



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Pozyskiwanie danych przestrzennych, wykorzystywanie map numerycznych i analogowych, posługiwanie się systemami GIS

Materiały dydaktyczne dla trenerów warsztatów realizowanych w ramach projektu
"Nauczyciel na praktykach. Program doskonalenia zawodowego w przedsiębiorstwach
dla nauczycieli kształcenia zawodowego"

dr inż. Zbigniew Muszyński

współpraca merytoryczna:

prof. dr hab. inż. Edward Osada

mgr inż. Przemysław Malczewski

Copyright © by Dolnośląska Szkoła Wyższa, Wrocław 2011

Projekt oraz niniejsze materiały zostały współfinansowane ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Publikacja dystrybuowana bezpłatnie.

Cytowanie fragmentów wyłącznie z podaniem źródła autorów

Dolnośląska Szkoła Wyższa

Biuro projektu

„Nauczyciel na praktykach. Program doskonalenia zawodowego w przedsiębiorstwach dla nauczycieli kształcenia zawodowego”

ul. Wagonowa 9, 53-609 Wrocław

tel. 71 358-27-24

fax. 71 358-27-68

e-mail: nnp@dswe.pl

www.nauczycielnapraktykach.pl

Spis treści

1. Geodezyjna elipsoida odniesienia	2
1.1. Współrzędne geograficzne	2
1.2. Współrzędne geocentryczne	9
1.3. Elipsoidy niegeocentryczne	13
1.4. Geometria elipsoidy	20
Literatura	24

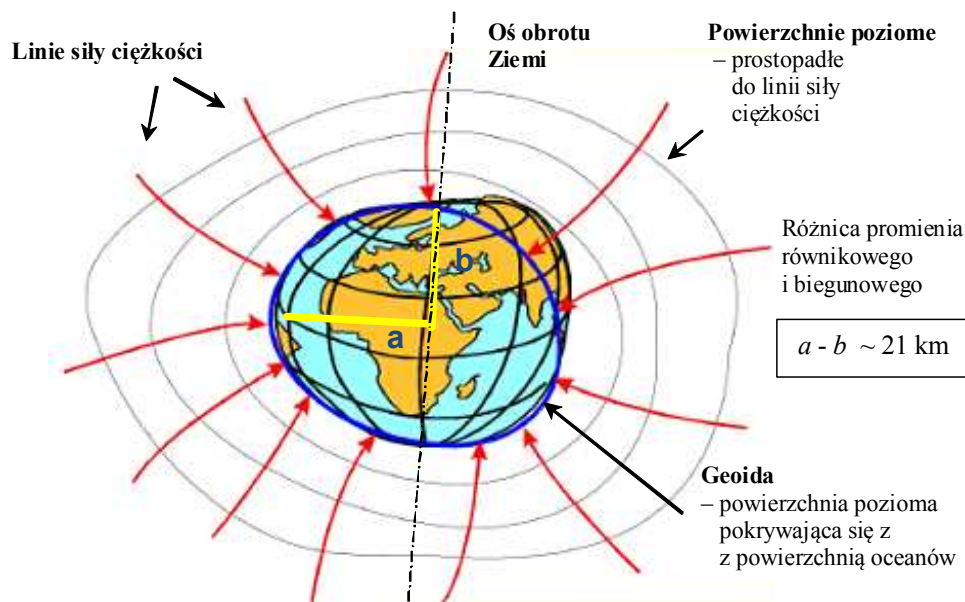
1

Geodezyjna elipsoida odniesienia

1.1. Współrzędne geograficzne

Kształt Ziemi

Ziemia ma nieregularny spłaszczony w okolicach bieguna kształt, ustalony w procesie jej tworzenia w wyniku działania siły odśrodkowej. Promień równikowy Ziemi a jest większy od promienia biegunowego b o około 21 km (rys. 1). Średni promień Ziemi wynosi 6371 km.



Rys. 1

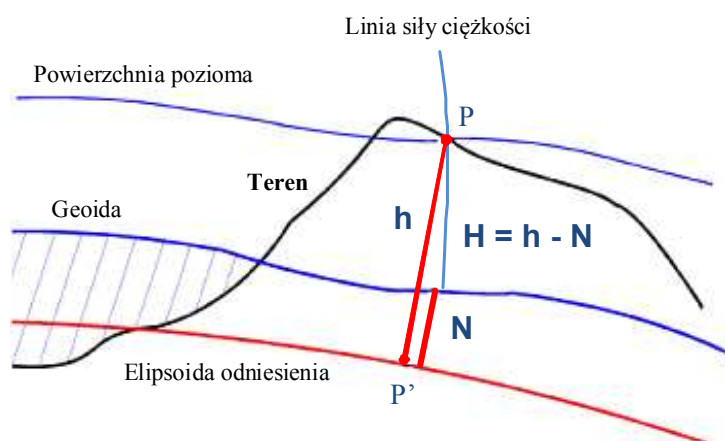
W efekcie spłaszczenia Ziemi:

- najwyższy szczyt Ziemi, Mount Everest o wysokości 8848 m nad poziomem morza - geoidą, nie jest punktem najbardziej oddalonym od środka masy Ziemi – punktem tym jest położony blisko Równika stożek wulkaniczny Chimborazo (6 310 m nad poziomem morza w Ekwadorze) - wyższy o ponad 2000 m Mount Everest leży na szerokości geograficznej, na której promień Ziemi jest o kilka kilometrów krótszy od promienia równikowego,

- rzeki o znacznych długościach, płynące w stronę równika np. Missisipi, może się wydawać, że “płyną pod górę”, ponieważ ich źródła leżą bliżej środka Ziemi niż ujścia.

Geoida

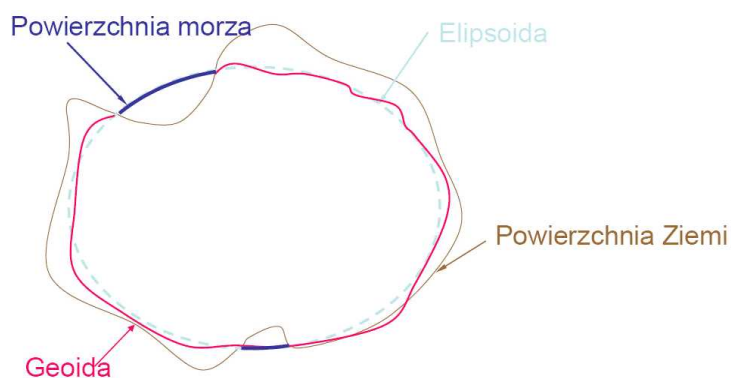
W czasie tworzenia, w wyniku spłaszczenia powstała bryła Ziemi, która nie ma swojego odpowiednika w geometrii, nazwano ją **geoidą** (z greckiego: *gea* – Ziemia, *eidos* – wygląd, kształt). Z definicji, geoida to bryła, której powierzchnia w każdym miejscu jest pozioma, to znaczy prostopadła do kierunku działania siły ciężkości. Jest ona utożsamiana z powierzchnią oceanów, przedłużoną pod lądem w taki sposób, aby kierunek siły ciężkości był do niej w każdym punkcie prostopadły (rys. 1, 2). Wysokości punktów powierzchni Ziemi ponad geoidą - poziomem morza, odmierzane wzdłuż linii siły ciężkości są nazywane **wysokościami ortometrycznymi H** (rys. 2)



Rys. 2

Geodezyjna elipsoida odniesienia GRS80

Figurą geometryczną najbardziej zbliżoną kształtem do geoidy jest elipsoida obrotowa geodezyjnego systemu odniesienia GRS-80 (*Geodetic Reference System 1980*) o promieniu biegunowym b krótszym o 21 km od promienia równikowego a (rys. 2, 3).



Rys. 3

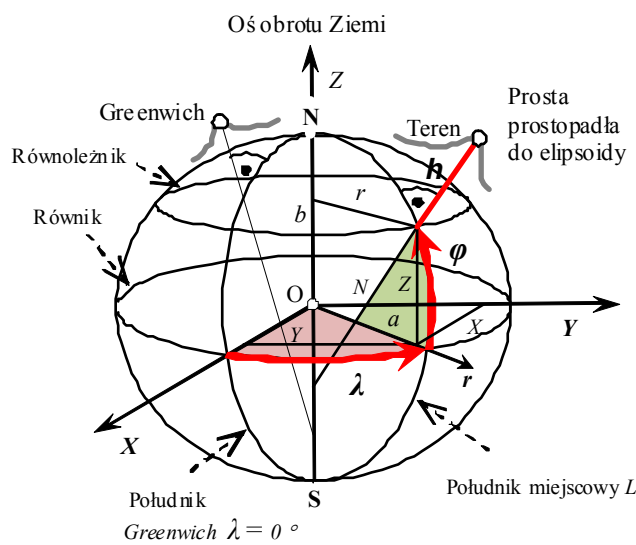
Elipsoida ta pełni rolę powierzchni odniesienia, przyjętą do sporządzania map: punkty (P) rzutowane są z powierzchni Ziemi prostopadłe na elipsoidę (P'), (rys. 4), która następnie jest odwzorowywana na płaszczyznę.

Środek elipsoidy GRS80 pokrywa się ze środkiem masy Ziemi łącznie z oceanami i atmosferą O - elipsoida jest geocentryczna (rys. 4). Oś obrotu elipsoidy przyjmuje średnie położenie osi obrotu Ziemi w latach 1900 - 1905. Oś obrotu elipsoidy wyznacza na jej powierzchni bieguny geograficzne północny N i południowy S.

Elipsoida jest powierzchnią obrotową, zatem (rys. 4):

- płaszczyzny prostopadłe do osi obrotu Ziemi przecinają elipsoidę wzdłuż kół nazywanych **równoleżnikami**, jednym z nich jest **równik** - w tym przypadku płaszczyzna tnąca przechodzi przez środek masy Ziemi O,
- płaszczyzny przechodzące przez oś obrotu Ziemi przecinają elipsoidę wzdłuż elips południkowych.

Łuki elips południkowych, łączące bieguny Ziemi N-S, przecinające równik pod kątem prostym są nazywane **południkami**. Południk przechodzący przez wybrany punkt jest nazywany południkiem miejscowym, np. południk Greenwich (rys. 4).



Rys. 4

Parametrami elipsoidy odniesienia GRS-80 są (rys. 4):

- półoś równikowa a i biegunowa b :

$$a := 6378137.000 \quad b := 6356752.31414$$

- spłaszczenie: $f := \frac{a-b}{a}$

- mimośród pierwszy e i drugi e_2 :

$$e := \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} \quad e_2 := \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}}$$

Współrzędne geograficzne geodezyjne φ, λ, h

Położenie punktu powierzchni Ziemi P określane jest względem elipsoidy odniesienia za pomocą współrzędnych geograficznych geodezyjnych szerokości φ , długości λ i wysokości h (rys. 4):

- **szerokość geodezyjna φ** jest kątem między prostą prostopadłą do elipsoidy poprowadzoną z punktu P a płaszczyzną równika,
- **długość geodezyjna λ** jest kątem dwuściennym między płaszczyzną południka zerowego przechodzącego przez Greenwich a płaszczyzną południka punktu P,
- **wysokość geodezyjna h** jest odległością punktu powierzchni Ziemi P od powierzchni elipsoidy.

Współrzędne te są mierzone bezpośrednio za pomocą odbiorników satelitarnych GPS. Szerokość i długość są wyrażane w stopniach ($^{\circ}$) minutach ($'$) i sekundach ($''$), (rys. 5).



Rys. 5

Format (*Stopnie, Minuty, Sekundy*) jest zamieniany na *Stopnie* według reguły:

$$\varphi := \left(51 + 6 \cdot \frac{1}{60} + 43.7823 \cdot \frac{1}{60 \cdot 60} \right)$$

$$\lambda := \left(16 + 59 \cdot \frac{1}{60} + 19.8847 \cdot \frac{1}{60 \cdot 60} \right)$$

- przy użyciu funkcji:

$$St(St, Min, Sek) := \left(St + Min \cdot \frac{1}{60} + Sek \cdot \frac{1}{60 \cdot 60} \right)$$

$$\varphi := St(51, 6, 43.7823)$$

$$\lambda := St(16, 59, 19.8847)$$

Format *Stopnie* jest zamieniany na (*Stopnie, Minuty, Sekundy*) przy użyciu funkcji:

$$StMinSek(St) := \begin{cases} St \leftarrow St \\ St \leftarrow trunc(St) \\ Min \leftarrow trunc\left[\left(St - St\right) \cdot 60\right] \\ Sek \leftarrow \left[\left(St - St\right) \cdot 60 - Min\right] \cdot 60 \\ augment(St, augment(Min, Sek)) \end{cases}$$

$$\varphi := StMinSek(51.1121617500)$$

$$\lambda := StMinSek(16.9888568611)$$

W obliczeniach w mathcadzie przy użyciu funkcji trygonometrycznych używane są wartości szerokości i długości wyrażone w radianach:

$$\varphi := 51.1121617500 \cdot deg$$

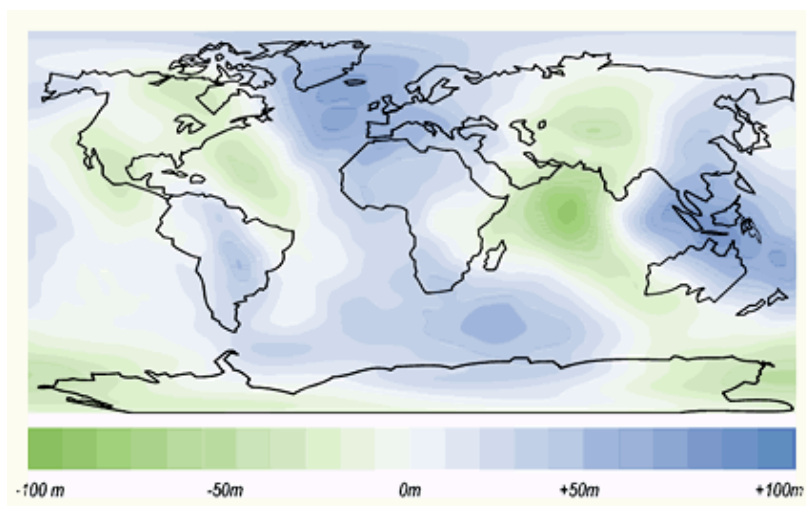
$$\lambda := 16.9888568611 \cdot deg$$

gdzie

$$deg = \pi/180, \quad deg = 0.017453292520$$

Wysokość ortometryczna

Geoida, reprezentująca poziom morza, przebiega ponad elipsoidą GRS-80 na wysokości do 70 metrów i poniżej elipsoidy na głębokości do minus 100 metrów (rys. 6).



Rys. 6

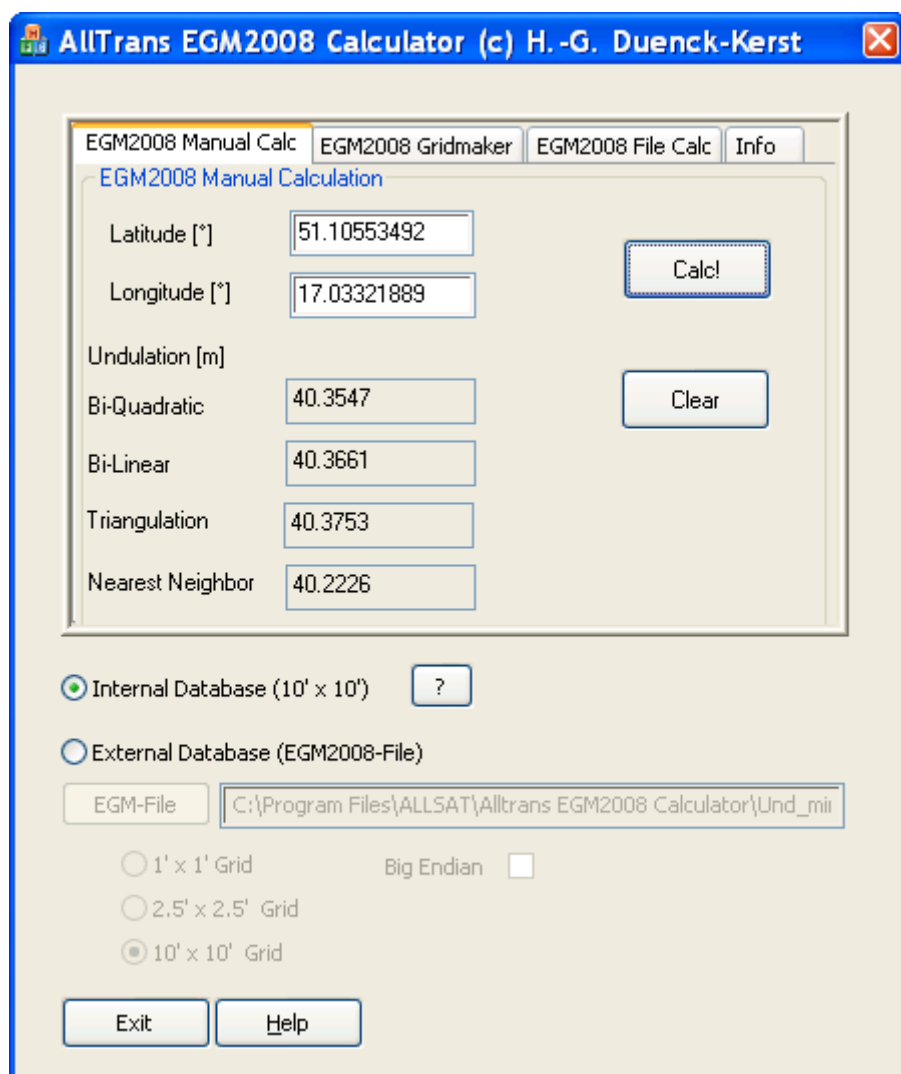
Wysokość geoidy w modelu EGM2008 w dowolnym punkcie o pomierzonej szerokości i długości geograficznej geodezyjnej φ λ może być obliczona przy użyciu dostępnego w internecie kalkulatora *AllTrans EGM2008 Calculator* (rys. 7).

Odbiornik GPS jest wyposażony w cyfrowy model geoidy na podstawie którego interpoluje wysokość geoidy nad elipsoidą N a następnie przelicza pomierzoną wysokość geodezyjną h na wysokość ortometryczną H ponad geoidą na podstawie zależności $H = h - N$ (rys. 2).

Quasigeoida. Wysokość normalna

W Polsce wysokości punktów nad poziomem morza H są odnoszone do pewnej powierzchni - prawie pokrywającej się z przedłużoną pod lądem powierzchnią morza Bałtyckiego i jednocześnie przebiegającą w pobliżu geoidy, nazywanej quasigeoidą. Punktem przez który ta powierzchnia przechodzi jest reper mareografu w Kronsztadzie koło Sankt Petersburga. Są to tak zwane wysokości normalne obliczane według teorii Molodenskigo. Quasigeoida wznosi się nad elipsoidą GRS-80 na wysokość od około 27 m na północnym wschodzie do około 44 m na południowym zachodzie kraju i stosunkowo dobrze przylega do geoidy (rys. 3).

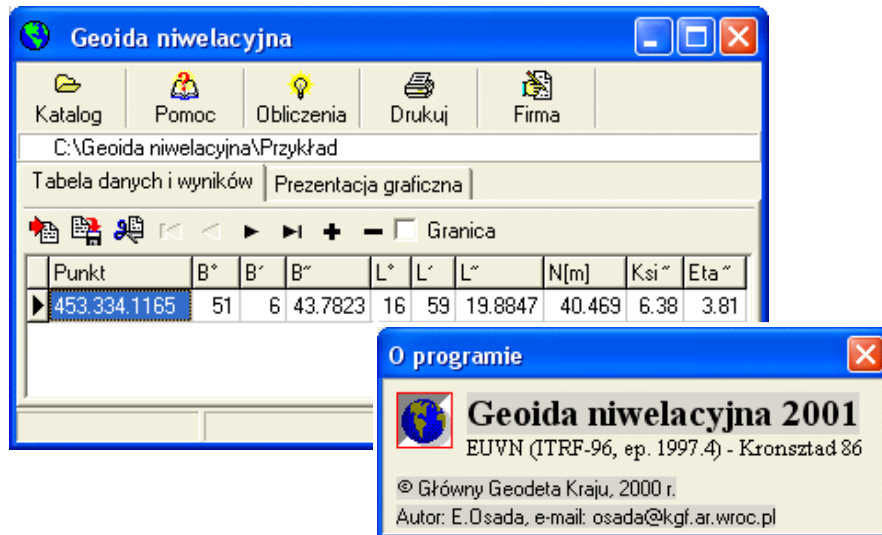
Wysokości quasigeoidy N w punktach o pomierzonej szerokości i długości geograficznej geodezyjnej φ λ mogą być obliczane przy użyciu programu komputerowego *Geoida niwelacyjna 2001* udostępnionego przez Główny Urząd Geodezji i Kartografii (GUGIK), (rys. 8).



Rys. 7

Model quasigeoidy GUGIK2001 jest udostępniony przez GUGIK w postaci regularnej siatki kwadratów o wymiarze $1 \text{ km} \times 1 \text{ km}$ do wykorzystania między innymi w odbiornikach GPS.

Odbiorniki GPS mierzą wysokości punktów h nad elipsoidą GRS80, a następnie przeliczają te wysokości na normalne H ponad quasigeoidą na podstawie zależności $H = h - N$ gdzie N jest wysokością quasigeoidy nad elipsoidą. Wysokość N odbiornik interpoluje z najbliższych węzłów wspomnianej siatki wysokości geoidy.



Rys. 8

1.2. Współrzędne geocentryczne

Układ współrzędnych geocentrycznych X, Y, Z

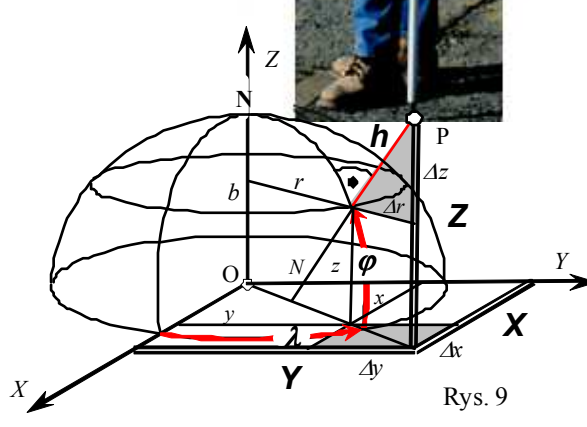
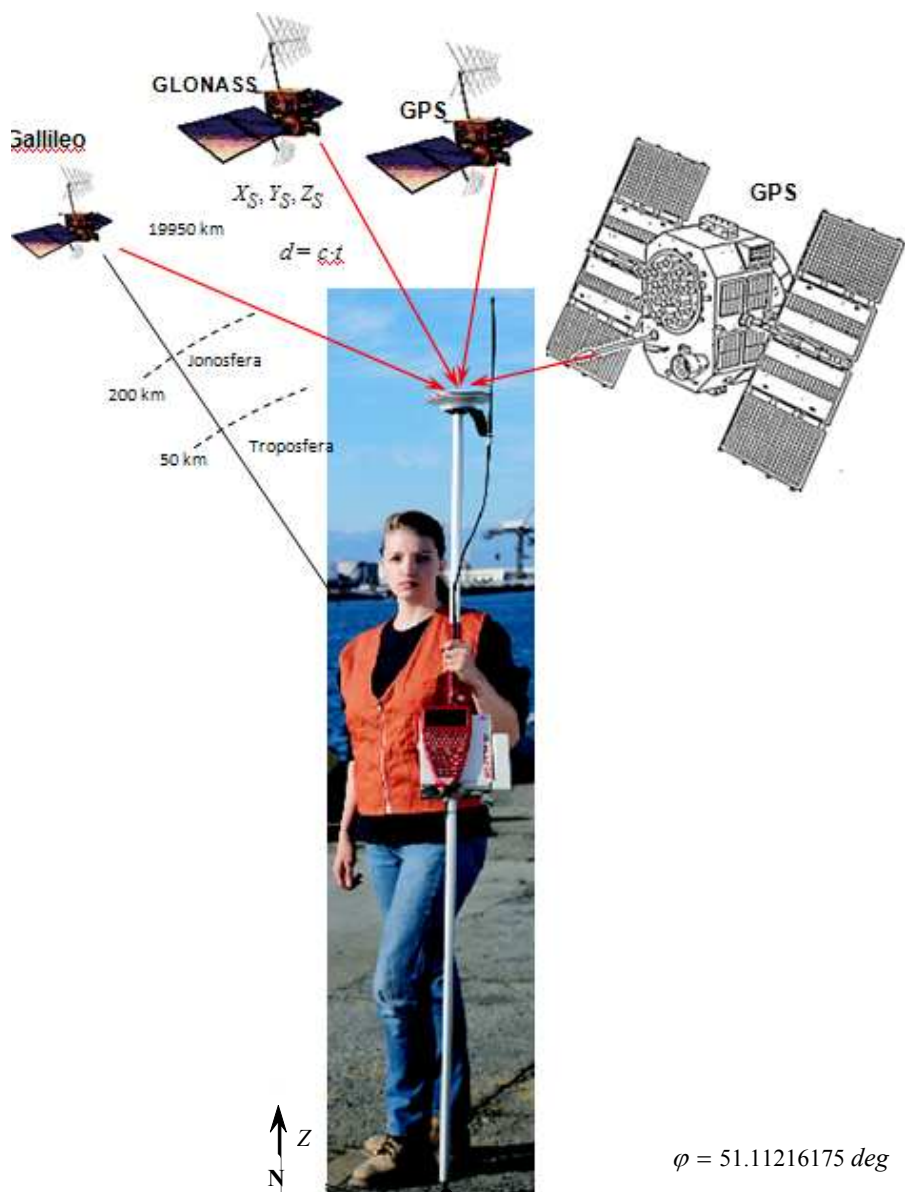
Układ współrzędnych geocentrycznych kartezjańskich X, Y, Z zaczepiony jest w środku masy Ziemi (rys. 4). Oś Z jest skierowana wzdłuż osi obrotu Ziemi na północ, osie X i Y leżą na płaszczyźnie równika, przy czym X leży jednocześnie na płaszczyźnie południka Greenwich. Współrzędne geocentryczne X, Y, Z mierzone są za pomocą odbiorników GPS (rys. 9)

Zamiana φ, λ, h na X, Y, Z

Równanie kanoniczne elipsoidy obrotowej o półosiach równikowej a i biegunowej b ma postać:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

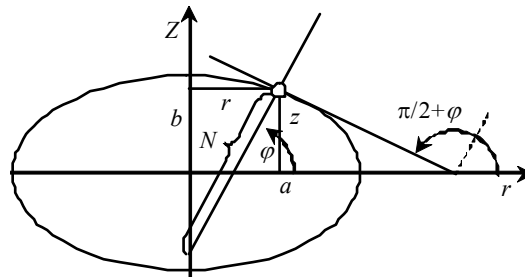
gdzie x, y, z są współzrędnymi punktu leżącego na elipsoidzie, w układzie X, Y, Z .



$\varphi = 51.11216175 \text{ deg}$
 $\lambda = 16.98885686 \text{ deg}$
 $h := 153.126$
 $\Delta r := h \cdot \cos(\varphi)$
 $\Delta x := \Delta r \cdot \cos(\lambda)$
 $\Delta y := \Delta r \cdot \sin(\lambda)$
 $\Delta z := h \cdot \sin(\varphi)$

Elipsoidal powstaje w wyniku obrotu elipsy południkowej o półosiach a i b wokół osi obrotu Ziemi (rys. 4, 10), o równaniu kanonicznym we współrzędnych r, z :

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$



Rys. 10

Różniczkując równanie elipsy otrzymuje się

$$\frac{r}{a^2} + \frac{z}{b^2} \frac{dz}{dr} = 0$$

gdzie pochodna jest równa tangensowi kąta nachylenia stycznej do osi r

$$\frac{dz}{dr} = \operatorname{tg}(\pi/2 + \varphi) = -\operatorname{ctg}\varphi$$

Zatem

$$z = \frac{b^2}{a^2} r \operatorname{tg}\varphi = r(1 - e^2) \operatorname{tg}\varphi$$

co po podstawieniu do równania kanonicznego elipsy prowadzi do współrzędnej r wyrażonej za pomocą szerokości geodezyjnej φ :

$$r(\varphi) := \frac{a \cdot \cos(\varphi)}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin(\varphi)^2}}$$

$$r := r(\varphi)$$

Podstawiając to równanie do $z = r(1 - e^2) \operatorname{tg}\varphi$ otrzymuje się współrzędną z jako funkcję szerokości φ :

$$z := \frac{a \cdot (1 - e^2) \cdot \sin(\varphi)}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin(\varphi)^2}}$$

Współrzędne r i z punktu na elipsie południkowej mogą być przedstawione za pomocą odległości N punktu elipsy od osi z wzdłuż prostej normalnej (rys. 10).

Ponieważ $r = N \cos \varphi$, zatem w rozpatrywanym punkcie

$$N(\varphi) := \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2(\varphi)}}$$

$$\underline{N} := N(\varphi)$$

$$\underline{z} := N \cdot (1 - e^2) \cdot \sin(\varphi)$$

Współrzędne x, y punktu elipsy dane są wzorami $x = r \cos \lambda$, $y = r \sin \lambda$ gdzie $r = N \cos \varphi$. Zatem, przeliczenie współrzędnych geodezyjnych na prostokątne $\varphi, \lambda \rightarrow x, y, z$ realizowane jest według zależności:

$$x := N \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\lambda)$$

$$y := N \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\lambda)$$

$$\underline{z} := N \cdot (1 - e^2) \cdot \sin(\varphi)$$

Wzory te są nazywane równaniami parametrycznymi elipsoidy obrotowej, parametrami są współrzędne geodezyjne φ, λ .

Przyrosty współrzędnych $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ od punktu na elipsoidzie wzdłuż normalnej do punktu na powierzchni Ziemi są zależne od wysokości tego punktu nad elipsoidą h (rys. 9).

Współrzędne punktu na powierzchni Ziemi X, Y, Z otrzymuje się dodając do współrzędnych punktu na elipsoidzie x, y, z przyrosty współrzędnych $\Delta x, \Delta y, \Delta z$:

$$X := (N + h) \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\lambda)$$

$$Y := (N + h) \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\lambda)$$

$$Z := [N \cdot (1 - e^2) + h] \cdot \sin(\varphi)$$

Zamiana odwrotna X, Y, Z na φ, λ, h

W wyniku przekształcenia powyższych równań ($\varphi, \lambda, h \rightarrow X, Y, Z$) otrzymuje się wzory do przeliczania współrzędnych prostokątnych na współrzędne geodezyjne i wysokość punktu nad elipsoidą ($X, Y, Z \rightarrow \varphi, \lambda, h$):

$$\lambda := \operatorname{atan}\left(\frac{Y}{X}\right)$$

$$\nu := \operatorname{atan}\left(\frac{a \cdot Z}{b \cdot \sqrt{X^2 + Y^2}}\right)$$

$$\varphi := \operatorname{atan}\left(\frac{Z + b \cdot e_2^2 \cdot \sin(\nu)^3}{\sqrt{X^2 + Y^2} - a \cdot e^2 \cdot \cos(\nu)^3}\right)$$

$$h := \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos(\varphi)} - \frac{a}{\sqrt{1 - (e \cdot \sin(\varphi))^2}}$$

Współrzędne prostokątne X , Y , Z są mierzone bezpośrednio za pomocą odbiorników globalnych satelitarnych systemów pozycyjnych GNSS (rys. 10). Odbiorniki przeliczają pomierzone współrzędne prostokątne X , Y , Z na współrzędne geodezyjne φ , λ , h - według podanych zależności, a następnie na współrzędne kartograficzne w wybranym odwzorowaniu elipsoidy na płaszczyznę oraz na wysokość ortometryczną lub normalną H .

1.3. Elipsoidy niegeocentryczne

Elipsoidy niegeocentryczne

Obecnie w pracach geodezyjnych w Polsce jest stosowana elipsoida geocentryczna GRS80. Do roku 2009 stosowana była niegeocentryczna elipsoida Krasowskiego - nieznacznie przesunięta i obrócona względem elipsoidy geocentrycznej GRS-80 (rys. 11), o parametrach:

$$a := 6378245.000$$

$$b := 6356863.01877$$

$$f := \frac{a - b}{a}$$

$$e := \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$$

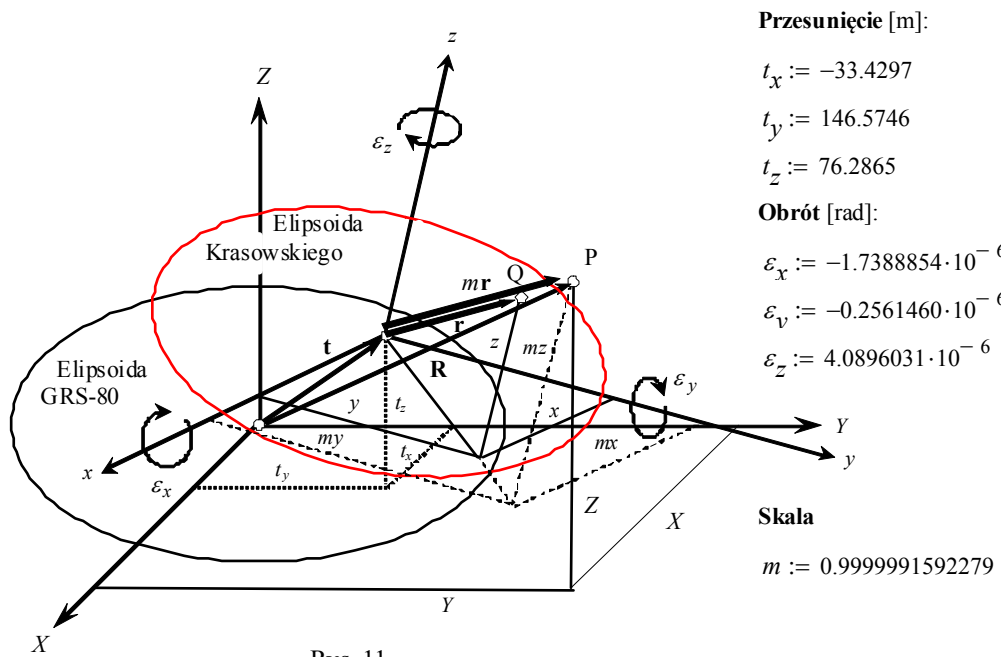
$$e_2 := \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}}$$

Składowe przesunięcia t_x , t_y , t_z i kąty obrotu ε_x , ε_y , ε_z elipsoidy Krasowskiego oraz skala układu współrzędnych są podane na rys. 11.

W tabeli 1 podane są parametry elipsoid odniesienia stosowanych w różnych krajach.

Tabela 1. Geodezyjne elipsoidy odniesienia

Ellipsoid Name (year computed)	Semi-Major Axis, a , [m]	Inverse Flattening, $1/f$
Airy (1830)	6377563.396	299.324964
Everest (1830)	6377276.345	300.8017
Bessel (1841)	6377397.155	299.152813
Clarke (1866)	6378206.4	294.978698
Clarke (1880)	6378249.145	293.465
Modified Clarke (1880)	6378249.145	293.4663
International (1924)	6378388.	297.
Krassowski (1940)	6378245.	298.3
Mercury (1960)	6378166.	298.3
Geodetic Reference System (1967), GRS67	6378160.	298.2471674273
Modified Mercury (1968)	6378150.	298.3
Australian National	6378160.	298.25
South American (1969)	6378160.	298.25
World Geodetic System (1966), WGS66	6378145.	298.25
World Geodetic System (1972), WGS72	6378135.	298.26
Geodetic Reference System (1980), GRS80	6378137.	298.257222101
World Geodetic System (1984), WGS84	6378137.	298.257223563
TOPEX/Poseidon (1992) (IERS recom.) ²	6378136.3	298.257



Rys. 11

Transformacja 7-parametrowa (Helmerta)

Wzory do przeliczenia współrzędnych geocentrycznych z układu elipsoidy Krasowskiego (x, y, z) na współrzędne geocentryczne w układzie elipsoidy GRS-80 (X, Y, Z) , nazywane 7-parametrową transformacją (Helmerta):

$$\mathbf{R} = \mathbf{t} + m \mathbf{R}_{\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z} \mathbf{r} = m \mathbf{R}_{\varepsilon_x} \mathbf{R}_{\varepsilon_y} \mathbf{R}_{\varepsilon_z} \mathbf{r} = m \mathbf{R}(\varepsilon_x) \mathbf{R}(\varepsilon_y) \mathbf{R}(\varepsilon_z) \mathbf{r}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon_x & \sin \varepsilon_x \\ 0 & -\sin \varepsilon_x & \cos \varepsilon_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varepsilon_y & 0 & -\sin \varepsilon_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varepsilon_y & 0 & \cos \varepsilon_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varepsilon_z & \sin \varepsilon_z & 0 \\ -\sin \varepsilon_z & \cos \varepsilon_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

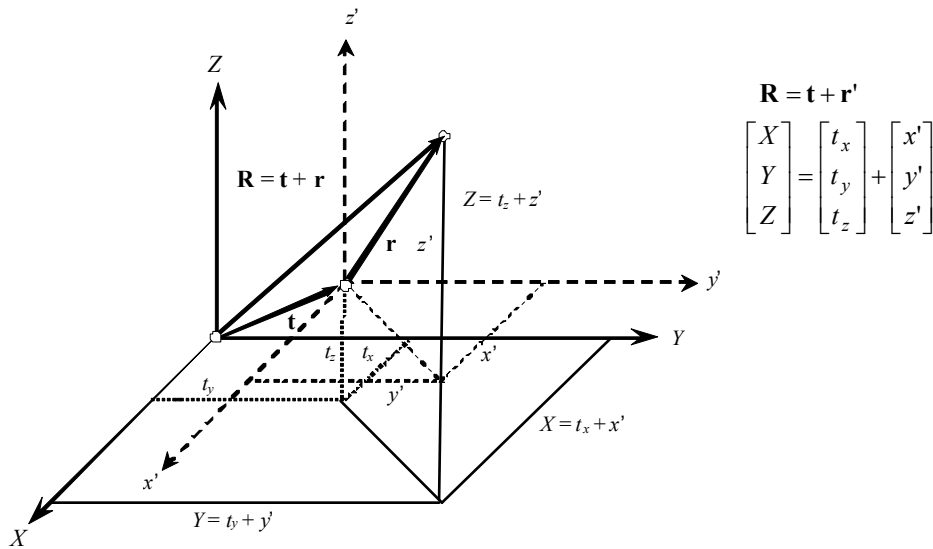
oraz zależność odwrotna

$$\mathbf{r} = m^{-1} \mathbf{R}_{\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z}^T (\mathbf{R} - \mathbf{t}) = m^{-1} \mathbf{R}_{\varepsilon_z}^T \mathbf{R}_{\varepsilon_y}^T \mathbf{R}_{\varepsilon_x}^T (\mathbf{R} - \mathbf{t}) = m^{-1} \mathbf{R}(\varepsilon_z)^T \mathbf{R}(\varepsilon_y)^T \mathbf{R}(\varepsilon_x)^T (\mathbf{R} - \mathbf{t})$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} \cos \varepsilon_z & -\sin \varepsilon_z & 0 \\ \sin \varepsilon_z & \cos \varepsilon_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varepsilon_y & 0 & \sin \varepsilon_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varepsilon_y & 0 & \cos \varepsilon_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon_x & -\sin \varepsilon_x \\ 0 & \sin \varepsilon_x & \cos \varepsilon_x \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} \right)$$

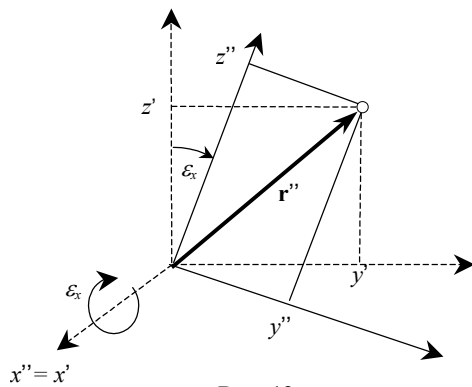
są wyprowadzane na podstawie:

- przesunięcia układu geocentrycznego (rys. 12)



Rys. 12

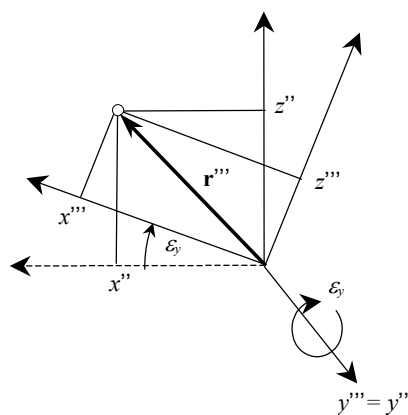
- obrotu przesuniętego układu współrzędnych wokół jego osi (rys. 13-15),



Rys. 13

$$\mathbf{r}' = \mathbf{R}_{\varepsilon_x} \mathbf{r}'', \quad \mathbf{R}_{\varepsilon_x} = \mathbf{R}(\varepsilon_x)$$

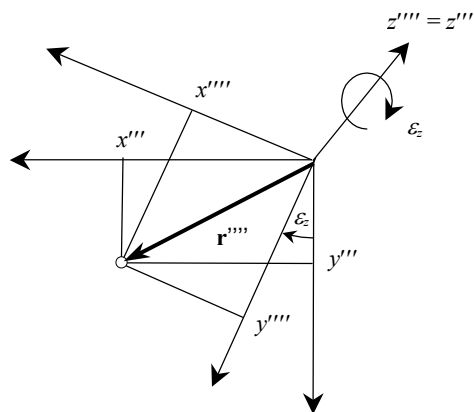
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon_x & \sin \varepsilon_x \\ 0 & -\sin \varepsilon_x & \cos \varepsilon_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix}$$



Rys. 14

$$\mathbf{r}'' = \mathbf{R}_{\varepsilon_y} \mathbf{r}''', \quad \mathbf{R}_{\varepsilon_y} = \mathbf{R}(\varepsilon_y)$$

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon_y & 0 & -\sin \varepsilon_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varepsilon_y & 0 & \cos \varepsilon_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{bmatrix}$$

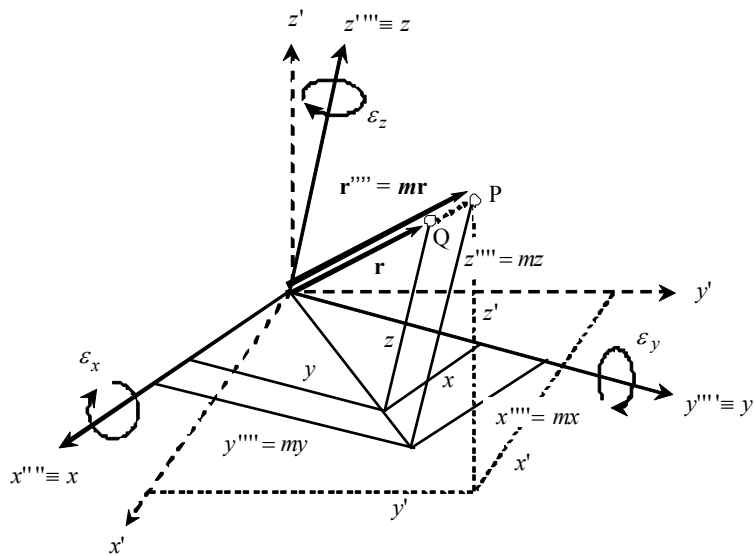


Rys. 15

$$\mathbf{r}''' = \mathbf{R}_{\varepsilon_z} \mathbf{r}'''', \quad \mathbf{R}_{\varepsilon_z} = \mathbf{R}(\varepsilon_z)$$

$$\begin{bmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon_z & \sin \varepsilon_z & 0 \\ -\sin \varepsilon_z & \cos \varepsilon_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'''' \\ y'''' \\ z'''' \end{bmatrix}$$

- skalowania współrzędnych w układzie obróconym (rys. 16),



$$\mathbf{r}'''' = m\mathbf{r}$$

$$\begin{bmatrix} x'''' \\ y'''' \\ z'''' \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Rys. 16

Ze względu na małe wartości kątów obrotu $\sin \varepsilon = \varepsilon$, $\cos \varepsilon = 1$ przekształcenia te ulegają uproszczeniu:

$$\mathbf{R} = \mathbf{t} + m\mathbf{R}_{\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z} \mathbf{r}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r} = -m^{-1}\mathbf{R}_{\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z}(\mathbf{R}-\mathbf{t})$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon_z & \varepsilon_y \\ \varepsilon_z & 1 & -\varepsilon_x \\ -\varepsilon_y & \varepsilon_x & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} \right)$$

Na przykład w punkcie P (rys. 5, 11):

$$X = 3837326.2724 \quad \varphi = 51.1121617500 \text{ deg}$$

$$Y = 1172372.3668 \quad \lambda = 16.9888568611 \text{ deg}$$

$$Z = 4941506.9238 \quad h = 153.1260$$

otrzymuje się:

- współrzędne x, y, z punktu Q w układzie Krasowskiego

$$\begin{pmatrix} \overset{\text{mm}}{x} \\ \overset{\text{mm}}{y} \\ \overset{\text{mm}}{z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} + \frac{1}{m} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

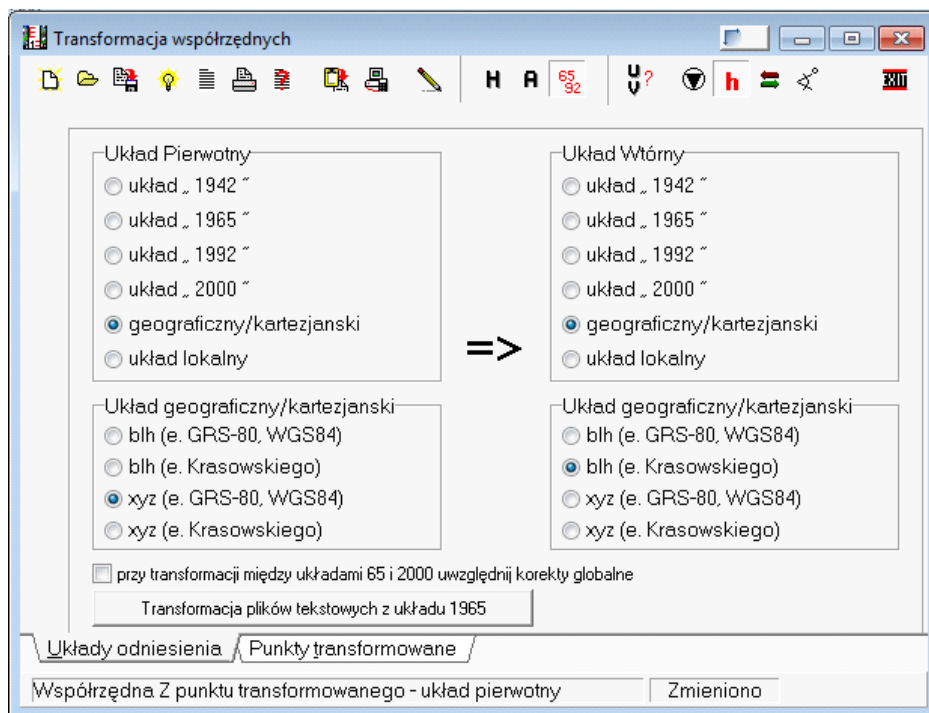
- współrzędne geodezyjne φ, λ, h punktu Q odniesione do elipsoidy Krasowskiego (na rys. 17, 18 pokazane jest przeliczenie za pomocą programu C-Geo):

$$\lambda := \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\overset{\text{mm}}{v} := \operatorname{atan}\left(\frac{a \cdot z}{b \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

$$\varphi := \operatorname{atan}\left(\frac{z + b \cdot e^2 \cdot \sin(v)^3}{\sqrt{x^2 + y^2} - a \cdot e^2 \cdot \cos(v)^3}\right)$$

$$h := \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\cos(\varphi)} - \frac{a}{\sqrt{1 - (e \cdot \sin(\varphi))^2}}$$



Rys. 17

Lp	Numer	X p	Y p	Z p	Numer	B w	L w	H p
1	P	3837326,272	1172372,367	4941506,924		51°06'45,02658''	16°59'26,30790'	115,043
2								
3								

Układy odniesienia Punkty transformowane

Numer punktu transformowanego - układ pierwotny Zmieniono

Rys. 18

- zamiana odwrotna $\varphi, \lambda, h. \rightarrow x, y, z$

$$N := \frac{a}{\sqrt{1 - (e \cdot \sin(\varphi))^2}}$$

$$x := (N + h) \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\lambda)$$

$$y := (N + h) \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\lambda)$$

$$z := [N \cdot (1 - e^2) + h] \cdot \sin(\varphi)$$

- zamiana odwrotna $x, y, z \rightarrow X, Y, Z$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} := m \cdot \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{pmatrix}^T \cdot \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} \right]$$

- współrzędne punktu Q w układzie geocentrycznym

$$\begin{pmatrix} X_Q \\ Y_Q \\ Z_Q \end{pmatrix} := 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{pmatrix}^T \cdot \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} \right]$$

- przemieszczenie $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ między punktami P i Q

$$\begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_Q \\ Y_Q \\ Z_Q \end{pmatrix}$$

- odległość D między punktami P i Q

$$D := \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2}$$

1.4. Geometria elipsoidy

Wektor wodzący elipsoidy

Wektor wodzący elipsoidy $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\varphi, \lambda)$, (rys. 19):

$$r_{\cdot}(\varphi, \lambda) := \begin{pmatrix} X_{\cdot}(\varphi, \lambda) \\ Y_{\cdot}(\varphi, \lambda) \\ Z_{\cdot}(\varphi, \lambda) \end{pmatrix} \quad r_{\cdot} := r_{\cdot}(\varphi, \lambda)$$

ma współrzędne $X(\varphi, \lambda)$, $Y(\varphi, \lambda)$, $Z(\varphi, \lambda)$ określone równaniami wyprowadzonymi w rozdz. 1.2.

Wektory styczne

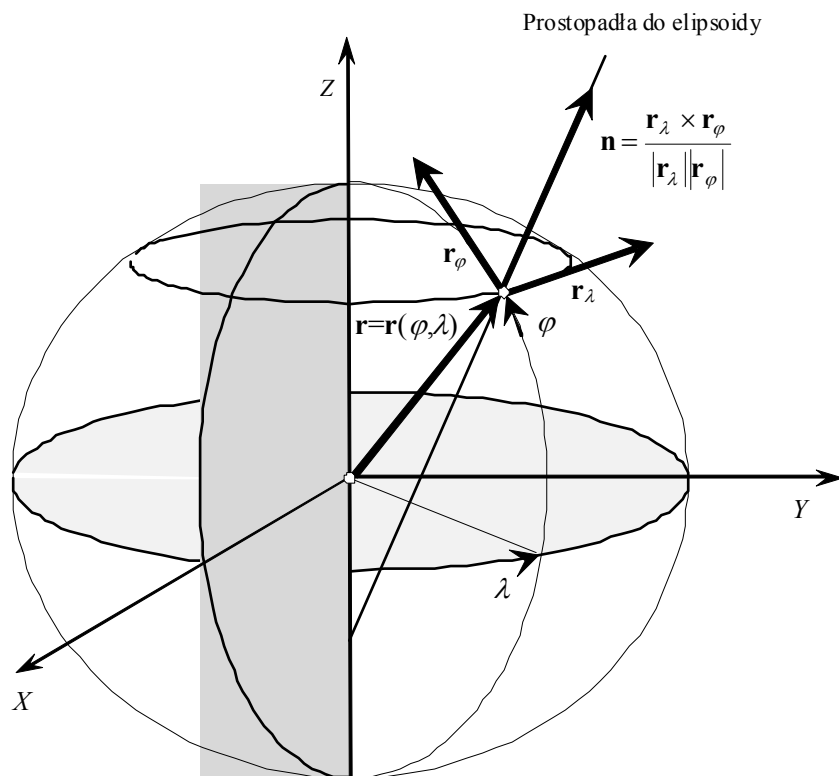
Pochodne wektora wodzącego elipsoidy $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\varphi, \lambda)$ względem współrzędnych geodezyjnych φ , λ są wektorami stycznymi do elipsoidy (rys. 19):

- w kierunku południka

$$\mathbf{r}_{\varphi} = \frac{d\mathbf{r}}{d\varphi}$$
$$r_{\varphi}(\varphi, \lambda) := \begin{pmatrix} \frac{d}{d\varphi} X(\varphi, \lambda) \\ \frac{d}{d\varphi} Y(\varphi, \lambda) \\ \frac{d}{d\varphi} Z(\varphi, \lambda) \end{pmatrix} \quad r_{\varphi} := r_{\varphi}(\varphi, \lambda)$$

- w kierunku równoleżnika

$$\mathbf{r}_{\lambda} = \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda}$$
$$r_{\lambda}(\varphi, \lambda) := \begin{pmatrix} \frac{d}{d\lambda} X(\varphi, \lambda) \\ \frac{d}{d\lambda} Y(\varphi, \lambda) \\ \frac{d}{d\lambda} Z(\varphi, \lambda) \end{pmatrix} \quad r_{\lambda} := r_{\lambda}(\varphi, \lambda)$$



Rys. 19

Wektor normalny

Wektor jednostkowy prostopadły do elipsoidy w kierunku na zewnątrz jest dany wzorem (rys. 19)

$$n(\varphi, \lambda) := \frac{r_{\lambda}(\varphi, \lambda) \times r_{\varphi}(\varphi, \lambda)}{|r_{\lambda}(\varphi, \lambda) \times r_{\varphi}(\varphi, \lambda)|} \quad \underline{\underline{n}} := n(\varphi, \lambda)$$

lub po przekształceniach

$$n(\varphi, \lambda) := \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot \cos(\lambda) \\ \cos(\varphi) \cdot \sin(\lambda) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{n}} := n(\varphi, \lambda)$$

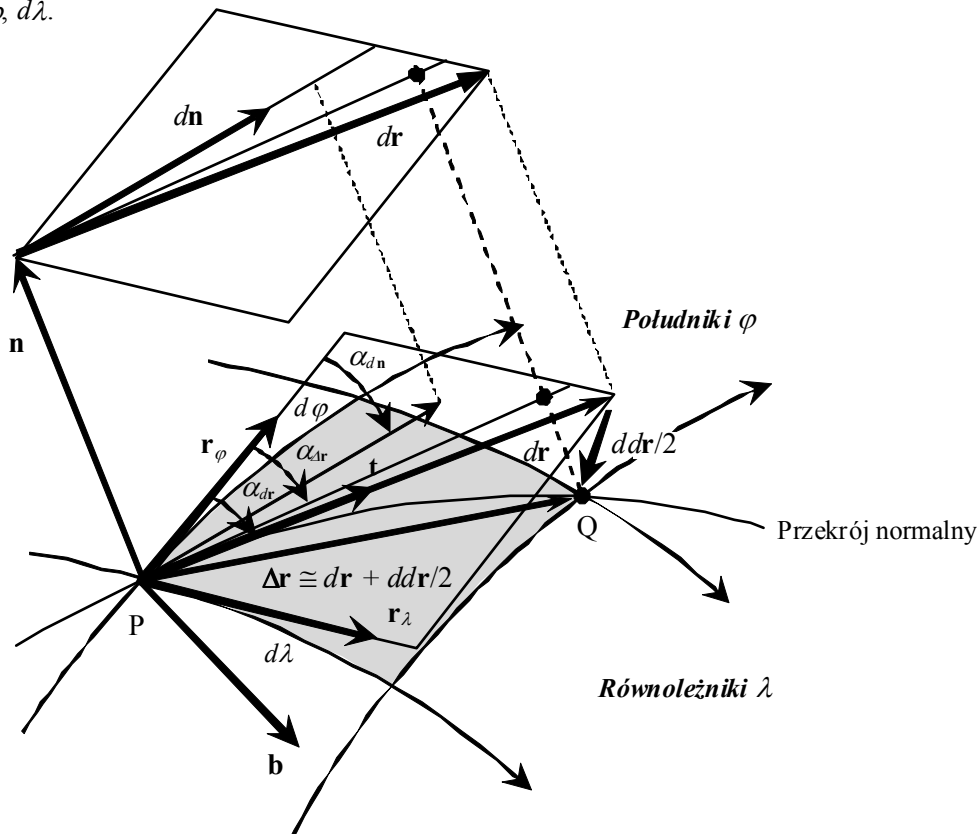
Różniczka wektora wodzącego elipsoidy

Różniczka $dr = r_{\varphi}d\varphi + r_{\lambda}d\lambda$ wektora wodzącego elipsoidy $r = r(\varphi, \lambda)$ jest wektorem stycznym do elipsoidy (rys. 20).

Wektor ten, zgodnie z rozwinięciem w szereg Taylora (rys. 20):

$$\Delta \mathbf{r} = d\mathbf{r} + \frac{1}{2} d^2\mathbf{r} + \dots$$

jest pierwszym przybliżeniem wektora odległości $\Delta \mathbf{r}$ między punktem $P(\varphi, \lambda)$ i punktem $Q(\varphi+d\varphi, \lambda+d\lambda)$ położonym blisko punktu P, określonym przyrostami współrzędnych $d\varphi, d\lambda$.



Rys. 20

Na przykład, dla przyrostów szerokości $d\varphi$ i długości $d\lambda$ równych $1' = 1/60^\circ$:

$$d\varphi := 1 \cdot \frac{1}{60} \cdot \text{deg}$$

$$d\lambda := 1 \cdot \frac{1}{60} \cdot \text{deg}$$

otrzymuje się:

$$dr := r_\varphi \cdot d\varphi + r_\lambda \cdot d\lambda$$

Łatwo sprawdzić, że jest to wektor styczny do elipsoidy, tworzący kąt prosty z wektorem normalnym \mathbf{n} (rys. 20):

$$\arccos\left(\frac{d\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{|d\mathbf{r}| \cdot |\mathbf{n}|}\right) = 90.00000000 \text{ deg}$$

posiadający długość

$$ds := |d\mathbf{r}|$$

oraz azymut

$$\alpha_{d\mathbf{r}} := \arccos\left(\frac{d\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_\varphi}{|d\mathbf{r}| \cdot |\mathbf{r}_\varphi|}\right)$$

Pierwsza forma kwadratowa elipsoidy

Długość ds wektora różniczki $d\mathbf{r}$ jest przybliżeniem odległości między dwoma bliskimi punktami na elipsoidzie P i Q (rys. 20).

Kwadrat długości

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = (\mathbf{r}_\varphi d\varphi + \mathbf{r}_\lambda d\lambda)(\mathbf{r}_\varphi d\varphi + \mathbf{r}_\lambda d\lambda) \\ &= \mathbf{r}_\varphi \mathbf{r}_\varphi d\varphi^2 + 2\mathbf{r}_\varphi \mathbf{r}_\lambda d\varphi d\lambda + \mathbf{r}_\lambda \mathbf{r}_\lambda d\lambda^2 \\ &= E d\varphi^2 + 2F d\varphi d\lambda + G d\lambda^2 \\ &= M(\varphi)^2 d\varphi^2 + N(\varphi)^2 \cos^2(\varphi) d\lambda^2 \end{aligned}$$

gdzie funkcja M oraz współczynniki E , F , G dane są wzorami

$$M(\varphi) := \frac{a \cdot (1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \cdot \sin^2(\varphi))^3}} \quad M := M(\varphi)$$

$$E = \mathbf{r}_\varphi \mathbf{r}_\varphi \quad E(\varphi, \lambda) := M(\varphi)^2$$

$$F = \mathbf{r}_\varphi \mathbf{r}_\lambda \quad F(\varphi, \lambda) := 0$$

$$G = \mathbf{r}_\lambda \mathbf{r}_\lambda \quad G(\varphi, \lambda) := N(\varphi)^2 \cdot \cos^2(\varphi)$$

nazywany jest **pierwszą formą kwadratową** powierzchni elipsoidy

Obliczona stąd długość różniczki, wyrażona za pomocą przyrostów współrzędnych geodezyjnych

$$ds := \sqrt{M(\varphi)^2 \cdot d\varphi^2 + N(\varphi)^2 \cdot \cos^2(\varphi) \cdot d\lambda^2}$$

jest naturalnie równa długości różniczki obliczonej ze współrzędnych prostokątnych

$$ds := |d\mathbf{r}|$$

Literatura

- Balcerzak J., Panasiuk J.** (2005), *Wprowadzenie do kartografii matematycznej*. Oficyna Wyd. Polit. Warsz. Warszawa.
- Biernacki F.** (1973), *Podstawy teorii odwzorowań kartograficznych*. PWN, Warszawa.
- Bronsztejn I. N., K. A. Siemiendajew, G. Musioł, H. Muhlig** (2004), *Nowoczesne Kompendium Matematyki*. PWN Warszawa.
- Czarnecki K.** (1994), *Geodezja współczesna w zarysie*. Wiedza i Życie, Warszawa.
- Dorożyński R.** (2006), *Zarys kartometrii - pomiary na mapie*. Wyd. Dom Organizatora, Toruń.
- Gajderowicz I.** (2009), *Odwzorowania kartograficzne. Podstawy*. Wyd. Uniw. Warmińsko-Mazurskiego w Olsztynie.
- Grafarend E.W., Krumm F.W.** (2006), *Map Projections - Cartographic Information Systems*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.
- Grygorenko W.** (1975), *Kartografia matematyczna - teoria elementarna i zastosowania*, Wyd. WAT Warszawa.
- Geodezja Wyższa i Astronomia Geodezyjna** (1981). Praca zbiorowa pod red. R.Hlibowickiego, PWN Warszawa-Wrocław.
- Kadaj R.** (2001), *Wytyczne techniczne G-1.10. Formuły odwzorowawcze i parametry układów współrzędnych*. Główny Geodeta Kraju, GUGIK, Warszawa.
- Kruger L.** (1912), *Konforme Abbildung des Erdelellipsoids in der Ebene*. Geod. Institut., Neue Folge, 51, Potsdam (B.G. Teubner, Leipzig).
- Krzywicka-Blum E.** (1969), *Zarys kartografii*, WSR Wrocław.
- Krzywicka-Blum E.** (1981), *Odwzorowania kartograficzne*. Rozdział III w pracy zbiorowej pod red. R.Hlibowickiego *Geodezja Wyższa i Astronomia Geodezyjna*, PWN Warszawa-Wrocław.
- Łomnicki A.** (1956), *Kartografia matematyczna*, PWN Warszawa.
- Osada E.** (1995), *Spline-Transformation of coordinates in GIS*. Geo-Information-Systeme, Heft 4, Wichmann, Karlsruhe.
- Osada E.** (2008), *Opracowanie technologii transformacji poziomej i wysokościowej Mapy Zasadniczej miasta Wrocławia do układów 2000 i Kronsztad 1986*. Politechnika Wrocławska. Raport I-11/S-056/2008.
- Paślawski J.** red. nauk., (2006), *Wprowadzenie do kartografii i topografii*. Wyd. Nowa Era, Wrocław.
- Plewako M., Szczurek J.** (1988), *Ćwiczenia z geodezji wyższej. Obliczenia na elipsoidzie Krasowskiego*. Wyd. AR w Krakowie
- Rózycki J.** (1978), *Kartografia matematyczna*, PWN Warszawa.
- Saliszczew K.A.** (2003), *Kartografia ogólna*. PWN, Warszawa.
- Szpunar W.** (1967), *Geodezja Wyższa i Astronomia Geodezyjna*, PWN Warszawa.
- Szpunar W.** (1982), *Podstawy Geodezji Wyższej*, PPWK Warszawa.
- Trajdos T.** (1974), *Matematyka dla inżynierów*. Wyd. 3, WNT, Warszawa.

NOTATKI

NOTATKI

NOTATKI

NOTATKI

NOTATKI

NOTATKI

NOTATKI

NOTATKI

NOTATKI

NOTATKI