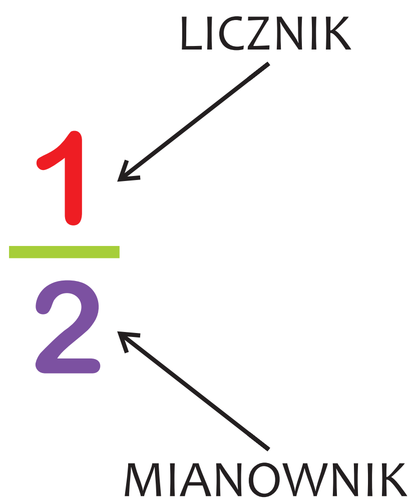
W klasie czwartej i piątej poznaliśmy:

- liczby naturalne, np 0, 1, 2, ...,13, ...1000, ...
- ułamki zwykłe, np. $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{17}{35}$
- ułamki dziesiętne, np 0,1; 0,7; 1,5.

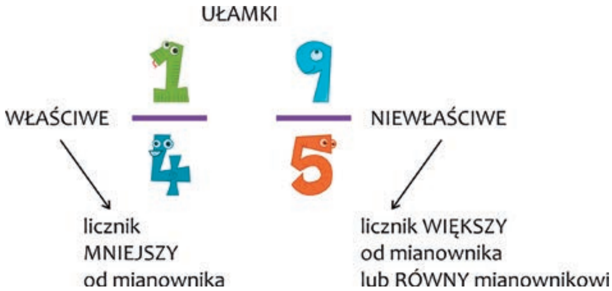
Ułamki to części całości.

		
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$
		
$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{5}$

Ułamek to iloraz dwóch liczb naturalnych, z których dzielna jest licznikiem, a dzielnik mianownikiem. Kreska ułamkowa zastępuje znak dzielenia.



Ułamki możemy podzielić na ułamki właściwe i ułamki niewłaściwe.



Ułamki niewłaściwe przedstawione w postaci całości i ułamka właściwego, nazywamy **liczbami mieszanymi**.

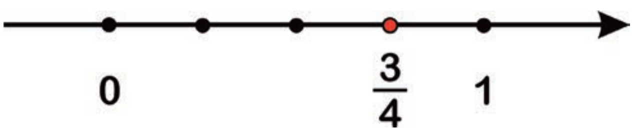
Wyróżniamy ułamki, które możemy skrócić:

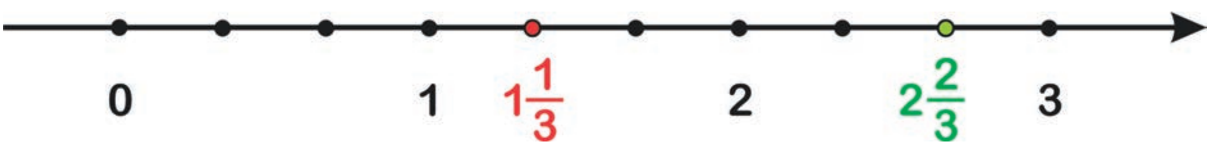
$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$	$\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

oraz ułamki nieskracalne:

$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{9}{16}$

Ułamki, jak każdą liczbę, możemy zaznaczać na osi liczbowej.

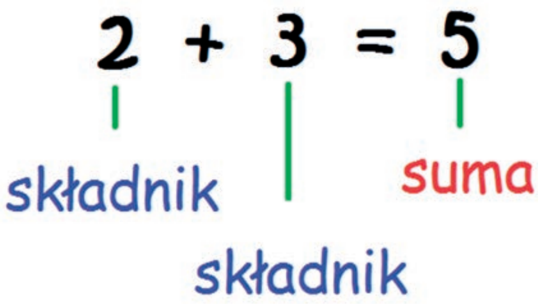




KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

2. RACHUNKI PAMIĘCIOWE NA LICZBACH NATURALNYCH I UŁAMKACH DZIESIĘTNYCH

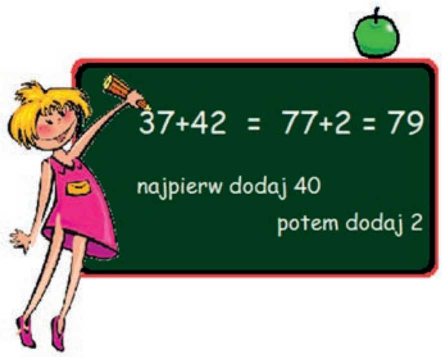
Umiejętność wykonywania obliczeń w pamięci jest niezastąpiona wszędzie tam, gdzie mamy do czynienia z liczbami, np.: w sklepie, szkole, pracy. Najpierw zajmiemy się dodawaniem.Przypomnijmy sobie, jak nazywają się liczby występujące w dodawaniu.



Dodawanie liczb dwucyfrowych.

Przykład 1

37 + 42 = ?



Przykład 2

89 + 78 = ?

Ćwiczenie 1

53 + 45 = ?

Ćwiczenie 2

37 + 49 = ?

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 3

232 + 146 = ?

Przykład 4

427 + 538 = ?

Ćwiczenie 3

313 + 262 = ?

Ćwiczenie 4

456 + 328 = ?

Ułamki, których mianowniki wynoszą 10, 100, 1000, ... nazywamy ułamkami dziesiętnymi. Możemy je zapisywać tak jak ułamki zwykłe, lecz częściej zapisujemy je bez użycia kreski ułamkowej, oddzielając przecinkiem część całkowitą od części ułamkowej.

Dodawanie ułamków dziesiętnych.

Przykład 5

0,8 + 0,05 = 0,85

Dodając ułamki dziesiętne: całości dodajemy do całości, części dziesiąte dodajemy do części dziesiątych, części setne dodajemy do części setnych itd.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 6

2,4 + 0,33 = 2,73

Przykład 7

4,9 + 0,6 = 5,5

Ćwiczenie 3

Oblicz w pamięci: 0,23 + 0,06 = ?

Ćwiczenie 4

Oblicz w pamięci: 0,54 + 0,6 = ?

Odejmowanie liczb dwucyfrowych.

Przykład 8

84 - 59 = ?
I sposób: 84 - 59 = 34 - 9 = 25
II sposób: 84 - 59 = 24 + 1 = 25

Przykład 9

67 - 48 = ?
I sposób: 67 - 48 = 27 - 8 = 19
II sposób: 67 - 48 = 17 + 2 = 19

Ćwiczenie 5

Oblicz w pamięci: 89 - 48 = ?

Ćwiczenie 6

Oblicz w pamięci: 95 - 79 = ?

Odejmowanie ułamków dziesiętnych.

Odejmując ułamki dziesiętne: całości odejmujemy od całości, części dziesiąte odejmujemy od części dziesiątych, części setne odejmujemy od części setnych itd.

Przykład 10

2,48 - 1, 25 = 1,23

Przykład 11

5,60 - 2,37 = 3,23

Przykład 12

9 - 4,72 = 4,28

Mnożenie przez liczby z zerami na końcu.

$572 \cdot 10 = 5720$ **Dopisujemy jedno zero.**

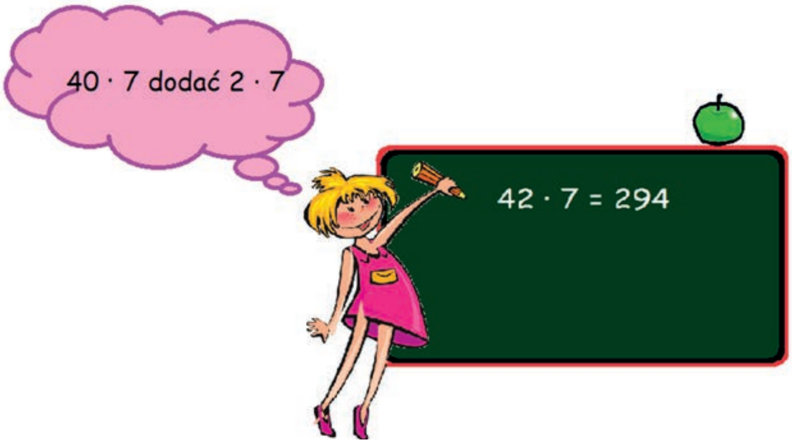
$572 \cdot 100 = 57200$ **Dopisujemy dwa zera.**

$572 \cdot 1000 = 572000$ **Dopisujemy trzy zera.**

$80 \cdot 300 = 24\ 000$ **Mnożymy 8 przez 3 i dopisujemy zera.**

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Mnożenie liczb dwucyfrowych przez liczbę jednocyfrową.



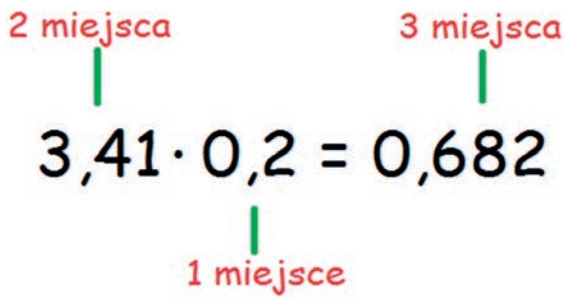
Mnożenie ułamków dziesiętnych przez 10, 100, 1000, ...

Aby pomnożyć ułamek dziesiętny przez 10, 100, 1000, ..., przesuwamy przecinek o jedno, dwa, trzy, ... miejsca w prawo.

Przykład 13

28,2 • 10 = 282
28,2 • 100 = 2820 (dopisujemy zero)
28,2 • 1000 = 28200 (dopisujemy dwa zera)

Mnożenie ułamków dziesiętnych.



Ułamki dziesiętne mnożymy tak jak liczby naturalne, a w iloczynie oddzielamy przecinkiem tyle cyfr końcowych, ile było cyfr łącznie po przecinku w obu czynnikach.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ TOMP UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dzielenie ułamków dziesiętnych przez 10, 100, 1000, ...

Aby podzielić ułamek dziesiętny przez 10, 100, 1000, ..., przesuwamy przecinek o jedno, dwa, trzy, ... miejsca w lewo.

Przykład 14

28,2 : 10 = 2,82

28,2 : 100 = 0,282 (dopisujemy zero przed cyfrą dwa)

28,2 : 1000 = 0,0282 (dopisujemy dwa zera przed cyfr dwa)

Dzielenie ułamków dziesiętnych.

$$4{,}5 : 0{,}02 = \overbrace{450}^{4{,}5 \cdot 100} : \underbrace{2}_{0{,}02 \cdot 100} = 225$$

Jeżeli wykonujemy dzielenie dwóch ułamków dziesiętnych, należy dzielną i dzielnik pomnożyć przez 10, 100, 1000, ..., tak by dzielnik był liczbą naturalną.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

3. DZIAŁANIA PISEMNE NA LICZBACH NATURALNYCH I UŁAMKACH DZIESIĘTNYCH

Do poniższych działań obejrzyj prezentacje na platformie MATI

- Dodawanie liczb naturalnych sposobem pisemnym.
- Odejmowanie liczb naturalnych sposobem pisemnym.
- Mnożenie liczb naturalnych sposobem pisemnym.
- Dzielenie liczb naturalnych sposobem pisemnym.

Dodawanie ułamków dziesiętnych.

Dodając lub odejmując ułamki dziesiętne sposobem pisemnym, zapisujemy je jeden pod drugim, tak aby przecinek był pod przecinkiem, jedności pod jednościami, części dziesiąte pod częściami dziesiątymi itd. Następnie dodajemy je tak, jak liczby naturalne. W wyniku przecinek wpisujemy pod poprzednimi przecinkami.

Do poniższych działań obejrzyj prezentacje na platformie MATI

- Dodawanie ułamków dziesiętnych.
- Odejmowanie ułamków dziesiętnych.

Przykład 1

129,7 + 12,85 = 142,55

$$\begin{array}{r} 129{,}70 \\ +\ \ 12{,}85 \\ \hline 142{,}55 \end{array}$$

Przykład 2

112,06 + 38,9 = 150,96

$$\begin{array}{r} 112{,}06 \\ +\ \ 38{,}9 \\ \hline 150{,}96 \end{array}$$

Przykład 3

73,2 − 38,745 = 34,455

Sprawdzenie

$$\begin{array}{r} 73{,}200 \\ -38{,}745 \\ \hline 34{,}455 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 34{,}455 \\ +38{,}745 \\ \hline 73{,}200 \end{array}$$

Przykład 4

301,2 − 125,49 = 175,71

Sprawdzenie

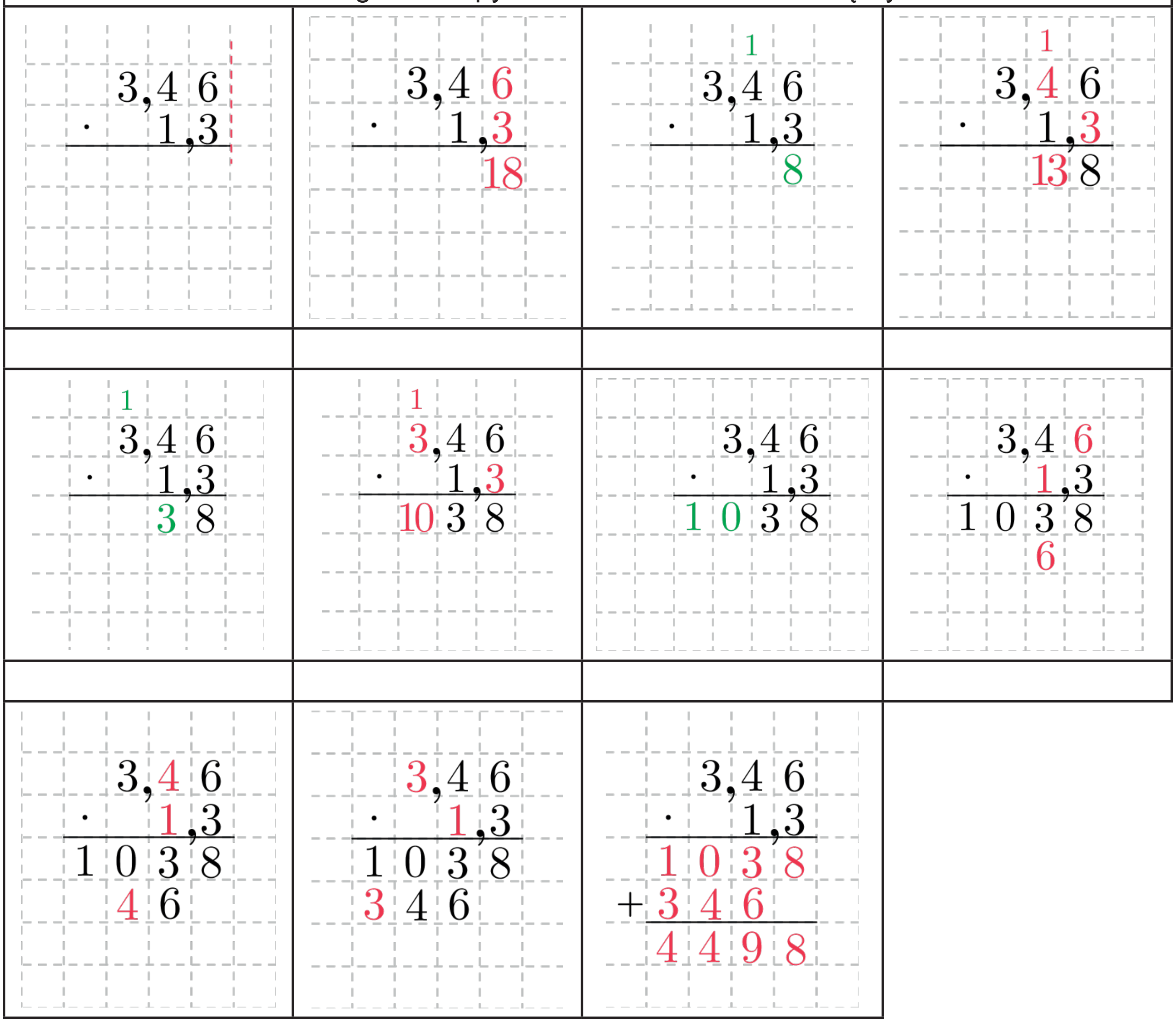
$$\begin{array}{r} 301{,}20 \\ -125{,}49 \\ \hline 175{,}71 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 175{,}71 \\ +125{,}49 \\ \hline 301{,}20 \end{array}$$

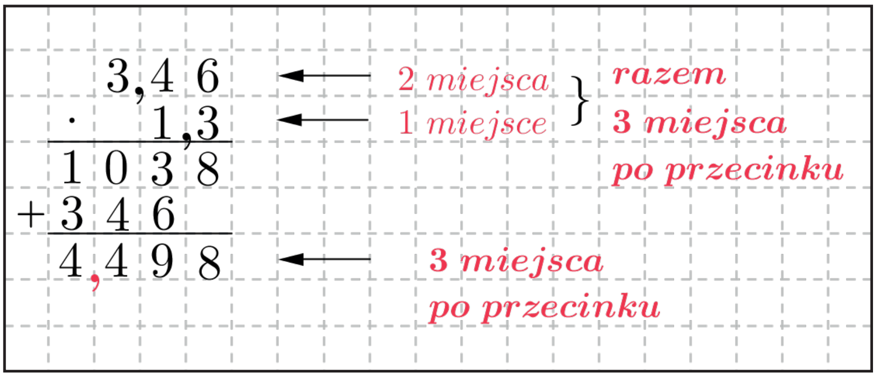
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Mnożenie ułamków dziesiętnych.

Liczby dziesiętne mnożymy tak jak liczby naturalne, a w iloczynie oddzielamy przecinkiem tyle cyfr końcowych, ile było cyfr łącznie po przecinku w obu czynnikach.

Poszczególne etapy mnożenia ułamków dziesiętnych





KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 5

5,49 • 1,8 = 9,882

$$\begin{array}{r} 5{,}49 \\ \cdot\ 1{,}8 \\ \hline 4392 \\ +\ 549 \\ \hline 9{,}882 \end{array}$$

5,49 → 2 miejsca po przecinku
1,8 → 1 miejsce po przecinku
9,882 → 3 miejsca po przecinku

Przykład 6

5,49 • 0,18 = 0,9882

$$\begin{array}{r} 5{,}49 \\ \cdot\ 0{,}18 \\ \hline 4392 \\ +\ 549 \\ \hline 0{,}9882 \end{array}$$

5,49 → 2 miejsca po przecinku
0,18 → 2 miejsca po przecinku
0,9882 → 4 miejsca po przecinku

Przykład 7

0,01 • 0,001 = 0,00001

Aby podzielić dwie liczby dziesiętne sposobem pisemnym, należy:

- pomnożyć dzielną i dzielnik przez odpowiednią liczbę: 10, 100, lub 1000 itd., tak aby dzielnik stał się liczbą naturalną
- wykonać dzielenie liczby dziesiętnej przez liczbę naturalną.

Poszczególne etapy dzielenia ułamków dziesiętnych	
$8{,}75 : \underline{0{,}7}$ *Mnożymy dzielną i dzielnik przez 10*	$8{,}75 : \underline{0{,}7} = 87{,}5 : 7$ *Mnożymy dzielną i dzielnik przez 10.*
$8{,}75 : 0{,}7 = \begin{array}{l} \ \ 1 \\ \hline 87{,}5 : 7 \end{array}$	$8{,}75 : 0{,}7 = \begin{array}{l} \ \ 1 \\ \hline 87{,}5 : 7 \\ -7 \\ \hline \ \ 1 \end{array}$

Poszczególne etapy dzielenia ułamków dziesiętnych - ciąg dalszy	
$8{,}75 : 0{,}7 = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & & \\ \hline 8 & 7, & 5 & :7 \\ -7 & & & \\ \cline{1-2} 1 & 7 & & \end{array}$	$8{,}75 : 0{,}7 = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & & \\ \hline 8 & 7, & 5 & :7 \\ -7 & & & \\ \cline{1-2} 1 & 7 & & \\ 1 & 4 & & \end{array}$
$8{,}75 : 0{,}7 = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & & \\ \hline 8 & 7, & 5 & :7 \\ -7 & & & \\ \cline{1-2} 1 & 7 & & \\ -1 & 4 & & \\ \cline{1-2} & 3 & & \end{array}$	$8{,}75 : 0{,}7 = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & & \\ \hline 8 & 7, & 5 & :7 \\ -7 & & & \\ \cline{1-2} 1 & 7 & & \\ -1 & 4 & & \\ \cline{1-2} & 3 & 5 & \end{array}$
$8{,}75 : 0{,}7 = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 5 & \\ \hline 8 & 7, & 5 & :7 \\ -7 & & & \\ \cline{1-2} 1 & 7 & & \\ -1 & 4 & & \\ \cline{1-2} & 3 & 5 & \end{array}$	$8{,}75 : 0{,}7 = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 5 & \\ \hline 8 & 7, & 5 & :7 \\ -7 & & & \\ \cline{1-2} 1 & 7 & & \\ -1 & 4 & & \\ \cline{1-2} & 3 & 5 & \\ & 3 & 5 & \end{array}$
$8{,}75 : 0{,}7 = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 5 & \\ \hline 8 & 7, & 5 & :7 \\ -7 & & & \\ \cline{1-2} 1 & 7 & & \\ -1 & 4 & & \\ \cline{1-2} & 3 & 5 & \\ & -3 & 5 & \\ \cline{2-3} & & 0 & \end{array}$	$8{,}75 : 0{,}7 = \begin{array}{cccc} 1 & 2, & 5 & \\ \hline 8 & 7, & 5 & :7 \\ -7 & & & \\ \cline{1-2} 1 & 7 & & \\ -1 & 4 & & \\ \cline{1-2} & 3 & 5 & \\ & -3 & 5 & \\ \cline{2-3} & & 0 & \end{array}$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 8

$$
\begin{array}{r}
\,\underline{3223{,}2} \\
805{,}8:0{,}25=80580:25 \\
\underline{-75} \\
55 \\
\underline{-50} \\
58 \\
\underline{-50} \\
80 \\
\underline{-75} \\
50 \\
\underline{-50} \\
0
\end{array}
$$

Przykład 9

$$
\begin{array}{r}
\underline{2{,}06} \\
2{,}3072:1{,}12=230{,}72:112 \\
\underline{-224} \\
672 \\
\underline{-672} \\
0
\end{array}
$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

4. DZIAŁANIA NA UŁAMKACH ZWYKŁYCH

Wykonując działania na ułamkach zwykłych, warto pamiętać o:

Skracaniu ułamków

$$\frac{12}{16} = \frac{12:4}{16:4} = \frac{3}{4}$$

Aby skrócić ułamek, należy licznik i mianownik podzielić przez tę samą liczbę różną od zera.

Rozszerzaniu ułamków

$$\frac{5}{9} = \frac{5 \cdot 6}{9 \cdot 6} = \frac{30}{54}$$

Aby rozszerzyć ułamek, należy licznik i mianownik pomnożyć przez tę samą liczbę

Zamianie liczby mieszanej na ułamek niewłaściwy

$$7\frac{3}{8} = \frac{7 \cdot 8 + 3}{8} = \frac{59}{8}$$

Zamianie ułamka niewłaściwego na liczbę mieszaną

$$\frac{25}{4} = 6\frac{1}{4} \text{ ponieważ } 25 : 4 = 6 \; \textit{reszty} \; 1$$

Działania na ułamkach zwykłych:

Porównywanie ułamków

$\frac{4}{21} < \frac{4}{17} < \frac{4}{9} < \frac{4}{5}$ Ułamki uporządkowane rosnąco (od najmniejszego do największego).	Jeżeli ułamki mają takie same liczniki, to większy jest ten ułamek, który ma mniejszy mianownik.
$\frac{8}{9} > \frac{5}{9} > \frac{4}{9} > \frac{1}{9}$ Ułamki uporządkowane malejąco (od największego do najmniejszego).	Jeżeli ułamki mają takie same mianowniki, to większy jest ten ułamek, który ma większy licznik.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dodawanie ułamków

$\frac{4}{15}+\frac{7}{15}=\frac{11}{15}$ $3\frac{7}{12}+1\frac{5}{12}=4\frac{12}{12}=5$	Jeżeli ułamki mają jednakowe mianowniki, to dodajemy ich liczniki, a mianownik pozostawiamy bez zmian.
$\frac{3}{4}+\frac{2}{5}=\frac{15}{20}+\frac{8}{20}=\frac{23}{20}=1\frac{3}{20}$ $1\frac{3}{5}+\frac{9}{10}=1\frac{6}{10}+\frac{9}{10}=1\frac{15}{10}=2\frac{5}{10}=2\frac{1}{2}$	Jeżeli ułamki mają różne mianowniki, to sprowadzamy je najpierw do wspólnego mianownika, a następnie dodajemy.

Odejmowanie ułamków

$\frac{5}{8}-\frac{3}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ $5-\frac{4}{5}=4\frac{5}{5}-\frac{4}{5}=4\frac{1}{5}$ $6\frac{1}{3}-2\frac{2}{3}=5\frac{4}{3}-2\frac{2}{3}=3\frac{2}{3}$	Jeżeli ułamki mają jednakowe mianowniki, to odejmujemy ich liczniki, a mianownik pozostawiamy bez zmian.
$\frac{5}{6}-\frac{2}{3}=\frac{5}{6}-\frac{4}{6}=\frac{1}{6}$ $5\frac{5}{9}-\frac{5}{6}=5\frac{10}{18}-\frac{15}{18}=4\frac{28}{18}-\frac{15}{18}=4\frac{13}{18}$	Jeżeli ułamki mają różne mianowniki, to sprowadzamy je najpierw do wspólnego mianownika, a następnie odejmujemy.

Ułamki sprowadzamy do wspólnego mianownika, obliczając najmniejszą wspólną wielokrotność ich mianowników.

Mnożenie mianowników

$2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2\cdot 1}{3}=\frac{2}{3}$ $\frac{4}{7}\cdot 6=\frac{4\cdot 6}{7}=\frac{24}{7}=3\frac{3}{7}$	Mnożąc liczbę naturalną przez ułamek (lub odwrotnie), mnożymy licznik ułamka przez tę liczbę, a mianownik pozostawiamy bez zmian.
$\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{10}{21}$	Mnożąc ułamek przez ułamek, mnożymy licznik pierwszego ułamka przez licznik drugiego ułamka, i mianownik pierwszego ułamka przez mianownik drugiego ułamka.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

$\frac{\cancel{4}^{1}}{5} \cdot \frac{7}{\cancel{8}_{2}} = \frac{7}{10}$	Mnożąc ułamki, możemy skracać licznik jednego z nich z mianownikiem drugiego.
$2\frac{1}{3} \cdot 1\frac{3}{4} = \frac{7}{3} \cdot \frac{7}{4} = \frac{49}{12} = 4\frac{1}{12}$	Mnożąc liczby mieszane, koniecznie zamieniamy je na ułamki niewłaściwe.
$\frac{3}{5}$ liczby 6 $\frac{3}{5} \cdot 6 = \frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}$	Aby obliczyć ułamek danej liczby, należy ułamek pomnożyć przez tę liczbę.

Dzielenie ułamków

Odwrotność ułamka $\frac{3}{4}$ to $\frac{4}{3}$ Odwrotność ułamka $\frac{1}{3}$ to $\frac{3}{1} = 3$ Odwrotność liczby 9 to $\frac{1}{9}$ Odwrotność liczby $4\frac{1}{2} = \frac{9}{2}$ to $\frac{2}{9}$	Iloczyn liczby i jej odwrotności jest równy 1.
$\frac{5}{7} : \frac{2}{3} = \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{14} = 1\frac{1}{14}$	Aby podzielić dwie liczby, należy dzielną pomnożyć przez odwrotność dzielnika.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

5. ROZWINIĘCIA DZIESIĘTNE UŁAMKÓW ZWYKŁYCH

Przypomnieliśmy sobie, w jaki sposób wykonujemy działania na ułamkach dziesiętnych oraz ułamkach zwykłych. Czasami zachodzi jednak potrzeba wykonania obliczeń na liczbach, gdzie jedna jest ułamkiem zwykłym, a druga ułamkiem dziesiętnym. W takim przypadku należy ułamek zwykły zamienić na ułamek dziesiętny lub ułamek dziesiętny zapisać w postaci ułamka zwykłego.

$0,5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$	$0,04 = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$	$0,008 = \frac{8}{1000} = \frac{1}{125}$	$5,3 = 5\frac{3}{10}$

Ułamki zwykłe możemy zamieniać na ułamki dziesiętne na dwa sposoby:

- rozszerzając lub skracając ułamek zwykły do ułamka o mianowniku 10, 100, 1000, itd. (Tak możemy zamienić ułamki, których mianownik można zapisać w postaci iloczynu czynników 2 i 5 lub potęgi liczby 2, lub potęgi liczby 5),
- dzieląc licznik przez mianownik.

Przykład 1

I sposób

$\frac{8}{25} = \frac{32}{100} = 0,32$

II sposób

$$\begin{array}{r}
\underline{0,3\,2} \\
8:2\,5 \\
8\,0 \\
-\underline{7\,5} \\
5\,0 \\
-\underline{5\,0} \\
0
\end{array}$$

Przykład 2

I sposób

$\frac{3}{8} = \frac{375}{1000} = 0,375$

II sposób

$$\begin{array}{r}
\underline{0,3\,7\,5} \\
3:8 \\
3\,0 \\
-\underline{2\,4} \\
6\,0 \\
-\underline{5\,6} \\
4\,0 \\
\underline{4\,0} \\
0
\end{array}$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 3

$$\frac{5}{16} = 0,3125$$

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & \underline{0,} & \underline{3} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{5} \\
 & 5: & 1 & 6 & & \\
 & 5 & 0 & & & \\
- & \underline{4} & \underline{8} & & & \\
 & & 2 & 0 & & \\
 & - & \underline{1} & \underline{6} & & \\
 & & & 4 & 0 & \\
 & & - & \underline{3} & \underline{2} & \\
 & & & & 8 & 0 \\
 & & & - & \underline{8} & \underline{0} \\
 & & & & & 0
\end{array}$$

Przykład 4

$$\frac{1}{3} = 0,333...$$

$$\begin{array}{rrrrr}
 & \underline{0,} & \underline{3} & \underline{3} & \underline{3...} \\
 & 1: & 3 & & \\
 & 1 & 0 & & \\
- & & \underline{9} & & \\
 & & 1 & 0 & \\
 & - & & \underline{9} & \\
 & & & 1 & 0 \\
 & & - & & \underline{9} \\
 & & & & 1
\end{array}$$

Przykład 5

$$\frac{5}{11} = 0,4545...$$

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & \underline{0,} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{4} & \underline{5...} \\
 & 5: & 1 & 1 & & \\
 & 5 & 0 & & & \\
- & \underline{4} & \underline{4} & & & \\
 & & 6 & 0 & & \\
 & - & \underline{5} & \underline{5} & & \\
 & & & 5 & 0 & \\
 & & - & \underline{4} & \underline{4} & \\
 & & & & 6 & 0 \\
 & & & - & \underline{5} & \underline{5} \\
 & & & & & 5
\end{array}$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Każdy ułamek zwykły można zamienić na ułamek dziesiętny (podać rozwinięcie dziesiętne). Niektóre ułamki mają rozwinięcie dziesiętne skończone, a inne rozwinięcie dziesiętne nieskończone.

Ułamki: $\frac{8}{25}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{16}$ mają **rozwinięcie dziesiętne skończone.**

Ułamki: $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{11}$ mają **rozwinięcie dziesiętne nieskończone**.

W czasie dzielenia powtarza się pewna grupa cyfr. Takie rozwinięcie dziesiętne nieskończone nazywamy **rozwinięciem okresowym**. Powtarzającą się grupę cyfr **okresem**. Zapisując te rozwinięcia, okres wyróżniamy nawiasem:

$$\frac{1}{3} = 0,333... = 0,(3)$$
$$\frac{5}{11} = 0,4545... = 0,(45)$$

Przykład 6

rozwinięcie dziesiętne	skrócony zapis
$\frac{2}{3} = 0,6666666666666...$	$= 0,(6)$
okresem jest 6	

Przykład 7

rozwinięcie dziesiętne	skrócony zapis
$\frac{10}{11} = 0,909090909090...$	$= 0,(90)$
okresem jest 90	

Przykład 8

rozwinięcie dziesiętne	skrócony zapis
$\frac{8}{15} = 0,53333333333333...$	$= 0,5(3)$
okresem jest 3	

6. DZIAŁANIA NA UŁAMKACH ZWYKŁYCH I DZIESIĘTNYCH

Jeżeli w działaniach występują ułamki zwykłe i dziesiętne, to najpierw ułamki zapisujemy w takiej samej postaci, a następnie wykonujemy obliczenia.

Dokładniej:

- ułamki dziesiętne zamieniamy na ułamki zwykłe i wykonujemy działania na ułamkach zwykłych

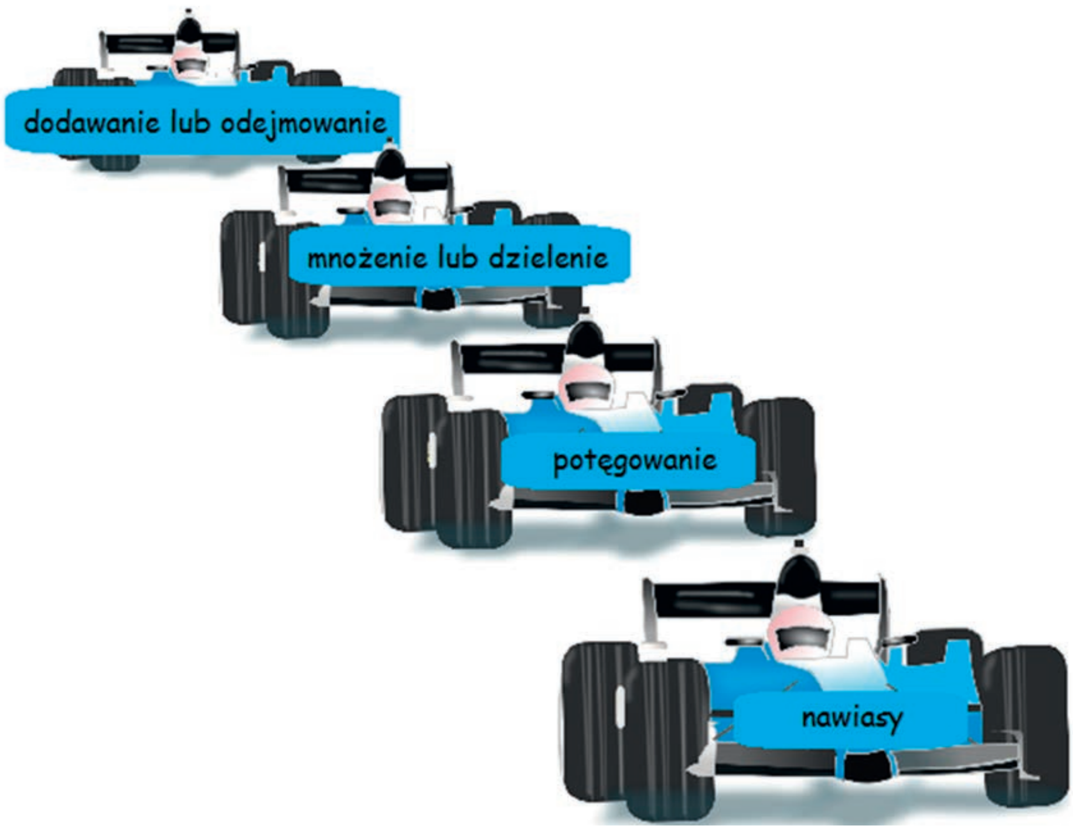
lub

- jeśli ułamki zwykłe mają rozwinięcie dziesiętne skończone, to możemy zamienić je na ułamki dziesiętne i wykonywać działania na ułamkach dziesiętnych.

Warto zapamiętać:

$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{1}{4} = 0,25$	$\frac{3}{4} = 0,75$	$\frac{1}{5} = 0,2$	$\frac{1}{8} = 0,125$

Jeżeli w wyrażeniach arytmetycznych występują różne działania, należy pamiętać o kolejności wykonywania działań.
Kolejność wykonywania działań:



KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

[], ()	W pierwszej kolejności wykonujemy działania w **nawiasach**. Najpierw w nawiasie, który nie zawiera w sobie innych nawiasów.
$3^2, 2^3, 5^2$	Następnie wykonujemy **potęgowanie**.
• :	Potem **mnożenie** i **dzielenie**. Wykonujemy je w kolejności występowania.
+ -	Na końcu **dodawanie** i **odejmowanie**. Wykonujemy je w kolejności występowania.

Przykład 1

Ułamek zwykły zamieniamy na ułamek dziesiętny

$$\frac{1}{4} + 0,52 = 0,25 + 0,52 = 0,77$$

lub ułamek dziesiętny zamieniamy na ułamek zwykły.

$$\frac{1}{4} + 0,52 = \frac{1}{4} + \frac{52}{100} = \frac{25}{100} + \frac{52}{100} = \frac{77}{100}$$

Przykład 2

Ułamek dziesiętny zamieniamy na ułamek zwykły i w pierwszej kolejności wykonujemy mnożenie

$$4{,}5 + 3 \cdot 2\frac{3}{4} = 4\frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{11}{4} = 4\frac{1}{2} + \frac{33}{4} = 4\frac{2}{4} + 8\frac{1}{4} = 12\frac{3}{4}$$

lub ułamek zwykły zamieniamy na ułamek dziesiętny i w pierwszej kolejności wykonujemy mnożenie.

$$4,5 + 3 \cdot 2\frac{3}{4} = 4,5 + 3 \cdot 2,75 = 4,5 + 8,25 = 12,75$$

Przykład 3

Ułamek dziesiętny zamieniamy na ułamek zwykły, ponieważ $\frac{1}{3} = 0,33333... = 0,(3)$
W pierwszej kolejności wykonujemy mnożenie.

$$2\frac{1}{3} + 2{,}8 \cdot \frac{1}{2} = 2\frac{1}{3} + 2\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = 2\frac{1}{3} + \frac{14}{5} \cdot \frac{1}{2} = 2\frac{5}{15} + \frac{21}{15} = 2\frac{26}{15} = 3\frac{11}{15}$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ TOMP UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 4

Ułamek dziesiętny zamieniamy na ułamek zwykły, ponieważ
$\frac{3}{7} = 0,428571428571428571... = 0,(428571)$

W pierwszej kolejności wykonujemy działanie w nawiasie.

$$(1\,\frac{2}{7} + 0,25) : \frac{3}{16} = (1\,\frac{2}{7} + \frac{1}{4}) : \frac{3}{16} = (1\,\frac{8}{28} + \frac{7}{28}) : \frac{3}{16} = 1\,\frac{15}{28} : \frac{3}{16} = \frac{43}{28} \cdot \frac{16}{3} = \frac{172}{21} = 8\,\frac{4}{21}$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

7. ROZWIĄZYWANIE ZADAŃ TEKSTOWYCH Z ZASTOSOWANIEM DZIAŁAŃ NA UŁAMKACH

Działania na ułamkach wykonujemy w wielu praktycznych sytuacjach: podczas zakupów, obliczania podatków, obliczania podwyżek i obniżek.

Rozwiązując zadania tekstowe, pamiętaj, aby:

- dokładnie przeczytać treść zadania,
- wypisać dane - inny sposób zapisania treści zadania pomoże Ci znaleźć prawidłowe rozwiązanie,
- zapisać wszystkie działania, które wykonujesz w pamięci,
- podczas działań na ułamkach zwykłych i dziesiętnych zdecydować się na jeden rodzaj ułamków,
- sprawdzić, czy otrzymany wynik zgadza się z treścią zadania,
- zweryfikować otrzymany wynik, oceniając sensowność rozwiązania,
- zapisać odpowiedź.

Zadanie 1

Karolina kupiła 24 dag sera żółtego w cenie 24,50 zł za kilogram, 325 gramów sera białego w cenie 18 zł za kilogram oraz 1 kg 30 dag jabłek po 2 zł 40 gr. Ile ważyły zakupy? Ile kosztowały zakupy?

Aby obliczyć, ile ważyły wszystkie zakupy, musimy masę wszystkich towarów zapisać w tej samej jednostce. W tym zadaniu masy zakupów wyrazimy w kilogramach, ponieważ ceny towarów podane są za jeden kilogram.

24 dag = 0,24 kg; 325 g = 0,325 kg; 1 kg 30 dag =1,3 kg;

0,24 kg + 0,325 kg +1,3 kg = 1,865 kg

Aby obliczyć koszt zakupu każdego z produktów, należy masę zakupów wyrażoną w kilogramach pomnożyć przez cenę za jeden kilogram:

$0{,}24 \cdot 24{,}50 = 5{,}88$ zł; $0{,}325 \cdot 18 = 5{,}85$ zł; $1{,}3 \cdot 2{,}40 = 3{,}12$ zł;

5,88 + 5,85 + 3,12 = 14,85 zł

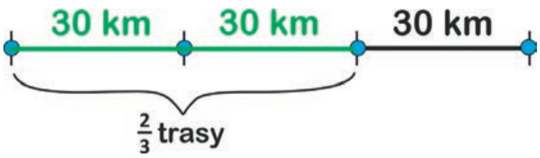
Odpowiedź: Zakupy ważyły 1,865 kg, a kosztowały 14,85 zł.

7.1. Obliczanie ułamka danej liczby

Zastanówmy się, jak rozwiązać następujący problem: Kierowca ma do przejechania 90 km.

Przejechał już $\frac{2}{3}$ trasy - ile to kilometrów?

Całą trasę podzielmy na 3 równe części. Każda z nich ma długość 30 km (90 km : 3 = 30 km). Kierowca przejechał już dwie spośród trzech części, czyli 60 km.



$\frac{1}{3}$ trasy to 90 km : 3 = 30 km, czyli $\frac{1}{3} \cdot 90$ km = $\frac{1 \cdot 90}{3}$ = 30 km

$\frac{2}{3}$ to 2 razy więcej niż $\frac{1}{3}$, czyli $\frac{2}{3}$ z 90 km = $\frac{2 \cdot 90}{3}$ = 60 km

Aby obliczyć ułamek danej liczby, należy ułamek pomnożyć przez daną liczbę.

Ćwiczenie 1

a) $\frac{2}{5}$ godziny - ile to minut? b) $\frac{3}{8}$ doby - ile to godzin?

Zadanie 1

W bibliotece szkolnej znajduje się 2480 książek. 0,6 całego księgozbioru stanowią książki dla dzieci. Ile książek dla dorosłych znajduje się w bibliotece?

0,6 · 2480 = 1488 ← liczba książek dla dzieci

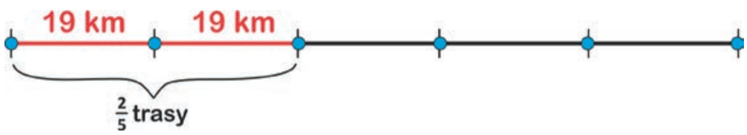
2480 - 1488 = 992 ← od liczby wszystkich książek odejmujemy książki dla dzieci

Odpowiedź: W bibliotece znajdują się 992 książki dla dorosłych.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

7.2. Obliczanie liczby na podstawie jej ułamka

Zastanówmy się, jak rozwiązać problem: Kierowca przejechał $\frac{2}{5}$ trasy, czyli 38 km. Jaką długość ma cała trasa?



$\frac{2}{5}$ trasy to 38 km,

$\frac{1}{5}$ trasy to 2 razy mniej, czyli 38 km : 2 = 19 km,

cała trasa to 5 razy więcej niż $\frac{1}{5}$ trasy, czyli 5 · 19 km = 95 km.

Odpowiedź: Cała trasa ma długość 95 kilometrów.

Zadanie 1

Marysia na prezent dla taty wydała $\frac{2}{7}$ swoich oszczędności. Zostało jej 49,50 zł. Ile oszczędności miała Marysia przed zakupem prezentu?

Marysia wydała $\frac{2}{7}$ swoich oszczędności, czyli pozostało jej $\frac{5}{7}$ oszczędności ($1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$).

$\frac{5}{7}$ oszczędności to 49,50 zł

49,50 zł : 5 = 9,90 zł ← obliczamy $\frac{1}{7}$ oszczędności

9,90 zł · 7 = 69,30 zł ← obliczamy $\frac{7}{7}$, czyli całe oszczędności

Odpowiedź: Marysia przed zakupem prezentu dla taty miała 69,30 zł.

Zadanie 2

0,25 uczniów klasy sportowej uprawia koszykówkę, $\frac{2}{3}$ uprawia siatkówkę, a pozostałe 3 osoby - skoki narciarskie. Ilu uczniów liczy ta klasa?

$\frac{2}{3} + 0,25 = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}$ ← obliczamy, jaki ułamek całej klasy stanowią osoby uprawiające siatkówkę i koszykówkę

$1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$ ← obliczamy, jaki ułamek stanowią osoby uprawiające skoki narciarskie

$\frac{1}{12}$ wszystkich uczniów to 3 osoby

$12 \cdot 3 = 36$

Odpowiedź: Do klasy sportowej uczęszcza 36 osób.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI · WPQ · TOMP · UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

8. POTĘGOWANIE LICZB I SILNIA

Iloczyn jednakowych czynników zastępujemy potęgowaniem.

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7$$

wykładnik potęgi

podstawa potęgi

Liczba, którą przez siebie mnożymy, to **podstawa potęgi**, a liczba mnożonych przez siebie jednakowych czynników to **wykładnik potęgi**.

Jak odczytywać potęgi?

5^{10}- pięć do potęgi **dziesiątej**

w przypadku potęgi o wykładniku 2 lub 3 mamy trzy możliwości odczytywania potęg:

5^2 – pięć **do potęgi** drugiej; pięć **do** kwadratu; kwadrat **liczby** pięć

7^3 – siedem **do potęgi** trzeciej; siedem **do** sześcianu; sześcian **liczby** siedem

Potęgować możemy liczby naturalne i całkowite, ułamki zwykłe i dziesiętne.

Przykład 1

a) 2^{10} b) $(1,2)^2$ c) $(\frac{2}{3})^3$ d) $(1\frac{2}{3})^2$

W zapisie $\frac{5^2}{3}$ potęga dotyczy tylko licznika: $\frac{5^2}{3} = \frac{25}{3}$

W zapisie $\frac{5}{3^2}$ potęga dotyczy tylko mianownika: $\frac{5}{3^2} = \frac{5}{9}$

8.1. Silnia*

Iloczyn jednakowych czynników zapisujemy w postaci potęgi. Iloczyn kolejnych liczb naturalnych też ma swoją nazwę i oznaczenie. **To silnia**.

Silnia liczby naturalnej n to iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do n - oznaczamy n!.

$1! = 1$

$2! = 1 \cdot 2 = 2$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

itd.

Sprawdź przy pomocy kalkulatora, ile wynosi wartość liczby 20!.

Czy potrafisz odczytać tę liczbę?
Tę liczbę zapisano przy pomocy 19 cyfr, odczytanie jej jest uciążliwe, a zapis 20! jest prosty i krótki. Ponadto z zapisu 20! wynika, że liczby 2, 3, 4, ...19, 20 są jej dzielnikami (patrząc na liczbę 2 432 902 008 176 640 000, nie odgadniemy tego). A informacja o dzielnikach liczby jest bardzo przydatna przy skracaniu ułamków.

Ćwiczenie 1

Sprawdź przy pomocy kalkulatora, ile wynosi wartość liczby 20!.
Oblicz:
a) 5! b) 6! c) 7!

Przykład 1

Oblicz wartość wyrażenia $5! - 2 \cdot 3!$

$5! - 2 \cdot 3! = 120 - 2 \cdot 6 = 120 - 12 = 108$

Przykład 2

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{10!}{7! \cdot 3!}$

W tym przykładzie nie opłaca się dokładnie wyliczać wartości silni, natomiast warto wykorzystać iloczynową postać silni:

$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$

$3! = 6$

$$\frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{7! \cdot 6} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{6} = 120$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Silnię wykorzystujemy w zadaniach kombinatorycznych.

Kombinatoryka to dział matematyki, który zajmuje się rozwiązywaniem problemów typu:

- Na ile sposobów można ustawić 20-osobową klasę w szeregu?
- Ile różnych 3-osobowych delegacji można wybrać z 15-osobowej grupy?
- Na ile sposobów można rozdać talię 24 kart pomiędzy cztery osoby tak, aby każda osoba miała jednego asa?
- Ile różnych szóstek liczb można skreślić w grze w Totolotka?

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

9. SZACOWANIE WYNIKÓW DZIAŁAŃ

Szacowanie wyników przydatne jest w wielu sytuacjach praktycznych. Na przykład robiąc zakupy, chcemy wiedzieć, ile mniej więcej za nie zapłacimy. Nie trzeba wtedy wykonywać dokładnych obliczeń (dodawać do siebie dokładnych cen wszystkich produktów), ale oszacować wynik.

3,95 zł / 6 szt. | 2,49 zł / kg | 17,95 zł / kg | 24,50 zł / kg | 4,59 zł | 1,39 zł | 1,85 zł | 4,19 zł / kg

Przykład 1

Czy 10 zł wystarczy na zakup dwóch kilogramów jabłek i 6 jajek?

$\underbrace{2 \cdot 2{,}49 \text{ zł}}_{\text{mniej niż } 5} + \underbrace{3{,}95 \text{ zł}}_{\text{mniej niż } 4}$ to razem mniej niż 10 zł

10 zł wystarczy na zakup dwóch kilogramów jabłek i 6 jajek.

Przykład 2

Czy za pół kilograma sera białego i kilogram ogórków zapłacę mniej niż 14 zł?

$\underbrace{\frac{1}{2} \cdot 17{,}95}_{\text{mniej niż } 9} + \underbrace{4{,}19}_{\text{mniej niż } 5}$ to razem mniej niż 14 zł

Tak, za pół kilograma sera białego i kilogram ogórków zapłacisz mniej niż 14 zł.

Przykład 3

Czy na zakup 5 jogurtów wystarczy 8 zł?

$5 \cdot 1{,}39$ to razem mniej niż 8 zł

mniej niż $5 \cdot 1{,}5 = 7{,}5$

Tak, 5 jogurtów kosztuje mniej niż 8 zł.

Przykład 4

Ile kilogramów jabłek można kupić za 20 zł?

$20 : 2{,}49$ to nieco więcej niż 8 zł

więcej niż $20 : 2{,}5 = 8$

Za 20 zł można kupić 8 kilogramów jabłek.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 5

Karolina kupiła pół kilograma sera żółtego, masło, dwa pęczki rzodkiewek oraz dwa kilogramy jabłek. Dziewczynka podała sprzedawcy banknot pięćdziesięciozłotowy. Oszacuj, ile reszty otrzyma Karolina.

$$\underbrace{\frac{1}{2} \cdot 24,50}_{\text{około } 12} + \underbrace{4,59}_{\text{około } 5} + \underbrace{2 \cdot 1,85}_{\text{około } 4} + \underbrace{2 \cdot 2,49}_{\text{około } 5}$$ to razem około 26 zł

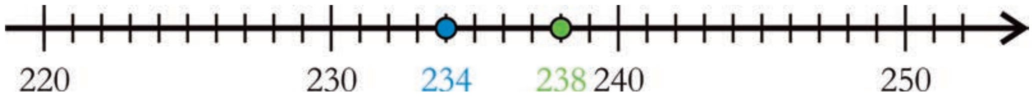
50 - 26 = 24

Karolina otrzyma około 24 zł reszty.

10. ZAOKRĄGLANIE LICZB

Liczby towarzyszą nam na co dzień, np. „Poproszę 5 kajzerek”, „Do szkoły uczęszcza 318 uczniów”, „W Sejmie zasiada 460 posłów a w Senacie 100 senatorów”. W wielu sytuacjach podanie dokładnych liczb nie jest istotne. W kwietniu 2014 r. media podały, że 360 tysięcy uczniów trzecich klas gimnazjum przystąpiło do egzaminu gimnazjalnego. W rzeczywistości egzamin pisało więcej uczniów - 362 811(wg Sprawozdania z egzaminu gimnazjalnego opracowanego przez CKE). Często w prasie, telewizji dane liczbowe podawane są w przybliżeniu, dzięki temu łatwiej je zapamiętać oraz porównać.

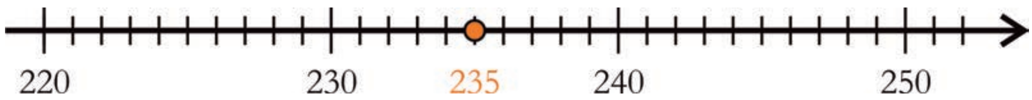
Na tej lekcji nauczymy się zaokrąglać liczby, czyli podawać ich przybliżone wartości. Spróbujmy zaokrąglić liczby 234, 238 do dziesiątek. Na osi liczbowej zaznaczamy kolejne wielokrotności liczby 10 oraz liczby 234 i 238.



Liczba 234 znajduje się bliżej liczby 230 niż 240. Powiemy, że liczba 234 równa się w przybliżeniu 230. Zdanie to zapiszemy krócej: 234 ≈ 230. Zaokrąglenie 230 jest mniejsze od liczby 234 - powiemy, że jest to **zaokrąglenie w dół** lub **przybliżenie z niedomiarem**.

Liczba 238 znajduje się bliżej liczby 240 niż 230. Powiemy, że liczba 238 równa się w przybliżeniu 240, czyli 238 ≈ 240. Zaokrąglenie 240 jest większe od liczby 238 - powiemy, że jest to **zaokrąglenie w górę** lub **przybliżenie z nadmiarem**.

Na osi liczbowej pomiędzy liczbami 230 a 340 znajduje się dokładnie jedna liczba, która leży w takiej samej odległości od liczby 230 i 240. To liczba 235.



Przyjęto, że takie liczby zaokrąglamy w górę. 235 ≈ 240.

ZASADA ZAOKRĄGLANIA DO DZIESIĄTEK

Jeżeli cyfra jedności w danej liczbie jest równa **0, 1, 2, 3 lub 4,** to liczbę zaokrąglamy w dół, czyli **cyfrę dziesiątek pozostawiamy bez zmian**, a **cyfrę jedności zastępujemy 0**:

842 ≈ 840
2091 ≈ 2090
4 ≈ 0

Jeżeli cyfra jedności w danej liczbie jest równa **5, 6, 7, 8 lub 9,** to liczbę zaokrąglamy w górę, czyli **cyfrę dziesiątek zwiększamy o 1**, a **cyfrę jedności zastępujemy 0**:

426 ≈ 430
579 ≈ 580
1396 ≈ 1400

Cyfra **9** powiększona o 1 to 10 - 10 dziesiątek to 1 setka, więc **zwiększamy o 1 cyfrę setek** a cyfry dziesiątek i jedności zastępujemy 0.

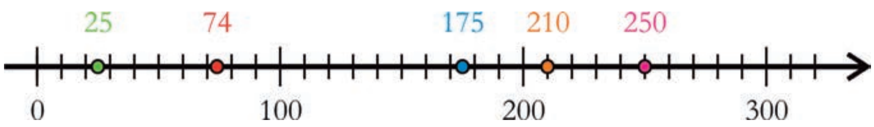
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 1

Podane liczby zaokrąglij do dziesiątek:

a) 356 b) 1578 c) 2596 d) 3997 e) 3

Liczby 25, 74, 175, 210 i 250 zaokrąglimy do setek. Na osi liczbowej zaznaczamy kolejne wielokrotności liczby 100 oraz liczby 25, 74, 175, 210 i 250.



Liczba 25 znajduje się pomiędzy 0 a 100, ale bliżej liczby 0, czyli 25 ≈ 0.

Liczba 74 znajduje się pomiędzy 0 a 100, ale bliżej liczby 100, czyli 74 ≈ 100.

Liczba 175 znajduje się pomiędzy 100 a 200, ale bliżej liczby 200, czyli 175 ≈ 200.

Liczba 210 znajduje się pomiędzy 200 a 300, ale bliżej liczby 200, czyli 210 ≈ 200.

Liczba 250 znajduje się pomiędzy 200 a 300 w takiej samej odległości od obu liczb, czyli 250 ≈ 300.

ZASADA ZAOKRĄGLANIA DO SETEK

Jeżeli cyfra dziesiątek w danej liczbie jest równa

0,1, 2, 3 lub 4,

to liczbę zaokrąglamy w dół, czyli **cyfrę setek pozostawiamy bez zmian**, a **cyfry dziesiątek i jedności zastępujemy 0**:

842 ≈ 800
2319 ≈ 2300
26 ≈ 0

Jeżeli cyfra dziesiątek w danej liczbie jest równa

5, 6, 7, 8 lub 9,

to liczbę zaokrąglamy w górę, czyli **cyfrę setek zwiększamy o 1**, a **cyfry dziesiątek i jedności zastępujemy 0**:

462 ≈ 500
1579 ≈ 1600
1986 ≈ 2000

Cyfra **9** powiększona o 1 to 10 - 10 setek to 1 tysiąc, więc **zwiększamy o 1 cyfrę tysięcy** a cyfry setek, dziesiątek i jedności zastępujemy 0.

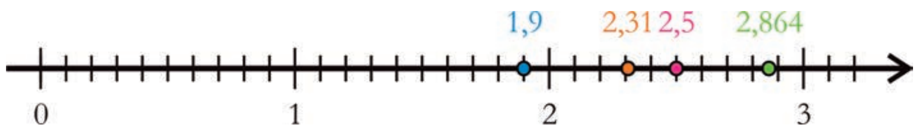
Podobnie zaokrąglamy liczby do tysięcy, dziesiątek tysięcy, setek tysięcy itd.

Ćwiczenie 2

Zaokrąglij liczby:

a) 23 456 do setek b) 6 991 do setek c) 4 762 do tysięcy
d) 135 do tysięcy e) 9 999 do dziesiątek, setek i tysięcy

Liczby możemy zaokrąglać do jedności, części dziesiątych, części setnych, części tysięcznych itd. Ułamki 1,9; 2,31; 2,5 oraz 2,864 zaokrąglimy do jedności. Na osi liczbowej zaznaczamy kolejne liczby naturale i ułamki 1,9; 2,31; 2,5 oraz 2,864.



Liczba 1,9 znajduje się pomiędzy 1 a 2, ale bliżej liczby 2, czyli 1,9 ≈ 2.

Liczba 2,31 znajduje się pomiędzy 2 a 3, ale bliżej liczby 2, czyli 2,31 ≈ 2.

Liczba 2,864 znajduje się pomiędzy 2 a 3, ale bliżej liczby 3, czyli 2,864 ≈ 3.

Liczba 2,5 znajduje się pomiędzy 2 a 3 w takiej samej odległości od obu liczb, czyli 2,5 ≈ 3.

Zasady zaokrąglania ułamków dziesiętnych są bardzo podobne do zasad zaokrąglania liczb naturalnych:

ZASADA ZAOKRĄGLANIA DO JEDNOŚCI

Jeżeli cyfra części dziesiątych jest równa **0, 1, 2, 3 lub 4,** to liczbę zaokrąglamy w dół, czyli **cyfrę jedności pozostawiamy bez zmian**, a **pozostałe cyfry za przecinkiem zastępujemy 0**:

2,4 ≈ 2,0 = 2

(po zaokrągleniu ułamka dziesiętnego otrzymamy 2)

3,286 ≈ 3
156,163 ≈ 156

Jeżeli cyfra części dziesiątych jest równa **5, 6, 7, 8 lub 9,** to liczbę zaokrąglamy w górę, czyli **cyfrę jedności zwiększamy o 1**, a **pozostałe cyfry za przecinkiem zastępujemy 0**:

2,8 ≈ 3

39,54 ≈ 40

Cyfra jedności 9 zwiększona o 1 to jedna dziesiątka, więc **zwiększamy o 1 cyfrę dziesiątek**

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

ZASADA ZAOKRĄGLANIA DO CZĘŚCI DZIESIĄTYCH

Jeżeli cyfra części dziesiątych jest równa
0, 1, 2, 3 lub 4,
to zaokrąglamy liczbę w dół,
czyli **cyfrę części dziesiętnych pozostawiamy bez zmian**, a **kolejne cyfry za przecinkiem zastępujemy 0**:

3,54 ≈ 3,5

28,23 ≈ 28,2

9,13 ≈ 9,1

Jeżeli cyfra części dziesiątych jest równa
5, 6, 7, 8 lub 9,
to zaokrąglamy liczbę w dół,
czyli **cyfrę części dziesiętnych zwiększamy o 1**, a **kolejne cyfry za przecinkiem zastępujemy 0**:

2,85 ≈ 2,9

6,983 ≈ 7

Cyfra części dziesiętnych 9 zwiększona o 1 to jedna całość, więc **zwiększamy o 1 cyfrę dziesiątek**

Ćwiczenie 3

Liczbę 12,926 zaokrąglij do:

a) jedności b) części dziesiątych c) do części setnych

Przykład 1

Znajdź zaokrąglenia liczby 5,8(62).

Zapiszmy kilka cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby 5,8(62) = 5,862626262...

- 5,8(62) ≈ 6 zaokrąglenie do jedności
- 5,8(62) ≈ 5,9 zaokrąglenie do części dziesiątych
- 5,8(62) ≈ 5,86 zaokrąglenie do części setnych
- 5,8(62) ≈ 5,863 zaokrąglenie do części tysięcznych

Ćwiczenie 4

Liczbę 9,6(347) zaokrąglij do:

a) jedności

b) części dziesiątych

c) części setnych

d) części tysięcznych

11. KALKULATOR

Przypomnimy sobie, jak używać kalkulatora do wykonywania podstawowych obliczeń.

Kalkulator przedstawiony obok posiada klawisze z cyframi 0, 1, 2 ... 9 oraz ze znakami działań +, -, *, /.

W niektórych kalkulatorach symbolem mnożenia jest znak x, zaś dzielenia ÷.

Do kasowania wprowadzonych znaków służą klawisze:

Backspace - usuwa ostatnio wprowadzony znak, np. jeśli wpisałeś liczbę 1234, to po wciśnięciu klawisza **Backspace** pozostanie liczba 123.
CE - usuwa ostatnią zapisaną liczbę, np. jeśli wprowadziłeś działanie 56 / 7, naciśnięcie klawisza **CE** spowoduje usunięcie tylko liczby 7.
C - usuwa wszystko.

Wiele kalkulatorów nie stosuje zasad kolejności wykonywania działań - takie kalkulatory wykonują działania w kolejności ich podania. Na przykład po naciśnięciu klawiszy w kolejności 8 + 4 / 4 wyświetli się wynik 3 (8 + 4 = 12, 12 : 4 = 3). Aby na kalkulatorze wykonywać obliczenia we właściwej kolejności, należy stosować klawisze pamięci:

MC - usuwa liczbę z pamięci kalkulatora,

MR - przywołuje liczbę przechowywaną w pamięci kalkulatora,

MS - zapisuje w pamięci wyświetlaną liczbę,

M+ - dodaje wyświetlaną liczbę do liczby przechowywanej w pamięci.

Jeśli chcemy wyświetlaną liczbę odjąć od liczby przechowywanej w pamięci, należy wyświetlanej liczbie zmienić znak na przeciwny, naciskając klawisz **+/-**, a następnie klawisz **M+**.

Przykład 1

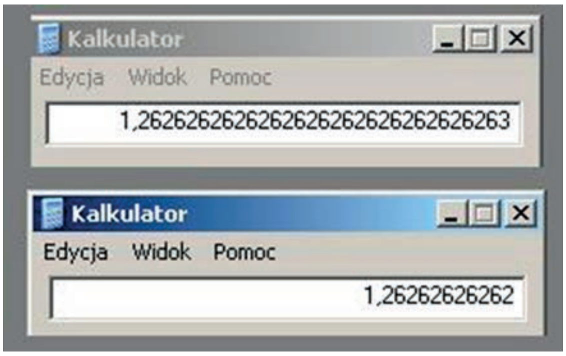
Oblicz przy pomocy kalkulatora:

a) $3 \cdot 12{,}743 - 16{,}987$ b) $10{,}563 - 4 \cdot 0{,}946$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Nie wszystkie obliczenia możemy wykonać na kalkulatorze. W niektórych kalkulatorach wyświetla się 12 cyfr. Zatem na wyświetlaczu takiego kalkulatora nie zmieści się wynik mnożenia 125 000 000 · 328 000 (wynik tego mnożenia jest liczbą, która ma co najmniej 14 cyfr - jak myślisz, dlaczego?). W takiej sytuacji należy przy pomocy kalkulatora wykonać mnożenie 125 · 328, a do otrzymanego wyniku dopisać odpowiednią liczbę zer.

Kalkulator jest bardzo pomocny w znajdowaniu rozwinięć dziesiętnych ułamków zwykłych. Jeśli rozwinięcie dziesiętne jest nieskończone lub ma bardzo dużo cyfr za przecinkiem, to nie wyświetli się ono w całości. Wówczas niektóre kalkulatory zaokrąglają wynik, a inne podają kilka początkowych cyfr rozwinięcia. Zobaczymy, jaki wynik dzielenia 125 przez 99 wyświetli się na kalkulatorze.



Na wyświetlaczu pierwszego kalkulatora widać zaokrąglenie do 31 cyfr po przecinku liczby 1,(26). Na 32 miejscu po przecinku jest cyfra 6, która zgodnie z zasadami zaokrąglania każe poprzednią cyfrę zwiększyć o 1. Stąd ostatnią wyświetlaną cyfrą jest 3.

Na wyświetlaczu drugiego kalkulatora mieści się 12 cyfr, więc za przecinkiem wyświetla się pierwszych 11 cyfr rozwinięcia dziesiętnego.

Przykład 2

Korzystając z kalkulatora, oblicz wynik i resztę z dzielenia liczby 1234567 przez 89.

Na kalkulatorze wykonujemy dzielenie 1234567: 89.

Wynik tego dzielenia to 13871.

Aby znaleźć resztę z dzielenia, należy od liczby 1234567 odjąć wynik mnożenia 13871 przez 89.

1234567 - 13871 · 89 = 48

Odpowiedź: 1234567 : 89 = 13871 r 48.

Przykład 3

Kilogram jabłek kosztuje 2,49 zł. Ile należy zapłacić za 1 kg 35 dag tych jabłek?

Masę zakupionych jabłek wyrażamy w kilogramach:

1 kg 35 dag = 1,35 kg

Przy pomocy kalkulatora wykonujemy mnożenie 2,49 · 1,35.

Otrzymany wynik zaokrąglamy do groszy, czyli do części setnych.

3,3615 ≈ 3,36

Odpowiedź: Za jabłka należy zapłacić 3,36 zł.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

NOTATKI

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

1. KALENDARZ I CZAS

Rok zwykły trwa 365 dni, a rok przestępny - 366 dni. Rok kalendarzowy został podzielony na 12 miesięcy. Kolejne trzy miesiące, licząc od początku roku tworzą kwartał.

I kwartał	II kwartał	III kwartał	IV kwartał
styczeń (I)	kwiecień (IV)	lipiec (VII)	październik (X)
luty (II)	maj (V)	sierpień (VIII)	listopad (XI)
marzec (III)	czerwiec (VI)	wrzesień (IX)	grudzień (XII)

Miesiące oznaczone kolorem niebieskim mają **31 dni**, a pomarańczowym - **30 dni**. Luty ma **28 dni** w roku zwykłym i **29 dni** w roku przestępnym.

Do zapisu daty używamy nazw miesięcy lub ich oznaczeń zapisanych cyframi arabskimi bądź rzymskimi (podane są w nawiasach):

12 lutego 1971 r. - słowny zapis nazwy miesiąca. **Pamiętaj! W takim zapisie nazwy miesięcy się odmieniają.**

12.02.1971 r. - oznaczenie nazwy miesiąca przy pomocy cyfr arabskich (luty jest drugim miesiącem od początku roku).

12 II 1971 r. - oznaczenie nazwy miesiąca przy pomocy cyfr rzymskich.

W przypadku stosowania cyfr arabskich numer miesiąca oddzielamy kropkami od numeru dnia i numeru roku. W przypadku stosowania cyfr rzymskich nie zapisujemy kropek.

Ćwiczenie 1

Podaj nazwy miesięcy występujące w poniższych datach:
a) 13 XIII 1981 r. b) 17 IX 1939 r. c) 4 VI 1989 r.

Rok jest przestępny, jeśli:

- jego numer jest liczbą podzielną przez 4,

- nie jest ostatnim rokiem stulecia.

Jeśli rok jest ostatnim rokiem wieku, to jest przestępny, gdy jego numer dzieli się przez 400. Zatem lata przestępne to 400, 800, 1200, 1600, 2000, 2400 itd.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ TOMP UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rok zwykły trwa 365 dni, czyli o 5 godzin 48 minut i 46 sekund krócej niż astronomiczny. Po czterech latach daje to w sumie prawie jeden dzień. I dlatego co cztery lata mamy rok dłuższy (366 dni). Nazywamy go rokiem przestępnym.

Dokładniej:
4 · (5 godzin 48 minut 46 sekund) = 23 godziny 15 minut 4 sekundy.

Czyli trzy lata zwykłe i jeden przestępny to o 44 minuty i 56 sekund dłużej niż cztery lata astronomiczne. Dlatego nie co każde cztery lata jest rok przestępny - rok będący końcem stulecia, jeśli nie dzieli się przez 400, jest rokiem zwykłym.

Lata 100, 200, 300, 500, 600, 700, 900,1000, 1100, 1300, 1400, 1500, 1700, 1800, 1900, 2100, 2200 - to lata zwykłe.

Zaś roczniki 400, 800, 1200, 1600, 2000 to lata przestępne.

Zasada podzielności przez 4

Liczba dzieli się przez 4, gdy jej cyfra dziesiątek z cyfrą jedności tworzą liczbę podzielną przez 4.

Liczba 12**36** dzieli się przez 4, ponieważ **36** dzieli się przez 4.

Liczba 43**45** nie dzieli się przez 4, ponieważ liczba **45** nie dzieli się przez 4.

Ćwiczenie 2

Które z poniższych lat są latami przestępnymi?

a) 1364 b) 1590 c) 1300 d) 2048 d) 700 e) 1234
f) 1852

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
WPQ
Tomasz Jakubowski TOMP
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wiek to jednostka czasu, która trwa 100 lat. W Polsce numer wieku zapisujemy cyframi rzymskimi. Obecnie żyjemy w XXI wieku, który rozpoczął się 1 stycznia 2001 roku, a skończy się 31 grudnia 2100 roku.

I wiek rozpoczął się pierwszego dnia 1 roku, a skończył się ostatniego dnia 100 roku. II wiek rozpoczął się pierwszego dnia 101 roku, a skończył się ostatniego dnia 200 roku, itd.

Ćwiczenie 3

Który to wiek?

a) 1364 b) 1590 c) 1300 d) 2000 e) 1701

1.1. Obliczenia kalendarzowe

7 dni to tydzień. Co 7 dni potarzają się te same dni tygodnia.

Przykład 1

Dzisiaj jest środa. Jaki dzień tygodnia będzie za 30 dni?

30 : 7 = 4 r 2

30 dni = 4 tygodnie i 2 dni

Odpowiedź: Za 30 dni będzie piątek.

Przykład 2

Dziś jest czwartek. Jaki dzień tygodnia był 50 dni temu?

50 : 7 = 7 r 1

50 dni = 7 tygodni i 1 dzień

Odpowiedź: 50 dni temu była środa.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 3

Dzisiaj jest 14 lutego 2015 r. Za 60 dni zdaję egzamin z języka angielskiego. Podaj datę egzaminu z języka angielskiego.

Do końca lutego pozostało 28 - 14 = 14 dni

60 - 14 = 46

46 - 31 (liczba dni marca) = 15

Odpowiedź: Egzamin z języka angielskiego odbędzie się 15 kwietnia 2015 r.

Przykład 4

Dziadek powiedział do wnuczki: „Dzisiaj jest 14 lutego 2015 r. 100 dni temu obchodziłem setne urodziny”. Podaj datę urodzin dziadka.

13 (poprzednie dni lutego) + 31 (dni stycznia) + 31 (dni grudnia) = 75 dni

100 - 75 = 25

Musimy odliczyć jeszcze 25 dni listopada, licząc od końca miesiąca.

30 - 25 + 1= 6

Odpowiedź: Dziadek urodził się 6 listopada 1914 r.

Obliczanie upływu czasu

Przykład 5

Pierwszym dniem jesieni był 23 września 2014 r., a ostatnim - 21 grudnia. Ile dni trwała jesień w roku 2014?

Jesienne dni wrześniowe to 23, 24, 25, ... 30.

Jest ich 30 - 22 = 8.

Od liczby dni września odejmujemy pierwsze 22 dni września, które były jeszcze letnimi dniami.

„wrześniowe dni jesienne”	+	dni października	+	dni listopada	+	„jesienne dni grudnia”		RAZEM
8	+	31	+	30	+	21	=	90

Odpowiedź: Jesień w roku 2014 trwała 90 dni.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
WPQ
Tomasz Jakubowski TOMP
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

1.2. Obliczenia zegarowe

Jednostki czasu

Tydzień to 7 dni.

Doba to 24 godziny.

Godzina to 60 minut.

Kwadrans to 15 minut.

Minuta to 60 sekund.

Godzina to 3600 sekund.

Ćwiczenie 1

Zamień jednostki:
a) 5/8 doby - ile to godzin?
b) 3 kwadranse - ile to minut? Ile to godzin?
c) 0,2 godziny - ile to minut?
d) 4 godz. 25 min - ile to minut?

Ćwiczenie 2

Uzupełnij:
235 min = ... godz. .... min

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 1

Pociąg wyruszył z Warszawy o godzinie 6:24 i dojechał do Szczecina o godzinie 15:07. Jak długo trwała podróż?

36 min	+	8 godz. 7 min	=	8 godz. 43 min
tyle minut brakuje do godziny 7:00		tyle czasu upłynęło od 7:00 do 15:07		

Odpowiedź: Podróż trwała 8 godzin 43 minuty.

Przykład 2

Pociąg wyruszył z Warszawy o 10:52 i dojechał do Krakowa po 3 godzinach 15 minutach. O której godzinie pociąg dojechał do Krakowa?

Od 10:52 do 11:00 upłynęło 8 minut.

3 godz. 15 min = 8 min + 3 godz. 7 min

11:00 + 3 godz. 7 min = 14:07

Odpowiedź: Pociąg dojechał do Krakowa o 14:07.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

2. JEDNOSTKI DŁUGOŚCI I JEDNOSTKI MASY

2.2. Jednostki długości

Jednostkami długości posługujemy się, gdy chcemy wyrazić wielkość przedmiotów i obiektów. Na przykład szerokość szafy, wysokość budynku, głębokość jeziora, długość pasa startowego, odległość między miastami.

Ćwiczenie 1

Podaj przykład jednostek długości oraz wskaż obiekty, których wymiary podamy w tych jednostkach.

Zależności pomiędzy jednostkami długości:

1 cm = 10 mm

1 dm = 10 cm

1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm

1 km = 1000 m

Ćwiczenie 2

Zamień jednostki długości:

a) 14 dm = ... cm
b) 6,21 m = ... mm
c) 4,2 km = ... m

Mniejsze jednostki możemy wyrazić przy pomocy większej:

1 km = 1000 m → 1 m = 0,001 km

1 m = 100 m → 1 cm = 0,01 m

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 3

Zamień jednostki długości:

a) 14 cm = ... m
b) 4 mm = ... m

Milimetr to jednostka 1000 razy mniejsza niż metr. Przedrostek mili oznacza jednostkę 1000 razy mniejszą, np. miligram to jedna tysięczna grama, mililitr to jedna tysięczna litra.

Przedrostek kilo oznacza jednostkę 1000 razy większą, np. kilogram to tysiąc gramów, kilometr to tysiąc metrów.

Przedrostek centy oznacza jednostkę 100 razy mniejszą, np. centymetr to jedna setna metra, centylitr to jedna setna litra.

Przedrostek mikro oznacza jednostkę 1 000 000 razy mniejszą, np. mikrometr to jedna milionowa metra.

Umiejętność zamiany jednostek jest przydatna przy porównywaniu wielkości.

Przykład 1

Uporządkuj podane długości rosnąco:
1,2 cm 13 mm 0,014 m 0,000002 km

1,2 cm = 12 mm

0,014 m = 0,014 · 1000 mm = 14 mm

0,000002 km = 0,000002 · 1000 m = 0,002 m = 0,002 · 1000 mm = 2 mm

Odpowiedź: 0,000002 km < 1,2 cm < 13 mm < 0,014 m.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

2.2. Jednostki masy

Ćwiczenie 1

Podaj przykład jednostek masy oraz wskaż przedmioty, których masę wyrazimy w tych jednostkach.

Zależności pomiędzy jednostkami masy:

1 dag = 10 g

1 kg = 100 dag = 1000 g

1 t = 1000 kg

Ćwiczenie 2

Zamień jednostki masy:

a) 42 dag = ... g
b) 3,19 kg = ... g
c) 5,02 t = ... kg

Mniejsze jednostki możemy wyrazić przy pomocy większej:
1 kg = 100 dag → 1 dag = 0,01 kg
1 m = 100 cm → 1 cm = 0,01 m

Ćwiczenie 3

Zamień jednostki długości:

a) 25 dag = ... kg
b) 6 g = ... kg
c) 17 t 35 kg = ... t

Umiejętność zamiany jednostek jest przydatna przy porównywaniu wielkości.

Przykład 1

Uporządkuj podane masy malejąco:

1,3 dag   15 g   0,014 kg   0,000016 t   1 dag 1 g

$1{,}3 \text{ dag} = 1{,}3 \cdot 10 \text{ g} = 13 \text{ g}$

$0{,}014 \text{ kg} = 0{,}014 \cdot 1000 \text{ g} = 14 \text{ g}$

$0{,}000016 \text{ t} = 0{,}000016 \cdot 1000 \text{ kg} = 0{,}016 \text{ kg} = 0{,}016 \cdot 1000 \text{ g} = 16 \text{ g}$

$1 \text{ dag } 1 \text{ g} = 11 \text{ g}$

Odpowiedź: $0{,}000016 \text{ t} > 15 \text{ g} > 0{,}014 \text{ kg} > 1{,}3 \text{ dag} > 1 \text{ dag } 1 \text{ g}$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ TOMP UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

3. SKALA NA MAPACH I PLANACH

Na mapach przedstawiamy fragmenty powierzchni Ziemi narysowane w pewnym pomniejszeniu. Poniższa ilustracja to mapa Polski wykonana w skali 1: 7 000 000.

Skala pozwala nam obliczyć rzeczywiste odległości w terenie.

Skala 1 : 7 000 000 oznacza, że 1 cm na mapie odpowiada 7 000 000 cm w rzeczywistości. Ponieważ 7 000 000 cm = 70 000 m = 70 km, to 1 cm na mapie odpowiada 70 km w terenie.

Analogicznie 1 mm na mapie odpowiada 7 000 000 mm, czyli 7 km w terenie (7 000 000 mm = 700 000 cm = 7000 m = 7 km).

Przykład 1

Odległość na mapie w linii prostej między Warszawą a Szczecinem wynosi 6,7 cm. Jaka jest rzeczywista odległość między Warszawą a Szczecinem?

I sposób

6,7 cm = 6 cm 7 mm

6 · 70 km = 420 km

7 · 7 km = 49 km

420 km + 49 km = 469 km

II sposób

6,7 · 70 km = 469 km

Odpowiedź: Odległość między Warszawą a Szczecinem w linii prostej to 469 km.

Przykład 2

Jaka odległość w rzeczywistości odpowiada 1 cm i 1 mm na mapie w skali 1 : 500 000?

Przykład 3

Jaka jest długość rzeki Wkry, jeśli na mapie w skali 1 : 3 000 000 ma ona długość 8 cm 3 mm?

3.1. Obliczanie długości odcinka w skali

Gdy znamy rzeczywistą odległość i skalę mapy, możemy obliczyć odległość na mapie.

Przykład 1

Rzeka Wierzyca ma długość 130 km. Jaka będzie jej długość na mapie w skali 1 : 2 000 000?

Odległość na mapie w skali 1 : 2 000 000 będzie 2 000 000 razy mniejsza niż w rzeczywistości.

Długość 130 km wyrażamy w centymetrach:

130 km =130 000 m = 13 000 000 cm

13 000 000 cm : 2 000 000 = 6,5 cm

Odpowiedź: Na mapie w skali 2 000 000 Wierzyca będzie miała 6,5 cm długości.

Przykład 2

Działka ma kształt prostokąta o wymiarach 25 m x 35 m. Jakie będą jej wymiary na planie w skali 1 : 500?

Wymiary działki wyrażamy w centymetrach:

25 m = 2500 cm

35 m = 3500 cm

Na planie wymiary działki będą 500 razy mniejsze:

2500 cm : 500 = 5 cm

3500 cm : 500 = 7 cm

Odpowiedź: Na planie działka będzie prostokątem o wymiarach 5 cm x 7 cm.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ Tomasz Jakubowski TOMP UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

3.2. Wyznaczanie skali mapy

Znając rzeczywistą odległość i odpowiadającą jej odległość na mapie, możemy wyznaczyć skalę mapy.

Przykład 1

Odległość między Radomiem a Warszawą wynosi 93 km. Na mapie miasta znajdują się w odległości 3,1 cm. Wyznacz skalę mapy.

Odległość między miastami wyrażamy w centymetrach:

93 km = 93 000 m = 9 300 000 cm

Obliczamy, ile razy odległość na mapie jest mniejsza niż odległość w rzeczywistości:

9 300 000 cm : 3,1 cm = 93 000 000 : 31 = 3 000 000

Odpowiedź: Mapę sporządzono w skali 1 : 3 000 000

Przykład 2

Na planie miasta odległość między domami Ani i Marysi wynosi 3 cm 4 mm. W rzeczywistości dziewczynki mieszkają w odległości 6,8 km. Wyznacz skalę planu miasta.

Odległość między domami dziewczynek wyrażamy w milimetrach:

6,8 km = 6 800 m = 680 000 cm = 6 800 000 mm

Odległość na planie wyrażamy w milimetrach:

3 cm 4 mm = 34 mm

Obliczamy, ile razy odległość na planie jest mniejsza niż odległość w rzeczywistości:

6 800 000 mm : 34 mm = 200 000

Odpowiedź: Plan miasta wykonano w skali 1 : 200 000.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

4. ODCZYTYWANIA INFORMACJI Z TABEL I DIAGRAMÓW

W prasie, telewizji, Internecie, podręcznikach, opracowaniach naukowych informacje przekazywane są m.in. w postaci tabel, diagramów, rysunków. Bardzo często są to liczby (dane) opisujące różne wielkości, np.: liczba ludności miast, długość rzek, powierzchnia województw, wielkość produkcji, kursy walut, ceny towarów, temperatura powietrza w różnych miejscach Polski, wyniki rozgrywek piłkarskich, osiągnięcia sportowców itp. Informacje przedstawione w postaci graficznej są czytelniejsze i łatwiejsze do zapamiętania. Zatem umiejętność odczytywania tych informacji jest bardzo potrzebna w codziennym życiu - zdobędziesz ją podczas najbliższych dwóch lekcji.

Poniżej tabela przedstawia rekordy świata w olimpijskich dyscyplinach lekkoatletycznych. (źródło: http://pl.wikipedia.org/wiki/Rekordy_%C5%9Bwiata_w_lekkoatletyce)

Konkurencja	Kobiety			Mężczyźni		
	Rezultat	Zawodniczka	Data	Rezultat	Zawodnik	Data
Bieg na 100 metrów	10,49	Florence Griffith-Joyner	16 VII 1988	9,58	Usain Bolt	16 VIII 2009
Bieg na 200 metrów	21,34	Florence Griffith-Joyner	29 IX 1988	19,19	Usain Bolt	20 VIII 2009
Bieg na 400 metrów	47,60	Marita Koch	6 X 1985	43,18	Michael Johnson	26 VIII 1999
Bieg na 800 metrów	1:53,28	Jarmila Kratochvílová	26 VII 1983	1:40,91	David Rudisha	9 VIII 2012
Bieg na 1500 metrów	3:50,46	Qu Yunxia	11 IX 1993	3:26,00	Hicham El Guerrouj	14 VII 1998
Bieg na 5000 metrów	14:11,15	Tirunesh Dibaba	6 VI 2008	12:37,35	Kenenisa Bekele	31 V 2004
Bieg na 10 000 metrów	29:31,78	Wang Junxia	8 IX 1993	26:17,53	Kenenisa Bekele	26 VIII 2005
Maraton	2:15:25	Paula Radcliffe	13 IV 2003	2:02:57	Dennis Kimetto	28 IX 2014
Bieg na 110 metrów przez płotki	12,21	Jordanka Donkowa	20 VIII 1988	12,80	Aries Merritt	7 IX 2012
Bieg na 400 metrów przez płotki	52,34	Julija Pieczonkina	8 VIII 2003	46,78	Kevin Young	6 VIII 1992
Bieg na 3000 metrów z przeszkodami	8:58,81	Gulnara Samitowa-Gałkina	17 VIII 2008	7:53,63	Saif Saaeed Shaheen	3 IX 2004
Sztafeta 4 × 100 metrów	40,82	Stany Zjednoczone Tianna Madison Allyson Felix Bianca Knight Carmelita Jeter	10 VIII 2012	36,84	Jamajka Nesta Carter Michael Frater Yohan Blake Usain Bolt	11 VIII 2012
Sztafeta 4 × 400 metrów	3:15,17	ZSRR Tatjana Ledowska Olga Nazarowa Marija Pinigina Olha Bryzhina	1 X 1988	2:54,29	Stany Zjednoczone Andrew Valmon Quincy Watts Butch Reynolds Michael Johnson	22 VIII 1993
Chód na 20 kilometrów	1:25:02	Jelena Łaszmanowa	11 VIII 2012	1:17:16	Władimir Kanajkin	9 IX 2007
Chód na 50 kilometrów				3:32:33	Yohann Diniz	15 VIII 2014
Skok wzwyż	2,09	Stefka Kostadinowa	30 VIII 1987	2,45	Javier Sotomayor	27 VII 1993
Skok o tyczce	5,06	Jelena Isinbajewa	28 VIII 2009	6,14	Serhij Bubka	31 VII 1994
Skok w dal	7,52	Galina Czistiakowa	11 VI 1988	8,95	Mike Powell	30 VIII 1991
Trójskok	15,50	Inesa Krawec	10 VIII 1995	18,29	Jonathan Edwards	7 VIII 1995
Pchnięcie kulą	22,63	Natalja Lisowska	7 VI 1987	23,12	Randy Barnes	20 V 1990
Rzut dyskiem	76,80	Gabriele Reinsch	9 VII 1988	74,08	Jürgen Schult	6 VI 1986
Rzut młotem	79,58	Anita Włodarczyk	31 VIII 2014	86,74	Jurij Siedych	30 VIII 1986
Rzut oszczepem	72,28	Barbora Špotáková	13 IX 2008	98,48	Jan Železný	25 V 1996
Siedmiobój	7291 pkt.	Jackie Joyner-Kersee	24 IX 1988			
Dziesięciobój				9039 pkt.	Ashton Eaton	23 VI 2012

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 1

Na podstawie tabeli odpowiedz na pytania:

a. Jaki jest aktualny rekord świata w biegu na 200 m kobiet? Kto i kiedy go ustanowił?
b. Podaj datę ustanowienia najstarszego rekordu?
c. Ile rekordów świata zostało ustanowionych w XXI wieku?
d. Ile obecnych rekordów ustanowili Polacy? Kto i w jakiej dyscyplinie go ustanowił?
e. Podczas Mistrzostwa Świata w Göteborgu w 1995 roku ustanowiono rekordy świata w trójskoku wśród kobiet i mężczyzn. O ile różnią się te dwa wyniki?
f. Niektóre pola tabeli są puste. Jak myślisz, dlaczego?

Zapewne nieraz widziałeś rozkład jazdy autobusów, pociągów czy metra. Informacje o odjazdach umieszczono w tabeli. Aby dobrze odczytać informacje, należy dokładnie przeczytać, co oznaczają użyte symbole.

BUS **870** Przystanek: **Gdańsk, Dworzec Autobusowy** Zobacz przystanek na mapie
Kierunek: Sztutowo

Od poniedziałku do piątku - poza okresem wakacji letnich						
05:45DS	06:45	07:15	08:15K#	08:15&	10:15K#	10:15&
12:15	13:15	14:15	14:45S	15:15K	15:45	16:30
17:15K#	17:15&	18:15	19:45	21:15		
Od poniedziałku do piątku - w okresie wakacji letnich						
06:45	07:15P	08:15K	09:15P	10:15K	11:15K	12:15K
13:15K	14:15P	15:15K	15:45	16:15P	17:15K	18:15
19:15K	20:15	21:15K				
Soboty - poza okresem wakacji letnich						
08:15&	08:15K#	10:15	12:15K#	12:15&	14:15	16:15K#
16:15&	18:15	20:15				
Soboty - w okresie wakacji letnich						
07:15P	08:15K	09:15P	10:15K	11:15K	12:15K	13:15K
14:15P	15:15K	16:15P	17:15K	18:15K	19:45K	21:15K
Niedziele i święta - poza okresem wakacji letnich						
08:15K#	08:15&	12:15K#	12:15&	16:15K#	16:15&	20:15
Niedziele i święta - w okresie wakacji letnich						
07:15P	08:15K	09:15P	10:15K	11:15K	12:15K	13:15K
14:15P	15:15K	16:15P	17:15K	18:15K	19:45K	21:15K

Linia nie kursuje 25 XII (Boże Narodzenie), 1 I (Nowy Rok) oraz w Niedzielę Wielkanocną

Objaśnienia:
\# – kursuje tylko w czerwcu i we wrześniu
S – kursuje tylko w dni nauki szkolnej
& – nie kursuje w czerwcu i we wrześniu
D – kurs do: Drewnica
K – kurs do: Krynica Morska
P – kurs do: Krynica Morska, Piaski

PKS Gdańsk Rozkład jazdy ważny od: **30.06.2013**

Rozkład pochodzi ze strony: http://gryf.trasownik.net/rozklad-870_20130630-1-1-0.html

Ćwiczenie 2

Na podstawie powyższego rozkładu odpowiedz na pytania:

a. O której odjeżdża ostatni autobus do Krynicy Morskiej w piątek, w okresie ferii zimowych?
b. Ile autobusów odjeżdża do Piasków w okresie wakacji letnich? O której odjeżdżają?
c. Co oznacza zapis $81^{5}_{K\,\#}\,{}^{15}_{\&}$?
d. O której odjeżdżają autobusy do Krynicy Morskiej w sobotę, w październiku?

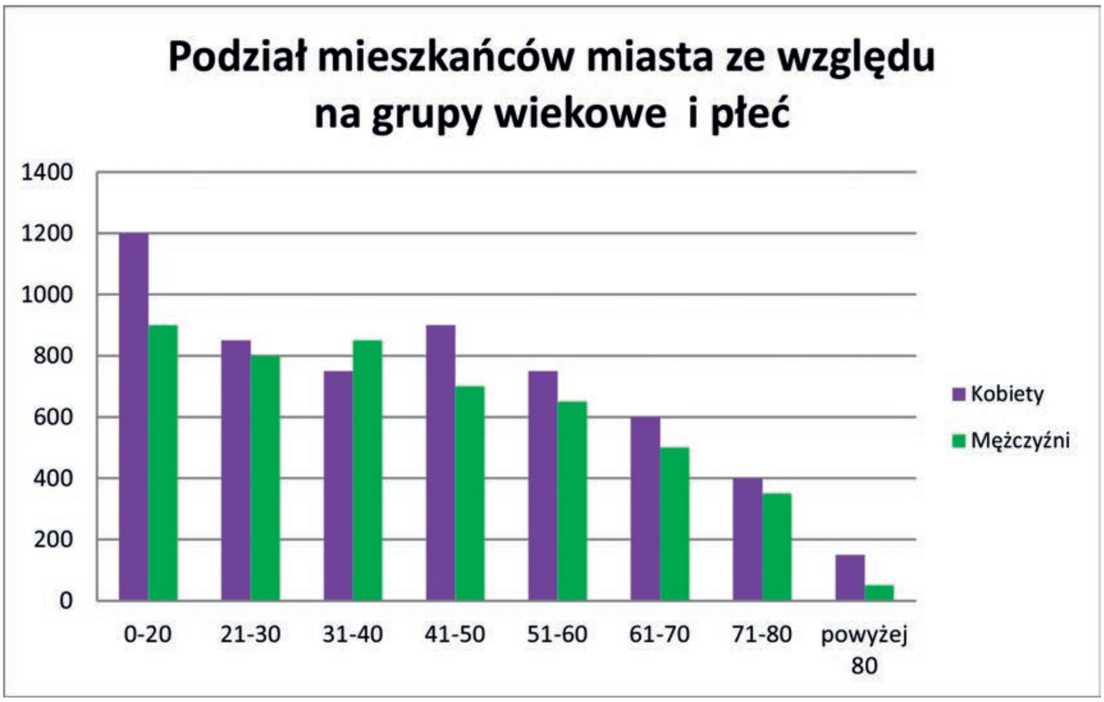
Ćwiczenie 3

Spróbuj ułożyć inne pytania dotyczące rozkładu jazdy linii 870.

Zadanie 1

Agnieszka przyjechała do Gdańska o godzinie 12:55 w poniedziałek 26 lutego. Ile czasu musi poczekać na najbliższy autobus do Krynicy Morskiej?

Gdy chcemy porównywać dane, wygodniej jest przedstawić je w postaci diagramu.



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Z diagramu możemy odczytać, że 600 mężczyzn jest w wieku 61-70 lat. Można również zauważyć, że jest tyle samo kobiet w wieku 31-40 lat, co kobiet w wieku 51-60 lat.

Ćwiczenie 4

Na podstawie powyższego diagramu odpowiedz na pytania:

a. Ilu mężczyzn w wieku do 20 lat żyje w tej miejscowości?
b. Która grupa osób jest najliczniejsza, a która najmniej liczna?
c. Kogo jest więcej: kobiet w wieku 61-70 lat czy mężczyzn w wieku 51-60?
d. W jakich przedziałach wiekowych jest więcej mężczyzn niż kobiet?
e. O ile więcej jest kobiet niż mężczyzn w wieku 21-30 lat?
f. Ile razy więcej jest mężczyzn w wieku 61-70 lat niż mężczyzn w wieku powyżej 80 lat?
g. Jaki ułamek ludzi w wieku powyżej 80 lat stanowią mężczyźni w tym wieku?

Spróbuj ułożyć podobne pytania i odpowiedz na nie.

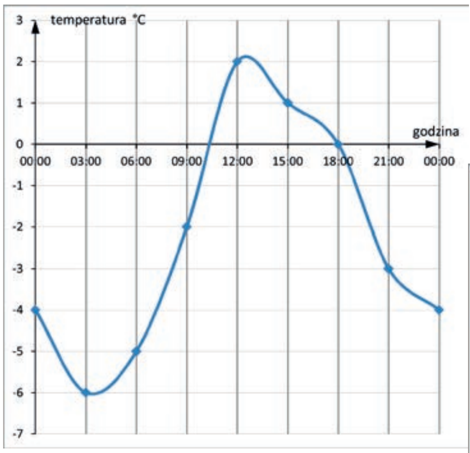
Statystyka to dziedzina matematyki zajmująca się zbieraniem danych, ich porządkowaniem i opisywaniem. Zebrane dane statystycy analizują i na ich podstawie wyciągają wnioski. Nie zawsze zebranie wszystkich danych jest możliwe, np. nie jesteśmy w stanie spytać wszystkich Polaków, gdzie spędzili ostatnie wakacje. W takich sytuacjach wybiera się reprezentatywną grupę Polaków i na podstawie ich odpowiedzi wyciąga się wnioski o całej populacji Polaków.

Obecnie zbieranie informacji jest bardzo powszechne we wszystkich dziedzinach życia - badanie rynku (analiza poglądów, upodobań, potrzeb, preferencji konsumentów) ma istotny wpływ na podejmowane decyzje dotyczące rozwoju firm, kierunku produkcji itp.

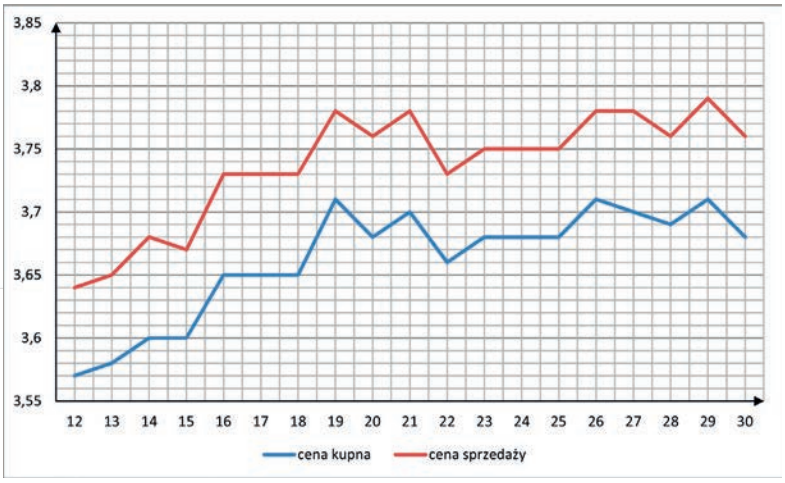
W Polsce gromadzeniem i porządkowaniem informacji zajmują się m.in.:
- GUS - Główny Urząd Statystyczny - zbiera dane dotyczące gospodarki, społeczeństwa, kultury. Zebrane dane są corocznie publikowane w roczniku statystycznym.
- OBOP - Ośrodek Badań Opinii Publicznej - zajmuje się badaniem tego, co ludzie myślą o sprawach społecznych.
- CBOS - Centrum Badania Opinii Społecznej - prowadzi badania sondażowe, dotyczące opinii na temat wszystkich ważnych problemów społeczno-politycznych i gospodarczych.

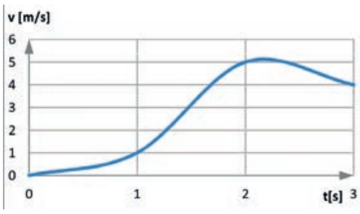
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

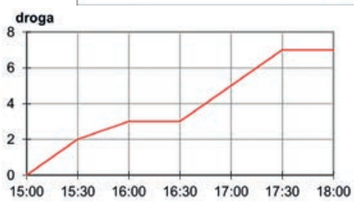
5. ODCZYTYWANIE INFORMACJI PRZEDSTAWIONYCH NA WYKRESACH

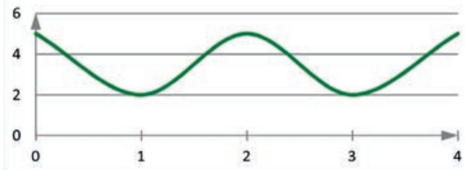


Wykres do Ćwiczenia1









Dane mogą być prezentowane na wiele sposobów - w tabeli, w postaci diagramu słupkowego. Dziś nauczymy się czytać informacje przedstawione na wykresie. Powyższe ilustracje przedstawiają właśnie wykresy. Rysujemy je w układzie współrzędnych. W jednym układzie współrzędnych możemy zaznaczyć jeden lub kilka wykresów.

Ćwiczenie 1

Wykres (patrz powyżej „Wykres do Ćwiczenia1") pokazuje, jak pewnego zimowego dnia zmieniała się temperatura powietrza w Warszawie. Na poziomej osi zaznaczono godziny w ciągu doby, a na pionowej temperaturę mierzoną w stopniach Celsjusza. Z wykresu można odczytać, że o godzinie 9:00 było -2°C, a o godzinie 18:00 - 0°C.

Odczytaj z wykresu:

a. Jaka była temperatura o godzinie 21:00?

b. Jaka była najniższa, a jaka najwyższa temperatura w ciągu doby?

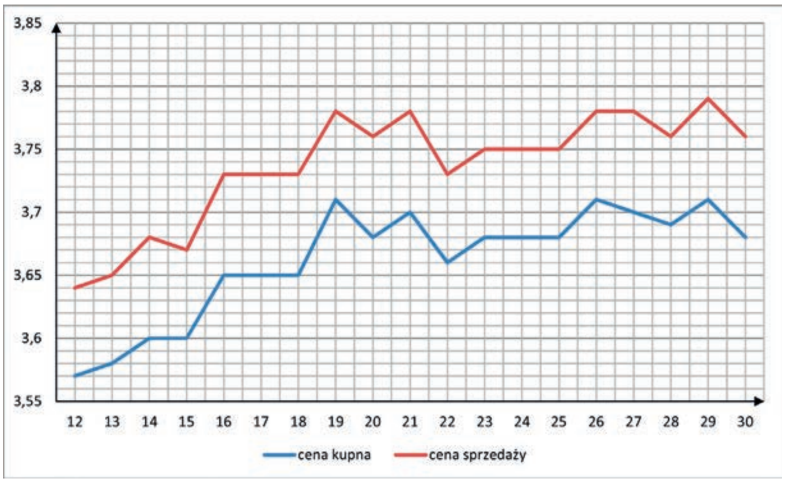
c. O której godzinie temperatura powietrza wynosiła 2°C?

d. W jakich godzinach temperatura rosła, a w jakich malała?

e. O ile stopni temperatura wzrosła pomiędzy godziną 6:00 a 12:00?

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przyjrzyjmy się drugiej ilustracji. W jednym układzie współrzędnych zaznaczono dwa wykresy - niebieski pokazuje poziom cen kupna, a czerwony poziom cen sprzedaży 1 USD (dolar amerykański) w dniach 12 - 30 stycznia 2015 r. w NBP (dane pochodzą ze strony http://www.nbp.pl/home.aspx?f=/statystyka/kursy.html).



Ćwiczenie 2

Odczytaj z wykresu:

a. Jaka była cena sprzedaży 1 USD w dniu 20 stycznia 2015 r.?
b. Za ile złotych NBP kupował 1 USD 15 stycznia 205 r. ?
c. W jakich kolejnych dniach zanotowano wzrost ceny zakupu waluty amerykańskiej?
d. Od którego dnia cena sprzedaży była wyższa niż 3,70 zł?
e. W których dniach stycznia był weekend?

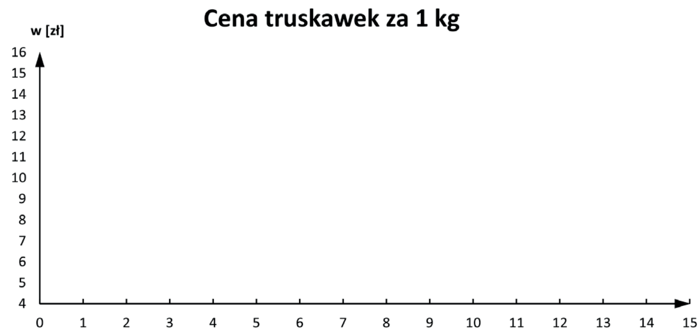
Dzięki temu, że dwa wykresy narysowano w jednym układzie współrzędnych, można łatwo odczytać i porównać obie ceny każdego dnia.

5.1. Rysowanie wykresów

Nauczymy się rysować wykres, który pokazuje, jak zmieniała się cena 1 kilograma truskawek. Przez kilka dni notowano, ile kosztował kilogram truskawek. Dane zapisano w tabeli:

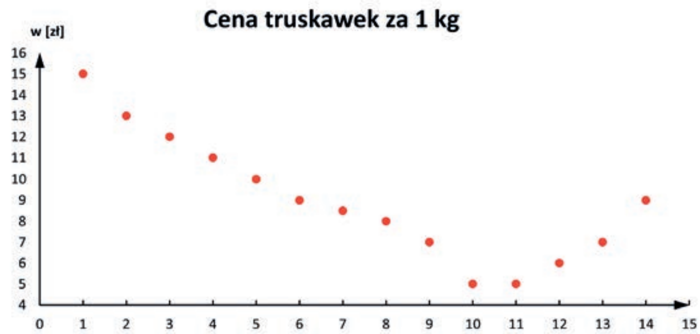
dzień	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
cena w zł	15	13	12	11	10	9	8,50	8	7	5	5	6	7	9

Na początku rysujemy dwie prostopadłe osie zakończone grotem. Na osiach zaznaczamy jednostkę. Na poziomej osi zaznaczymy liczby z pierwszego wiersza tabeli, na pionowej osi kolejne liczby naturalne 4, 5, 6 itd odpowiadające cenie truskawek.



Następnie zaznaczamy punkty:

- nad 1 (oznaczającą pierwszy dzień zbierania informacji) punkt odpowiadający cenie 15 zł,
- nad 2 punkt odpowiadający cenie 13 zł, nad 7 punkt odpowiadający cenie 8,50 zł (po środku pomiędzy 8 zł a 9 zł) itd.



Następnie zaznaczone punkty łączymy łamaną:

Wygodnie jest odczytywać informacje z wykresu narysowanego na kartce w kratkę. Wówczas linie kratek powinny przecinać osie na poziomie zaznaczonych liczb.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

1. DROGA

W każdym samochodzie znajduje się prędkościomierz. Wskazuje on, z jaką prędkością porusza się w danej chwili pojazd. Prędkościomierz przedstawiony poniżej pokazuje prędkość 100 km/h. Oznacza to, że gdyby samochód cały czas poruszał się z tą samą prędkością, to w ciągu godziny pokonałby dystans długości 100 km.

Prędkościomierz wskazuje odległość, jaką pokonał poruszający się obiekt w jednostce czasu. Prędkość może być wyrażana w różnych jednostkach, np.:

- Samochód jedzie z prędkością 60 km/h - samochód w ciągu godziny pokonuje drogę długości 60 kilometrów.
- Sprinter biegnie z prędkością 10 m/s - sprinter w ciągu sekundy przebiegł 10 metrów.
- Statek kosmiczny leci z prędkością 7 km/s - w ciągu sekundy statek kosmiczny pokonuje odległość 7 kilometrów.

Przykład 1

Rowerzysta jedzie ze stałą prędkością 30 km/h. Jaką drogę pokona w ciągu: 1 h, 2 h, 3 h, 6 h?

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 1

Samochód jedzie ze stałą prędkością 80 km/h. Jaką drogę pokona w ciągu 6 godzin?

Ćwiczenie 2

Samolot z Warszawy do Londynu leciał 2 godziny, ze średnią prędkością 700 km/h. Jaka jest odległość pomiędzy Warszawą a Londynem?

Przykład 2

Rowerzysta jedzie ze stałą prędkością 30 km/h. Jaką drogę pokona w ciągu: 30 minut, 10 minut, 6 minut, 1 minuty?

$30\,\frac{km}{h}$

Czas przejazdu	Pokonana droga
1 godzina	30 km
30 minut	30 minut to $\frac{1}{2}$ godziny $\frac{1}{2} \cdot 30$ km $= 15$ km (w dwa razy krótszym czasie rowerzysta pokona dwa razy krótszy dystans)
10 minut	10 minut to $\frac{1}{6}$ godziny $\frac{1}{6} \cdot 30$ km $= 5$ km (w sześć razy krótszym czasie rowerzysta pokona sześć razy krótszy dystans)
6 minut	6 minut to $\frac{1}{10}$ godziny $\frac{1}{10} \cdot 30$ km $= 3$ km (w dziesięć razy krótszym czasie rowerzysta pokona dziesięć razy krótszy dystans)
1 minuta	1 minuta to $\frac{1}{60}$ godziny $\frac{1}{60} \cdot 30$ km $= 0{,}5$ km $= 500$ m (w sześćdziesiąt razy krótszym czasie rowerzysta pokona sześćdziesiąt razy krótszy dystans)

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 3

Samochód osobowy przez półtorej godziny poruszał się ze stałą prędkością 90 km/h. Jaką odległość pokonał?

Aby wyznaczyć długość drogi, należy prędkość poruszającego się obiektu pomnożyć przez czas pokonywania drogi.

droga = prędkość · czas

2. PRĘDKOŚĆ

Ćwiczenie 1

Pan Stanisław w ciągu 3 godzin przejechał trasę Warszawa - Poznań, długości 270 kilometrów. Ile średnio kilometrów pokonał w ciągu godziny?

270 km : 3 = 90 km

Odpowiedź: Pan Stanisław średnio w ciągu godziny przejechał 90 kilometrów.

Jeśli pan Stanisław średnio w ciągu godziny przejechał 90 kilometrów, to znaczy, że jechał ze średnią prędkością 90 km/h.

Aby wyznaczyć prędkość poruszającego się obiektu, należy długość trasy pokonanej przez obiekt podzielić przez czas, w jakim ta trasa została pokonana.

$$\text{prędkość} = \frac{\text{droga}}{\text{czas}}$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

2.1. Zamiana jednostek prędkości

Tę samą prędkość możemy wyrazić w różnych jednostkach.

Przykład 1

Karol przejechał na rowerze 36 kilometrów w ciągu 2 godzin. Z jaką średnią prędkością poruszał się Karol?

I sposób:

36 km : 2 h = 18 km/h

Karol w ciągu jednej godziny przejechał 18 kilometrów, czyli poruszał się ze średnią prędkością 18 km/h.

II sposób:

36 km = 36 000 m - droga pokonana przez Karola wyrażona w metrach

2 h = 120 min - czas pokonania drogi wyrażony w minutach

W ciągu 120 minut Karol przejechał 36 000 metrów. Ile metrów przejechał w ciągu jednej minuty?

36 000 m : 120 = 300 m

Karol średnio pokonał 300 metrów w ciągu minuty, czyli poruszał się z prędkością 300 m/min.

III sposób:

36 km = 36 000 m - droga pokonana przez Karola wyrażona w metrach

2 h = 120 min = 7200 s - czas pokonania drogi wyrażony w sekundach

W ciągu 7200 sekund Karol przejechał 36 000 metrów. Ile metrów przejechał w ciągu jednej sekundy?

36 000 m : 7200 = 5 m

Karol średnio pokonał 5 metrów w ciągu sekundy, czyli poruszał się z prędkością 5 m/s.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 1

Samochód ciężarowy poruszał się z prędkością 72 km/h, a osobowy z prędkością 15 m/s. Który z samochodów poruszał się szybciej?
Aby porównać prędkości, musimy je wyrazić w tej samej jednostce.

I sposób:
Prędkość 72 km/h wyrazimy w metrach na sekundę.
72 km - 1 godzina
72 000 m - 1 godzina
72 000 m - 60 minut
72 000 : 60 = 1200
W ciągu 1 minuty samochód ciężarowy pokonuje 1200 metrów.
1200 m - 1 minuta
1200 m - 60 sekund
1200 : 60 = 20
W ciągu 1 sekundy samochód ciężarowy pokonuje 20 metrów.
72 km/h = 20 m/s
Odpowiedź: Szybciej porusza się samochód ciężarowy.

II sposób:
Prędkość 15 m/s wyrazimy w kilometrach na godzinę.
15 m - 1 sekunda
900 m - 60 sekund (15 · 60 = 900)
900 m - 1 minuta
54 000 m - 60 minut (900 · 60= 54 000)
54 km - 1 godzina
15 m/s = 54 km/h

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

3. CZAS

Znając prędkość poruszania się i długość przebytej drogi, można wyznaczyć czas, jaki był potrzebny do pokonania tej drogi.

Przykład 1

W jakim czasie turysta poruszający się z prędkością 5 km/h pokona trasę długości 40 kilometrów?

I sposób:

droga czas

5 km - 1 h

↓· 8 ↓· 8

40 km - 8 h

II sposób:

40 km : 5 km = 8

8 razy dłuższa trasa będzie pokonana w 8 razy dłuższym czasie

8 · 1 h = 8 h

Przykład 2

W jakim czasie samochód wyścigowy jadący z prędkością 240 km/h pokonał trasę długości 40 kilometrów?

I sposób:

droga czas

240 km - 1 h

↓: 2 ↓: 2

120 km - 30 min

↓: 3 ↓: 3

40 km - 10 min

II sposób:

240 km : 40 km = 6

6 razy krótsza trasa będzie pokonana w 6 razy krótszym czasie

1 h = 60 min

60 min : 6 = 10 min

Przykład 3

W jakim czasie samochód osobowy jadący z prędkością 100 km/h pokonał trasę długości 40 kilometrów?

I sposób:

droga czas

100 km - 1 h

↓: 10 ↓ : 10

10 km - 6 min

↓· 4 ↓· 4

40 km - 24 min

II sposób:

40 km to = $\frac{40}{100} = \frac{2}{5}$ trasy 100 km

Do pokonania drogi 40 km potrzeba $\frac{2}{5}$ czasu potrzebnego do pokonania drogi 100 km.

$\frac{2}{5} \cdot 60$ min = 24 min

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

NOTATKI

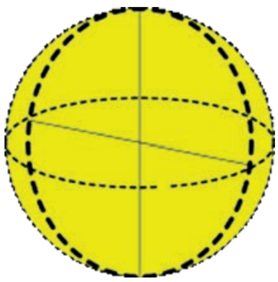
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

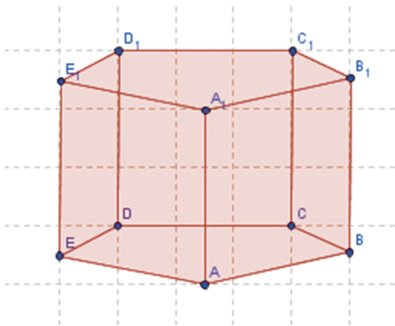
1. ROZPOZNAWANIE BRYŁ

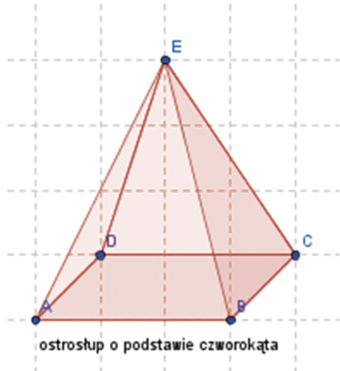
Figury, które omawialiśmy do tej pory, były figurami płaskimi. Teraz zajmiemy się figurami przestrzennymi - bryłami.

W IV klasie poznaliście prostopadłościan i sześcian. Należą one do brył zwanych graniastosłupami prostymi.

Oprócz graniastosłupów poznamy i nauczymy się rozpoznawać figury obrotowe oraz ostrosłupy.

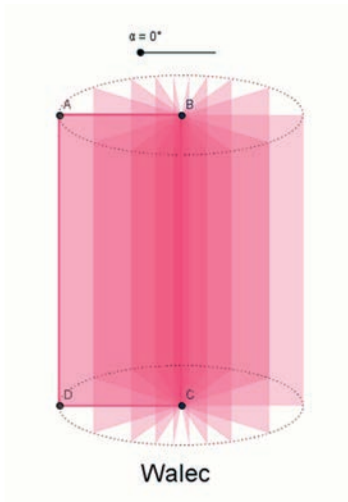






1.1. Bryły obrotowe

Walec - bryła obrotowa uzyskana przez obrót prostokąta wokół prostej, zawierającej bok.



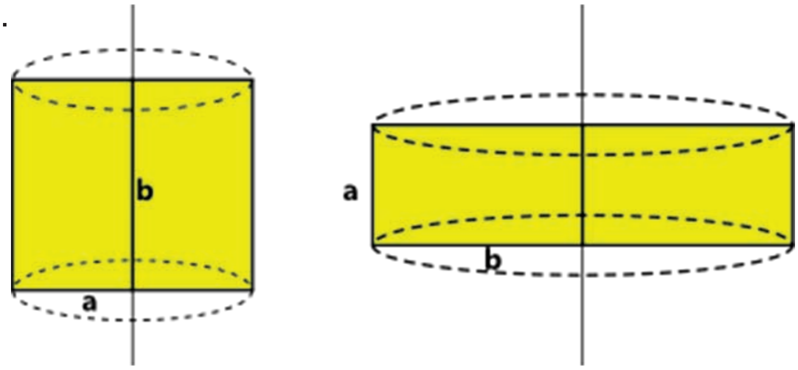
Obejrzyj animację na platformie MATI.

W powyższym przypadku prostokąt ABCD został obrócony wokół boku **BC**.

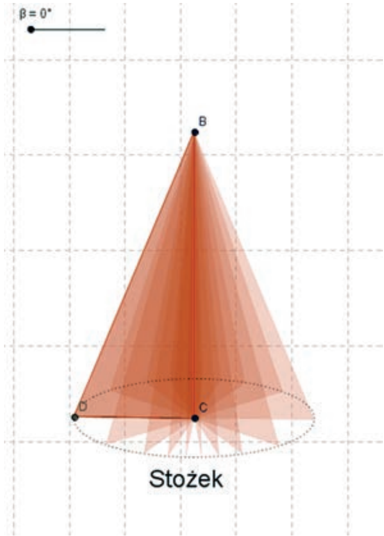
Czy potrafisz wskazać przykład przedmiotu lub opakowania w kształcie walca? Zastanów się i podaj co najmniej trzy przykłady. Oto jeden z nich:

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zwróć uwagę, że w zależności od tego, jak „postawimy” prostokąt, można otrzymać dwa różne walce.

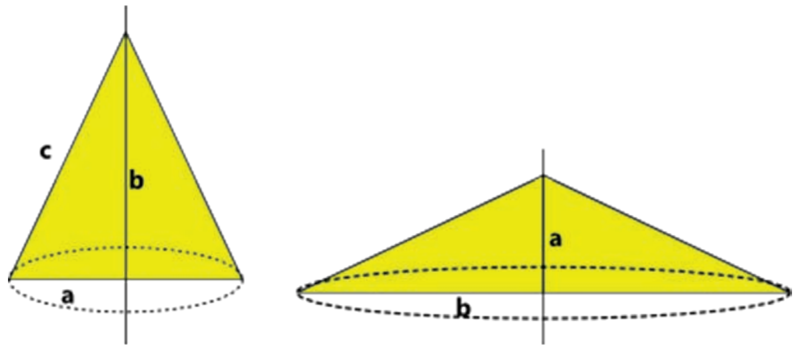


Stożek - to bryła powstała poprzez obrót trójkąta prostokątnego wokół prostej zawierającej jedną z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego.



Obejrzyj animację na platformie MATI.

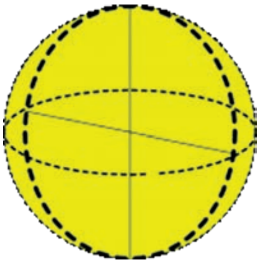
Zauważ, że z jednego trójkąta prostokątnego można otrzymać dwa różne stożki.



Czy potrafisz wskazać przykład przedmiotu lub opakowania w kształcie stożka? Zastanów się i podaj co najmniej trzy przykłady. Oto jeden z nich:

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

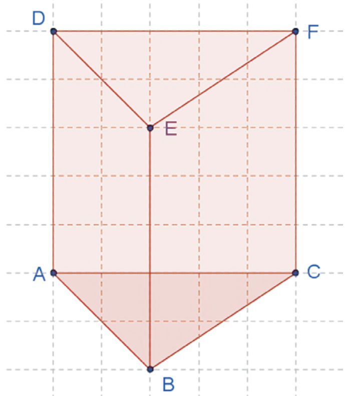
Kula - to bryła powstała poprzez obrót koła wokół prostej przechodzącej przez jego środek.



Z jednego koła zawsze otrzymamy jedną kulę. Czy potrafisz wskazać przykłady kuli? Podaj co najmniej trzy. Oto jeden z nich:

1.2. Graniastosłupy

Wśród brył przestrzennych wyróżniamy **graniastosłupy**. Na poniższym rysunku przedstawiono przykładowy model graniastosłupa o podstawie trójkątnej.



Gdy dokładniej przyjrzymy się tej bryle, zauważymy kilka ważnych własności, jakie posiadają wszystkie graniastosłupy.

Podstawy graniastosłupa leżą na równoległych płaszczyznach i są przystającymi do siebie wielokątami. Ściany boczne natomiast są równoległobokami.

W naszym przypadku podstawami są trójkąty **ABC** oraz **DEF**, natomiast ścianami bocznymi - prostokąty **ABED**, **BCFE** oraz **ACFD**.

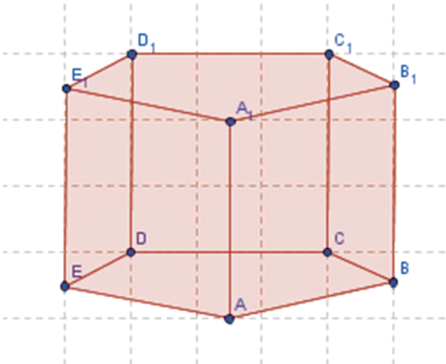
Figury nazywamy **przystającymi**, jeśli jedną z nich możemy dokładnie nałożyć na drugą tak, aby idealnie do siebie pasowały.

Graniastosłup prosty to taka figura przestrzenna, której podstawy są przystającymi wielokątami leżącymi na płaszczyznach równoległych, a ściany boczne są prostokątami prostopadłymi do podstaw.

Jeśli ściany boczne graniastosłupa są prostokątami prostopadłymi do podstaw, to taki graniastosłup nazywamy prostym.

Graniastosłupy proste, które mają w podstawie wielokąt o równych bokach i równych kątach (czyli wielokąt foremny), nazywamy **graniastosłupami prawidłowymi**.

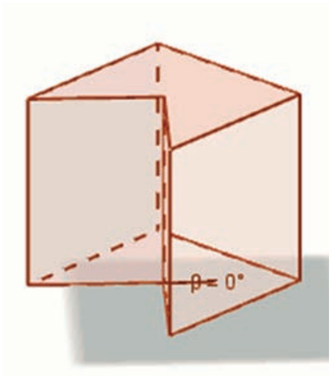
Czy potrafisz wyobrazić sobie graniastosłup prawidłowy o podstawie kwadratowej? Czy pamiętasz nazwę tego graniastosłupa? Dla ułatwienia prezentujemy **graniastosłup prawidłowy pięciokątny**.



Obejrzyj animację na platformie MATI.

Jakie przykłady graniastosłupów możesz przytoczyć z otaczającego nas świata? Podaj co najmniej trzy. Oto kilka z nich:

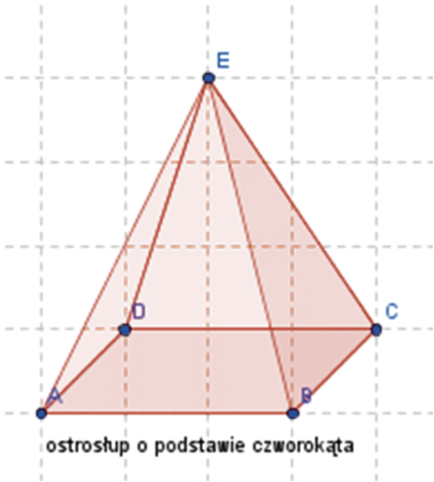
Pudełko zapałek to graniastosłup prosty czworokątny, inaczej nazywany prostopadłościanem. Tak samo jak wieżowiec ze zdjęcia. Podstawą graniastosłupa może być oczywiście dowolny wielokąt. Oto przykład graniastosłupa prostego wklęsłego:



Obejrzyj animację na platformie MATI.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

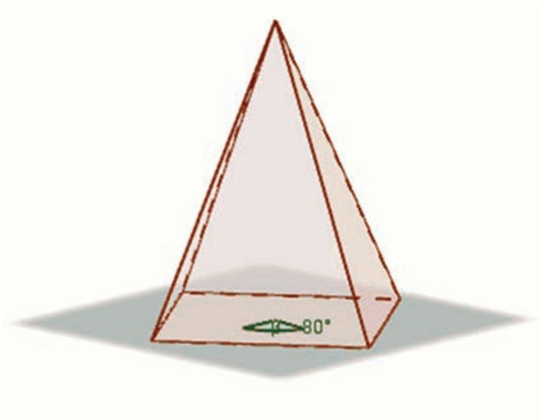
1.3. Ostrosłupy



Innym rodzajem brył przestrzennych są **ostrosłupy**.

Ostrosłup - bryła przestrzenna, w której jedna ściana, zwana podstawą ostrosłupa, jest dowolnym wielokątem, a wszystkie pozostałe, zwane ścianami bocznymi, są trójkątami mającymi wspólny wierzchołek oraz po jednym boku wspólnym z podstawą.

Ostrosłupy, które mają w podstawie wielokąt foremny, a ściany boczne są przystającymi trójkątami równoramiennymi, nazywamy **ostrosłupami prawidłowymi**. **Ostrosłup prawidłowy czworokątny** (w podstawie ma kwadrat) jest czasem nazywany piramidą, ponieważ taki właśnie kształt mają piramidy w Egipcie. Przykład ostrosłupa prawidłowego czworokątnego:



Obejrzyj animację na platformie MATI.

Czy potrafisz podać przykład dowolnego ostrosłupa?

2. PROSTOPADŁOŚCIANY I SZEŚCIANY

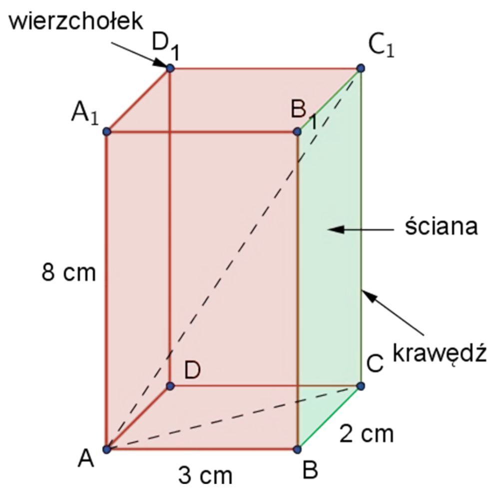
W klasie IV poznaliśmy bryły w kształcie prostopadłościanu i sześcianu. Wiemy, że otaczający nas świat składa się z przedmiotów przestrzennych. Najczęściej spotykaną figurą przestrzenną jest prostopadłościan.

Spójrzmy dookoła, prawie wszędzie prostopadłościany - książki w plecaku, budynek szkoły, do której chodzicie, wieżowce w mieście. Czy możesz wskazać inne przykłady prostopadłościanów?

Zapewne już wiesz, że prostopadłościan jest szczególnym przypadkiem graniastosłupa prostego czworokątnego. Stąd niemal natychmiast możemy wskazać kilka jego ważnych własności:

- prostopadłościan ma 6 ścian, 8 wierzchołków i 12 krawędzi,
- z każdego wierzchołka wychodzą 3 krawędzie, których długości są wymiarami prostopadłościanu,
- wszystkie ściany prostopadłościanu są prostokątami, a ściany boczne są ponadto prostopadłe do podstaw.

Jakie wymiary ma prostopadłościan przedstawiony poniżej? Czy widzisz wszystkie jego wierzchołki i krawędzie?

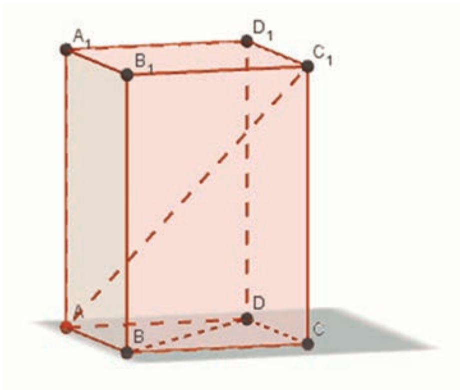


- A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1 - to wierzchołki prostopadłościanu
- AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 - to krawędzie boczne
- AB, BC, CD, AD - to krawędzie podstawy dolnej
- A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, A_1D_1 - to krawędzie podstawy górnej

Wskaż na rysunku pary ścian równoległych i prostopadłych. Do ścian zwykle odwołujemy się, podając ich wierzchołki, np. ściana ABB1A1 jest prostopadła do ściany ABCD. Ponadto na rysunku zaznaczyliśmy odcinki łączące pewne wierzchołki prostopadłościanu:

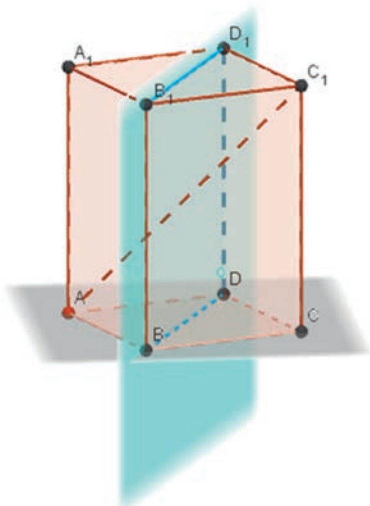
- AC_1 - przekątna prostopadłościanu
- BD - przekątna podstawy dolnej prostopadłościanu

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



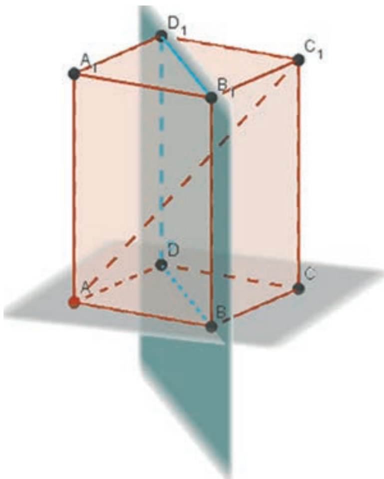
Obejrzyj animację na platformie MATI.

Kiedy spojrzymy na powyższy prostopadłościan, zobaczymy, że np. krawędzie ścian bocznych prostopadłościanu CC_1 i DD_1 są do siebie równoległe, a krawędzie AB i AA_1 są do siebie prostopadłe. W przestrzeni mogą jeszcze występować krawędzie skośne względem siebie, czyli takie, które nie wychodzą z jednego wierzchołka i nie są względem siebie równoległe.



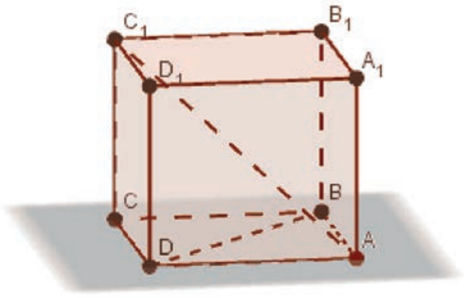
Krawędzie skośne łatwo możemy sobie wyobrazić, prowadząc przez obie krawędzie prostopadłościanu płaszczyznę (na rysunku zaznaczyliśmy ją na niebiesko). Jeśli nie da się takiej płaszczyzny przez obie krawędzie poprowadzić, to krawędzie nazwiemy skośnymi.

Na rysunku odcinki BD oraz AC_1 są skośne, a odcinki BD oraz DD_1 nie są skośne (należą do płaszczyzny).



Obejrzyj animację na platformie MATI.

Sześcian - to prostopadłościan, którego wszystkie ściany są kwadratami. Z jednego wierzchołka wychodzą 3 krawędzie równej długości.



Poniższe zdjęcie przedstawia doskonale znaną wszystkim kostkę Rubika. Ma ona kształt sześcianu. Z ilu mniejszych sześcianów składa się ta kostka?

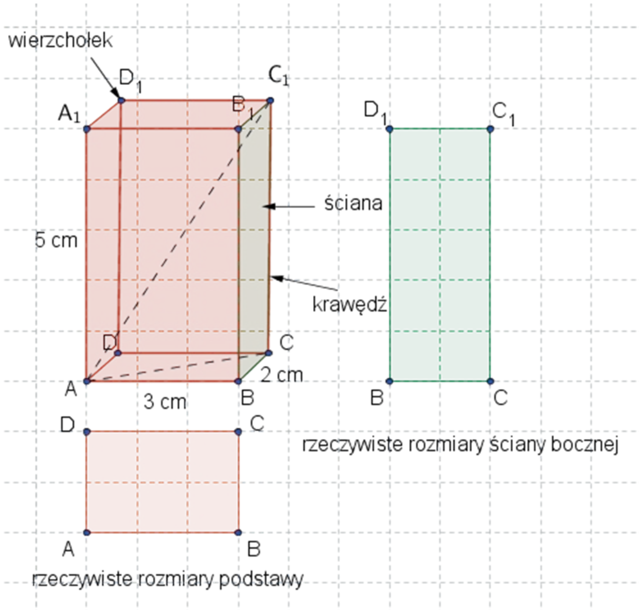
Prostopadłościan to graniastosłup prosty, którego wszystkie ściany są prostokątami.

Sześcian to prostopadłościan, którego wszystkie ściany są przystającymi kwadratami.

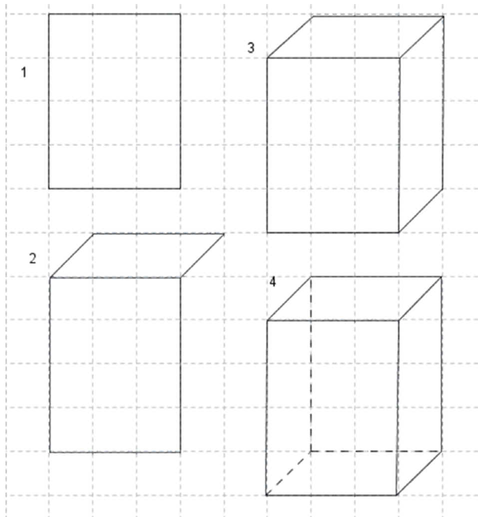
2.1. Rysowanie prostopadłościanów

Zwróćmy uwagę, że rzeczywiste rozmiary podstaw oraz ścian bocznych prostopadłościanu są większe niż to wynika z rysunku. Bierze się to stąd, że prostopadłościan jest narysowany w perspektywie, czyli tak, aby można było na płaskiej kartce papieru oddać trzeci wymiar.

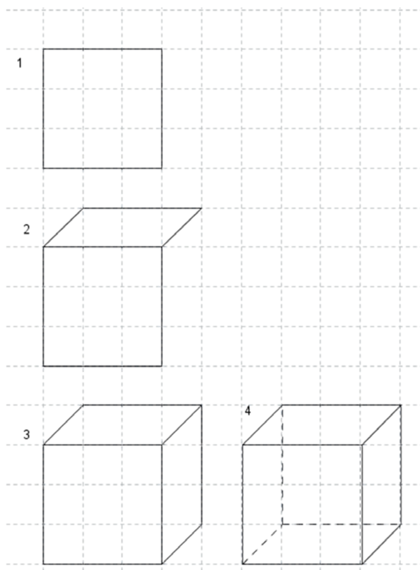
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



Rysowanie prostopadłościanu w perspektywie:



Rysowanie sześcianu:



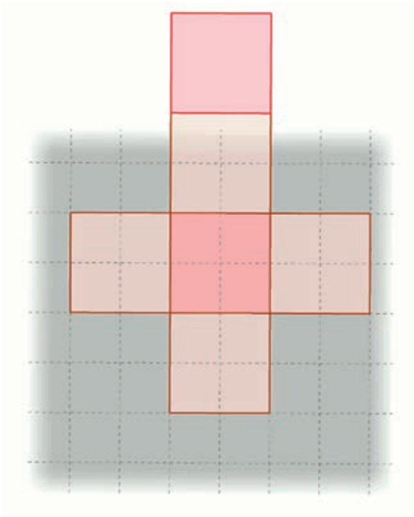
2.2. Siatki prostopadłościanów

Siatki sześcianów

Wyobraźmy sobie, że chcemy z arkusza papieru zbudować model sześcianu o danej długości krawędzi, złożony z samych ścian (pusty w środku).

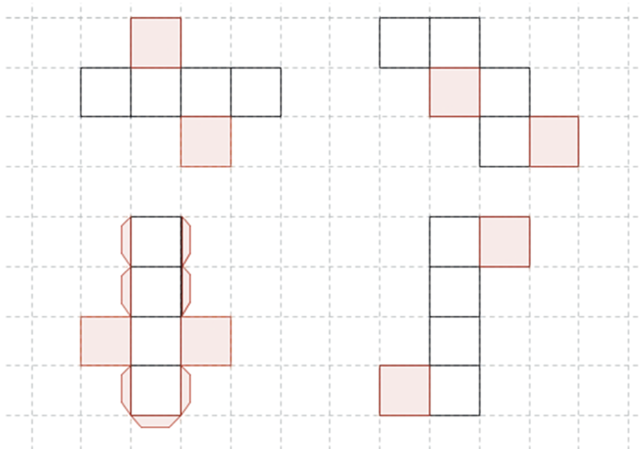
Aby wykonać to zadanie, należałoby narysować siatkę sześcianu, czyli wszystkie jego ściany w rzeczywistym rozmiarze w taki sposób, aby możliwe było, po odpowiednim wycięciu i zgięciu, późniejsze sklejenie modelu sześcianu. Przed wycięciem należałoby dorysować zakładki, które ułatwią późniejsze sklejanie modelu.

Siatkę sześcianu najlepiej wyobrazić sobie, rozkładając model sześcianu na płaszczyźnie, np. tak jak na animacji.



Obejrzyj animację na platformie MATI.

Siatkę sześcianu można narysować (rozłożyć) na 11 sposobów. Oto niektóre z nich:

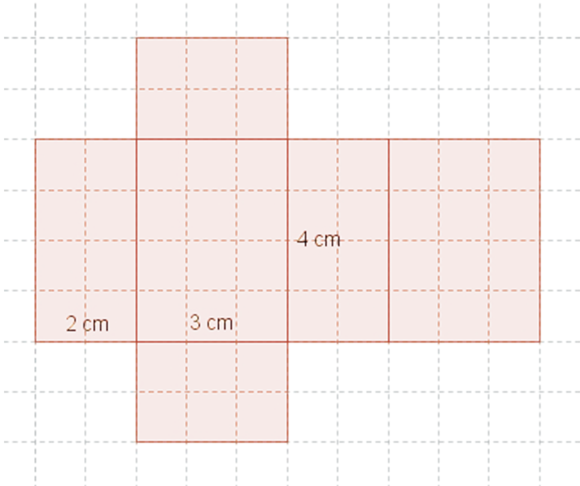


Ćwiczenie 1

Spróbuj narysować dowolną inną siatkę sześcianu w zeszycie.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Siatki prostopadłościanów - Oto przykład siatki prostopadłościanu o wymiarach 3 cm, 4 cm, 2 cm:

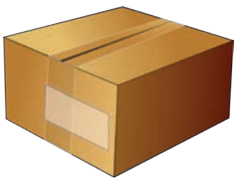


Ćwiczenie 2

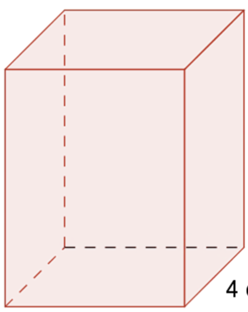
Narysuj w zeszycie model tego prostopadłościanu w perspektywie.

Siatkę prostopadłościanu otrzymujemy poprzez rozcięcie prostopadłościanu wzdłuż krawędzi, tak aby możliwe było późniejsze rozłożenie powstałych prostokątów na płaszczyźnie. Możemy tego dokonać na wiele sposobów.

2.3. Pole powierzchni prostopadłościanu

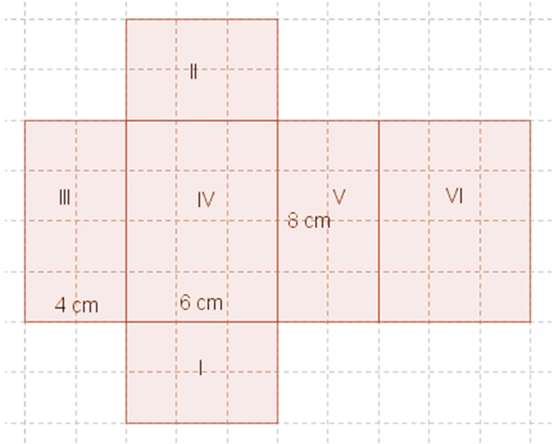


Kolejne zadanie polega na oklejeniu pudełka w kształcie prostopadłościanu o wymiarach 6 cm, 4 cm, 8 cm papierem kolorowym. Ile papieru zużyjemy? Wynik zapiszemy w dm^2.



Zadanie sprowadza się do obliczenia pola powierzchni prostopadłościanu.

Pole powierzchni prostopadłościanu (pole całkowite Pc) jest sumą pól wszystkich jego ścian. Dla ułatwienia obliczeń narysujmy jego siatkę oraz ponumerujmy wszystkie ściany.



$$P_c = P_I + P_{II} + P_{III} + P_{IV} + P_V + P_{VI}$$

Łatwo zauważyć, że:

$$P_I = P_{II}, P_{III} = P_V, P_{IV} = P_{VI}$$

Zatem:

$$P_c = 2 \cdot P_I + 2 \cdot P_{III} + 2 \cdot P_{IV}$$

Obliczamy pola prostokątów:

$$P_I = 6\ cm \cdot 4\ cm = 24\ cm^2$$
$$P_{III} = 8\ cm \cdot 4\ cm = 32\ cm^2$$
$$P_{IV} = 8\ cm \cdot 6\ cm = 48\ cm^2$$

Razem:

$$P_c = 2 \cdot 24\ cm^2 + 2 \cdot 32\ cm^2 + 2 \cdot 48\ cm^2 = 208\ cm^2 = 2,08\ dm^2$$

Pamiętamy, że

$$1\ cm = 0,1\ dm$$

zatem:

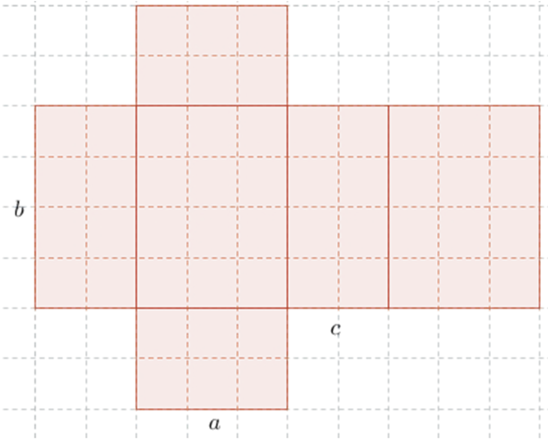
$$1\ cm^2 = (0,1dm)^2 = 0,01\ dm^2$$

Odpowiedź: Na oklejenie tego pudełka zużyjemy 2,08 dm^2 papieru.

Jeśli oznaczymy długości krawędzi prostopadłościanu przez: ***a,b,c,*** to pole powierzchni prostopadłościanu możemy wyrazić za pomocą wzoru:

$$P_c = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
WPQ
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



Natomiast w przypadku sześcianu o długości krawędzi równej ***a***,
pole powierzchni wyraża się wzorem:

$$P_c = 6 \cdot a \cdot a = 6 \cdot a^2$$

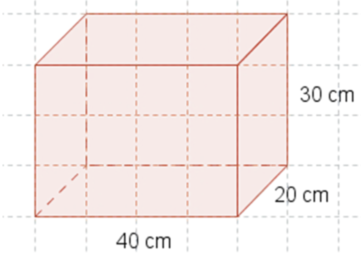
Pole powierzchni prostopadłościanu (zwane też polem powierzchni całkowitej prostopadłościanu) to suma pól wszystkich ścian prostopadłościanu. Pole powierzchni prostopadłościanu oznaczamy literą P_C.

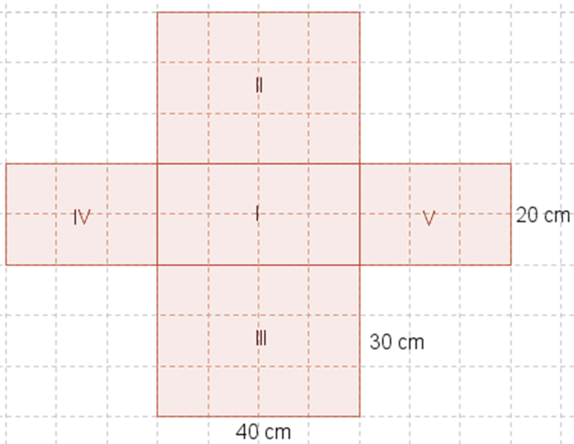
Zadanie 1

Oblicz pole powierzchni sześcianu o długości krawędzi 2 dm. Wynik podaj w cm^2.

Zadanie 2

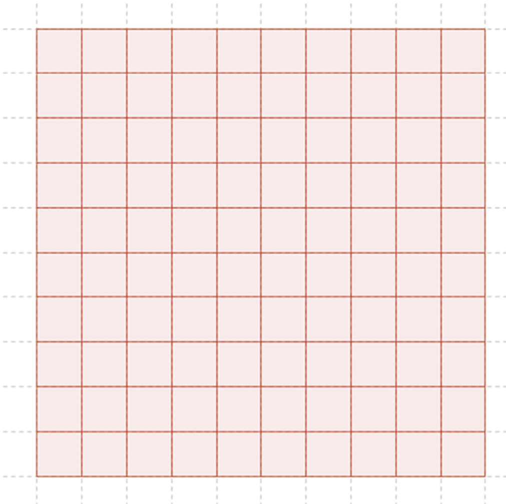
Akwarium ma 20 cm szerokości, 40 cm długości i 30 cm wysokości. Nie jest ono przykryte od góry. Ile szkła zużyto na to akwarium?





2.4. Zamiana jednostek pól powierzchni

Przypomnijmy, jak zamienić 1 cm^2 na 1 mm^2. Aby to zrobić, musimy wiedzieć, ile kwadracików o boku długości 1 mm zmieści się w kwadracie o boku 1 cm. Czy wiesz, jak to policzyć? Z rysunku łatwo odczytać, ile jest ich wszystkich:



$10 \cdot 10 = 100$
Zatem: 1 cm^2 = (10 mm)^2 = 100 mm^2

Przykład 1

Zamieniamy 125 cm^2 na mm^2

$125\ \text{cm}^2 = 125 \cdot 1\ \text{cm}^2 = 125 \cdot (10\ \text{mm})^2 = 125 \cdot 100\ \text{mm}^2 = 12500\ \text{mm}^2$

Przykład 2

Zamieniamy 120 cm^2 na m^2

$120\ \text{cm}^2 = 120 \cdot 1\ \text{cm}^2 = 120 \cdot (0{,}01\ \text{m})^2 = 120 \cdot 0{,}0001\ \text{m}^2 = 0{,}012\ \text{m}^2$

Ćwiczenie 1

a. Zamień 13 dm^2 na cm^2
b. Zamień 125 dm^2 na m^2
c. Zamień 12 km^2 na m^2

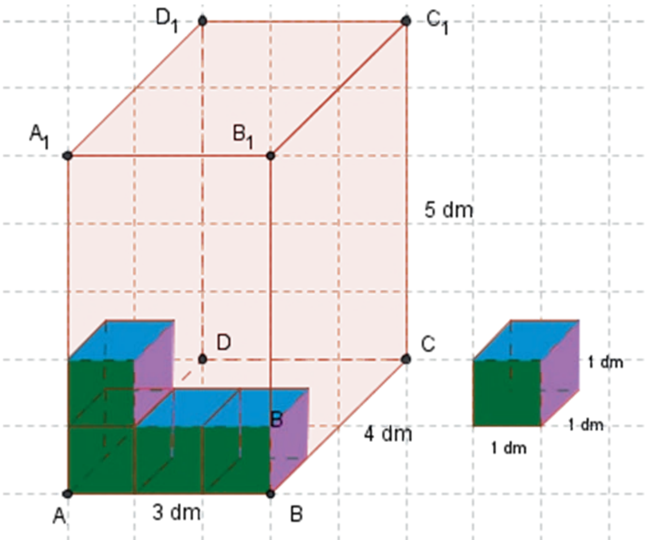
2.5. Objętość prostopadłościanu (*)

Wiemy, że miarą powierzchni figury jest jej pole. W poprzednim podrozdziale obliczyliśmy pole powierzchni prostopadłościanu. Dzięki temu dowiedzieliśmy się, ile papieru kolorowego potrzeba na oklejenie wszystkich jego ścian.

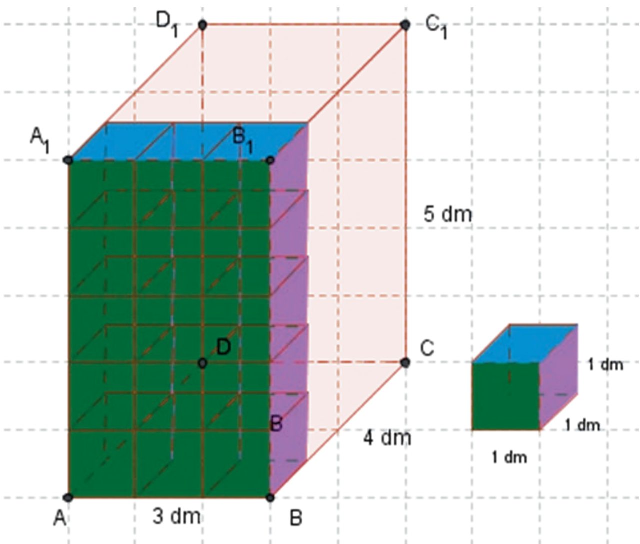
Pora na kolejne zadanie: Ile wody potrzebujemy, aby wypełnić nią po brzegi prostopadłościan o wymiarach 30 cm x 40 cm x 50 cm?

Stwierdzono, że w sześcianie o długości krawędzi 1 dm zmieści się 1 litr wody, co zapisujemy: 1 dm^3 = 1 litr.

Aby zatem rozwiązać zadanie, musimy policzyć, ile sześcianików o krawędzi 1 dm = 10 cm zmieści się w naszym prostopadłościanie.



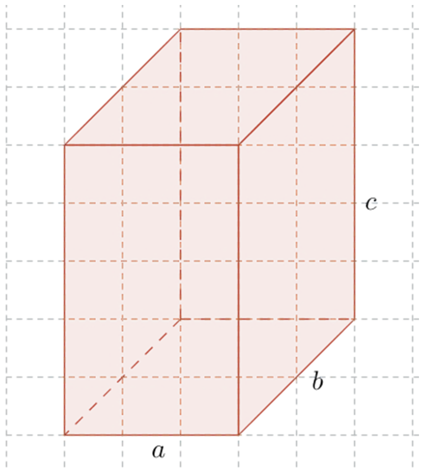
Czy wiesz, jak je wszystkie policzyć? Rozwiązanie tego zadania nie jest zbyt skomplikowane. Najpierw policzymy, ile jest wszystkich sześcianików stykających się ze ścianą ABB_1A_1 prostopadłościanu. Nietrudno zauważyć, że jest ich 3 · 5 = 15



Ile takich rzędów sześcianików zmieści się w naszym prostopadłościanie? W prostopadłościanie zmieszczą się dokładnie 4 rzędy sześcianów, a więc wszystkich sześcianów jest tam 15 · 4 = 60.

Odpowiedź: W prostopadłościanie o wymiarach 3 dm x 4 dm x 5 dm zmieści się 60 litrów wody.

Spróbujmy teraz uogólnić trochę nasze rozumowanie. Przyjmijmy sześcian o krawędzi 1 cm za jednostkę miary objętości prostopadłościanu (oznaczamy 1 cm^3). Ile takich sześcianów zmieści się w prostopadłościanie o wymiarach a, b, c (cm)? Wszystkich sześcianów w prostopadłościanie o wymiarach a, b, c zmieści się a·b·c.



Jeżeli symbolem V oznaczymy objętość prostopadłościanu o wymiarach ***a,b,c,*** to jego objętość możemy obliczyć tak:

V = a·b·c

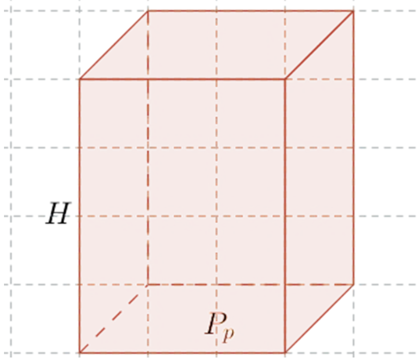
Objętość prostopadłościanu jest iloczynem długości trzech krawędzi wychodzących z jego wierzchołka (wymiarów), podanych w tej samej jednostce długości, gdzie a·b jest polem podstawy prostopadłościanu.

a - długość prostopadłościanu

b - szerokość prostopadłościanu

c - wysokość prostopadłościanu

Wzór na objętość prostopadłościanu możemy również zapisać w innej postaci: Oznaczając pole podstawy prostopadłościanu przez P_p oraz jego wysokość przez H, otrzymujemy:



$V = P_p \cdot H$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

W przypadku sześcianu wszystkie krawędzie są równe, więc wzór przybiera postać:

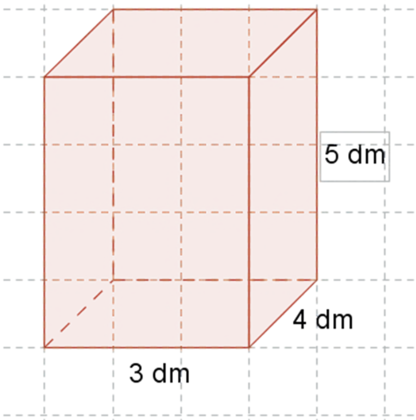
$$V = a \cdot a \cdot a = a^3$$

Objętość sześcianu jest równa sześcianowi długości jego krawędzi.

Do określania objętości brył używamy różnych jednostek sześciennych, np. cm^3, m^3 itd., zależnie od jednostki, jaką przyjęliśmy do określenia miary tej figury w przestrzeni.

Przykład 1

Rozwiążmy to samo zadanie, ale korzystając już z gotowego wzoru. Oblicz objętość prostopadłościanu o wymiarach 3 dm x 4 dm x 5 dm.



$V = a \cdot b \cdot c$

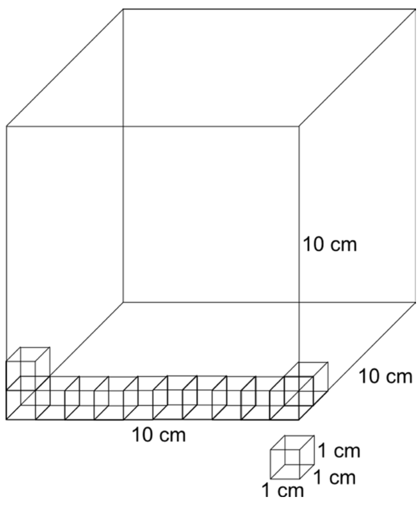
$V = 3\ dm \cdot 4\ dm \cdot 5\ dm$

$V = 60\ dm^3$

Ponadto przyjęliśmy, że: $1\ dm^3 = 1$ litr, więc $V = 60$ l

2.6. Zamiana jednostek objętości

Jak zamienić $1\ dm^3$ na cm^3?



KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Musimy odpowiedzieć na pytanie, ile małych sześcianików o długości krawędzi równej 1 cm zmieści się w dużym sześcianie o krawędzi równej 1 dm. Nietrudno zauważyć, że jest ich wszystkich 10·10·10 = 1000. Zatem: 1 dm^3 = (10 cm)^3 = 1000 cm^3.

Przykład 1

Zamieniamy 21,41 dm^3 na cm^3.

$$21,41\ dm^3 = 21,41 \cdot 1\ dm^3 = 21,41 \cdot (10\ cm)^3 = 2,41 \cdot 1000\ cm^3 = 2410\ cm^3$$

Zamieniamy 154 cm^3 na mm^3.

$$154\ cm^3 = 154 \cdot 1\ cm^3 = 154 \cdot (10\ mm)^3 = 154 \cdot 1000\ mm^3 = 154000\ mm^3$$

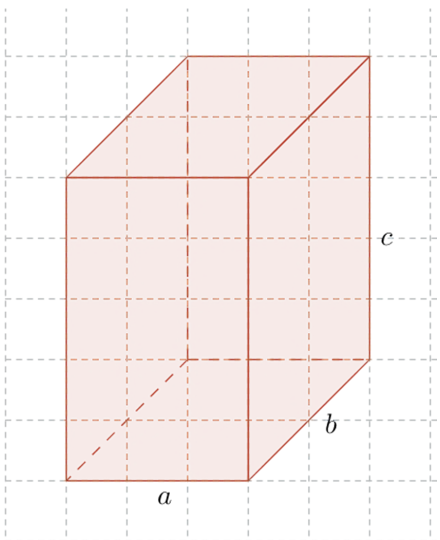
Zamieniamy 1234 cm^3 na dm^3.

$$1234\ cm^3 = 1234 \cdot 1\ cm^3 = 1234 \cdot (0,1\ dm)^3 = 1234 \cdot 0,001\ dm^3 = 1,234\ dm^3$$

Ćwiczenie 1

a. Zamień 21 dm^3 na cm^3.
b. Zamień 1450 mm^3 na cm^3.
c. Zamień 12 km^3 na m^3.

2.7. Obliczanie objętości prostopadłościanu



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
WPQ
TOMP
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 1

a. Oblicz objętość prostopadłościanu o wymiarach 15 cm, 20 cm, 5 cm. Wynik podaj w dm^3.

b. Oblicz objętość prostopadłościanu o wymiarach 35 cm x 4 dm x 5 dm. Wynik podaj w m^3.

c. Oblicz pojemność akwarium w kształcie prostopadłościanu o wymiarach: 40 cm, 30 cm, 20 cm.

$1\ cm^3 = 1000\ mm^3$

$1\ dm^3 = 1000\ cm^3$

$1\ m^3 = 1000\ dm^3 = 1000000\ cm^3$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

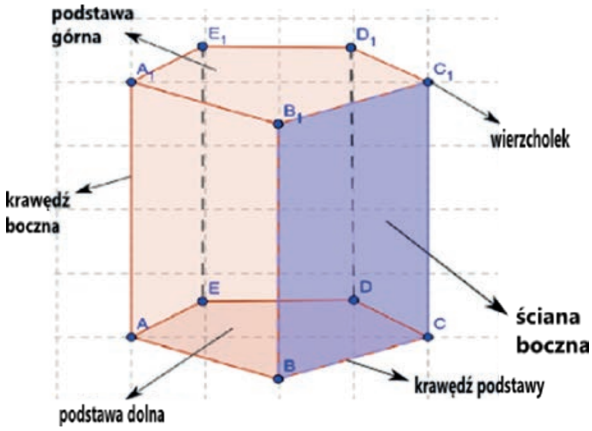
3. GRANIASTOSŁUPY PROSTE

Graniastosłupem prostym nazywamy figurę przestrzenną, której podstawy są przystającymi wielokątami leżącymi w płaszczyznach równoległych, a ściany boczne są prostokątami prostopadłymi do podstaw.

Dwie **figury geometryczne są przystające**, jeśli jedną z tych figur możemy dokładnie nałożyć na drugą (mają wszystkie boki i kąty równe).

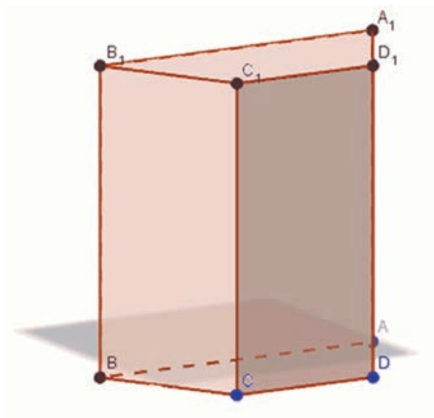
Graniastosłup przyjmuje nazwę w zależności od nazwy wielokąta występującego w podstawie. W podstawach mogą występować dowolne przystające wielokąty.

Na przykład graniastosłup pięciokątny ma w podstawie pięciokąt. Jeśli dodatkowo w podstawach ma wielokąty foremne, to taki graniastosłup nazywamy graniastosłupem prawidłowym. Poniżej zaprezentowano graniastosłup prawidłowy pięciokątny.



Z rysunku można odczytać, że graniastosłup prosty ma: dwie podstawy, które są przystającymi wielokątami leżącymi w płaszczyznach do siebie równoległych, ściany boczne, które są prostokątami prostopadłymi do podstaw graniastosłupa, tyle wierzchołków na każdej z podstaw, ile graniastosłup ma ścian bocznych (krawędzi podstawy).

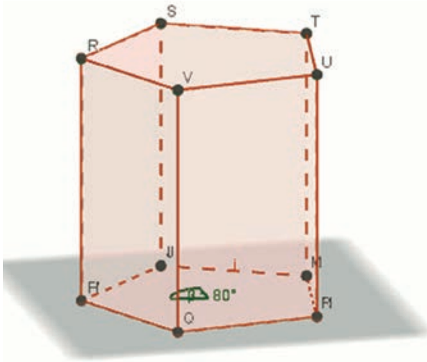
Graniastosłup prosty czworokątny (wypukły):



Obejrzyj animację na platformie MATI.

Jakie figury ma ten graniastosłup w podstawach? Czy możemy nazwać go graniastosłupem prawidłowym? Ile ścian bocznych ma ten graniastosłup?

Graniastosłup prosty pięciokątny:

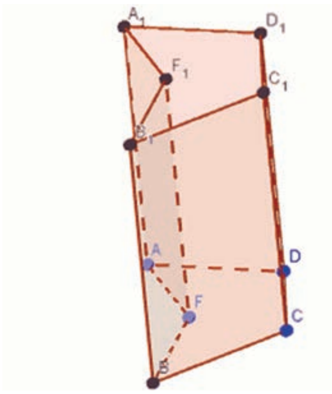


Obejrzyj animację na platformie MATI.

Jakie figury ma ten graniastosłup w podstawach? Czy potrafisz wskazać przykłady przedmiotów w kształcie graniastosłupów? (np. ołówek) Jak już zapewne wiesz, prostopadłościan jest również graniastosłupem.

Czy możesz podać dokładną nazwę tego graniastosłupa oraz kilka jego przykładów z Twojego otoczenia?

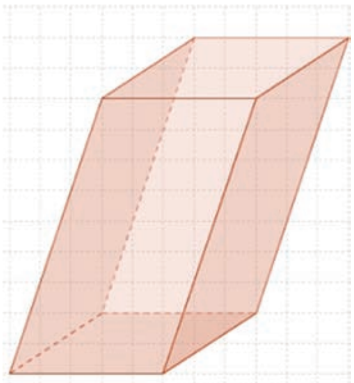
Graniastosłup prosty pięciokątny (wklęsły):



Obejrzyj animację na platformie MATI.

Czy podstawą graniastosłupa jest zawsze figura wypukła? Czy potrafisz wyobrazić sobie dowolny graniastosłup prosty siedmiokątny?

Graniastosłup pochyły czworokątny:



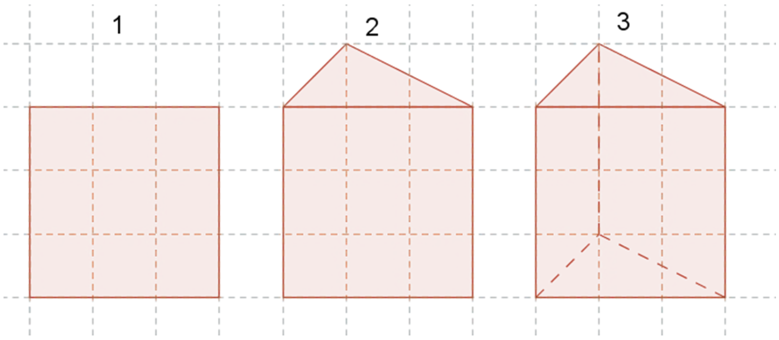
Czym różni się ten graniastosłup od wcześniejszych? Zapewne udało Ci się zauważyć, że podstawy tego graniastosłupa są równoległe. Dlaczego więc nie pasuje on do pozostałych? Czy możemy nazwać go graniastosłupem prostym?

3.1. Rysowanie graniastosłupów prostych

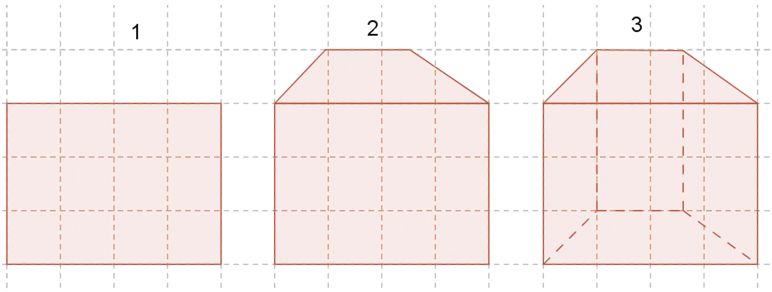
Graniastosłupy proste rysujemy w odpowiedniej perspektywie tak, aby na płaskiej kartce papieru oddać trzeci wymiar.

Z reguły na rysunkach podstawy graniastosłupa oraz niektóre ściany mają nierzeczywiste rozmiary. Niewidoczne krawędzie graniastosłupa rysujemy linią przerywaną.

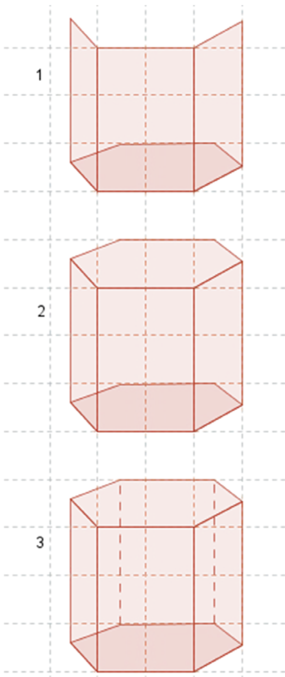
Rysowanie graniastosłupa prostego trójkątnego:



Rysowanie graniastosłupa prostego czworokątnego (o podstawie trapezu):



Rysowanie graniastosłupa prostego sześciokątnego:



KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 1

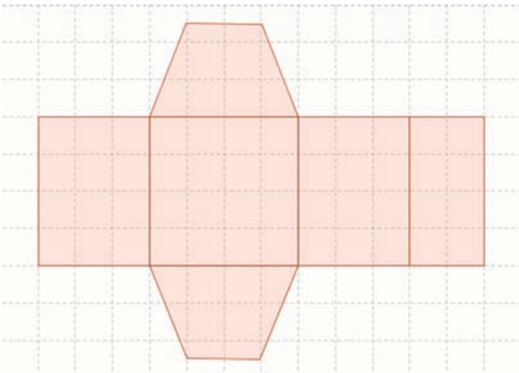
Narysuj graniastosłup prosty pięciokątny.

3.2. Siatki graniastosłupów prostych

Siatkę graniastosłupa, podobnie jak prostopadłościanu, otrzymujemy poprzez rozcięcie graniastosłupa wzdłuż krawędzi tak, aby możliwe było rozłożenie powstałych wielokątów na płaszczyźnie.

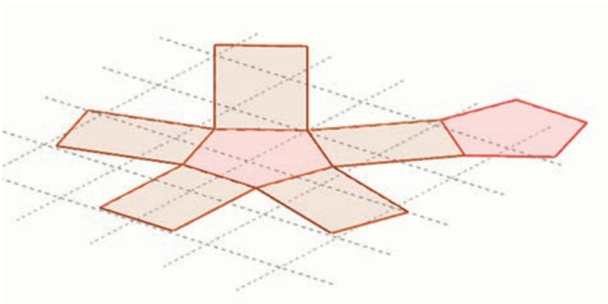
Siatkę poniższego graniastosłupa otrzymano poprzez rozcięcie go wzdłuż krawędzi zaznaczonych kolorem czerwonym.

Zwróć uwagę, że wymiary rozkładanych ścian graniastosłupa są inne, niż wynika to z rysunku.



Obejrzyj animację na platformie MATI.

Zauważ, że graniastosłup prosty możemy rozciąć na wiele sposobów. Oto animacja rozłożenia graniastosłupa prawidłowego pięciokątnego. Czy potrafisz sobie wyobrazić, wzdłuż których krawędzi go rozcięto?



Obejrzyj animację na platformie MATI.

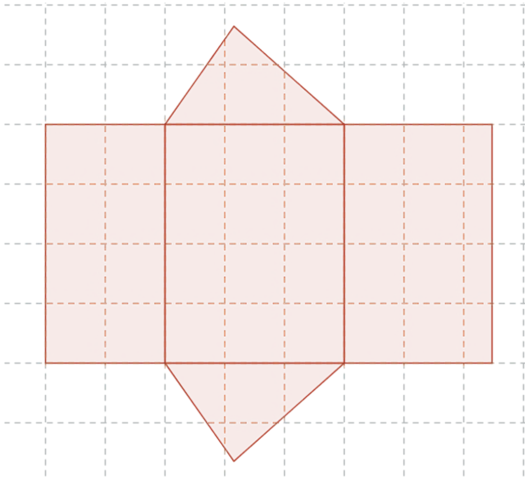
Przy tworzeniu modelu graniastosłupa z papieru postępujemy dokładnie na odwrót, tzn. najpierw rysujemy siatkę graniastosłupa na kartce, później wycinamy go wzdłuż krawędzi, a następnie zginamy i sklejamy. Pamiętaj jednak o dorysowaniu zakładek umożliwiających późniejsze sklejenie modelu.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI · UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

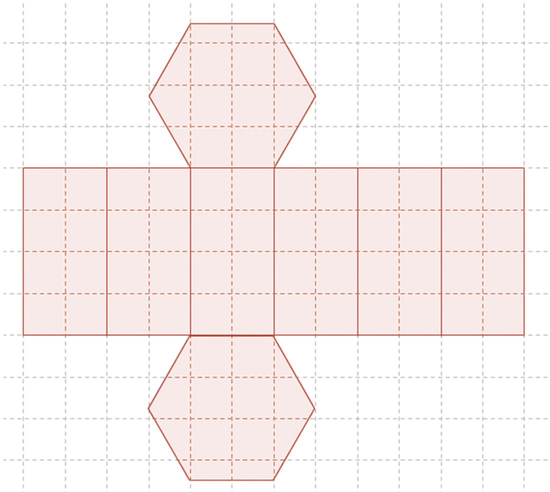
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Oto inne przykłady siatek graniastosłupów:

a)



b)



Ćwiczenie 1

Narysuj graniastosłupy przedstawione powyżej.

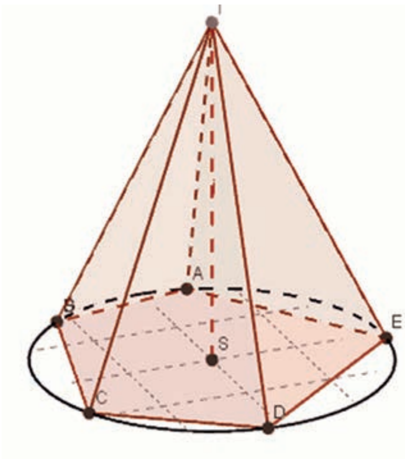
Ćwiczenie 2

Narysuj siatkę prostopadłościanu o wymiarach 2 dm, 3 dm, 4 dm w skali 1:10.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

4. OSTROSŁUPY

Ostrosłupem - nazywamy wielościan, którego jedna ściana, zwana podstawą, jest dowolnym wielokątem, a pozostałe ściany są trójkątami o wspólnym wierzchołku, określanym mianem wierzchołka ostrosłupa.

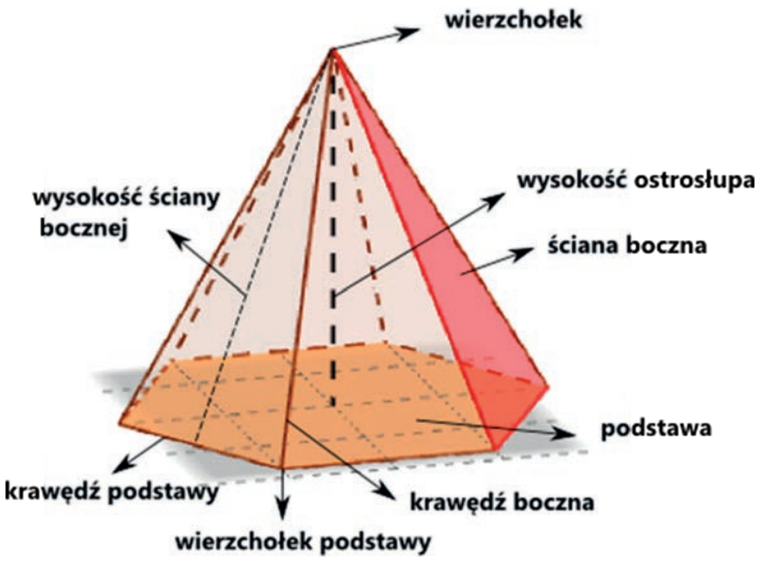


Obejrzyj animację na platformie MATI.

Wysokością ostrosłupa jest odcinek łączący jego wierzchołek z płaszczyzną podstawy, prostopadły do płaszczyzny podstawy. Na rysunku powyżej wysokością jest odcinek SI.

Ostrosłupem prawidłowym nazywamy ostrosłup, którego podstawą jest wielokąt foremny, a ściany boczne są przystającymi trójkątami równoramiennymi (krawędzie boczne mają tę samą długość).

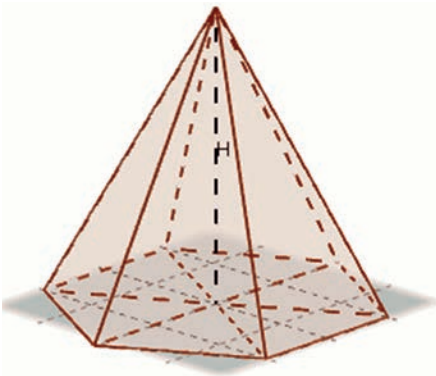
Czy Twoim zdaniem powyższy ostrosłup jest prawidłowy? Punkt S jest spodkiem wysokości ostrosłupa, punkt I nazywamy jego wierzchołkiem.



Z powyższego rysunku możemy odczytać, że każdy ostrosłup ma:
- jedną podstawę, która jest dowolnym wielokątem,
- ściany boczne, będące trójkątami o wspólnym wierzchołku,
- po jednym boku wspólnym z podstawą.

Nazwa ostrosłupa pochodzi od nazwy wielokąta w podstawie. Ostrosłup pokazany na powyższym rysunku ma w podstawie sześciokąt, zatem jest to ostrosłup sześciokątny.

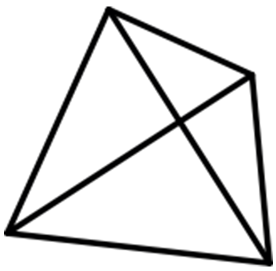
Ostrosłup prawidłowy sześciokątny:



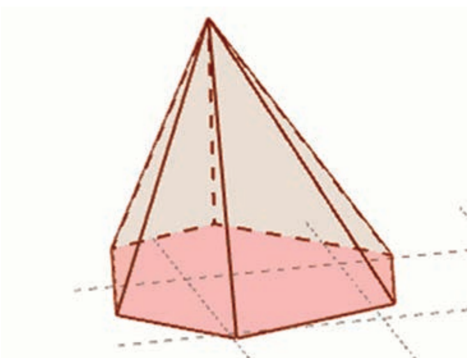
Obejrzyj animację na platformie MATI.

Spróbuj wyobrazić sobie jego spodek wysokości. Jaki wielokąt ma ten ostrosłup w podstawie?

Czworościanem foremnym nazywamy ostrosłup prawidłowy, którego wszystkie ściany są trójkątami równobocznymi.



Ostrosłup pochylony pięciokątny:

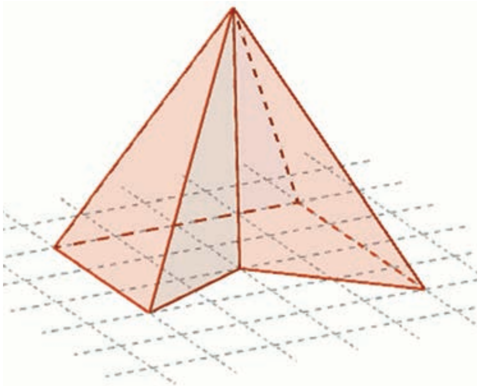


Wyobraź sobie jego spodek wysokości.

Obejrzyj animację na platformie MATI.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ TOMP UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ostrosłup wklęsły pięciokątny:



Jaką figurę ma ten ostrosłup w podstawie, wklęsłą czy wypukłą?

Obejrzyj animację na platformie MATI.

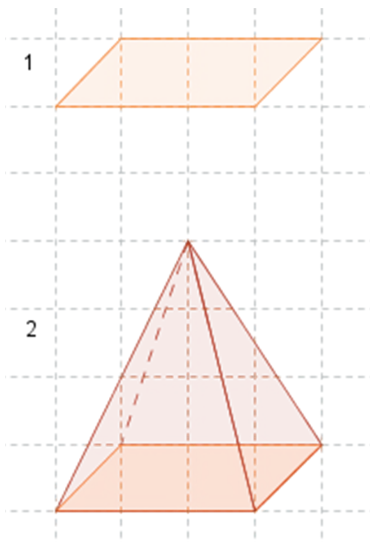
Na koniec wskaż kilka przykładów ostrosłupów z Twojego otoczenia. Oto jeden z nich:

Czy widzisz na zdjęciu altanki ostrosłup? Spróbuj podać jego pełną nazwę.

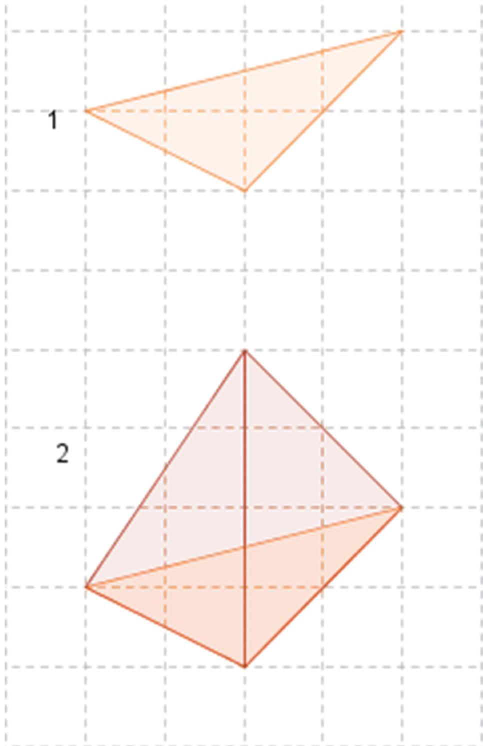
4.1. Rysowanie ostrosłupów

Ostrosłupy, podobnie jak graniastosłupy proste, rysujemy z uwzględnieniem rozmiarów ich ścian w odpowiedniej perspektywie.

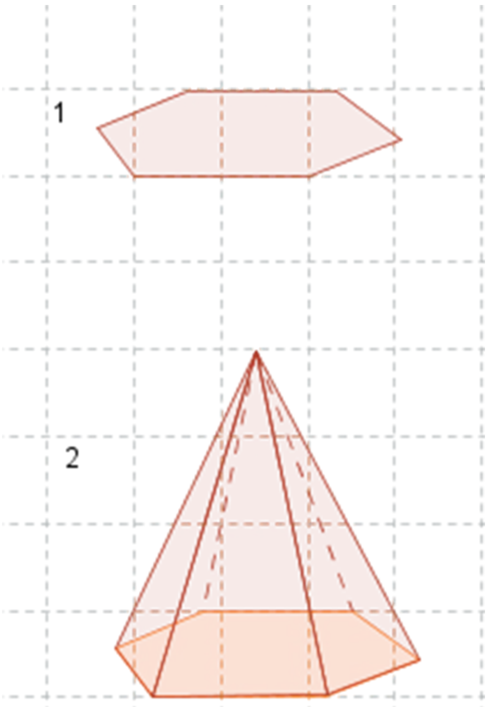
Rysowanie ostrosłupa czworokątnego:



Rysowanie ostrosłupa trójkątnego:



Rysowanie ostrosłupa sześciokątnego:



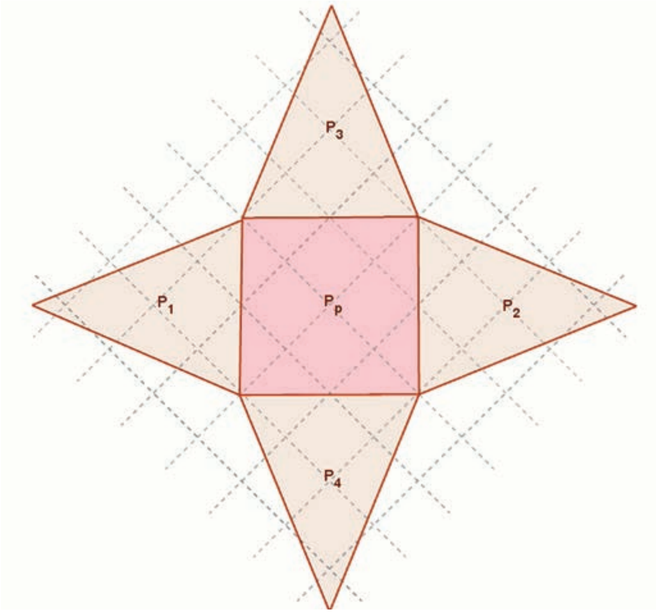
Ćwiczenie 1

Narysuj ostrosłup czworokątny, który w podstawie ma trapez.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

4.2. Siatki ostrosłupów

Rozcinając ostrosłup wzdłuż pewnych krawędzi i rozkładając jego ściany na płaszczyźnie, otrzymujemy tzw. siatkę ostrosłupa.

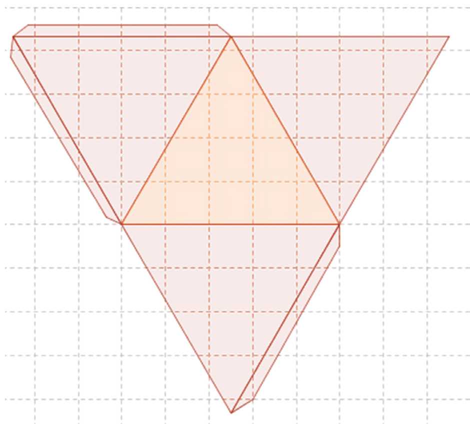


Obejrzyj animację na platformie MATI.

Podaj pełną nazwę tego ostrosłupa. Jeśli chcemy wykonać model ostrosłupa z papieru, musimy najpierw narysować jego siatkę na kartce, dorysować odpowiednie zakładki umożliwiające późniejsze sklejenie modelu, a następnie wyciąć, zgiąć i skleić model.

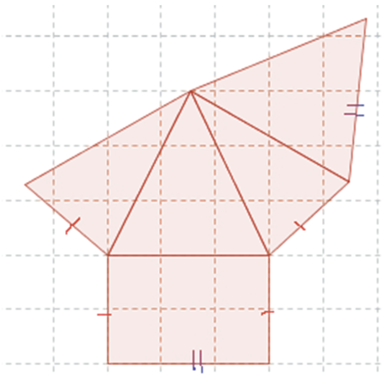
Przykład 1

Siatka przedstawia ostrosłup (czworościan foremny), którego wszystkie ściany są trójkątami równobocznymi.



Warto zauważyć, że ostrosłup można rozciąć na wiele sposobów.

Oto inny przykład siatki ostrosłupa:



Czy wiesz, jak rozcięto taki ostrosłup? Jaka figura jest jego podstawą? Podczas rysowania siatki ostrosłupa trzeba zwrócić uwagę, że krawędzie zaznaczone tymi samymi kreskami mają równe długości. Zatem do jej dokładnego narysowania powinniśmy użyć cyrkla i linijki.

Ćwiczenie 1

Narysuj model tego ostrosłupa. Jak nazywa się taki ostrosłup?

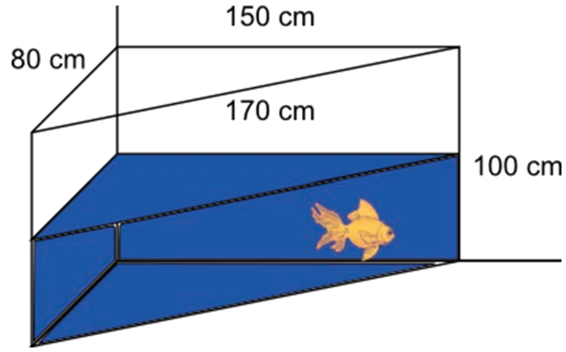
Ćwiczenie 2

Narysuj siatkę dowolnego ostrosłupa, ale takiego, który nie jest prawidłowy. Jeżeli to konieczne, użyj cyrkla i linijki.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ TOMP UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

5. POLE POWIERZCHNI GRANIASTOSŁUPA

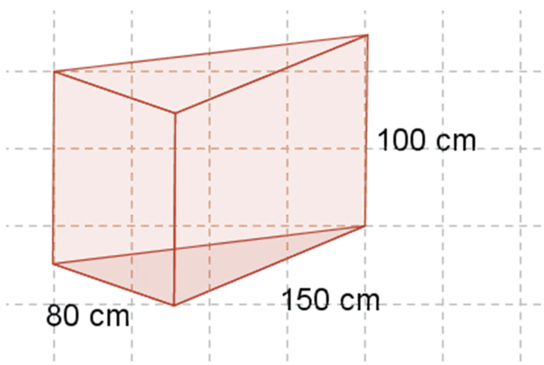
Zastanówmy się, ile pieniędzy potrzebujemy na wykonanie w salonie akwarium o wymiarach i kształcie pokazanym na poniższym rysunku (akwarium jest zakryte), jeśli wiadomo, że koszt wyprodukowania 1 dm^2 wyrobu ze szkła wynosi 2 zł.



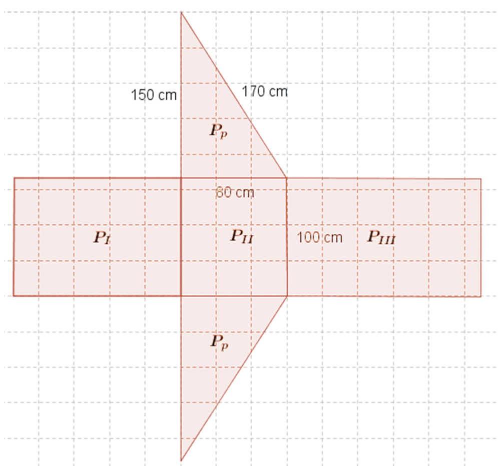
Zadanie sprowadza się do obliczenia pola powierzchni graniastosłupa prostego trójkątnego. W naszym przypadku podstawą graniastosłupa jest trójkąt prostokątny.

Czy wiesz, dlaczego? Pole powierzchni graniastosłupa (całkowite) jest sumą pól powierzchni wszystkich jego ścian. Dla ułatwienia obliczeń wykonajmy rysunki graniastosłupa oraz jego siatki.

Graniastosłup:



Siatka:



Przyjmujemy następujące oznaczenia:

P_p - pole podstawy graniastosłupa

P_b - pole boczne graniastosłupa

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ TOMP UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Pc - pole całkowite graniastosłupa

Z rysunku wynika, że:

$P_c = 2 \cdot P_p + P_b$

$P_b = P_I + P_{II} + P_{III}$

W naszym przypadku:

$P_I = 150\ cm \cdot 100\ cm = 15000\ cm^2 = 150\ dm^2$

Pamiętamy, że $1\ cm^2 = (0{,}1\ dm)^2 = 0{,}01\ dm^2$

$P_{II} = 80\ cm \cdot 100\ cm = 8000\ cm^2 = 80\ dm^2$

$P_{III} = 100\ cm \cdot 170\ cm = 17000\ cm^2 = 170\ dm^2$

$P_p = 12 \cdot 80\ cm \cdot 150\ cm = 6000\ cm^2 = 60\ dm^2$

a więc:

$P_b = 150\ dm^2 + 80\ dm^2 + 170\ dm^2 = 400\ dm^2$

$P_c = 2 \cdot 60\ dm^2 + 400\ dm^2$

$P_c = 520\ dm^2$.

Koszt akwarium wynosi: $520 \cdot 2$ zł = 1040 zł

Odpowiedź: Na wykonanie tego akwarium zużyjemy 520 dm^2 szkła, a zatem koszt jego wyprodukowania wynosił będzie 1040 zł.

Pole powierzchni graniastosłupa jest sumą pól powierzchni wszystkich jego ścian.

$$\mathbf{P_c = 2 \cdot P_p + P_b}$$

P_p - pole podstawy graniastosłupa

P_b - pole boczne graniastosłupa

P_c - pole całkowite graniastosłupa

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ Tomasz Jakubowski TOMP UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 1

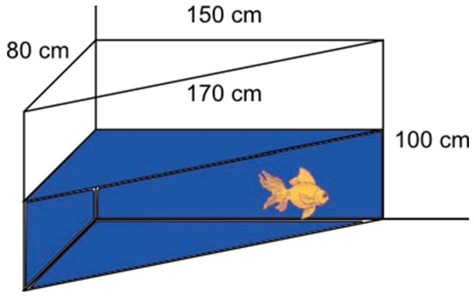
Oblicz, ile materiału zużyto na wykonanie kartonu na sok o wymiarach podanych na rysunku. Wynik podaj w dm^2.

6. OBJĘTOŚĆ GRANIASTOSŁUPA (*)

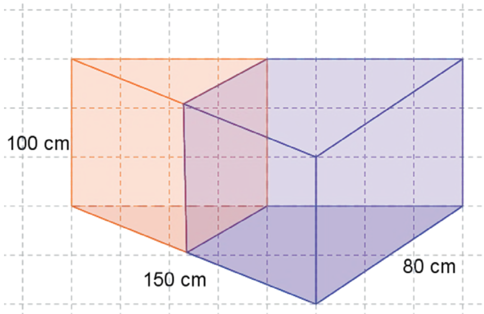
Potrafimy już obliczyć, ile szkła zużyjemy na wykonanie akwarium i jesteśmy w stanie oszacować koszt wyprodukowania takiego akwarium.

Zastanówmy się, ile litrów wody zmieści się w takim akwarium. Dotychczas rozważaliśmy akwaria w kształcie prostopadłościanu, które bardzo łatwo można było podzielić na sześciany jednostkowe o krawędzi 1 dm (1 litr).

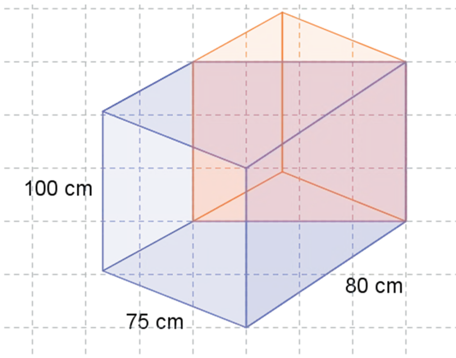
W przypadku pokazanym poniżej w podstawie graniastosłupa mamy trójkąt prostokątny, więc dzielenie go na jednostkowe sześciany byłoby bardzo utrudnione. Zastosujmy więc inną metodę.



Mamy akwarium w kształcie graniastosłupa trójkątnego (trójkąt jest prostokątny). Jak obliczyć jego objętość?



Podzielmy graniastosłup na dwa kawałki, tak jak kroimy tort, dzieląc jego krawędzie na połowy, płaszczyzną równoległą do trzeciej ściany. Na rysunku dwa powstałe kawałki oznaczono kolorem pomarańczowym i niebieskim. Teraz pomarańczowy kawałek przekładamy tak, aby powstał prostopadłościan pokazany na rysunku poniżej.



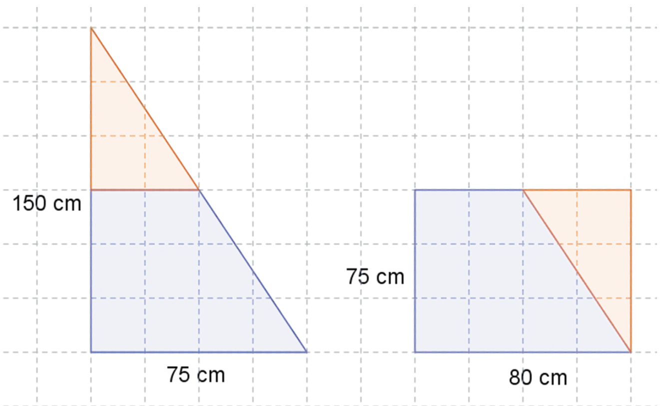
Nowo powstała bryła ma objętość identyczną, ponieważ składa się z tych samych kawałków. Wiemy również, że jest to prostopadłościan, więc potrafimy już obliczyć jej objętość:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$V = 75\ cm \cdot 80\ cm \cdot 100\ cm$$

$$V = 600000\ cm^3 = 600\ dm^3$$

Pamiętamy, że $1\ cm^3 = (0{,}1\ dm)^3 = 0{,}001\ dm^3$



Łatwo zauważyć, że podstawy tych graniastosłupów mają równe pola powierzchni P_p, więc zarówno w jednym, jak i w drugim przypadku objętość bryły możemy obliczyć ze wzoru:

$$\mathbf{V = P_p \cdot H}$$

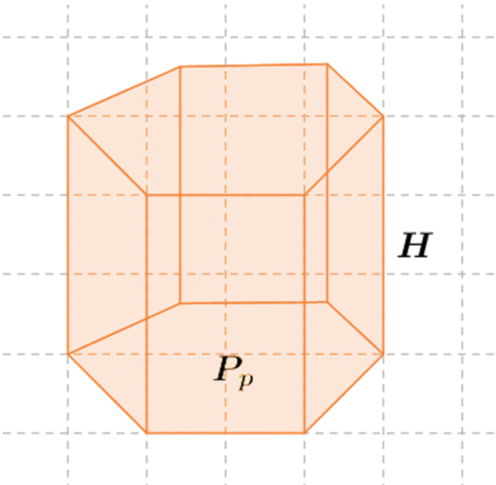
P_p - pole podstawy graniastosłupa

H - wysokość graniastosłupa (w naszym zadaniu: H=100)

Powyższy wzór jest prawdziwy dla dowolnego graniastosłupa prostego (nie tylko dla graniastosłupa mającego trójkąt prostokątny w podstawie).

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wzór na objętość graniastosłupa prostego:

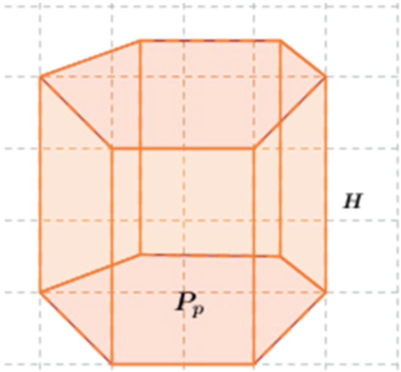


$V = P_p \cdot H$

P_p - pole podstawy graniastosłupa

H - wysokość graniastosłupa

7. OBLICZANIE OBJĘTOŚCI GRANIASTOSŁUPA PROSTEGO



Objętość dowolnego graniastosłupa prostego jest iloczynem pola podstawy P_p oraz jego wysokości H.
Wysokość graniastosłupa zwykle oznaczamy dużą literą H.

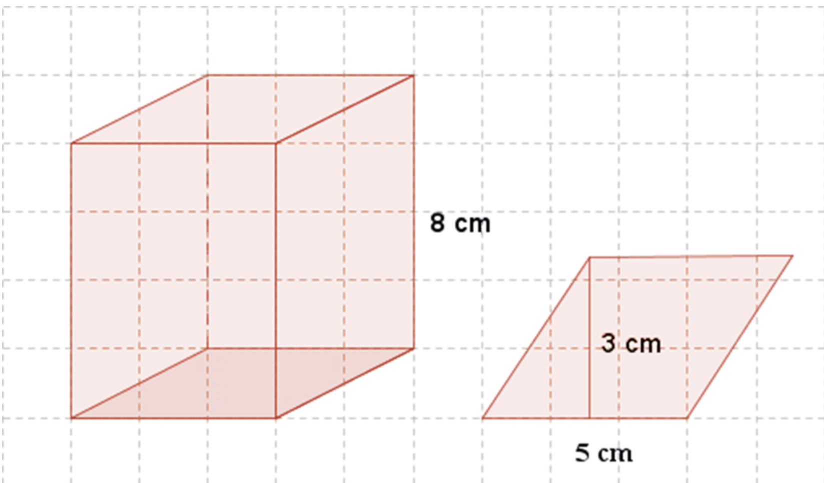
$V=P_p \cdot H$

P_p - pole podstawy graniastosłupa

H - wysokość graniastosłupa

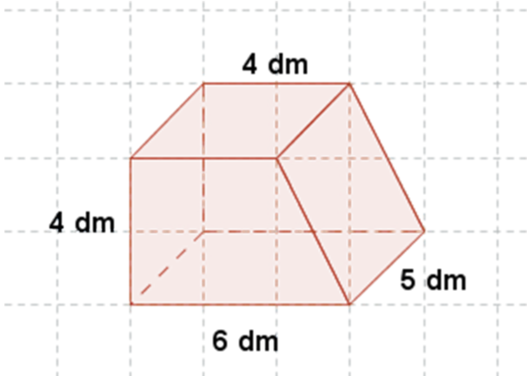
Zadanie 1

Obok graniastosłupa prostego narysowano jego podstawę. Oblicz objętość tego graniastosłupa.



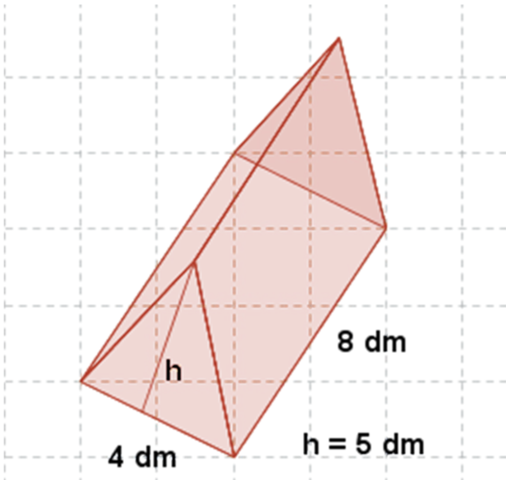
Zadanie 2

Oblicz objętość graniastosłupa prostego przedstawionego na rysunku.



Zadanie 3

Oblicz objętość graniastosłupa prostego przedstawionego na rysunku.



Zadanie 4

Jaka jest wysokość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, jeśli długość krawędzi jego podstawy wynosi 5 cm, a objętość 125 cm^3?

8. POLE POWIERZCHNI OSTROSŁUPA

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa (lub po prostu pole powierzchni) jest sumą pól powierzchni wszystkich jego ścian.

W odróżnieniu od graniastosłupa ostrosłup ma tylko jedną podstawę, więc jego pole powierzchni obliczamy według wzoru:

$P_c = P_p + P_b$

P_c - pole całkowite ostrosłupa

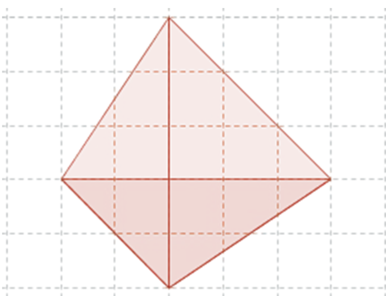
P_p - pole podstawy ostrosłupa

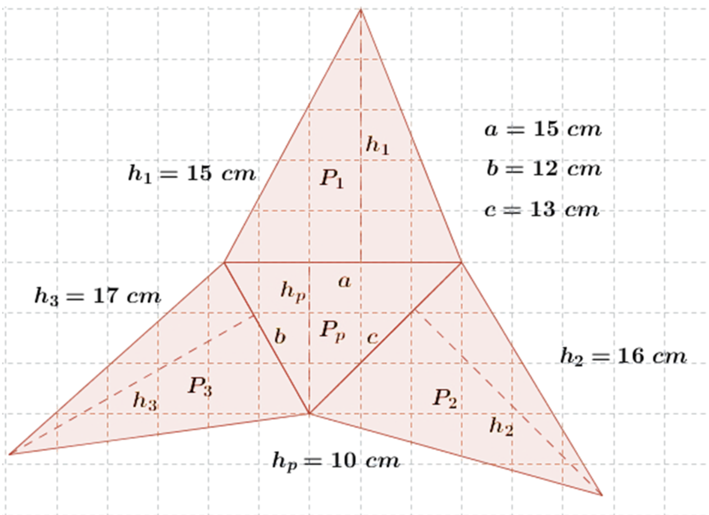
P_b - pole boczne ostrosłupa

Pole boczne jest sumą wszystkich ścian bocznych ostrosłupa.

Zadanie 1

Ile materiału zużyto na wyprodukowanie opakowania na soczek w kształcie i rozmiarach podanych poniżej.



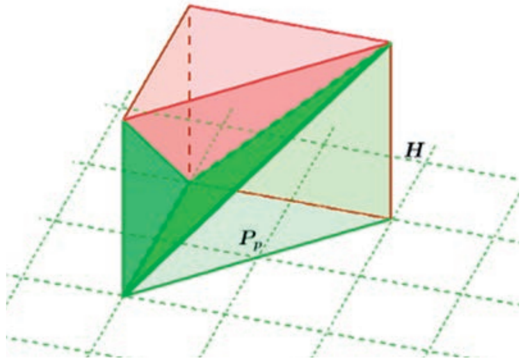


Wykonaj zadania umieszczone na platformie MATI.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
WPQ
TOMP
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

9. OBJĘTOŚĆ OSTROSŁUPA (*)

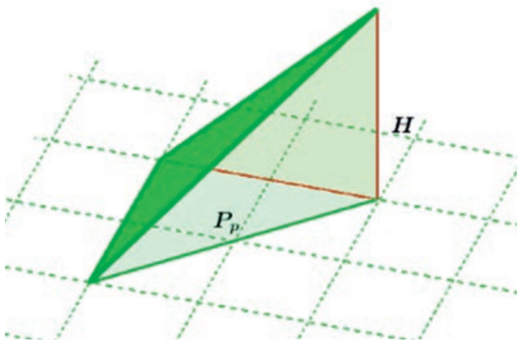
Wróćmy do naszego akwarium w kształcie graniastosłupa prostego (w podstawie ma trójkąt prostokątny). Podzielmy go na trzy ostrosłupy, tak jak na rysunku:



Czy widzisz wszystkie ostrosłupy? W dodatku wiadomo, że te trzy ostrosłupy, na które podzieliliśmy graniastosłup, mają równe objętości (uzasadnienie pomijamy). Wiemy, że objętość graniastosłupa wyraża się wzorem:

$$V = P_p \cdot H$$

Składa się on z trzech ostrosłupów o równej objętości, więc możemy łatwo obliczyć objętość jednego z nich.



$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H$$

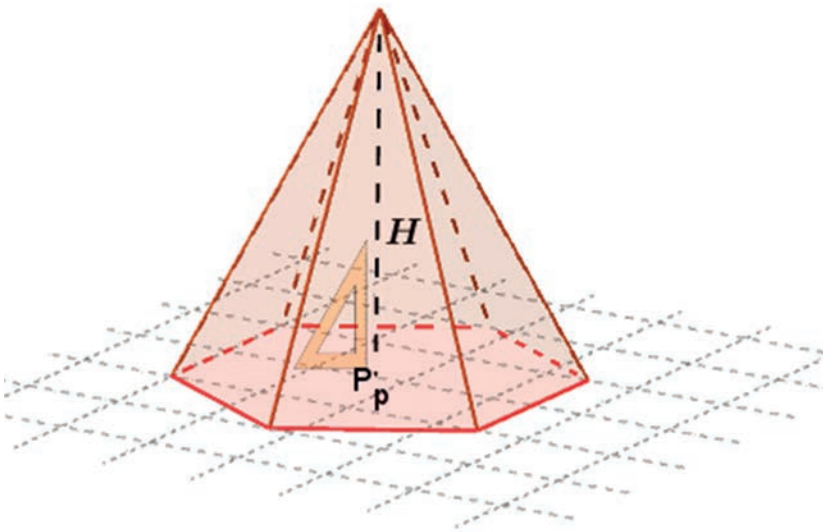
Gdzie:

P_P - pole podstawy ostrosłupa
H - wysokość ostrosłupa

Jedna z krawędzi tego ostrosłupa jest prostopadła do podstawy (czy widzisz, która?).

Powyższy wzór jest prawdziwy dla dowolnego ostrosłupa, nie tylko takiego, który ma w podstawie trójkąt prostokątny.

Objętość ostrosłupa V jest równa jednej trzeciej części iloczynu pola podstawy ostrosłupa P_p oraz jego wysokości H.



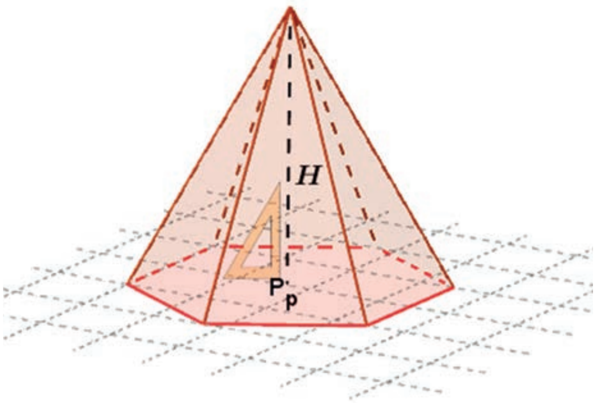
$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H$$

Wniosek: Objętość ostrosłupa jest równa jednej trzeciej objętości graniastosłupa prostego o tej samej podstawie P_p i wysokości H.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ TOMP UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

10. OBLICZANIE OBJĘTOŚCI OSTROSŁUPA

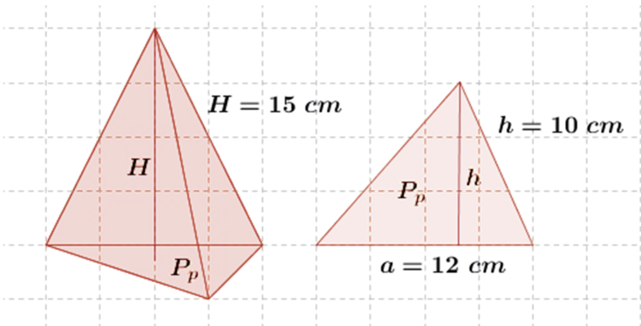
Objętość ostrosłupa V jest równa jednej trzeciej części iloczynu pola podstawy ostrosłupa P_p oraz jego wysokości H.



$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H$$

Zadanie 1

Oblicz, ile soku zmieści się w kartonie w kształcie ostrosłupa trójkątnego o wymiarach pokazanych na rysunku poniżej.



Zadanie 2

Podstawą ostrosłupa o wysokości 2 dm jest romb, którego długości przekątnych wynoszą 25 cm i 30 cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Zadanie 3

Jaka jest wysokość ostrosłupa czworokątnego prawidłowego, jeśli jego objętość wynosi 50 cm^3, a długość krawędzi podstawy wynosi 3 cm?

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ TOMP UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

NOTATKI

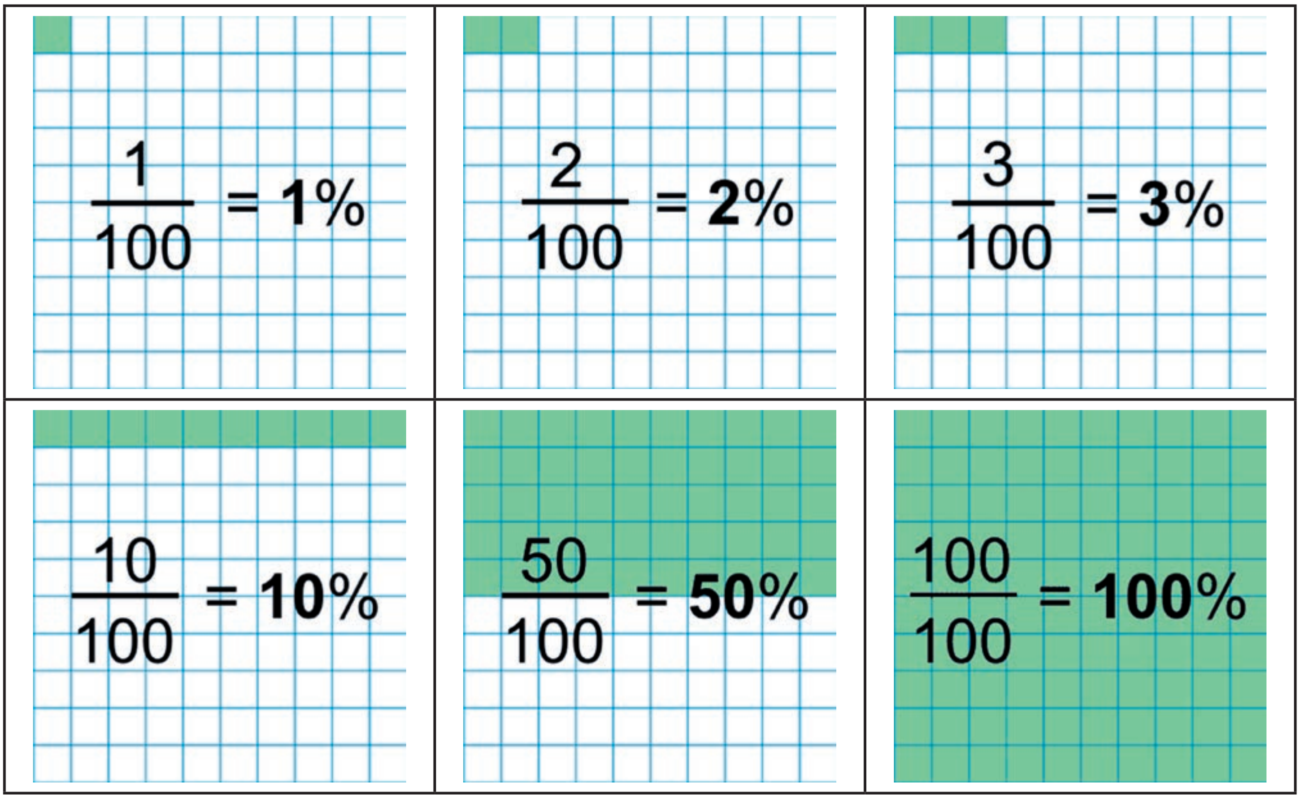
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

1. PROCENTY A UŁAMKI

Procenty odgrywają bardzo ważną rolę w naszym życiu. Któż nie widział jak sprzedawcy kuszą nas obniżkami o 20%, 30%, po świętach możemy kupić towary za połowę ceny (50%).

Co to takiego ten procent???

- To część całości, proszę Pani.
- Brawo Jasiu, masz rację…



Obejrzyj animację na platformie MATI.

Jeden procent (1%) to setna część całości

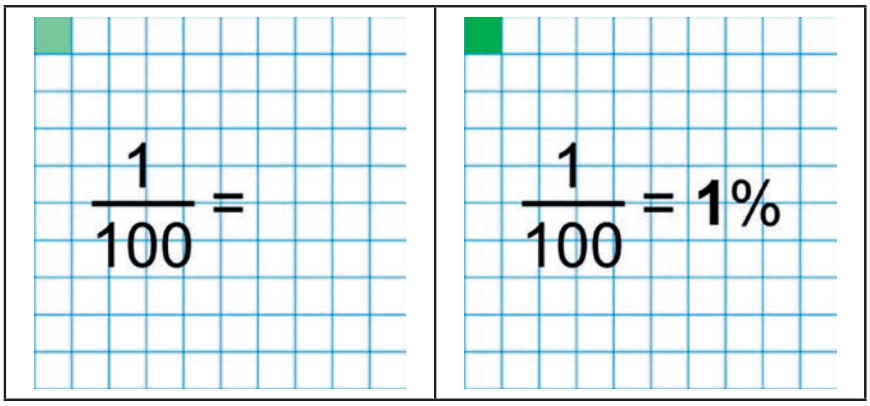
Słowo procent pochodzi z języka łacińskiego. Po łacinie „pro centum” oznacza „na sto”.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Można zapisać go w postaci ułamka:

$1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$

Skoro 1% jest setną częścią całości, to 2% są dwiema setnymi, 3% trzema setnymi itd.



Obejrzyj animację na platformie MATI.

Należy pamiętać, że pojęcie procentu nigdy nie występuje samodzielnie.

PROCENTY są ułamkami konkretnych wielkości,

np. 98% samochodów osobowych ma cztery koła.

1.1. Zamiana liczb na procenty

Przykład 1

Aby zamienić ułamek na procent, należy rozszerzyć ułamek do mianownika 100 i zapisać jako procent.

$$\frac{4}{10} = \frac{40}{100} = 40\%$$

Przykład 2

Aby zamienić liczbę na procent, należy pomnożyć tę liczbę przez 100%.

$$\frac{1}{4} \cdot 100\% = \frac{100}{4}\% = 25\%$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

1.2. Zamiana procentów na liczby

Przykład 2

Aby zamienić procent na liczbę należy zapisać ten procent w postaci ułamka o mianowniku 100.

$$30\% = \frac{30}{100} = 0{,}3 \qquad 15\% = \frac{15}{100} = 0{,}15 \qquad 120\% = \frac{120}{100} = 1{,}2$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

2. JAKI TO PROCENT?

Dzisiaj będziemy się uczyć jakim procentem jednej liczby jest druga liczba.

Nie zawsze całość to liczba 1 czy 100.

Ile procent *liczby2* stanowi *liczba1*?

Aby obliczyć, ile procent *liczby2* stanowi *liczba1*, należy je podzielić przez siebie i otrzymany iloraz wyrazić w procentach.

liczba1 : *liczba2* • 100%

Przykład 1

Mama Marka kupiła 8 jabłek. Marek zjadł 2. Jaki to procent wszystkich jabłek?
Aby to obliczyć, **należy przyjąć 8 jabłek jako całość**. Następnie zapiszemy, jaki ułamek jabłek zjadł Marek:
$\frac{2}{8}$ to ułamek, którego szukamy.

$\frac{2}{8} = \frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\%$ lub drugi sposób $\frac{2}{8} \cdot 100\% = 25\%$

Odpowiedź: 2 jabłka to 25 % z 8 jabłek.

Przykład 2

W klasie 6a jest 15 chłopców i 10 dziewczynek. Jaki procent stanowią chłopcy, a jaki dziewczynki?

Liczba wszystkich uczniów 10 + 15 = 25
Dziewczynki: $\frac{10}{25}$ to nasz ułamek, więc $\frac{10}{25} = \frac{10}{25} \cdot 100\% = \mathbf{40\%}$

Chłopcy: $\frac{15}{25}$ to nasz ułamek, więc $\frac{15}{25} = \frac{15}{25} \cdot 100\% = \mathbf{60\%}$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 3

Tata Olka sprawdził ile mąki jest w domu. Okazało się, że jest jej 1,5 kg. Mama Olka potrzebowała 150 gramów do ciastek. Jaki to procent całej mąki, która jest w domu?

1,5 kg to cała mąka (100%).

1,5 kg = 1500 g

$\frac{150}{1500}$ to nasz ułamek, więc $\frac{150}{1500} = \frac{1}{10} = \frac{1}{10} \cdot 100\% = 10\%$

Obliczanie, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba, często przydaje się w życiu codziennym.

Przykład 4

Czy można porównać wyniki sprawdzianów, za które można było uzyskać różną liczbę punktów?

Ze sprawdzianu w szkole A można było uzyskać 40 punktów, uczeń 1 uzyskał 34 punkty. W szkole B uczeń 2 otrzymał 42 punkty na 50 możliwych do uzyskania.

Sprawdźmy teraz, który z uczniów uzyskał lepszy wynik.

Uczeń 1: $\frac{34}{40} = \frac{17}{20} = \frac{85}{100} = 85\%$

Uczeń 2: $\frac{42}{50} = \frac{84}{100} = 84\%$

Wniosek: Zauważamy, że 85% > 84% - uczeń pierwszy uzyskał lepszy wynik, chociaż miał mniej punktów.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 5

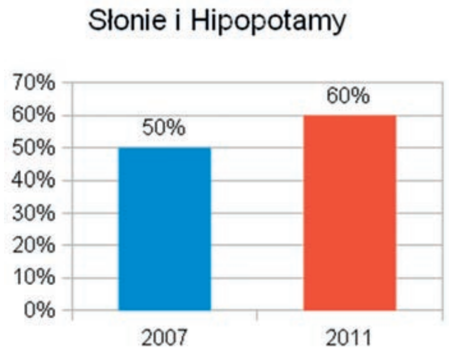
Procenty używane są również do badania wyników klubów sportowych, partii politycznych itp. Klub Słonie i Hipopotamy uzyskał w roku 2007 połowę głosów na najlepszą drużynę z 3700 oddanych głosów. W roku 2011 otrzymał aż 3000 z 5000 wszystkich głosów.

Sprawdzimy teraz, w których wyborach klub Słonie i Hipopotamy uzyskał lepszy wynik procentowy.

W roku 2007: $\frac{1}{2} \cdot 100\% = \mathbf{50\%}$

W roku 2011: $\frac{3000}{5000} = \frac{3}{5} = \frac{60}{100} \cdot 100\% = \mathbf{60\%} > 50\%$

2007	2011
50%	**60%**



Wniosek: W roku 2011 klub Słonie i Hipopotamy uzyskał lepszy wynik niż w roku 2007.

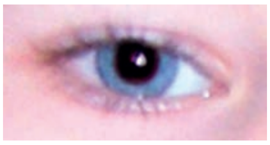
Całością (100%) może być liczba niecałkowita (np. 92,4).

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

3. DIAGRAMY PROCENTOWE

Statystyka zajmuje się gromadzeniem, opracowaniem i prezentacją danych.

Dane statystyczne zbierano już w czasach starożytnych w Egipcie, Persji, Chinach i Rzymie. Zapisuje się je najczęściej w formie tabel. Spośród wszystkich zmysłów oko człowieka odbiera największą część przekazywanej informacji.

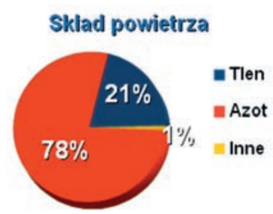


Człowiek lepiej rozumie, gdy „widzi”.
Wykorzystano to w statystyce i w ten sposób zamiast tabel z wynikami zaczęto stosować wykresy zwane diagramami.

Aby pokazać udział pewnej części w całości, stosuje się różne rodzaje diagramów (wykresów). Najczęściej stosowane diagramy:

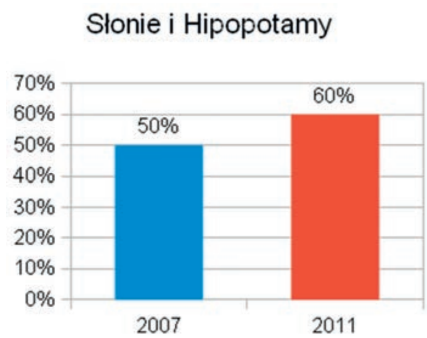
Przykład 1

1. Kołowe - udział procentowy w całości, np. skład powietrza.

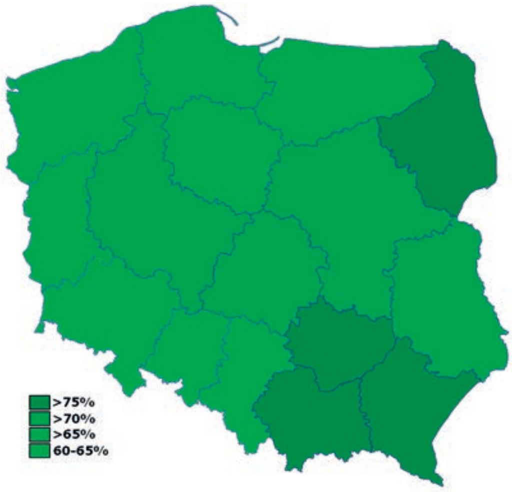


Tlen	Azot	Inne
21%	78%	1%

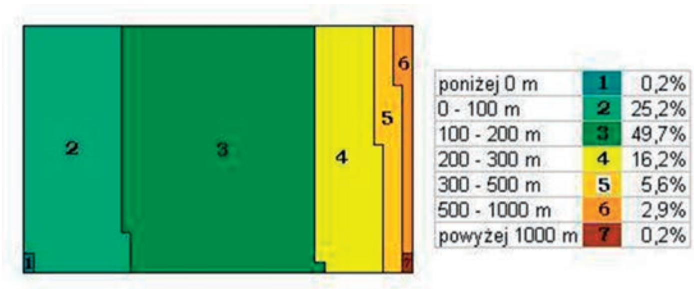
2. Słupkowe - np. wybory nazwy drużyny harcerskiej, o wyniku decyduje wysokość słupka.



3. Powierzchniowe (np. w geografii).



4. Prostokątny (np. diagram prostokątny ukształtowania powierzchni Polski).



5. Liniowy – zmiana w czasie (np. wyniki sprzedaży aut).

Dzięki diagramom „widzimy”

Dane przedstawione w postaci graficznej są bardziej zrozumiałe i ułatwiają analizę przedstawionych w ten sposób informacji.

Na zajęciach komputerowych poznasz arkusz kalkulacyjny, który umożliwia graficzną prezentację danych liczbowych.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

4. OBLICZANIE PROCENTU DANEJ LICZBY

Aby obliczyć procent danej liczby, należy liczbę procent zapisać w postaci ułamka i pomnożyć go przez daną liczbę.

Przykład 1

Ile wynosi 20% z liczby 50?

Przykład 2

Sebastian kupił 15 gruszek. 20% z nich zjadł. Ile gruszek zjadł Sebastian?

Aby łatwiej wyobrazić sobie mnożenie przez procent, można zamieniać go na ułamek dziesiętny lub na ułamek zwykły, który można skrócić, a następnie wykonać mnożenie.

Przykład 3

Dominik miał 20 zł. 25% swoich pieniędzy wydał na jabłka. Ile pieniędzy wydał Dominik na jabłka?

I sposób: $25\% \cdot 20 = \frac{25}{100} \cdot 20 = \frac{1}{4} \cdot 20 = \frac{20}{4} = 5$

II sposób: $25\% \cdot 20 = 25 \cdot \frac{1}{100} \cdot 20 = 500 \cdot \frac{1}{100} = \frac{500}{100} = 5$

Odpowiedź: Dominik wydał na jabłka 5 zł.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

5. OBLICZANIE LICZBY, GDY DANY JEST JEJ PROCENT

Przykład 1

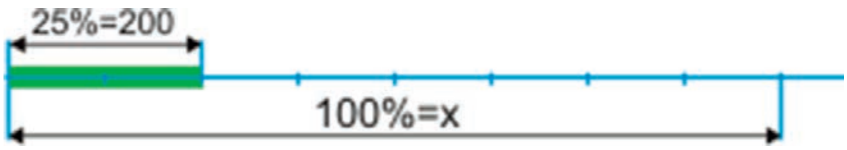
W klasie 4c - 12 dziewczynek stanowi 40% klasy. Ile uczniów ma klasa 4c?
Rozwiązanie:

40% - 12
10% - 3
100% - 30

Odpowiedź: W klasie 4c jest 30 uczniów.

Przykład 2

Obliczymy liczbę, której 25% to 200



I sposób:

X – szukana liczba (100%)
25% liczby x to 200,
więc: $\frac{1}{4}$ z X to 200, czyli $\frac{1}{4}X = 200$ | dzielimy przez $\frac{1}{4}$ obie strony

$x = 200 : \frac{1}{4}$

$x = 200 \cdot 4$

$x = 800$

II sposób:

Cała liczba to 100%
25% liczby to 200
1% to 25 razy mniej, czyli $\frac{200}{25} = 8$

100% to 100 razy więcej niż 1%, 100% wynosi $8 \cdot 100 = 800$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 3

Zosia miała 2 czerwone jabłka, które stanowiły 25 % wszystkich jej jabłek. Ile jabłek ma Zosia?
Oznaczmy sobie całość jabłek literką „x”, wtedy x·25% = 2

$25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$, a więc $x \cdot 25\% = \frac{1}{4} = 2$ | mnożymy teraz obydwie strony przez 4

$x \cdot \frac{1}{4} \cdot 4 = 2 \cdot 4$, $x = 8$

Odpowiedź: Szukana przez nas liczba, która oznacza ilość wszystkich jabłek to 8.

Przykład 4

Heniek kupił winogrona. Białych było 13 sztuk, co stanowiło 10% wszystkich kupionych przez niego winogron. Ile winogron kupił Heniek?

10% = 13

100% = 13·10 = 130

Odpowiedź:

Wszystkich winogron było 130

Przykład 5

W klasie Jacka było 12 chłopców, którzy stanowili 60% wszystkich dzieci w klasie. Ile było dzieci w klasie Jacka?

60% = 12

10% = 2

100% = 20

Odpowiedź:

W klasie Jacka było 20 dzieci.

Przykład 6

Do szkoły dojeżdża rowerami 3 % uczniów, czyli 24 osoby. Ilu uczniów liczy szkoła?
W tym przykładzie możemy obliczyć w łatwy sposób, ile wynosi 1%, a następnie pomnożyć otrzymaną liczbę przez 100.

$$3\% = 24$$
$$1\% = \frac{24}{3} = 8$$
$$100\% = 8 \cdot 100 = 800$$

Odpowiedź: Szkoła liczy 800 uczniów.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 7

Franek zbierał naklejki i aż 45 z nich było unikatowych, co stanowiło 30% całej jego kolekcji.
Ile Franek miał wszystkich naklejek?

30% to 45
30% : 3 to 45 : 3
10% to 15
100% to 150

Odpowiedź: Franek miał 150 naklejek.

Przykład 8

Magda miała 12 wstążek. Olga zauważyła, że to 150% liczby wstążek. Ile wstążek ma Olga?

150% to 12
50% to 4
100 % to 8

Odpowiedź: Olga ma 8 wstążek.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

6. IDZIEMY NA ZAKUPY - OBNIŻKI I PODWYŻKI

Bardzo często spotykamy się z pojęciem rabatu. Rabat to procent, o jaki została obniżona cena towaru.

Obniżki cen

Aby ustalić, jaka jest nowa cena po obniżce, obliczamy kwotę obniżki i odejmujemy od dotychczasowej ceny.

Przykład 1

Gdy masz kupić buty kosztujące 150 zł, których cenę obniżono o 10%, to obliczasz 10% ze 150 zł a potem odejmujesz wynik od 150 zł.

150 zł to 100%

15 zł to 10%

Cena po obniżce to **150 zł - 15zł = 135 zł**.

Inaczej - to 90% starej ceny, czyli 90% ze 150 zł.

Podwyżki cen

Aby ustalić, jaka jest nowa cena po podwyżce, obliczamy kwotę podwyżki i dodajemy do dotychczasowej ceny.

Przykład 2

Gdy masz kupić buty kosztujące 150 zł, których cenę podwyższono o 10%, obliczasz 10% ze 150 zł a wynik dodajesz do 150 zł.

150 zł to 100%

15 zł to 10%

Cena po podwyżce to **150 zł + 15 zł = 165 zł.**

Inaczej - to 110% starej ceny.

Obniżka i podwyżka o ten sam procent

Zadanie 1

Rower kosztuje 400 zł. Najpierw cenę podwyższono o 10%, a po sezonie obniżono o 10%. Czy po sezonie cena była wyższa, czy niższa od początkowej?

Jeżeli cenę pewnego towaru obniżono o pewien procent, a potem podniesiono o ten sam procent, to końcowa cena nie jest taka sama jak początkowa.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

NOTATKI

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

1. LICZBY DODATNIE I UJEMNE

1.1. Liczby dodatnie i ujemne

Liczby całkowite mogą być dodatnie bądź ujemne. W klasie piątej poznaliście liczby ujemne na osi liczbowej i praktyczne zastosowanie zapisu temperatury przy pomocy liczb ujemnych – temperatury ujemne.

W klasie szóstej będziemy też dodawać i odejmować liczby dodatnie i ujemne. Będziemy wykonywać działania: mnożenie i dzielenie liczb dodatnich i ujemnych.

Uwaga: zero nie jest liczbą ani dodatnią, ani ujemną

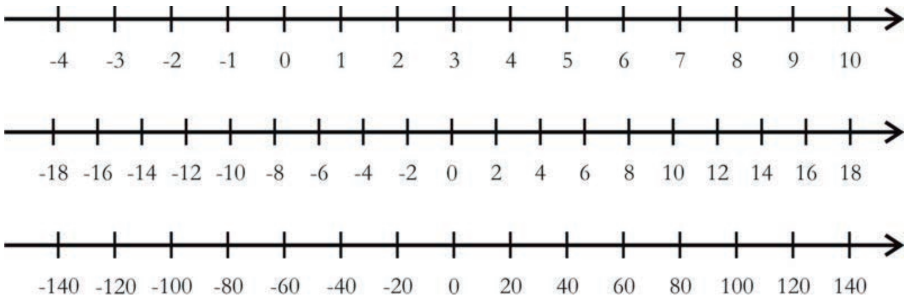
1.2. Liczby całkowite na osi liczbowej

Na osi liczbowej zaznaczamy zero i liczby dodatnie z prawej strony zera i liczby ujemne z lewej strony zera.

Oś liczbowa to, mówiąc matematycznym językiem, prosta, na której wyróżniono zwrot i punkt zwany zerowym oraz ustalono odcinek jednostkowy.

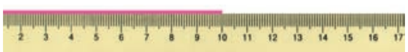
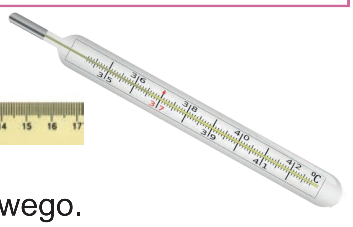
Przykład 1

Na osiach narysowanych poniżej przyjęto różne jednostki. Przyjrzyj się im i określ, jakie wielkości można opisać (pokazać) przy pomocy każdej z tych osi



Z osiami mamy do czynienia w codziennym życiu:

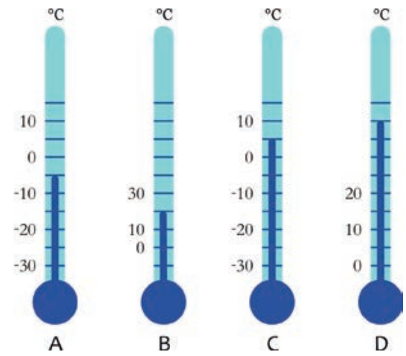
- sprawdzając temperaturę na tradycyjnym termometrze
- używając linijki i miarki krawieckiej,
- na osi możemy przedstawiać lata,
- określając wysokości od poziomu morza, czyli poziomu zerowego.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
WPQ
TOMP
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

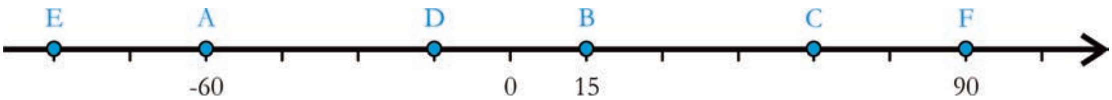
Ćwiczenie 1

Odczytaj, jakie temperatury pokazują termometry:

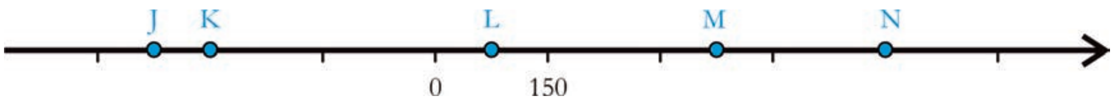


Ćwiczenie 2

Jakie liczby odpowiadają poszczególnym punktom na narysowanych osiach liczbowych?



E = D = C =



J = K = L = M = N =

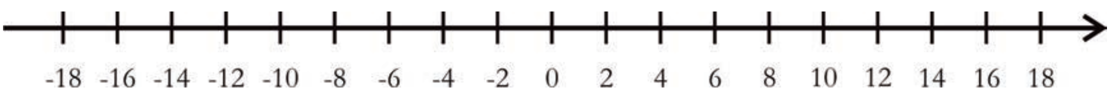
Ćwiczenie 3

a. Podaj dziesięć liczb takich, że pierwsza z nich to 4, a każda następna jest o 2 mniejsza od poprzedniej.
b. Podaj dziesięć liczb takich, że pierwsza z nich to 15, a każda następna jest o 3 większa od poprzedniej.

Ćwiczenie 4

Która z podanych liczb jest mniejsza, a która większa, zapisz odpowiednio < lub >

Przykład: -10 < -6, możesz to zauważyć na osi liczbowej:



Zaznacz najpierw podane liczby na osiach, a później porównaj:

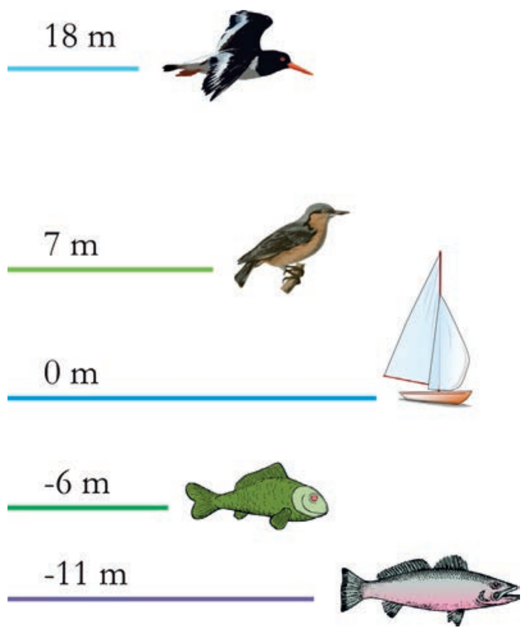
-7 ..... -3 -11 ..... -16 -8 ..... -6 5 ..... -2 10 ..... -1

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 5

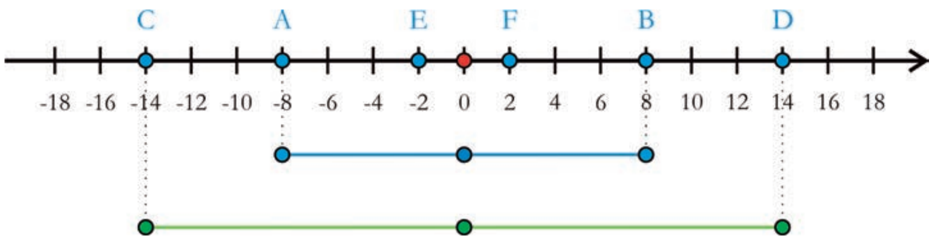
Liczby na rysunku oznaczają położenie względem poziomu morza. Oblicz, jaka jest odległość (różnica wysokości):

a. między ptakiem na gałęzi a żaglówką
b. między ptakiem, który frunie a zieloną rybką
c. między rybkami
d. między żaglówką a zieloną rybką



1.3. Liczby przeciwne

Liczby, które znajdują się w tej samej odległości od zera na osi liczbowej nazywają się liczbami przeciwnymi



Punkty **A** i **B** znajdują się w tej samej odległości od zera: odległość wynosi 8 jednostek
Liczbą przeciwną do 8 jest -8

Punkty **C** i **D** znajdują się w tej samej odległości od zera: odległość wynosi 14 jednostek
Liczbą przeciwną do 14 jest -14

Punkty **E** i **F** znajdują się w tej samej odległości od zera: odległość wynosi 2 jednostki
Liczbą przeciwną do 2 jest -2

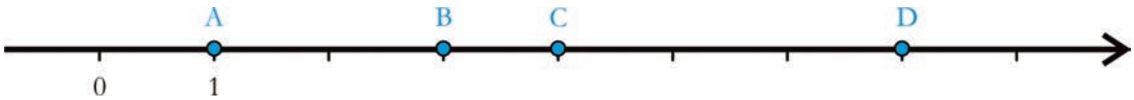
Liczbą przeciwną do 0 jest 0

Ćwiczenie 1

Jednakowymi kolorami zaznaczono odcinki leżące w równej odległości od zera. Określ liczby przeciwne zaznaczone w ten sposób.

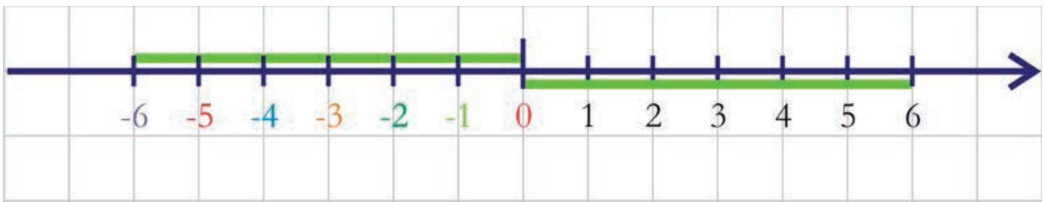
Ćwiczenie 2

Wyznacz, jakim liczbom odpowiadają punkty B, C, D i zaznacz na osi liczby do nich przeciwne.



1.4. Wartość bezwzględna liczby całkowitej

Odległość liczby od zera na osi liczbowej nazywamy wartością bezwzględną liczby.



Odległość liczby -6 od zera wynosi 6, czyli **wartość bezwzględna** liczby -6 wynosi 6.

Odległość liczby 6 od zera wynosi 6, czyli **wartość bezwzględna** liczby 6 wynosi 6.

Odległość, tak jak długość, musi być zawsze liczbą dodatnią,
- wartość bezwzględna jest też zawsze liczbą dodatnią.

wartość bezwzględną liczby a zapisujemy: $|a|$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ TOMP UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 1

wartość bezwzględna liczby -6 wynosi 6

$|-6| = 6$

wartość bezwzględna liczby 6 wynosi 6

$|6| = 6$

Przyjrzyj się odległości od zera liczb -12, 12, -24 i 24 na danej osi, ile wynoszą wartości bezwzględne tych liczb ?

Wartości bezwzględne liczb przeciwnych są równe.

Ćwiczenie 1

Oblicz:

$|-15|$ $|76|$ $|-38|$ $-|155|$

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie dla odważnych.
Oblicz:

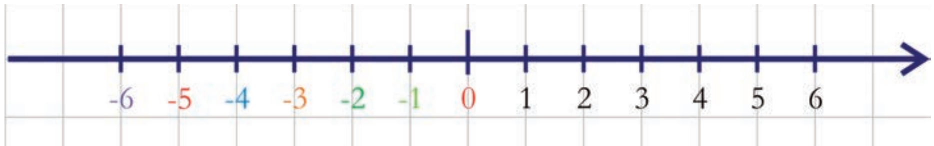
$-|-10|$ $|-(-58)|-|-(-217)|$

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie dla odważnych. Która z poniższych liczb jest największa?

$-|0{,}74|$ $|0{,}75|$ $|-0{,}76|$ $|-0{,}78|$ $-|1\frac{3}{4}|$

2. DODAWANIE LICZB CAŁKOWITYCH



$(-1) + 1 = 0$

$(-3) + 3 = 0$

$(-5) + 5 = 0$

$(-6) + 6 = 0$

Suma liczb przeciwnych jest równa zero.

W wyniku dodawania liczb całkowitych dodatnich i ujemnych możemy otrzymać liczbę dodatnią lub ujemną.

Wynikiem dodawania liczb ujemnych jest liczba ujemna.

Możemy to wytłumaczyć na przykładzie długu w sklepiku szkolnym.

Przykład 1

Wojtkowi zabrakło 2 zł na zakup soku i batonika.
Pani sprzedała mu towar, ale był winny 2 zł – czyli miał 2 zł długu.

Następnego dnia nie oddał w sklepiku 2 zł – czyli nie spłacił długu, i kupił na kredyt lizaka za 1 zł - dług wzrósł o 1 zł.

Można zapisać to działaniem: **(-2 zł) + (-1 zł) = (-3 zł)**.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 2

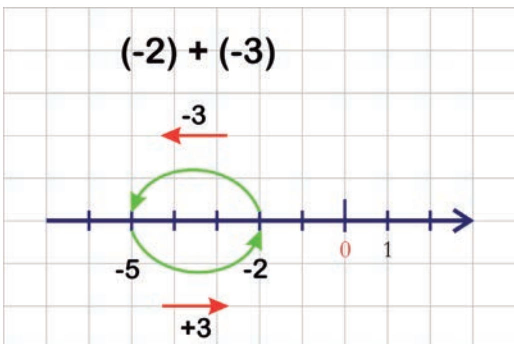
-7	-5	(-7) + (-5) = (-12)
dług 7 zł	dług 5 zł	dług 12 zł
-10	-3	(-10) + (-3) = (-13)
dług 10 zł	dług 3 zł	dług 13 zł

Ćwiczenie 1

Uzupełnij tabelkę. Oblicz, ile długu mają dzieci w sklepiku szkolnym. Ile to jest w sumie pieniędzy?

	wrzesień	październik	razem	działanie
Marta	1 zł	3 zł	4 zł	(-1) + (-3) = (-4)
Zosia	2 zł	2 zł		(-2) + (-2) =
Kuba	4 zł	2 zł		
Mirek	3 zł	1 zł		
Ela	4 zł	3 zł		
Razem	**14 zł**			

Dodawanie liczb ujemnych można też przedstawić graficznie na osi liczbowej:

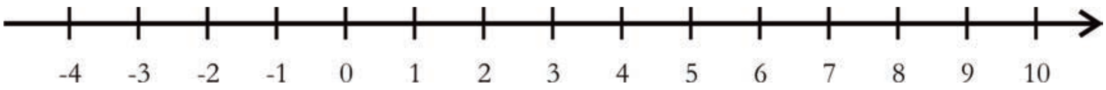


- dodając liczbę **ujemną** zawsze przesuwamy się na osi w lewo,
- dodając liczbę **dodatnią** zawsze przesuwamy się w prawo.

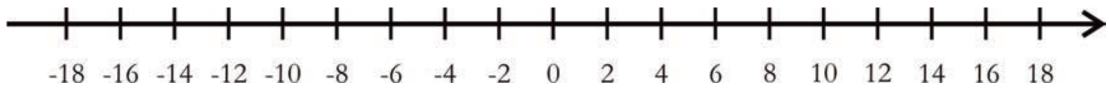
Ćwiczenie 2

Narysuj na osiach ilustrację graficzną działań i zapisz wynik tych działań:

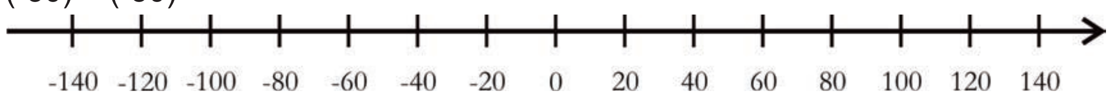
(-1) + (-2) =



(-6) + (-8) =



(-30) + (-50) =



Dodając liczby całkowite o różnych znakach, możemy otrzymać wynik dodatni lub ujemny.

Przykład 3

(-8) + 17 = 17 – 8 = 9 $|-8| = 8$ i 17 > 8

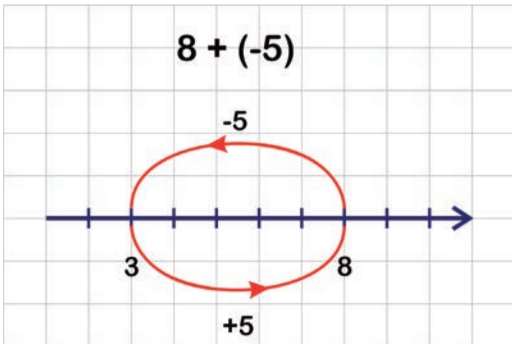
(-6) + 13 = 13 – 6 = 7 $|-6| = 6$ i 13 > 6

Jeżeli do liczby dodatniej dodajemy ujemną, możemy zapisać działanie:

25 + (-7) = 25 – 7 = 18

16 + (-9) = 16 – 9 = 7

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



Dodając więcej niż dwa składniki, możemy dodać oddzielnie składniki dodatnie i ujemne, a potem obliczyć sumę otrzymanych wyników.

Przykład 4

(-5) + 7 + (-9) + 4 + (-3) + 10 + (-1) = (-18) + 21 = 3

6 + (-13) + 5 + (-7) + 26 = 37 + (-20) = 37 – 20 = 17

Ćwiczenie 3

Oblicz sprytnie:

(-5) + 12 + (-6) =

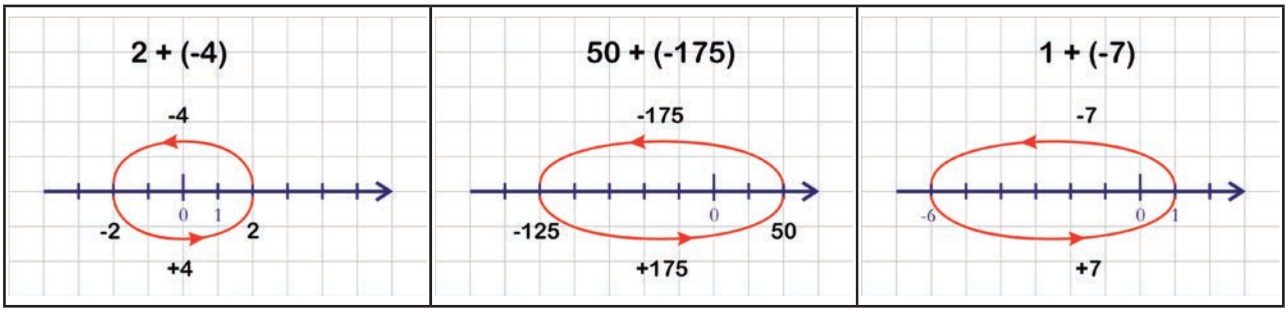
(-9) + (-11) + 11 + 18 =

(-24) + 9 + (-9) + 32 =

123 + 56 + (-100) + (-50) =

Jeżeli dodajemy takie liczby, w których wartość bezwzględna liczby ujemnej jest większa niż liczba dodatnia, to wynik dodawania tych liczb jest ujemny.

(-6) + 4 = (-2) $|-6| = 6$ i 6 > 4



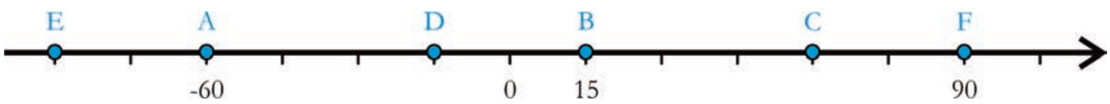
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 4

Jaką liczbę musimy dodać do liczby A, aby otrzymać liczbę D ?

Jaką liczbę musimy dodać do liczby A, aby otrzymać liczbę B ?

Jaką liczbę musimy dodać do liczby F, aby otrzymać liczbę E ?

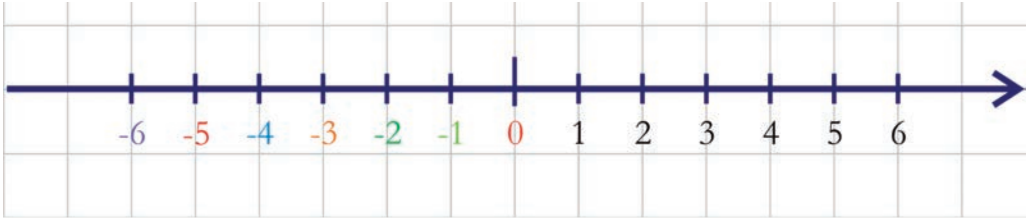


Zaproponuj inne pytanie wymagające działań wykorzystujących współrzędne punktów na tej osi liczbowej.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

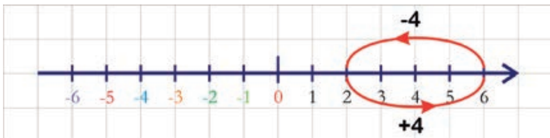
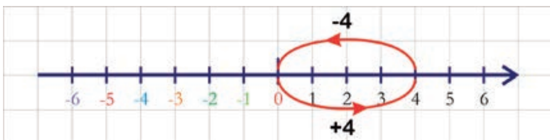
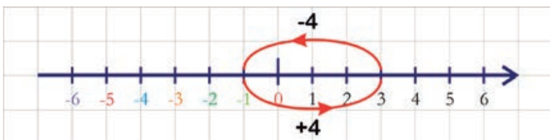
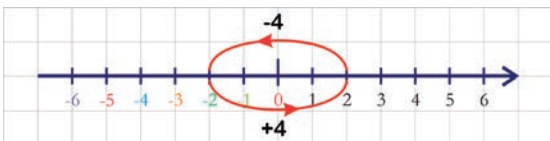
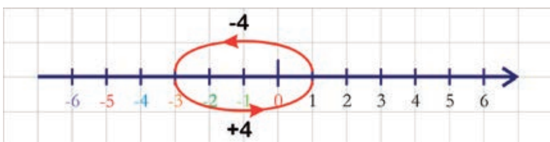
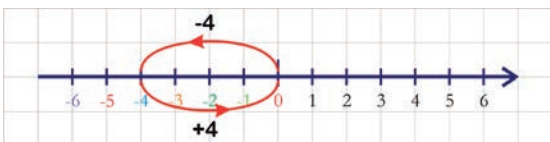
3. ODEJMOWANIE LICZB CAŁKOWITYCH

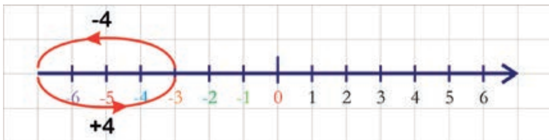
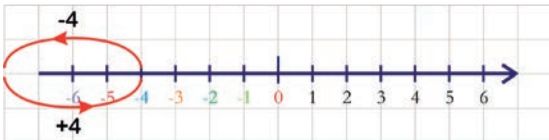
Znajdźmy dla liczb zaznaczonych na osi liczbę o 4 mniejszą:



Przedstawimy odejmowanie liczby 4 na grafach

Odejmując liczbę, przesuwamy się na osi liczbowej w lewą stronę, sprawdzamy wynik działania dodawaniem, na osi przesuwamy się w prawo.

6 – 4 = 2		6 + (-4) = 2
5 – 4 = 1		5 + (-4) = 1
4 – 4 = 0		4 + (-4) = 0
3 – 4 =		3 + (-4) =
2 – 4 =		2 + (-4) =
1 – 4 =		1 + (-4) =
0 – 4 =		0 + (-4) =

- 1 – 4 =		-1 + (-4) =
- 2 – 4 =		-2 + (-4) =
- 3 – 4 =		-3 + (-4) =
- 4 – 4 =		-4 + (-4) =

Odejmowanie liczby możemy przedstawić przy pomocy dodawania liczby przeciwnej do odjemnika.

W naszych przykładach odejmowaliśmy 4, liczba przeciwna do 4 to (-4).

ZAPAMIĘTAJ:

- (+4) = + (-4)
znak plus przy zapisie liczb dodatnich pomijamy:
- 4 = + (-4)

Ćwiczenie 1

Zapisz odejmowanie przy pomocy dodawania liczby przeciwnej i oblicz:

7 - 10 =

12 - 17 =

45 - 53 =

128 - 200 =

-15 - 14 =

-35 - 28 =

-67 - 43 =

-197 - 203 =

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ TOMP UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 1

a. Mamy obliczyć 4 - (- 3), zamiast odejmować liczbę, możemy dodać liczbę do niej przeciwną, liczbą przeciwną do (-3) jest 3, 4 - (- 3) = 4 + 3 = 7

b. 5 - (-2) = 5 + 2 = 7
c. -6 - (-5) = -6 + 5 = -1
d. 75 - (-100) = 75 + 100 = 175
e. -19 - (-39) = -19 + 39 = 39 + (-19) = 39 - 19 = 20

W tym przykładzie skorzystaliśmy z prawa przemienności dodawania.

Ćwiczenie 2

Zapisz odejmowanie przy pomocy dodawania liczby przeciwnej i oblicz. Skorzystaj z prawa przemienności dodawania:

-6 - (-9) =

-16 - (-10) =

-43 - (-72) =

-94 - (-36) =

-108 - (-92) =

Ćwiczenie 3

Zapisz odejmowanie przy pomocy dodawania liczby przeciwnej i oblicz:

(-6) - 2 - (-15) =

19 - 11 - (-11) =

25 - (-15) - (-35) =

58 - (-120) - 68 - (-17) =

Ćwiczenie 4

Mamy dwie liczby a = -6 i b = -9, która różnica jest większa: a - b czy b - a?

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ Tomasz Jakubowski TOMP UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 5

Wysokość miejsc na Ziemi określa się względem poziomu morza. Najwyższy szczyt w Polsce to Rysy, ma on wysokość 2499 m n.p.m. (skrót n.p.m. czytamy: nad poziomem morza), Żuławy Wiślane są położone na wysokości (-1,8) m n.p.m. (czyli 1,8 m poniżej poziomu morza).

W tabelce są informacje o położeniu jezior względem poziomu morza. Wykonaj odpowiednie działanie i oblicz, jaką głębokość ma każde z tych jezior.

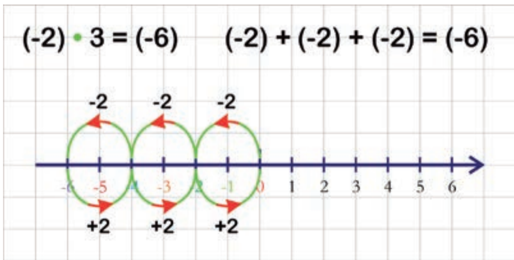
Zrób rysunki pomocnicze.

JEZIORO	Wysokość tafli wody w zaokrągleniu do 1 m	Wysokość najniżej położonego punktu dna w zaokrągleniu do 1m	Głębokość jeziora w zaokrągleniu do 1 m
Śniardwy	116 m n.p.m.	93 m n.p.m.	23 m
Mamry	116 m n.p.m.	72 m n.p.m.	44 m
Wigry	132 m n.p.m.	58 m n.p.m.	
Gopło	77 m n.p.m.	60 m n.p.m.	
Hańcza	227 m n.p.m.	121 m n.p.m.	
Bajkał (Rosja)	455 m n.p.m.	-1165 m n.p.m.	
Tanganika (Afryka Wschodnia)	773 m n.p.m.	-662 m n.p.m.	
Genezaret (Izrael)	-209 m n.p.m.	-252 m n.p.m.	

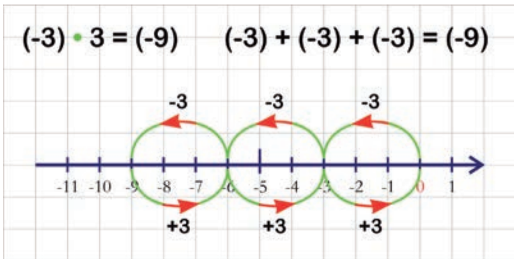
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

4. MNOŻENIE I DZIELENIE LICZB CAŁKOWITYCH

Na tej lekcji będziemy obliczać iloczyny i ilorazy liczb całkowitych. Wiemy, że mnożenie możemy zastąpić dodawaniem. Przedstawmy mnożenie liczby dodatniej i ujemnej na grafach.



(-2) • 3 = 3 • (-2) = (-6) - **mnożenie jest przemienne**



(-3) • 3 = 3 • (-3)

Wynik mnożenia liczby dodatniej i ujemnej jest liczbą ujemną.

Ćwiczenie 1

Zapisz mnożenie przy pomocy dodawania i oblicz:

7 • (-3) =	(-5) • 5 =	-15 • 3 =	6 • (-4) =
12 • (-2) =	8 • (-4) =	-35 • 2 =	9 • (-7) =

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 1

a. (-6) • (-5) = 30

b. (-5) • (-2) = 10

Wynik mnożenia liczby ujemnej przez liczbę ujemną jest liczbą dodatnią.

Ćwiczenie 2

Oblicz, pamiętając o regule: wynik mnożenia liczby ujemnej przez liczbę ujemną jest liczbą dodatnią.

-6 • (-9) =

-4 • (-7) =

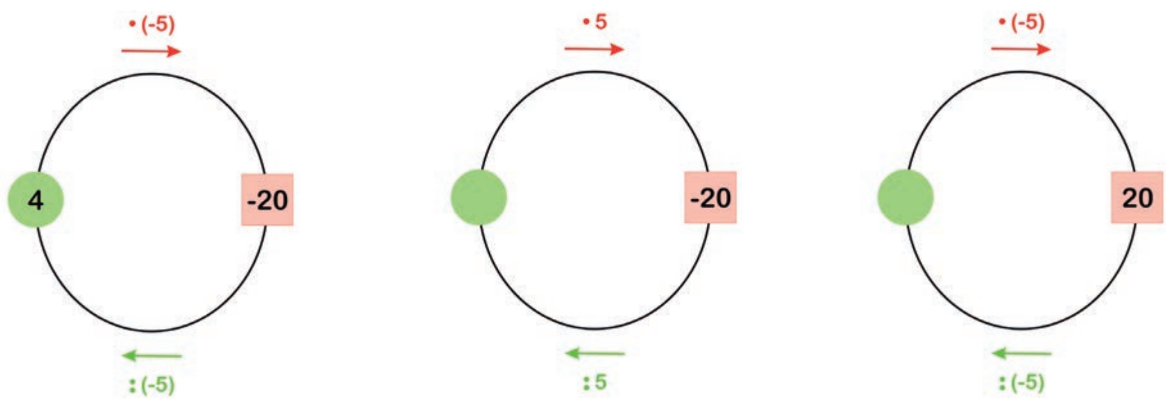
-18 • (-3) =

- 16 • (-10) =

-9 • (-6) =

4.1. Iloraz liczb całkowitych

Na grafach przedstawione jest mnożenie i dzielenie. Jakimi liczbami należy uzupełnić grafy? Wykonaj odpowiednie mnożenie.



Wynik dzielenia liczby dodatniej przez liczbę ujemną lub ujemnej przez dodatnią jest liczbą ujemną.
Wynik dzielenia liczby ujemnej przez ujemną jest liczbą dodatnią.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 1

12 : (-3) = (-4), bo (-4) • (-3) = 12

(-24) : (-4) = 6, bo 6 • (-4) = (-24)

(-15) : 5 = (-3), bo (-3) • 5 = (-15)

(-100) : (-25) = 4, bo 4 • (-25) = (-100)

Znak liczby a	Znak liczby b	Znak iloczynu a • b	Znak ilorazu a : b
+	+	+	+
+	-	-	-
-	+	-	-
-	-	+	+

Iloczyn i iloraz dwóch liczb o jednakowych znakach jest dodatni.
Iloczyn i iloraz dwóch liczb o przeciwnych znakach jest ujemny.

Ćwiczenie 1

Oblicz, pamiętając, że :
- iloczyn i iloraz dwóch liczb o jednakowych znakach jest dodatni,
- iloczyn i iloraz dwóch liczb o przeciwnych znakach jest ujemny.

35 : (-7) =

(-56) : 7 =

(-45) : (-9) =

48 : (-4) =

(-81) : 9 =

(-144) : (-12) =

60 : (-15) =

(-320) : 4 =

(-169) : (-13) =

125 : (-5) =

(-1800) : 90 =

(- 225) : (-15) =

4.2. Mnożenie więcej niż dwóch czynników

Iloczyn więcej niż dwóch liczb całkowitych.

Przykład 1

Sprawdźmy, które z iloczynów są liczbami ujemnymi, wiedząc, że:
(+2) • (+3) •(+4) • (+5) = (+120)

(-2) • (+3) • (+4) • (+5) = -120	jeden czynnik jest ujemny
(-2) • (-3) • (+4) • (+5) = 120	dwa czynniki są ujemne
(-2) • (-3) • (-4) • (+5) = -120	trzy czynniki są ujemne
(-2) • (-3) • (+4) • (+5) = 120	dwa czynniki są ujemne
(-2) • (+3) • (-4) • (+5) = 120	dwa czynniki są ujemne
(+2) • (-3) • (-4) • (-5) = -120	trzy czynniki są ujemne
(+2) • (+3) • (-4) • (-5) = 120	dwa czynniki są ujemne
(+2) • (+3) • (+4) • (-5) = -120	jeden czynnik jest ujemny
(+2) • (-3) • (+4) • (+5) = -120	jeden czynnik jest ujemny
(-2) • (+3) • (-4) • (+5) = 120	dwa czynniki są ujemne

Jeżeli w iloczynie występuje parzysta liczba czynników ujemnych, to iloraz jest dodatni.

Jeżeli w iloczynie występuje nieparzysta liczba czynników ujemnych, to iloraz jest ujemny.

Przykład 2

(-3) • 5 • (-6) = 90

(-4) • (-5) • (-3) = -60

8 • (-2) • (-12) • 0 = 0

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 1

a. Czy iloczyn dwudziestu liczb ujemnych jest liczbą dodatnią czy ujemną?
b. Czy iloczyn stu liczb ujemnych jest dodatni?
c. Jaki znak ma iloczyn pięćdziesięciu pięciu liczb ujemnych?

Ćwiczenie 2

Oblicz, pamiętając o kolejności wykonywania działań:
a. (-96) + (-69) • (-1) – (-5) : 5 =
b. [(-96) + (-69) • (-1) – (-5)] : 5 =
c. [(-96) + (-69)] • (-1) – (-5) : 5 =
d. (-96) + (-69) • [(-1) – (-5) : 5] =

NOTATKI

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

1. WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

Wyrażenia algebraiczne – to wyrażenie zbudowane z liczby i litery połączone znakami działań, np.:

$4 \cdot x$ $2 + 2b$
$2 \cdot a \cdot b$ $7x - 8y$

W wyrażeniach algebraicznych, w których występuje mnożenie, często nie zapisuje się kropki oznaczającej iloczyn.
Zapisujemy po prostu **2x** zamiast **2 · x**.
Ten pierwszy zapis jest po prostu krótszy, a oznacza dokładnie to samo.
Podobnie w życiu - powiemy, że „mamy 2 pomarańcze", a nie „mamy 2 razy jedną pomarańczę".

Za pomocą wyrażeń algebraicznych zapisujemy różne zwroty matematyczne, wzory, twierdzenia oraz równania i nierówności.

Przykład 1

Wzór na pole prostokąta o bokach a i b: **P = a·b**, często spotkasz zapis: **P = ab**
Wzór na obwód prostokąta o bokach a i b: **O = 2a+2b**

Nazwy wyrażeń algebraicznych możemy zapisać słownie:

Zapis matematyczny	Zapis słowny
$a + b$	suma liczb *a* i *b*
$a - b$	różnica liczb *a* i *b*
$x \cdot y$	iloczyn liczb *x* i *y*
$x : y$	iloraz liczb *x* i *y*
$2e$	podwojona liczba *e*
$3n$	liczba trzy razy większa od *n*
$0,5z$; $\frac{1}{2}z$	połowa liczby *z*
$x - 16$	liczba o 16 mniejsza od *x*
x^2	kwadrat liczby *x*
$a^2 + b^2$	suma kwadratów liczb *a* i *b*
$(a + b)^2$	kwadrat sumy liczb *a* i *b*
$x^3 - y^3$	różnica sześcianów liczb *x* i *y*
$(2z)^2 - 0,5y^3$	różnica kwadratu podwojonej liczby *z* i połowy sześcianu liczby *y*

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Jednomianem nazywamy wyrażenie algebraiczne, w którym występują liczby i zmienne połączone znakiem mnożenia (zmienne to wszystkie litery występujące w wyrażeniu, np.: x, y, z ,k, a, b).

Przykład 2

Jednomiany:

$-2x$ $4y$

ab $12k \cdot 7z$

Przykład 3

Jednomiany podobne:

$7ab$ i $2ab$

$23xyz$ i $3xyz$

$2at^2$ i $12at^2$

Dwa jednomiany nazywamy **przeciwnymi**, jeśli są podobne i ich współczynniki liczbowe są liczbami przeciwnymi.

Przykład 4

Jednomiany przeciwne:

$-2x^2y^2$ i $2x^2y^2$

ax i $-ax$

Przykład 5

Porządkowanie jednomianów:

a. $(-3a) \cdot (-2c) = (-3) \cdot (-2) \cdot a \cdot c = 6ac$

b. $bxbx = b \cdot b \cdot x \cdot x = b^2x^2$

c. $c \cdot (-3) \cdot b \cdot d = -3bcd$

Porządkowanie jednomianu:
Liczby zapisujemy na początku jednomianu.
Iloczyny tych samych zmiennych zapisujemy w postaci potęg.
Czynniki literowe (zmienne) zapisujemy w kolejności alfabetycznej.

Wielomianem nazywamy wyrażenie algebraiczne będące sumą jednomianów. Jednomiany, które dodajemy, nazywamy wtedy wyrazami wielomianu.

Przykład 6

Wielomiany:

$2a + (-2ab) + 3abx^2$ $17ab + 21ty - 36mn$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ TOMP UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

2. OBLICZANIE WARTOŚCI WYRAŻEŃ ALGEBRAICZNYCH

Aby obliczyć wartość liczbową wyrażenia algebraicznego, należy w miejsce litery (zmiennej) podstawić dane (odpowiednią liczbę):

Przykład 1

$3x + 1$ dla $x = 2$ ma wartość: $3 \cdot 2 + 1 = 6 + 1 = 7$

$3x + 1$ dla $x = 3$ ma wartość: $3 \cdot 3 + 1 = 9 + 1 = 10$

$3x + 1$ dla $x = 12$ ma wartość: $3 \cdot 12 + 1 = 36 + 1 = 37$

W miejsce liter występujących w wyrażeniu algebraicznym możemy podstawić różne liczby. Otrzymujemy wtedy wartości liczbowe wyrażeń algebraicznych dla różnych wartości zmiennych.

Przykład 2

Wyznaczymy wartość wyrażenia: $2x^2 - 3x + 8$ dla $x = -3$

$2 \cdot (-3)^2 - 3 \cdot (-3) + 8 = 2 \cdot 9 + 9 + 8 = 18 + 9 + 8 = 35$

Zadanie 1

Oblicz wartość liczbową wyrażenia:

a. $2x - 4$ dla $x = 3$

b. $y + 8$ dla $y = 15$

c. $-2x + 12$ dla $x = 5$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
WPQ
Tomasz Jakubowski TOMP
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

3. UPRASZCZANIE WYRAŻEŃ ALGEBRAICZNYCH

Wyrażenie algebraiczne, które powstaje przez dodawanie jednomianów, nazywamy sumą algebraiczną.
Sumy algebraiczne nazywane są tez wielomianami.
Jednomiany, które dodajemy, nazywamy wyrazami sumy.

Przykład 1

Sumę algebraiczną:
$2a + 5x + (-7ab) + (-2)$
można zapisać bez nawiasów:
$2a + 5x - 7ab - 2$

Wyrazami tej sumy są jednomiany:
$2a$
$5x$
$7ab$
2

Przykład 2

Jednomiany podobne:
$bc \cdot 3$
$-5cb$
bc

Jednomiany niepodobne:
$2ab^2$
$2ab^3$
$2ab$

Po dodaniu wyrazów podobnych otrzymujemy prostszą postać sumy algebraicznej.
Takie upraszczanie wielomianu nazywamy **redukcją wyrazów podobnych**.
$3x - 5x + x = -x$

Przykład 3

Dodawanie wyrazów podobnych polega na dodawaniu współczynników liczbowych tych wyrazów:

$$9x - 2y + 3x + 4y = 9x + 3x - 2y + 4y = 12x + 2y$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ TOMP UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

4. MNOŻENIE I DZIELENIE SUM ALGEBRAICZNYCH PRZEZ LICZBY

Zadanie 1

Zestaw materiałów dla ucznia zawiera:
piórnik, linijkę, ekierkę, cyrkiel, kątomierz, 2 zeszyty 32-kartkowe w kratkę, 2 zeszyty 32-kartkowe gładkie.

Uczniowie postanowili sprawdzić ile będą kosztowały takie zestawy dla 23-osobowej klasy w kilku sklepach.

Zaproponuj sposób porównania tych kosztów.

Jakiego narzędzia (programu informatycznego) użyjesz, żeby szybko porównać ceny poszczególnych zestawów w różnych sklepach?

Do rozwiązania powyższego zadania należy utworzyć proste wyrażenie algebraiczne. Podczas kolejnych lekcji przypomnimy zasady dotyczące wyrażeń algebraicznych.

Mnożąc sumę algebraiczną przez jednomian, korzystamy z prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania.

Przykład 1

Każdy składnik sumy znajdujący się w nawiasie należy pomnożyć przez jednomian znajdujący się poza nawiasem:

$5(a + b) = 5a + 5b$

$(a + b)A = Aa + Ab$

$4n(2 + 3n) = 8n + 12n^2$

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Czynnością odwrotną do mnożenia sum algebraicznych przez jednomian jest **wyłączanie wspólnego czynnika poza nawias**.

Przykład 2

$2a + 4b - 8 + 10 =$ W tej sumie każdy składnik jest podzielny przez 2.

$= 2(a + 2b - 4 + 5)$ Korzystając z prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania, wyłączamy poza nawias wspólny czynnik „2".

Dzieląc sumę algebraiczną przez jednomian, korzystamy z prawa rozdzielności dzielenia względem dodawania.

Przykład 3

$(12x - 4) : 4 = 3x - 1$:

$(24x + 8) : 2 = 12x + 4$

$(8a + 10) : (-2) = -4a + (-5) = -4a - 5$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

5. RÓWNANIE I LICZBA SPEŁNIAJĄCA RÓWNANIE

Równaniem nazywamy równość dwóch wyrażeń algebraicznych.

Równania służą do rozwiązywania wielu zagadnień z matematyki, fizyki i innych dziedzin. Będziemy się zajmować **równaniami z jedną niewiadomą**.

Litera w równaniu oznacza liczbę, której nie znamy – **niewiadomą**.

Przykład 1

$z + 5 = 35$
$2x - 7 = 12$
$3x + 5 = 12$
$x^2 - 12 = 4$
$17 - y^3 = 9$

Równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą:
$z + 5 = 35$
$2x - 7 = 12$
$3x + 5 = 12$

Liczba spełnia równanie, jeśli po podstawieniu jej w miejsce niewiadomej otrzymujemy równość prawdziwą.

Przykład 2

Jeśli do równania $2x - 8 = 12$, podstawimy w miejsce niewiadomej x liczbę 10, to otrzymamy równość: $2 \cdot 10 - 8 = 12$.

Ta równość jest prawdziwa. Zatem liczba 10 spełnia to równanie.

Równanie stopnia pierwszego z jedną niewiadomą może być:

- spełnione tylko przez jedną liczbę:
np.: równanie $2x + 5 = 1$ - spełnia tylko jedna liczba: -2

- spełnione przez każdą liczbę:
np.: równanie $2x + 1 = 1 + 2x$ - spełnia każda liczba (jest to równanie tożsamościowe).

- niespełnione przez żadną liczbę:
np.: równanie $x = x + 5$ - nie spełnia żadna liczba (jest to równanie sprzeczne).

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI WPQ TOMP UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Jeśli dwa równania mają ten sam zbiór rozwiązań, to nazywamy je równaniami równoważnymi.

Przykład 3

$x + 2 = 4$ i $2x = 4$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

6. ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ

Rozwiązanie równania polega na znalezieniu wszystkich liczb, które je spełniają, lub na uzasadnieniu, że takich liczb nie ma.

Po rozwiązaniu równania warto sprawdzić, czy otrzymana liczba spełnia równanie. Sprawdzenie ułatwia wykrycie błędów rachunkowych, które możemy popełnić w trakcie rozwiązywania równania.

Przy rozwiązywaniu równań korzystamy z następujących reguł:

1. Jeśli po obu stronach równania wykonamy takie same działania, to otrzymamy równanie równoważne danemu.
2. Jeśli do obu stron danego równania dodamy, lub od obu stron równania odejmiemy, to samo wyrażenie, to otrzymamy równanie równoważne danemu.
3. Jeśli obie strony danego równania pomnożymy lub podzielimy przez tę samą liczbę różną od zera, to otrzymamy równanie równoważne danemu.

Przykład 1

Rozwiążmy równanie:

$8x - 3 = 4x + 5$

$8x - 3 = 4x + 5$	Dążymy do tego, żeby mieć po jednej stronie równania niewiadomą (x), a po drugiej liczbę;
$8x - 4x = 5 + 3$	Jeżeli przenosimy wyrażenia z jednej strony równania na drugą, zmieniamy znaki tych wyrażeń na przeciwne;
$4x = 8 \mid :4$	Obie strony równania dzielimy przez 4;
$x = 2$	Rozwiązaniem równania jest liczba 2.

Równanie może:

- mieć jedno rozwiązanie (jeden zbiór rozwiązań),

$x + 7 = 1$

$x = 1 - 7$

$x = -6$

- mieć nieskończenie wiele rozwiązań – nazywamy je wówczas równaniem tożsamościowym,

$3(x + 1) = 3x + 3$

$3x + 3 = 3x + 3$

$3x – 3x = 3 – 3$

$0 = 0$

- nie mieć rozwiązań – wówczas jest to równanie sprzeczne.

$4x – 5 = 4x + 4$

$4x – 4x = 4 + 5$

$0 \neq 9$

Równania nazywamy **równoważnymi**, jeśli mają to samo **rozwiązanie**.

Przykład 2

Równania: $2x – 4 = 8$ i $x + 1 = 7$ są równoważne, gdyż rozwiązaniem obydwu jest liczba 6.

$2 \cdot 6 – 4 = 8$ i $6 + 1 = 7$

$12 - 4 = 8$ $7 = 7$

$8 = 8$ $L = P$

$L = P$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

6.1. Sprawdzanie rozwiazania równania

Rozwiązywanie równań i ich sprawdzanie.

Przykład 1

Rozwiążemy równanie:

5x - 6 = 2x + 3

5x - 6 = 2x + 3	| - 2x	odejmujemy 2x od lewej i prawej strony równania. (Po lewej stronie chcemy mieć niewiadomą x, a po prawej liczby).
3x - 6 = 3	| + 6	dodajemy 6 do obu stron równania.
3x = 9	| : 3	dzielimy obie strony równania na 3
x = 3		

Sprawdzamy, czy otrzymana liczba spełnia równanie, czyli, czy lewa strona równania (L) jest równa prawej (P).

Sprawdzenie:

$L = 5 \cdot 3 - 6 = 15 - 6 = 9$

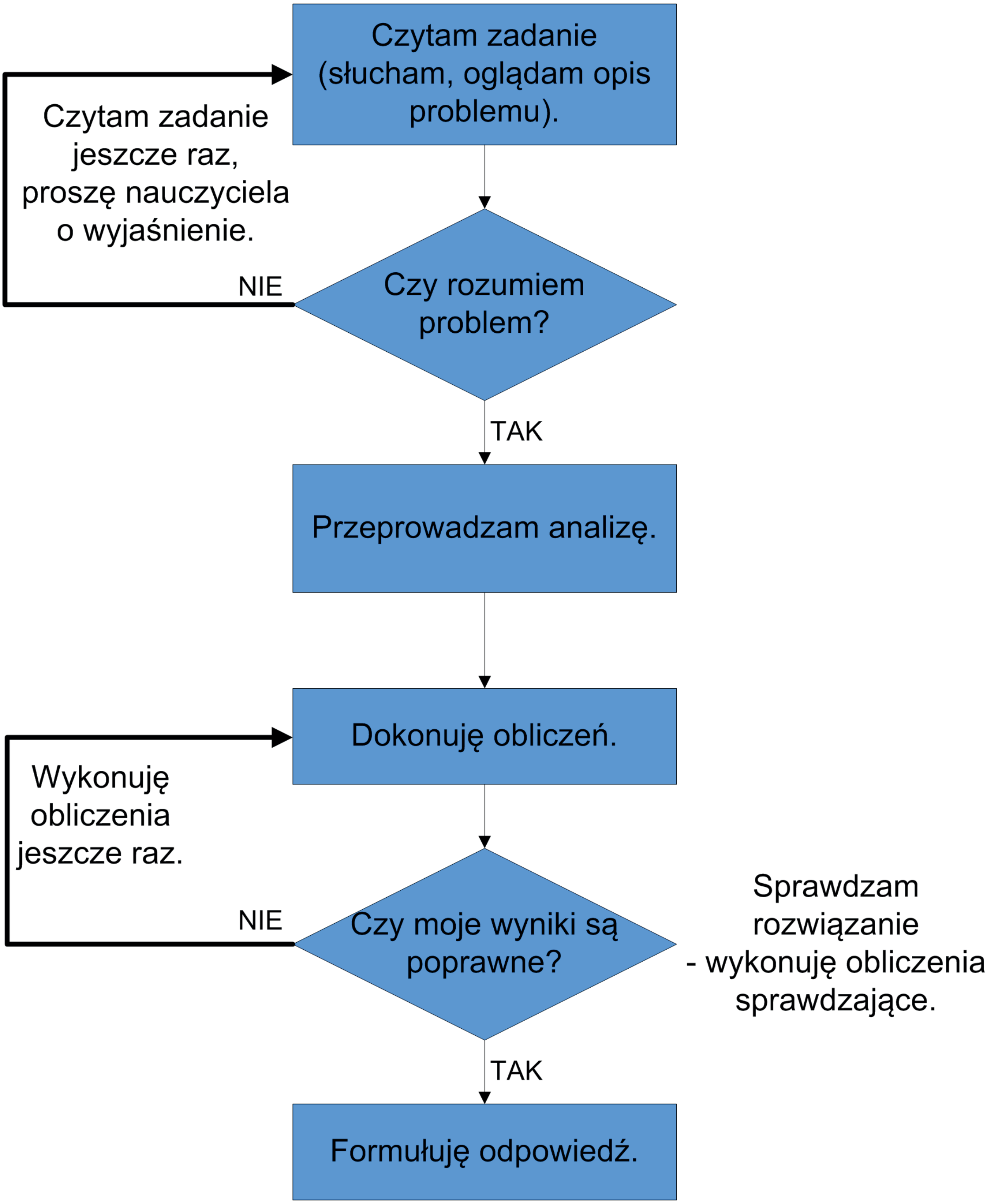
$P = 2 \cdot 3 + 3 = 6 + 3 = 9$

$L = P$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

7. ROZWIĄZYWANIE ZADAŃ TEKSTOWYCH

Zadania tekstowe rozwiązujesz już od dawna. Przypominamy algorytm (schemat) rozwiązywania zadań tekstowych:



KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 1

Pomyślałam o pewnej liczbie, dodałam do niej 7 i otrzymałam wynik 32. O jakiej liczbie pomyślałam?

DANE: x – liczba, o której pomyślałam 7 – liczba dodana 32 – wynik działania	SZUKANE: O jakiej liczbie pomyślałam?
OBLICZENIA: $x + 7 = 32$ $x = 32 - 7$ $x = 25$	spr.: $L = 25 + 7 = 32$ $P = 32$ $L = P$

ODPOWIEDŹ: Liczbą, o której pomyślałam jest 25.

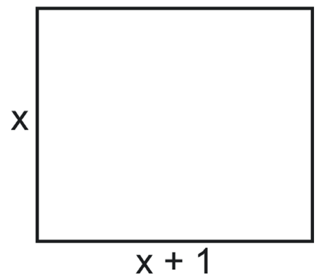
Przykład 2

Ile wynosi pole prostokąta o obwodzie równym 24 cm? Różnica długości boków w tym prostokącie wynosi 1 cm.

DANE: Obwód prostokąta - 24 cm Różnica długości boków - 1 cm	SZUKANE: Pole prostokąta.

ANALIZA:

Wykonuję rysunek pomocniczy:



Jakie wzory dotyczące prostokąta wykorzystam:

Obwód O prostokąta o bokach a i b wynosi:

$O = 2(a+b) = 2a + 2b$

Pole P prostokąta o bokach a, b wynosi $P = a \cdot b$

Układam równanie: $O = 2x + 2(x + 1) = 24$ i je rozwiązuję: $2x + 2x + 2 = 24$ $4x = 22$ $x = 5,5$ $x + 1 = 6,5$	Obliczam pole prostokąta: $P = 5,5 \cdot 6,6 = 35,75$

Odpowiedź: Pole tego prostokąta wynosi 35,75 cm^2

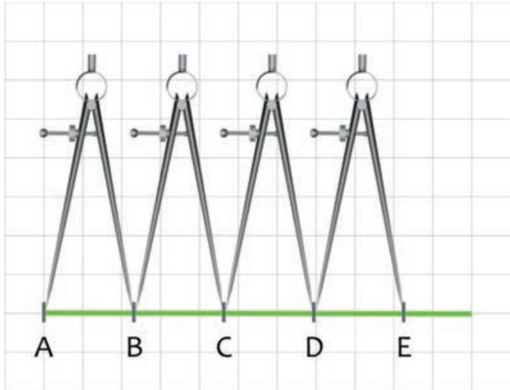
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

NOTATKI

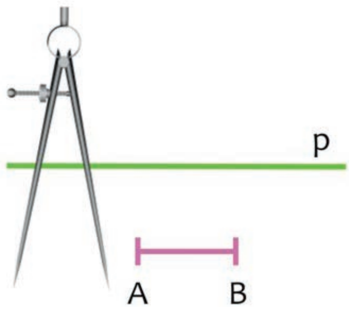
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

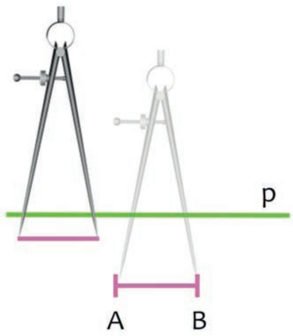
1. PRZENOSZENIE ODCINKÓW

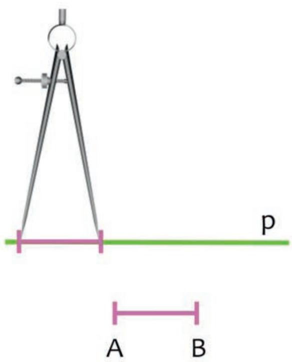
Narysuj dowolną prostą. Za pomocą cyrkla zaznacz na niej kilka odcinków jednakowej długości.



Konstrukcji geometrycznej nie można wykonać bez umiejętności przenoszenia odcinków. Należy odmierzyć dany odcinek, używając cyrkla, i zaznaczyć go na prostej. Odcinek AB przeniesiemy na prostą p.

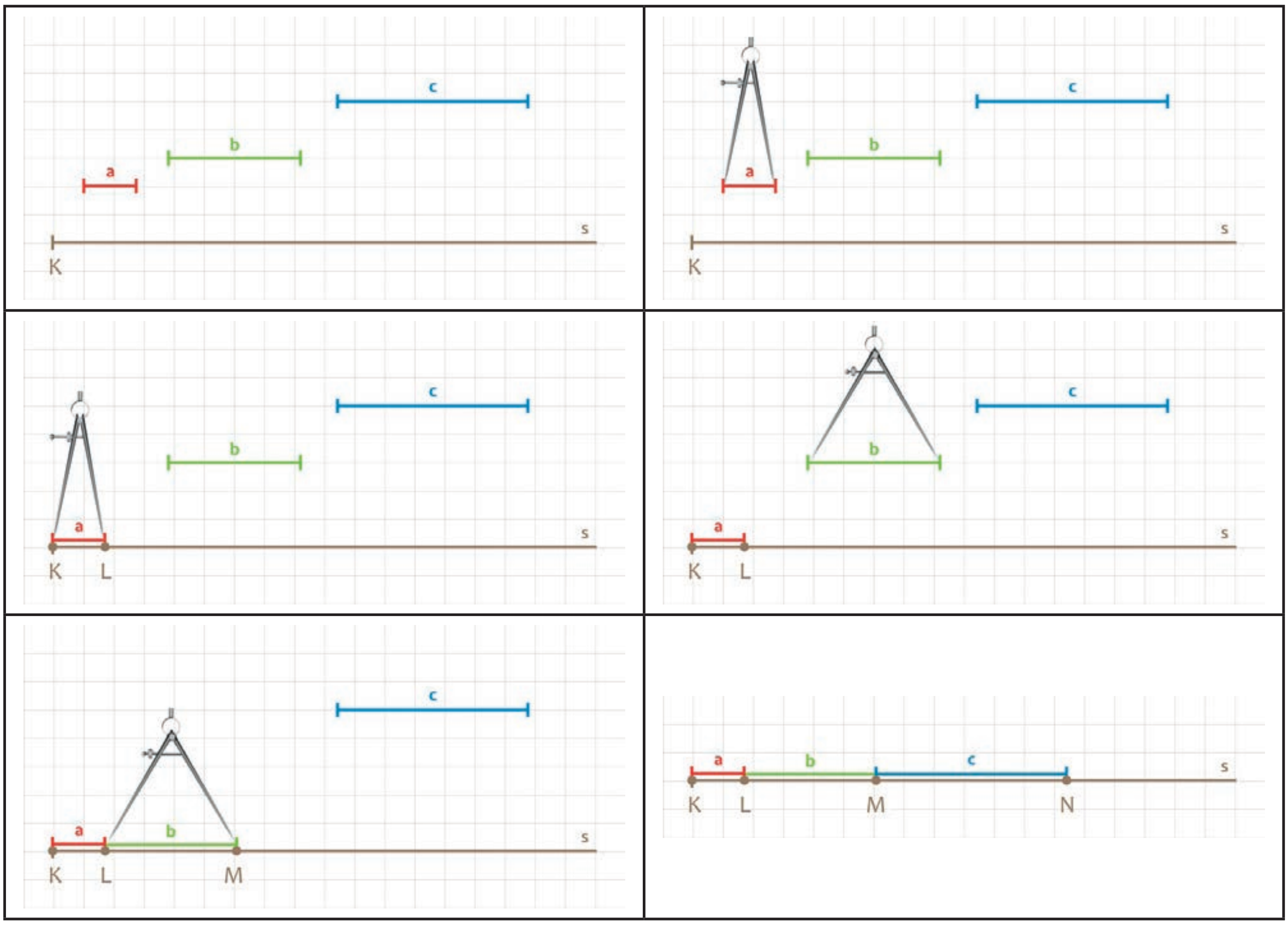






2. SUMA ODCINKÓW

Mamy dowolne odcinki a, b, c. Chcemy skonstruować odcinek, którego długość jest równa sumie długości odcinków a, b i c. Odcinek ma leżeć na prostej s, a jego początek to punkt K.

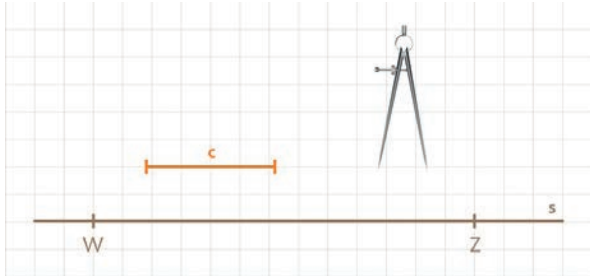


Obejrzyj prezentację na platformie MATI.

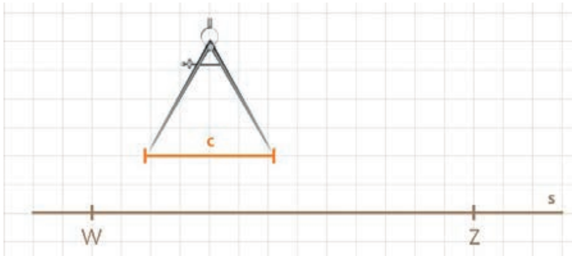
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

3. RÓŻNICA ODCINKÓW

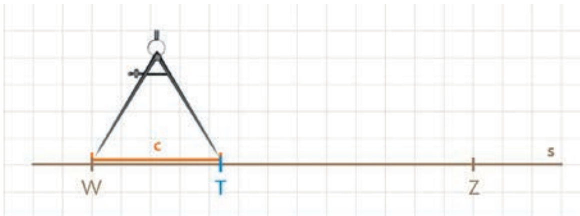
Spróbujmy od odcinka WZ na prostej s odjąć odcinek c.



Przenieśmy odcinek c na prostą s tak, aby jego początek był w punkcie W.



|WT| = |c| (czyt. długość odcinka WT jest równa długości odcinka c)



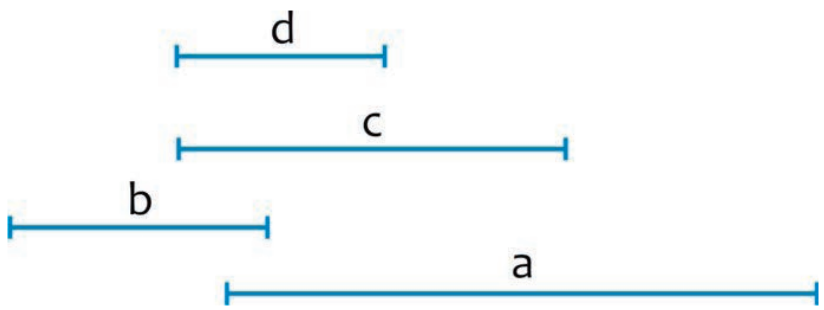
Odcinek TZ jest równy różnicy odcinków WZ i c.
|WZ| - |c| = |TZ|

3.1. Ćwiczenia do samodzielnego wykonania

Samodzielnie wykonaj poniższe ćwiczenia.

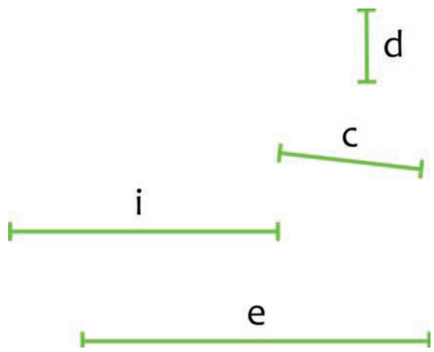
Ćwiczenie 1

Skonstruuj odcinek z, będący sumą odcinków a, b, c i d.



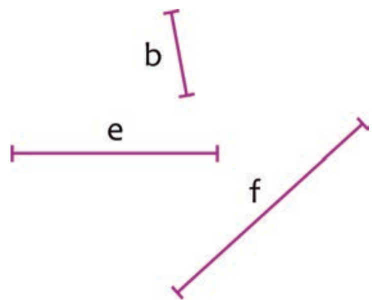
Ćwiczenie 2

Skonstruuj odcinek w, którego długość jest równa sumie odcinków d i c, oraz odcinek k, którego długość jest równa różnicy odcinków e oraz i.



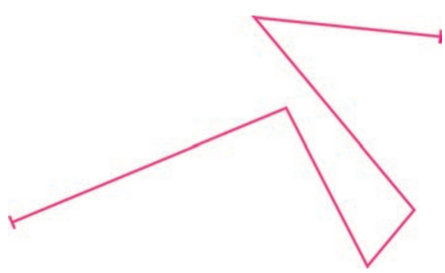
Ćwiczenie 3

Skonstruuj odcinek x, którego długość jest równa sumie odcinka b i różnicy odcinków f i e.



Ćwiczenie 4

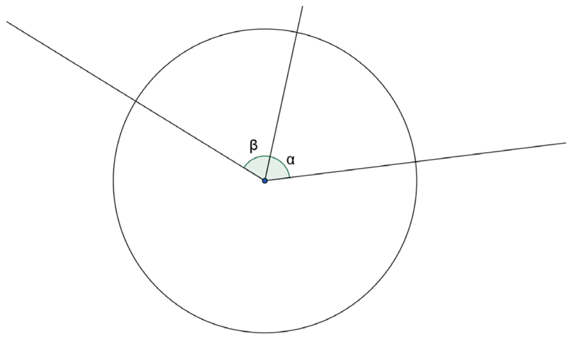
Nazwij łamaną i stwórz odcinek t, którego długość jest równa długości łamanej.



KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

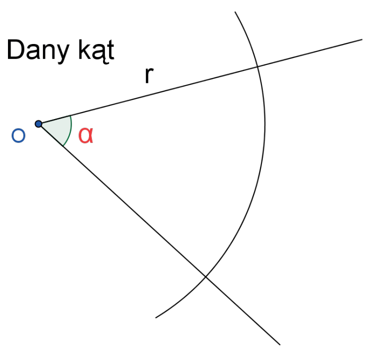
4. PRZENOSZENIE KĄTÓW

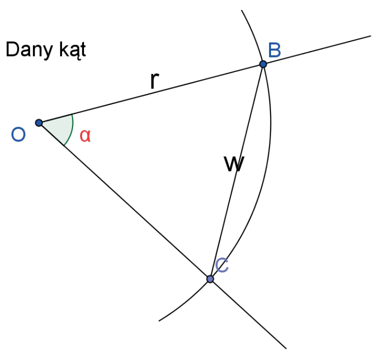
Środek okręgu jest wierzchołkiem dwóch kątów: α i β.



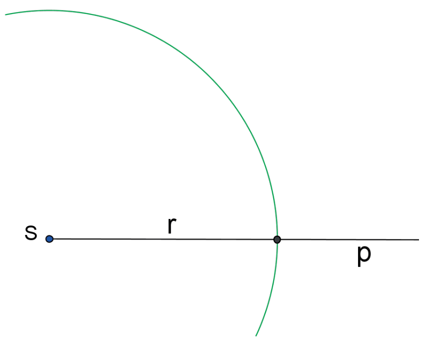
Jak sprawdzić, czy dwa kąty w kole są równe? Sprawdzamy cyrklem.

Konstrukcja kąta równego danemu kątowi.



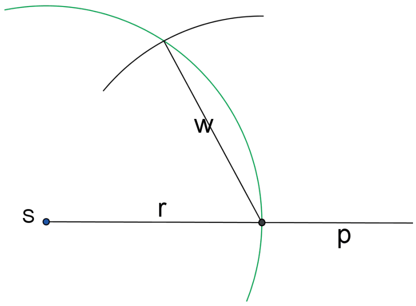


1. Rysujemy półprostą p o początku w punkcie S. Z wierzchołka danego kąta α mamy zakreślony łuk, a na półprostej n zakreślamy łuk o takim samym promieniu r.

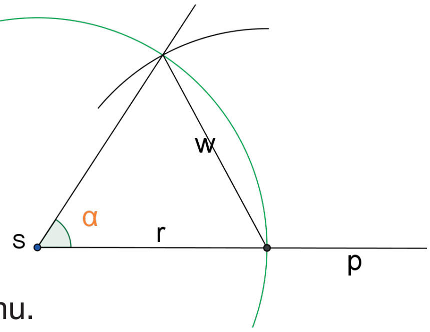


Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

2. Odmierzamy cyrklem odległość między punktami przecięcia łuku z ramionami kąta α - na naszym rysunku jest to odcinek BC o długości w.



3. Łączymy punkt przecięcia łuków z początkiem półprostej - punktem S.



Otrzymaliśmy kąt równy danemu.

Zadanie 1

Narysuj kąty ostre α i β, takie, że α > β.
Skonstruuj kąty:

a. α + β.

b. α - β

c. 2α

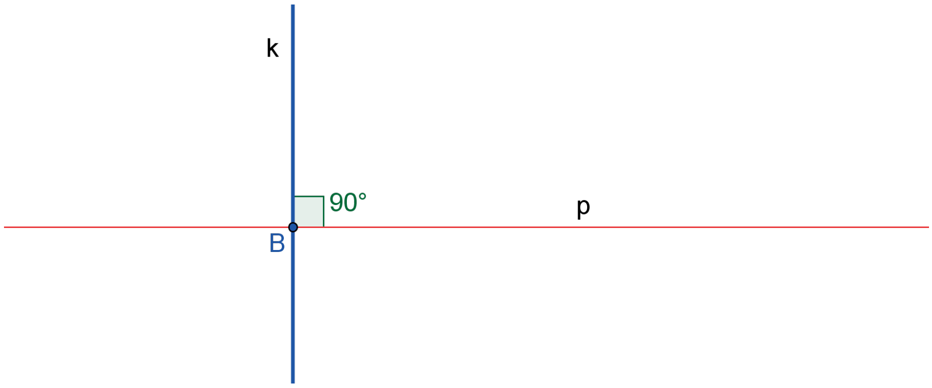
d. 3β

Sprawdź rozwiązanie na platformie MATI.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

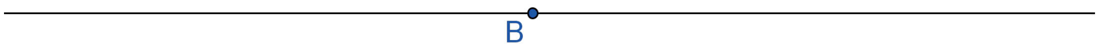
5. PROSTE PROSTOPADŁE

Proste prostopadłe możemy narysować z wykorzystaniem ekierki - rysując kąt prosty i przedłużając ramiona. Spróbujcie to zrobić.

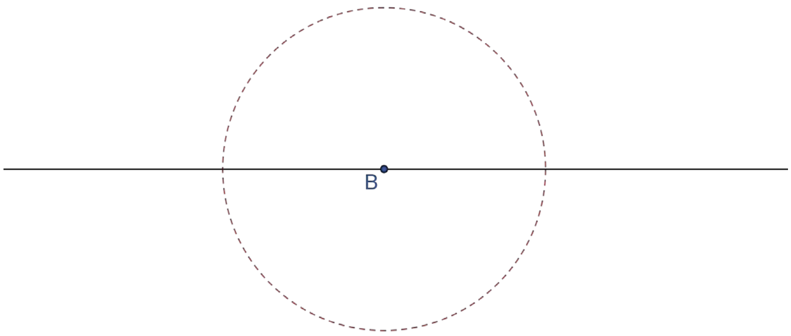


W tym rozdziale pokażemy, jak narysować proste prostopadłe, używając cyrkla i linijki:

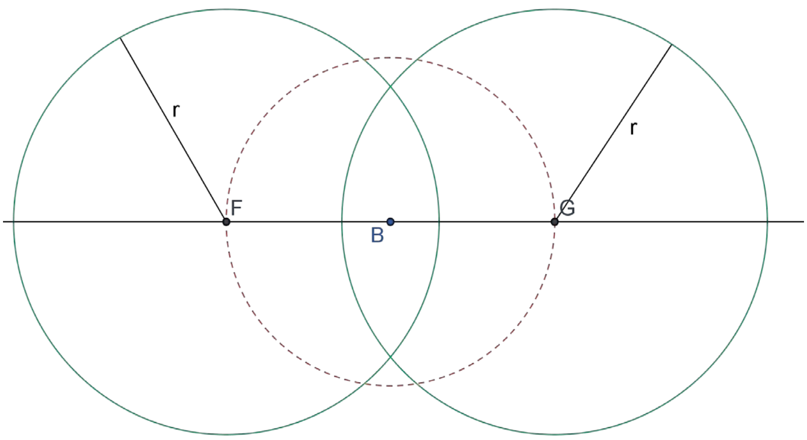
1. Rysujemy prostą i zaznaczamy punkt B, w którym druga prosta ma być prostopadła do pierwszej.



2. Rysujemy okrąg o środku w punkcie B i dowolnym promieniu. Okrąg ten przetnie prostą w dwóch punktach.

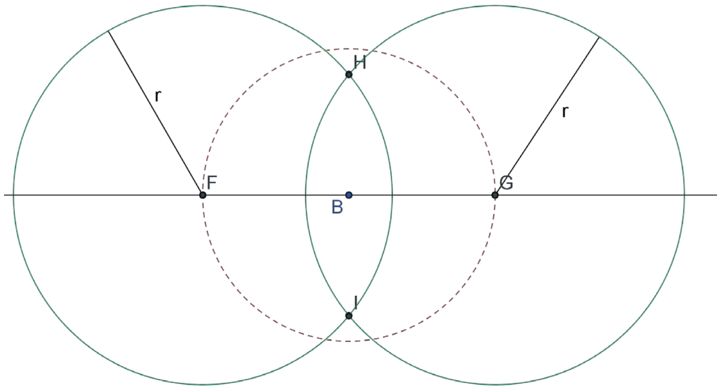


3. Punkty przecięcia okręgu z prostą oznaczymy F i G. Kreślimy okręgi o jednakowych promieniach r i środkach w punktach F oraz G.

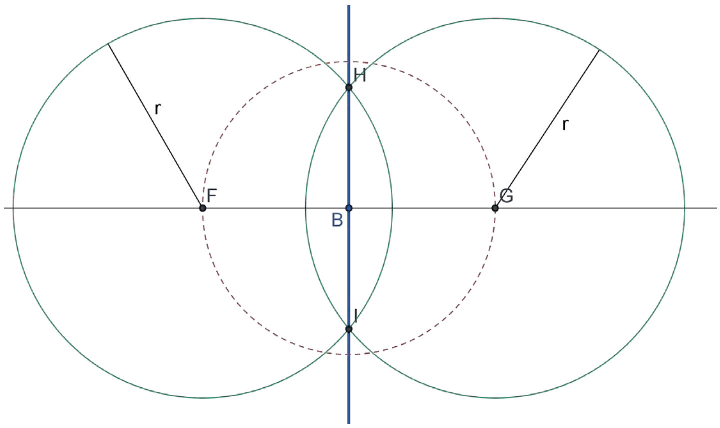


KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

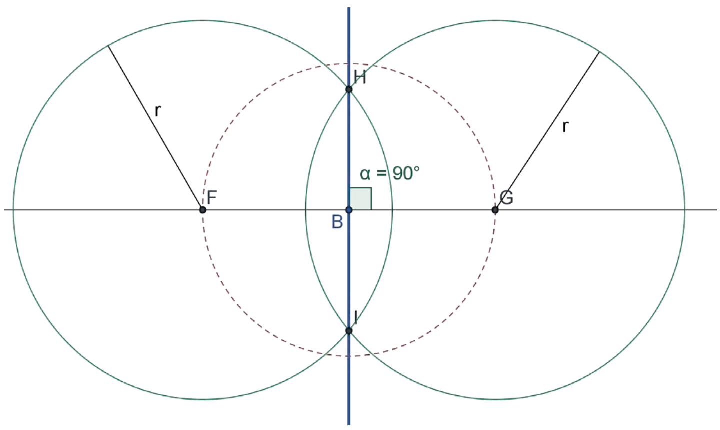
4. Okręgi przetną się w punktach H i I.



5. Prowadzimy prostą przechodzącą przez punkty H i I - jest to prosta prostopadła do danej.



6. Sprawdzamy kąt pomiędzy prostymi (dla upewnienia się co do precyzji naszego rysunku).



Ćwiczenie 1

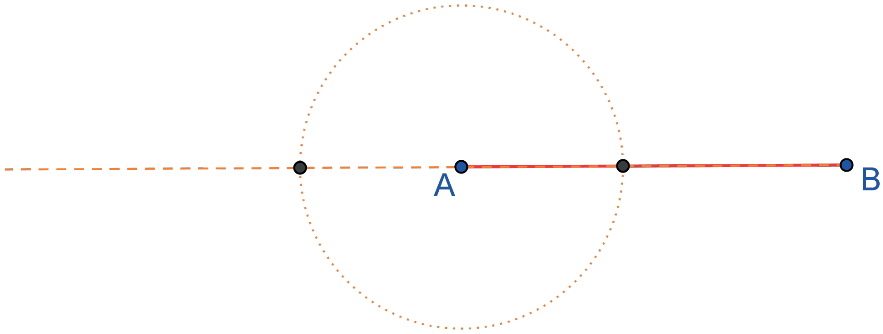
Wykonaj kilka razy tę konstrukcję, aby ją zapamiętać.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

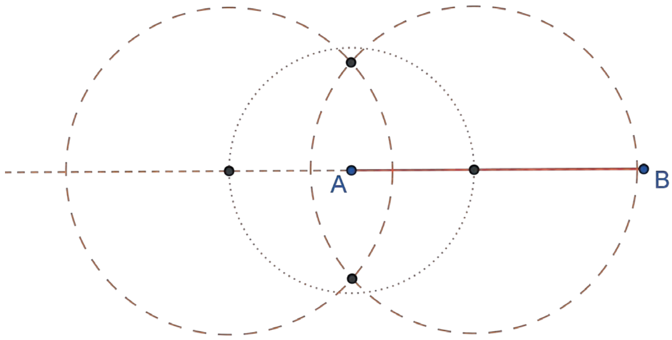
Konstrukcja prostokąta:

Mamy odcinek AB - bok prostokąta. Kreślimy półprostą BA.

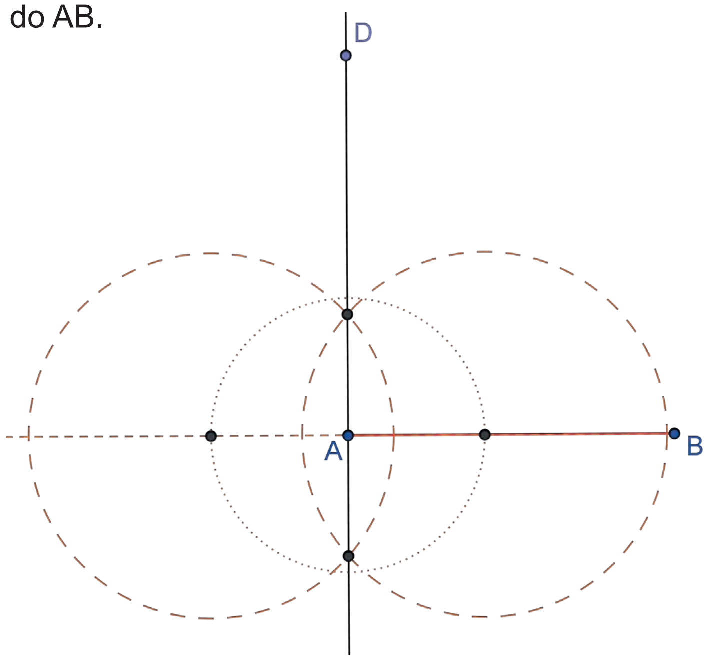
1. Musimy znaleźć prostą prostopadłą do AB, przechodzącą przez pkt A. Kreślimy okrąg o środku w punkcie A i dowolnym promieniu - przetnie on półprostą w dwóch punktach.



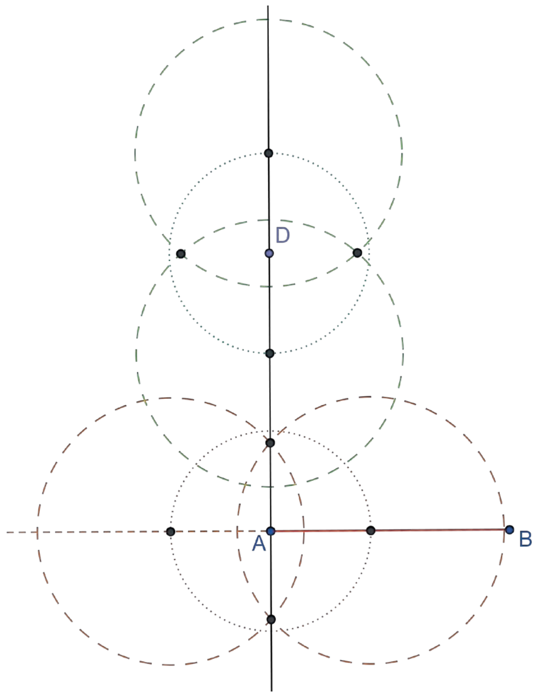
2. Rysujemy okręgi o środkach w punktach przecięcia tego okręgu z półprostą i promieniu takim, aby okręgi się przecięły.



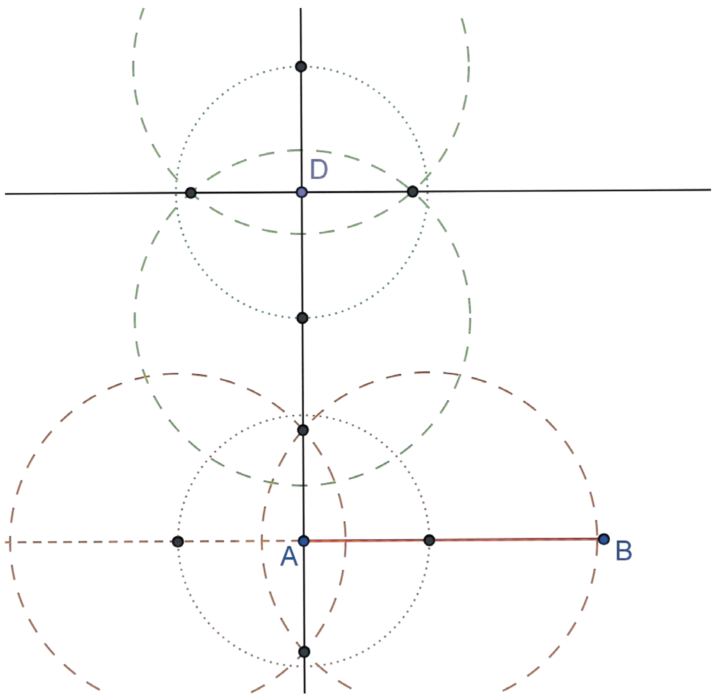
3. Przez punkty przecięcia okręgów prowadzimy prostą, zaznaczamy na niej pkt D. Prosta AD jest prostopadła do AB.



4. Przez punkty przecięcia okręgów prowadzimy prostą, zaznaczamy na niej pkt D. Prosta AD jest prostopadła do AB.

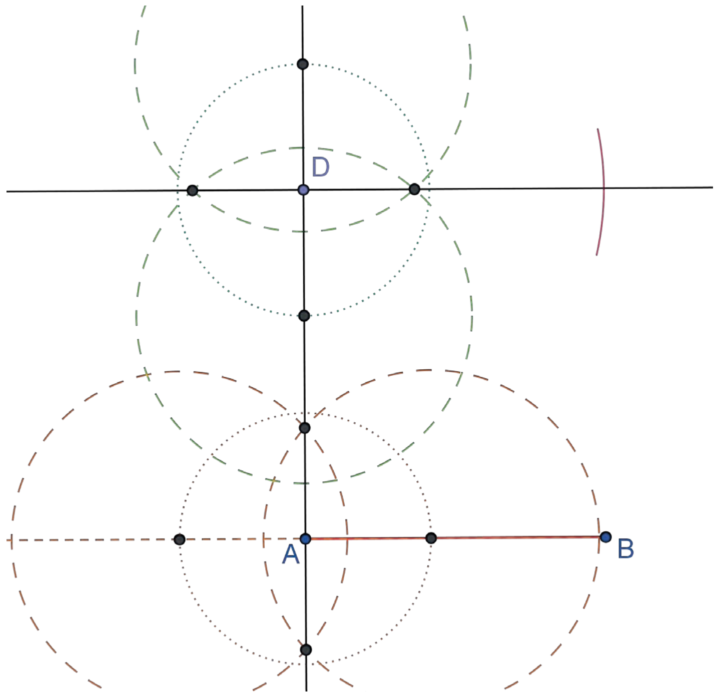


5. Przez punkty przecięcia okręgów prowadzimy prostą, zaznaczamy na niej pkt D. Prosta AD jest prostopadła do AB.

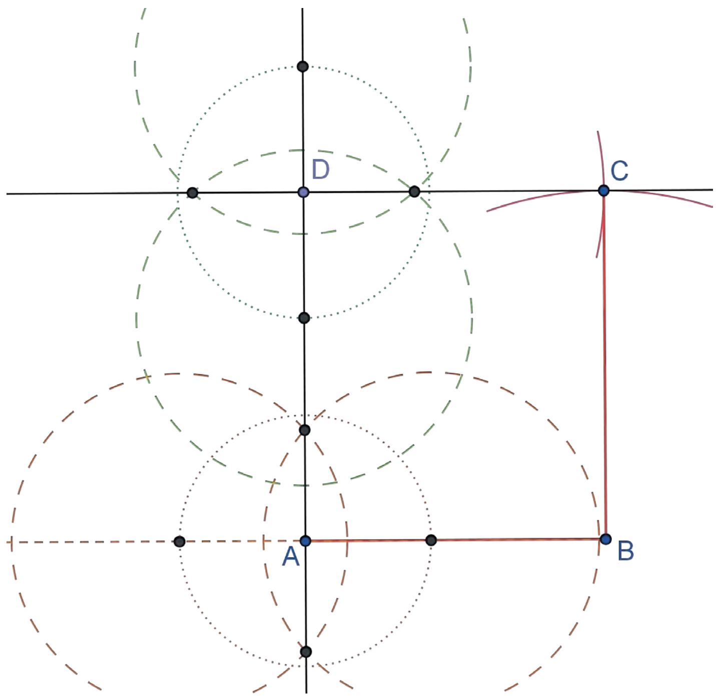


KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

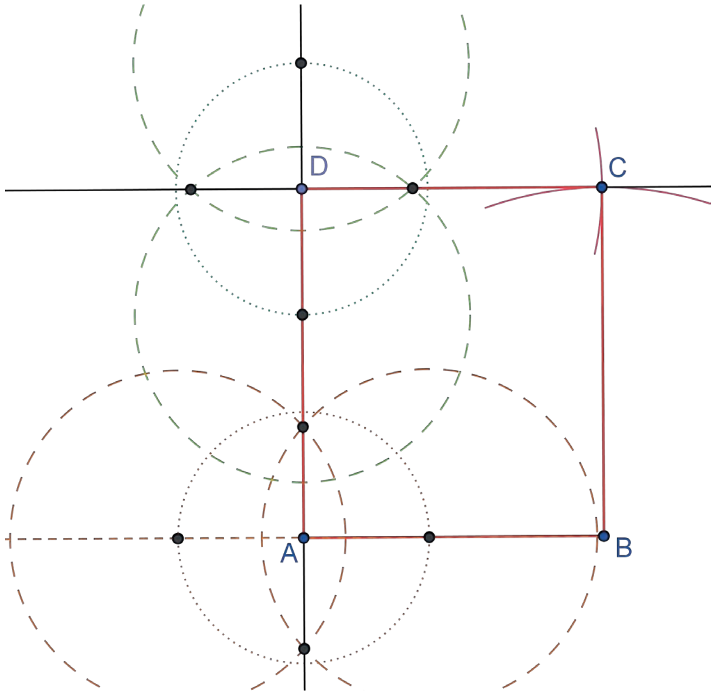
6. Z punktu D zaznaczamy łuk o promieniu AB.



7. Z punktu B zaznaczamy łuk o promieniu AD - otrzymaliśmy punkt przecięcia łuków C.



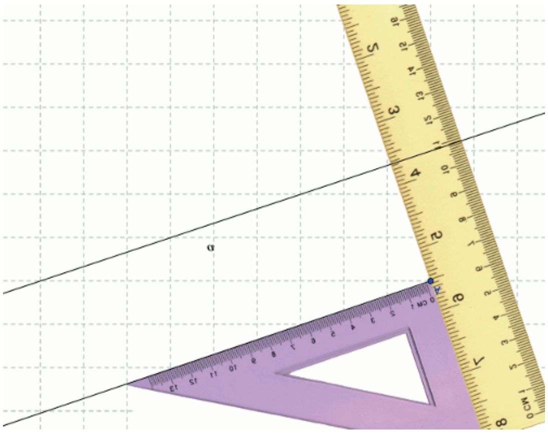
8. Łączymy pkt. A, B, C, D - otrzymaliśmy prostokąt ABCD.

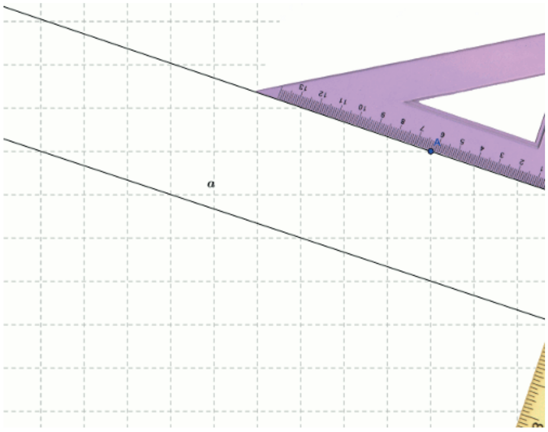


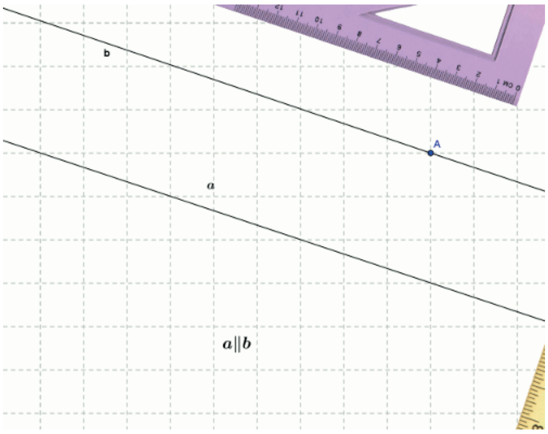
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

6. PROSTE RÓWNOLEGŁE

Proste równoległe umiemy rysować przy pomocy linijki i ekierki (odpowiednio przesuwając linijkę przy krawędzi ekierki lub ekierkę przy krawędzi linijki).







Dziś poznacie konstrukcję kreślenia prostych równoległych przy pomocy cyrkla i linijki:

Obejrzyj prezentację na platformie MATI.

Konstrukcja równoległoboku:

Obejrzyj prezentację na platformie MATI.

Konstrukcja trapezu:

Obejrzyj prezentację na platformie MATI.

7. SYMETRALNA ODCINKA

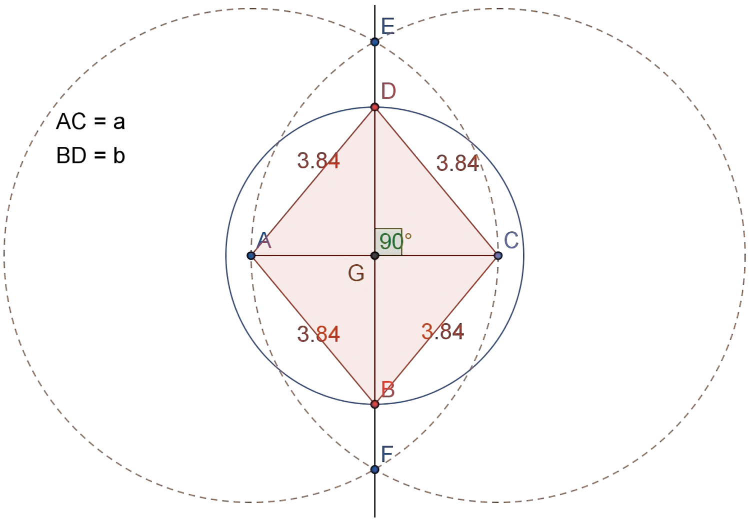
Symetralna odcinka to prosta, która przechodzi przez środek odcinka (dzieli odcinek na połowy) i jest do niego prostopadła.

Skoro wiemy już, jak skonstruować symetralną odcinka, możemy dany odcinek podzielić na 4 lub 8 równych części. Spróbujcie wykonać taką konstrukcję.

Dzięki temu, że potrafimy kreślić symetralne, łatwo nam skonstruować romb o danych przekątnych.

Wiemy, że w rombie przekątne przecinają się w połowie i są do siebie prostopadłe. Jedna przekątna leży więc na symetralnej drugiej.

Przyjrzyjcie się rysunkom umieszczonym na platformie MATI i wykonajcie samodzielnie konstrukcję:

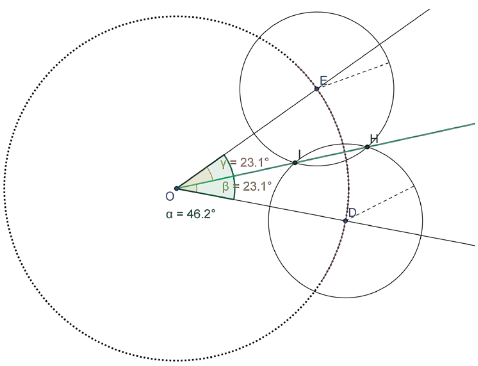


Obejrzyj prezentację na platformie MATI.

8. DWUSIECZNA KĄTA

Dwusieczna kąta to półprosta, która dzieli ten kąt na połowy.

Konstrukcja:



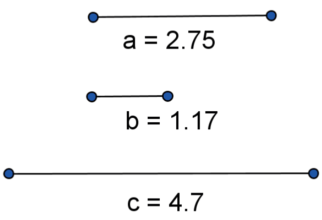
Obejrzyj prezentację na platformie MATI.

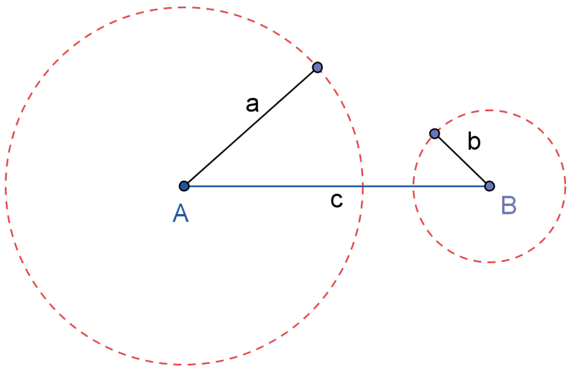
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

9. KONSTRUKCJE TRÓJKĄTÓW - „WARUNEK TRÓJKĄTA”

Zadanie 1

Kiedy możemy skonstruować trójkąt?
Czy z każdych trzech odcinków da się stworzyć trójkąt?

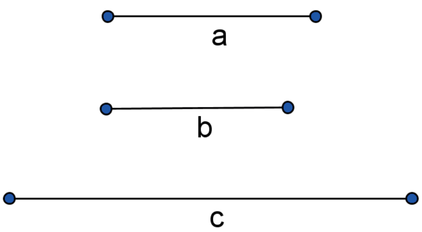


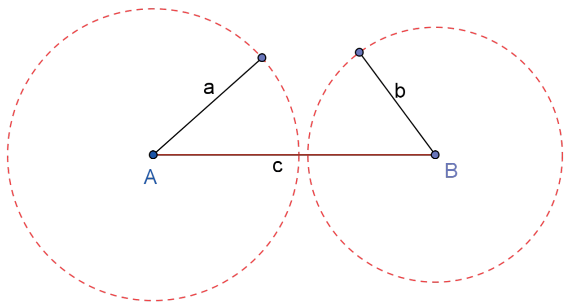


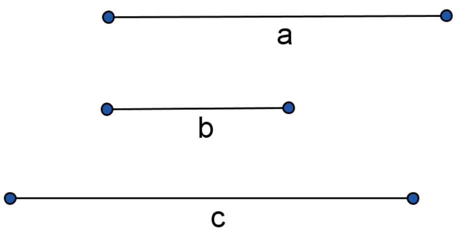
Z tak dobranych odcinków nie zbudujemy trójkąta - nie ma możliwości, aby okręgi się przecięły.

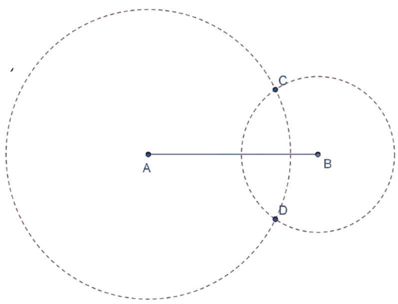
Zadanie 2

Spróbujcie z innymi odcinkami i sprawdźcie, jaki warunek musi być spełniony (jakie muszą być długości odcinków, aby okręgi się przecięły).









Przy tak dobranych długościach odcinków mamy możliwość narysowania trójkąta.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Warunek jest następujący:

Suma długości każdych dwóch odcinków musi być większa od długości trzeciego odcinka, czyli:

$$a + b > c$$

$$b + c > a$$

$$a + c > b$$

Jeśli choć jedna z tych nierówności jest niespełniona, nie stworzymy trójkąta.

Konstrukcja trójkąta o danych trzech bokach:

Obejrzyj prezentację na platformie MATI.

9.1 Konstrukcja trójkąta o danych dwóch bokach i kącie między nimi

Obejrzyj prezentację na platformie MATI.

9.2 Konstrukcja trójkąta o danym boku i dwóch kątach leżących przy tym boku

Obejrzyj prezentację na platformie MATI.

9.3 Konstrukcje trójkąta równoramiennego i równobocznego

Obejrzyj prezentację na platformie MATI.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

1. PUNKTY W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH

Znacie na pewno z różnych map, planów sposoby określania punktów, czy różnych obiektów. Układ współrzędnych geograficznych służy do precyzyjnego określania położenia punktów na mapie.

Współrzędnymi geograficznymi nazywamy wielkości kątowe (szerokość i długość geograficzną), określające położenie punktu na powierzchni Ziemi. Każdy punkt na Ziemi ma własne współrzędne geograficzne. Opisując je, podaje się zarówno szerokość, jak i długość geograficzną.

Na przykład na rysunku poniżej punkt B ma następujące współrzędne geograficzne:

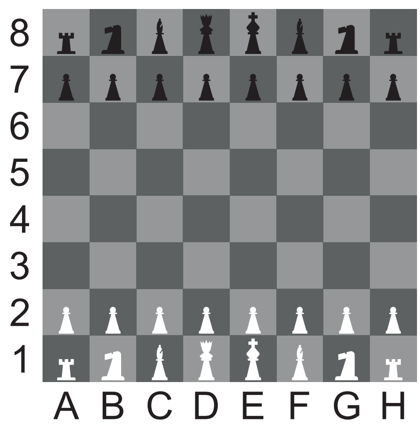
- 30° długości geograficznej zachodniej,
- 20° szerokości geograficznej południowej,

lub w zapisie międzynarodowym:

- 30° W,
- 20° S.

Na planach miast jest narysowana siatka z oznaczeniami literowymi A, B, C, itd. w pionie i liczbowymi 1, 2, 3 itd. w poziomie (lub na odwrót).

Znacie na pewno grę „okręty” - tam też każdy punkt ma swoje współrzędne, widzieliście z pewnością szachownicę i tu wyraźnie widać, że każde pole ma swoje jedyne i niepowtarzalne współrzędne.



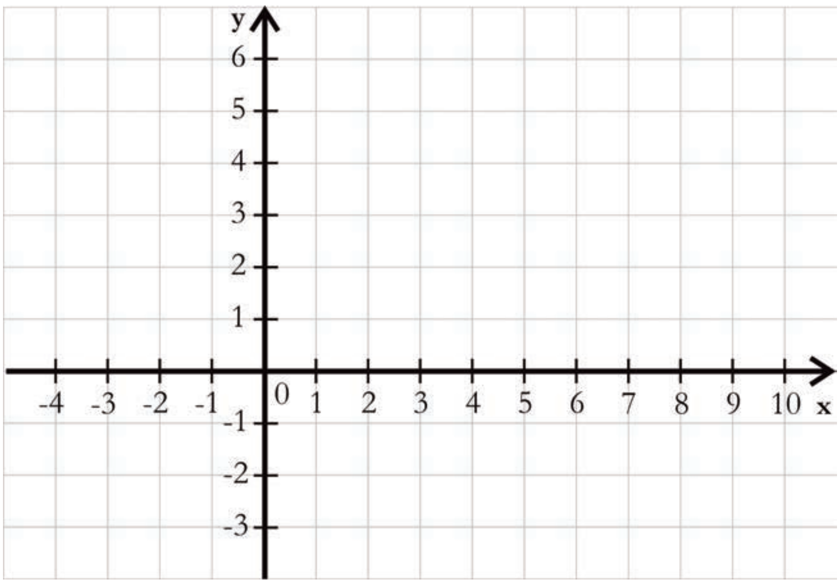
W matematyce mamy prostokątny układ współrzędnych
- nazywany też układem kartezjańskim.

Nazwa układu pochodzi od nazwiska francuskiego matematyka i filozofa Rene Descartes (czytamy: Dekart), zwanego KARTEZJUSZEM, który wprowadził swoją ideę zaznaczania punktów na płaszczyźnie w 1637 roku.

Układem współrzędnych kartezjańskich nazywa się układ współrzędnych, w którym zadane są:

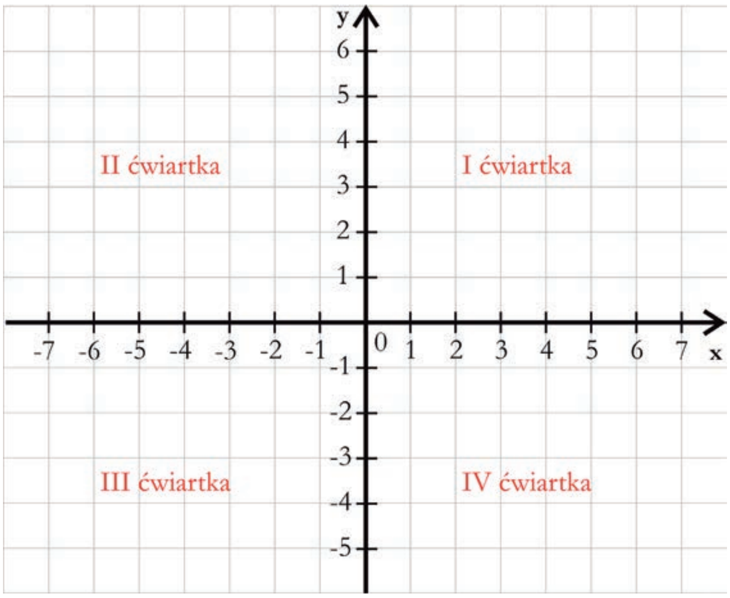
- punkt zwany początkiem układu współrzędnych, którego współrzędne są równe zeru, często oznaczany literą O lub cyfrą 0.
- para prostopadłych osi liczbowych zwanych osiami układu współrzędnych.

Osie najczęściej są oznaczane jako:
- X lub OX (pierwsza oś, zwana osią odciętych),
- Y lub OY (druga, zwana osią rzędnych).

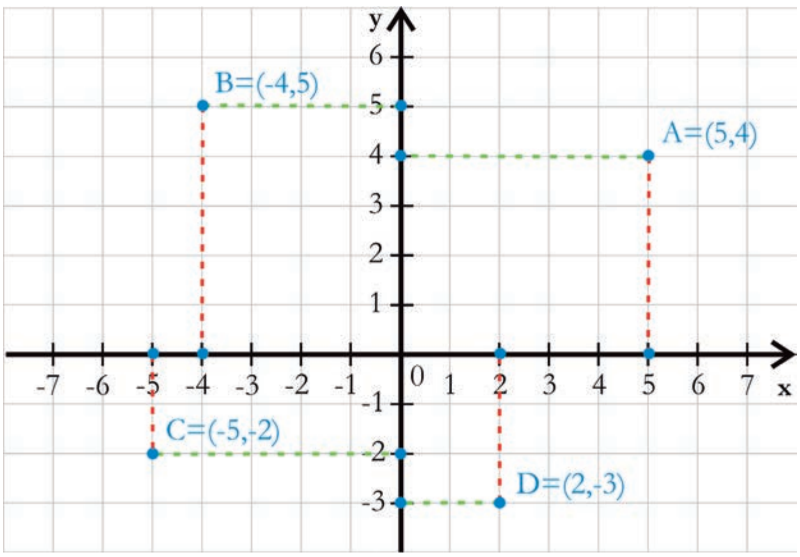


KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Osie dwuwymiarowego układu kartezjańskiego dzielą płaszczyznę na cztery nieskończone obszary nazywane ćwiartkami, z których każda ograniczona jest dwoma półosiami. Często numeruje się je od pierwszej do czwartej i oznacza liczbami rzymskimi: I (+,+), II (−,+), III (−,−) oraz IV (+,−), gdzie znaki w nawiasach odpowiadają znakom danej współrzędnej. Jeżeli osie kreślone są zgodnie ze zwyczajem matematycznym, to numeracja rozpoczyna się od prawej-górnej ćwiartki („północno-wschodniej") i postępuje przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.



Każdemu punktowi umieszczonemu w układzie współrzędnych odpowiada para liczb (x,y), zapisujemy je w nawiasach okrągłych, najpierw współrzędną odpowiadającą osi OX, drugą współrzędną odpowiadającą osi OY.



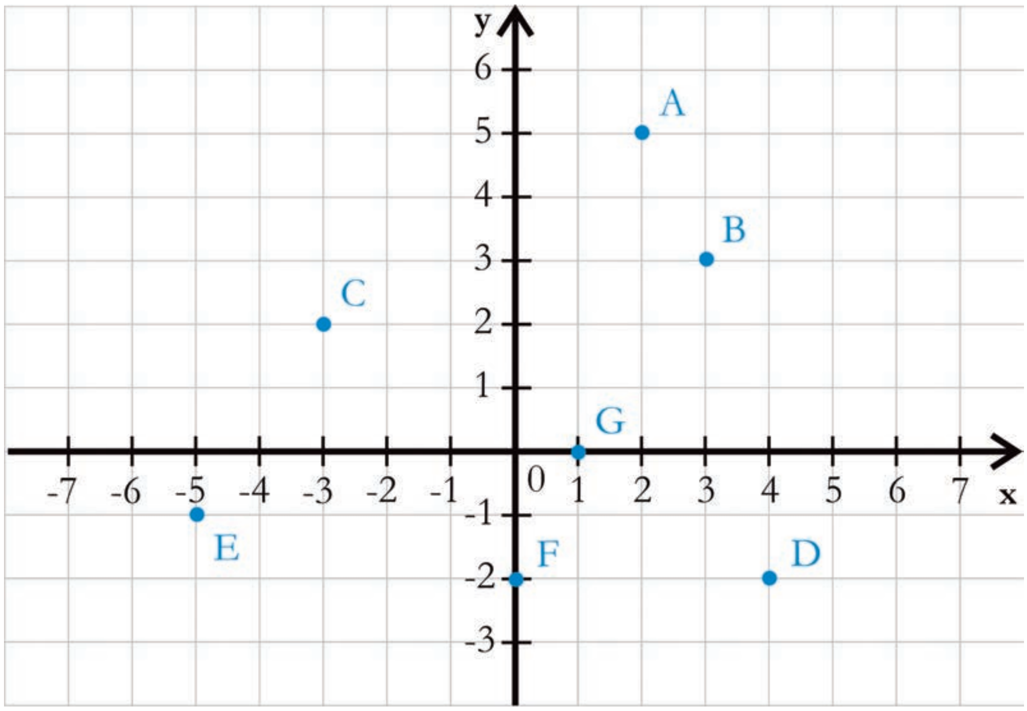
Zapis A = (5,4) lub A (5,4) oznacza jednoznaczne i tylko takie położenie punktu A w układzie współrzędnych.

Obejrzyj prezentacją na platformie MATI.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 1

Odczytaj, jakie współrzędne mają punkty w narysowanym układzie.

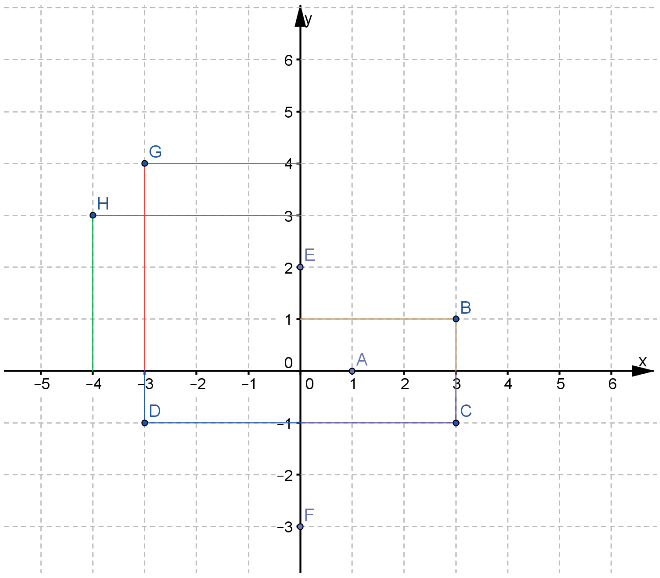


KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

2. PORUSZANIE SIĘ W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘNYCH

Przykład 1

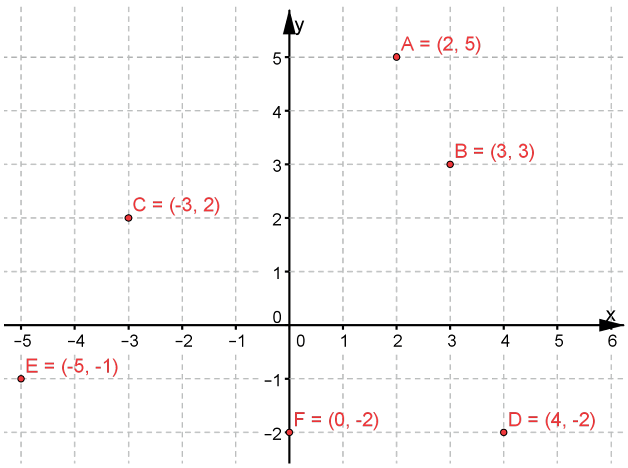
Oto kilka informacji o pewnym punkcie: punkt leży w II ćwiartce układu współrzędnych, jego współrzędne są całkowite, suma współrzędnej y i współrzędnej x wynosi 1. Który to punkt na naszym rysunku?



Odpowiedź:
Punkt jest w drugiej ćwiartce, więc może być H lub G.
Suma współrzędnych punktu H to (-4) + 3 = (-1).
Suma współrzędnych punktu G to (-3) + 4 = 1.
Punkt G jest szukanym punktem.

Ćwiczenie 1

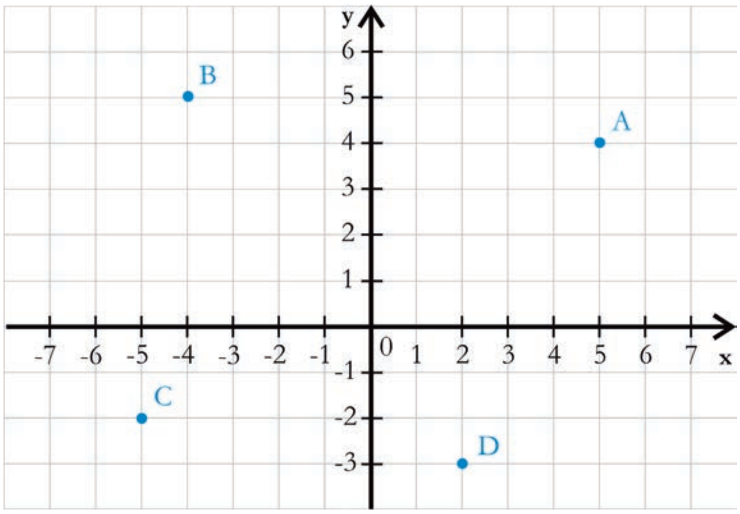
Określ, w której ćwiartce leżą poszczególne punkty, porównaj ich współrzędne.



Co możemy powiedzieć o punkcie F, jak określić jego położenie?
Odpowiedź: Punkt F leży na osi OY.

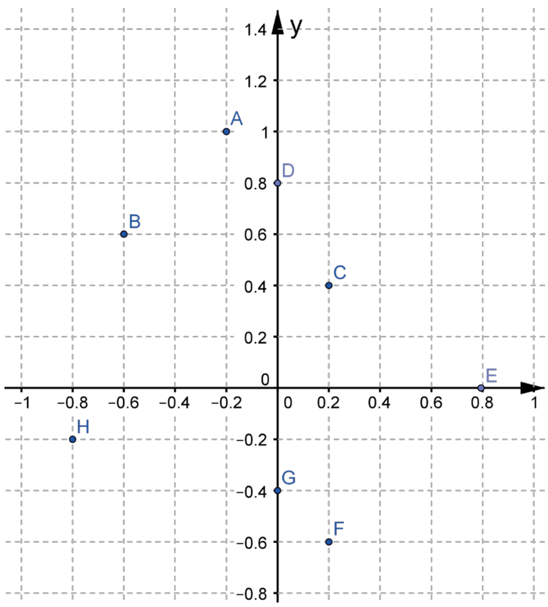
Ćwiczenie 2

Przyjrzyj się kolejnemu układowi współrzędnych, odczytaj, jakie współrzędne mają zaznaczone punkty.
W których ćwiartkach układu leżą podane punkty?



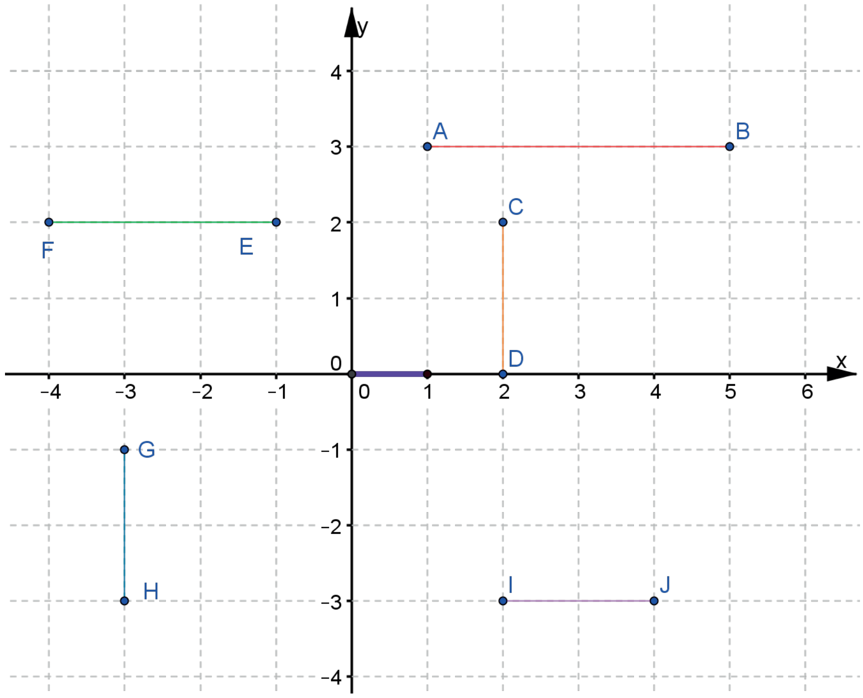
Ćwiczenie 3

Kolejny układ współrzędnych ma inną jednostkę, podaj współrzędne zaznaczonych na nim punktów.



KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

3. DŁUGOŚCI ODCINKÓW



Jeżeli odcinki w układzie współrzędnych są równoległe do osi układu, to długość tych odcinków możemy łatwo określić.

Jednostką długości nie jest cm, mm, dm tylko jednostka układu współrzędnych - odległość między 0 a 1 (**tu zaznaczona kolorem fioletowym**):

- odcinek GH ma długość 2 jednostek - zapiszemy to w skrócie $|GH| = 2j$ lub $|GH| = 2$,
- długość odcinka IJ to 2j $|IJ| = 2$,
- długość odcinka AB to 4j $|AB| = 4$, długość odcinka FE to 3j IFEI = 3.

Długości odcinków równoległych do osi układu możemy obliczyć ze współrzędnych końców odcinków:

np. odcinek AB jest równoległy do osi OX, patrzymy na współrzędne punktów A = (1,3), B = (5,3)

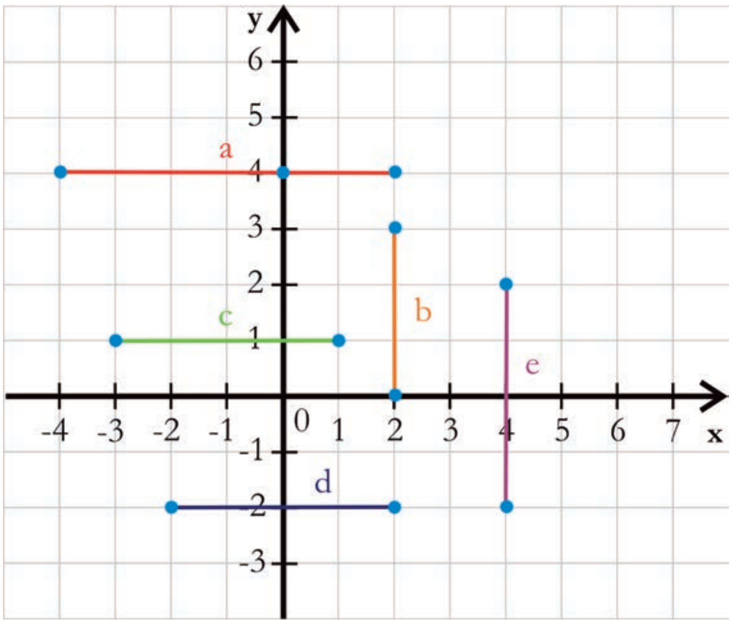
długość odcinka AB = 5 - 1, od większej współrzędnej x odejmujemy mniejszą współrzędną x, $|AB| = 4$

np. odcinek GH jest równoległy do osi OY, współrzędne punktów G = (-3, -1), H = (-3, -3)

długość odcinka GH = (-1) - (-3), od większej współrzędnej y odejmujemy mniejszą współrzędną y, $|GH| = 2$

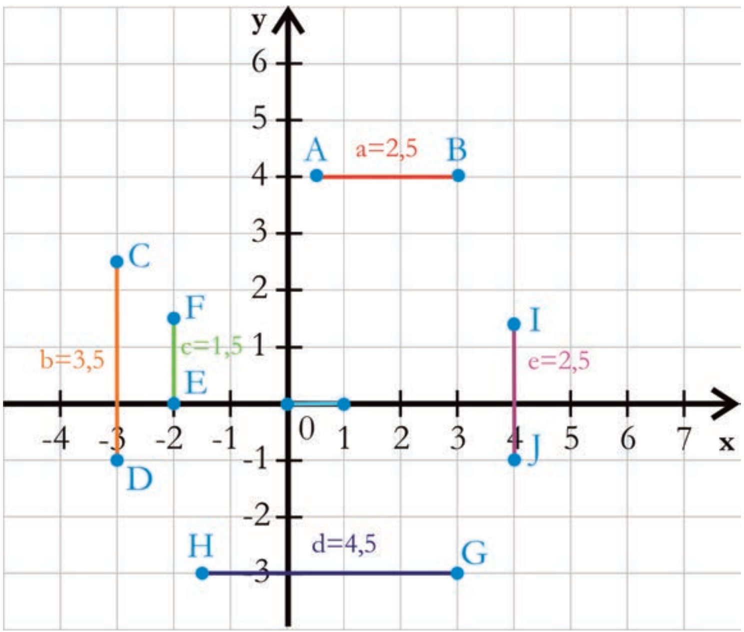
Ćwiczenie 1

Podaj długości odcinków a, b, c, d, e



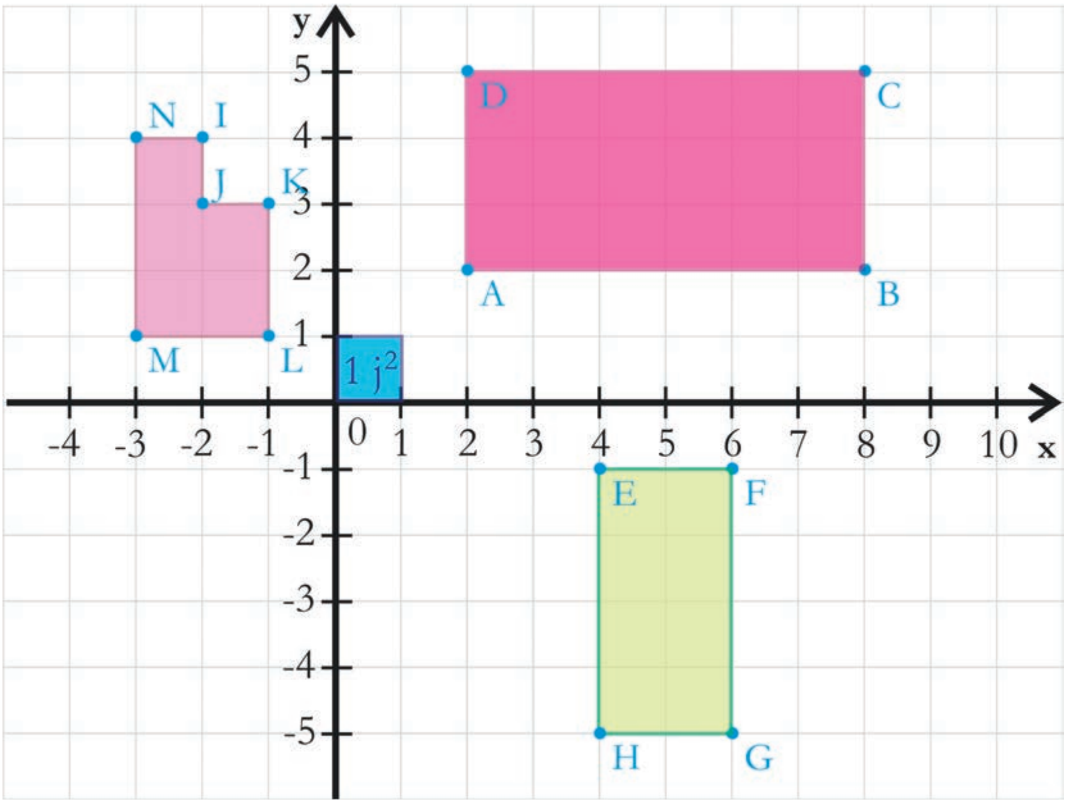
Ćwiczenie 2

Znamy długości odcinków, jakie współrzędne maja końce tych odcinków?



KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

4. POLA FIGUR



W układzie współrzędnych pola figur będziemy określać w jednostkach układu współrzędnych.

Pole kwadratu 1x1, czyli kwadratu jednostkowego (na tym rysunku oznaczonego kolorem niebieskim), wynosi 1 j^2

- Wymiary prostokąta ABCD wynoszą 6 x 3, pole tego prostokąta wynosi 18 j^2

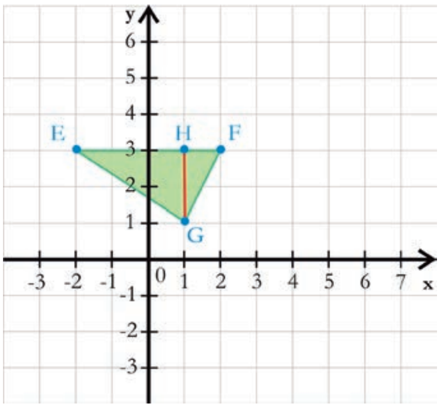
- Wymiary prostokąta EFGH wynoszą 2 x 4, pole tego prostokąta wynosi 8 j^2

- Figura IJKLNM składa się z 5 jednostkowych kwadratów, jej pole wynosi 5 j^2

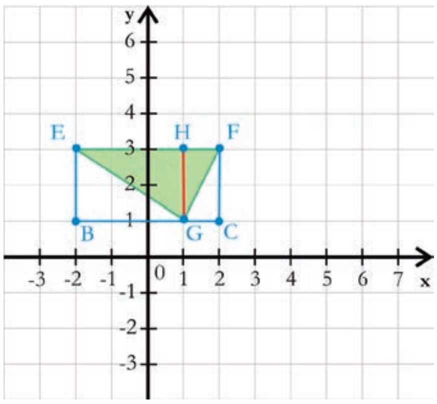
Jeżeli mamy figury o innych kształtach niż prostokąt, lub nieskładające się z kwadratów jednostkowych, musimy sobie inaczej radzić, obliczając ich pola.

Przykład 1

Pole trójkąta możemy obliczyć ze wzoru P = (a · h) : 2, gdzie a = |EF|, h = |GH|
Pole trójkąta GFE = (4 x 2) : 2 = 4 j^2

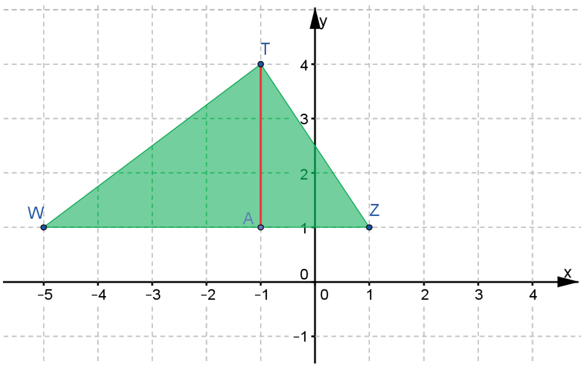


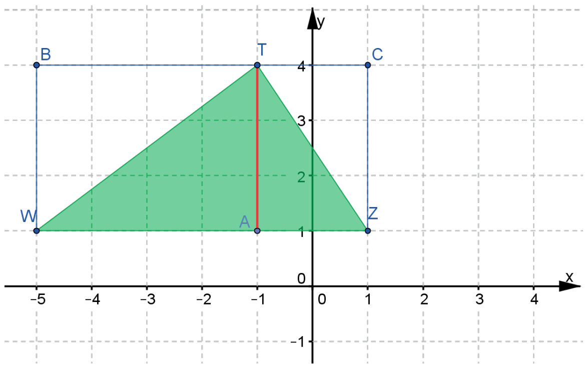
Pole trólkąta GFE możemy policzyć też inaczej: Trójkąt GFE składa się z trójkątów GFH i GHE. Trójkąty te stanowią połowy odpowiednich prostokątów GBEH i CGHF, więc pole trójkąta GFE stanowi połowę pola prostokąta BCFE, czyli 0,5 · (2 · 4) = 4 j^2.



Ćwiczenie 1

Oblicz na dwa sposoby pole trójkąta WZT.

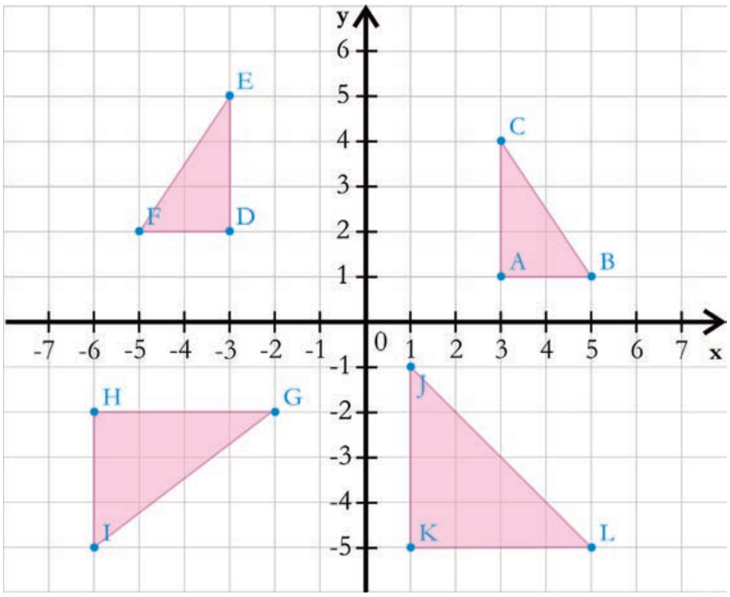




KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

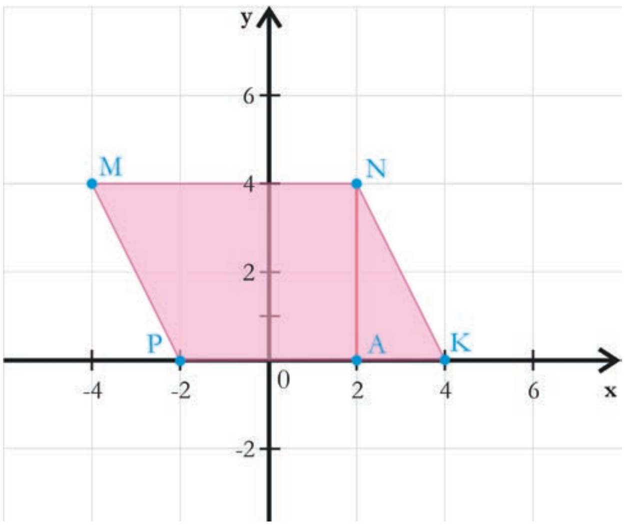
Ćwiczenie 2

Oblicz pola trójkątów ABC, DEF, JKL, GHI.



Przykład 2

Obliczmy pole równoległoboku PKNM.
Wzór na pole równoległoboku to: a · h, gdzie a = |PK|, h = |NA|
Pole równoległoboku wynosi 6 j².
Można też podzielić równoległobok na prostokąt i dwa trójkąty i liczyć pola poszczególnych figur, a potem je zsumować.



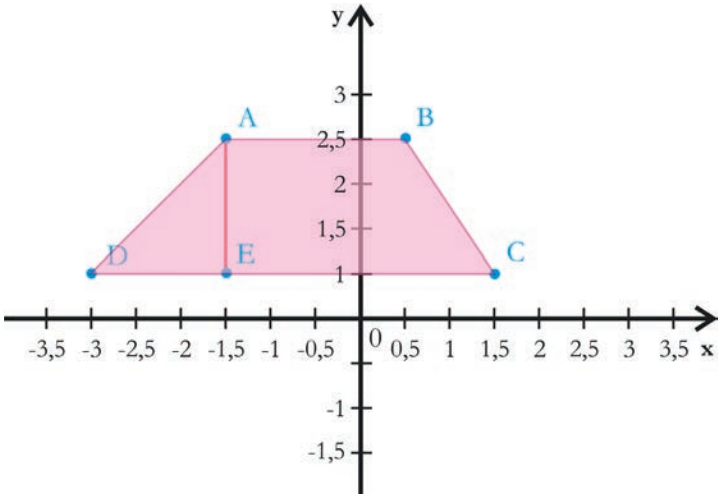
Przykład 3

Obliczmy pole trapezu DCBA.

Wzór na pole trapezu to: [(a + b) · h] : 2, gdzie a = |DC|, b = |AB|, h = |AE|,

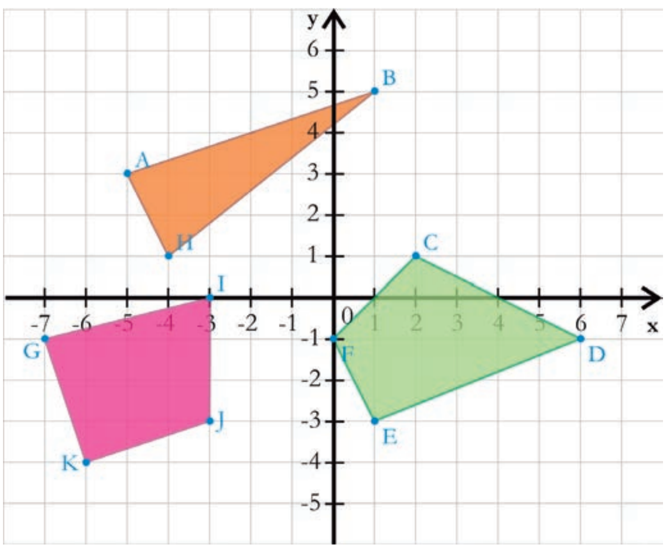
Pole trapezu wynosi: [(9 + 4) · 3] : 2 = 34,5 j^2.

Oczywiście można też podzielić trapez na prostokąt i dwa trójkąty i zsumować pola poszczególnych figur.



Ćwiczenie 3

Dokonując odpowiednich podziałów lub dorysowując pewne odcinki do niżej narysowanych figur, oblicz ich pola powierzchni.



KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Książka zawiera część materiałów zgromadzonych na platformie edukacyjnej MATI opracowanych w ramach projektu *e-Matematyka i zajęcia komputerowe - skuteczne programy nauczania.*

Stanowi materiał pomocniczy dla dzieci z klasy VI szkoły podstawowej, ich rodziców i nauczycieli.

Wersję instalacyjną platformy MATI można pobrać m.in. ze strony www.ematematyka.edu.pl

ISBN-978-83-941701-2-1

9 788394 170721