

Politechnika Warszawska Wydział Fizyki

# Moduł Informatyka dla fizyków cz. II

Produkt opracowany w ramach projektu „e-Fizyka- multimedialne środowisko nauczania fizyki dla szkół ponadgimnazjalnych” współfinansowanego ze środków Unii Europejskiej w ramach Priorytetu III Wysoka jakość systemu oświaty, Działania 3.3 Poprawa jakości kształcenia, Poddziałania 3.3.4 Modernizacja treści i metod kształcenia Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki 2007-2013



**KAPITAŁ LUDZKI**  
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!



UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



*Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego*

## Spis treści

„Funkcja wykładnicza cz. II” .....	2
„Szereg promieniotwórczy” .....	16
„Wykres w skali logarytmicznej. Krzywa rezonansowa obwodu RLC.” .....	27
„Zderzenie niesprężyste - przekaz pędu i energii kinetycznej” .....	53
„Charakterystyka napięciowo-prądowa ogniwa” .....	82
„Pomiar oporu wewnętrznego woltomierza” .....	95
„Element nieliniowy w obwodzie - cz. I” .....	107
„Element nieliniowy w obwodzie - cz. II” .....	119
„Przejsięcie światła przez pryzmat - cz. I” .....	126
„Przejsięcie światła przez pryzmat - cz. II” .....	136

## „Funkcja wykładnicza cz. II”

### I. Z pracowni fizycznej (i nie tylko)

1. W pierwszej części naszych rozważań o funkcji wykładniczej poznaliśmy procesy, w których określona wielkość zmieniała się w tempie proporcjonalnym do tej wielkości. Na przykładzie „finansowych przygód” rodzeństwa, Zuzanny i Janusza, stwierdziliśmy, że gdy zmiana majątku  $M$  każdego z nich zachodzi zgodnie z równaniem:

$$\Delta M = \pm \lambda \cdot M \cdot \Delta t \quad (1)$$

to następuje bądź nieograniczony, wykładniczy wzrost majątku  $M$  (przypadek ze znakiem „+”) bądź wykładniczy zanik, aż do zera, majątku (przypadek ze znakiem „-”). Są to dwa skrajnie różne efekty: Zuzka staje się coraz bogatsza (w tzw. postępie geometrycznym) a Janusz pozbywa się majątku, który nieuchronnie dąży do zera.

Spróbujemy teraz zastanowić się, jak można byłoby ustabilizować majątki Zuzki i Janusza. Pomysł jest niemal oczywisty: skoro Zuzka **dostaje** co tydzień określony procent  $\lambda$  swego majątku  $M_Z$ , to obarczmy ją **wydatkami**. Janusz, z kolei, oprócz **wydawania** co tydzień określonego procentu  $\lambda$  swego majątku  $M_J$ , powinien mieć zapewnione jakieś **przychody**. Przyjmijmy dla uproszczenia (ale zgodnie z wieloma „prawdziwymi” zjawiskami), że cotygodniowe wydatki **W** Zuzanny oraz cotygodniowe przychody **P** Janusza są stałe, niezależne od aktualnych majątków  $M_Z$  i  $M_J$ .

2. W finansach (dokładniej w ubezpieczeniach) sytuacja Zuzki jest najprostszym przykładem bycia rentierem. Lokuje ona w banku „początkowy” majątek  $M_0$ , bank zapewnia jej okresowe (w naszym przykładzie - cotygodniowe) oprocentowanie  $\lambda$ . Po otrzymaniu tego oprocentowania, Zuzka co tydzień podejmuje z konta stałą kwotę  $W$ , która stanowi jej rentę. Tak więc cotygodniowa zmiana majątku Zuzki  $\Delta M_Z$  składa się z dwóch części:

$$\Delta M_Z = (+\lambda \cdot M_Z - W) \cdot \Delta t \quad (2)$$

Podobnie, choć nieco inaczej przedstawia się sytuacja Janusza, która wprawdzie nie ma określonej nazwy w świecie finansów, ale może być dobrym modelem postępowania dla „odpowiedzialnej głowy rodziny”. Janusz bowiem, niezależnie od początkowego majątku  $M_0$ , ma stałe (w naszym przykładzie cotygodniowe) przychody  $P$ , zaś co tydzień wydaje taki sam ułamek  $\lambda$  posiadanego majątku  $M_J$ . Tak więc cotygodniowa zmiana majątku Janusza  $\Delta M_J$  także składa się z dwóch części:

$$\Delta M_J = (P - \lambda \cdot M_J) \cdot \Delta t \quad (3)$$

Opisy te nie pozwalają jednoznacznie ustalić, czy majątki  $M_Z$  i  $M_J$  każdego z rodzeństwa będą rosły czy malały w miarę upływu czasu. Widać natomiast, że oba te procesy nie są jednostajne, gdyż cotygodniowe zmiany  $\Delta M_Z$  i  $\Delta M_J$  nie są stałe - zależą one nie tylko od stałych wartości  $\lambda$  oraz  $W$  bądź  $P$ , ale też od zmieniających się wartości  $M_Z$  i  $M_J$ . By zbadać, jak zachowuje się w czasie majątek każdego z rodzeństwa, zastosujemy podobną procedurę jak w pierwszej części rozważań o funkcji wykładniczej: będziemy obliczać, tydzień po tygodniu, zmiany majątku  $\Delta M$  i dodawać do majątku z poprzedniego tygodnia. Procedura ta wykorzysta wzór (2) dla Zuzanny oraz wzór (3) dla Janusza.

Nim przejdziesz do zaprogramowania arkusza kalkulacyjnego, spróbuj rozstrzygnąć na drodze rozumowania (może namówisz koleżanki i kolegów na „drobną burzę mózgową”), która z procedur (2) czy (3) pozwoli zrealizować cel, jakim jest ustabilizowanie majątku  $M_Z$  i  $M_J$ .

## II. W pracowni informatycznej

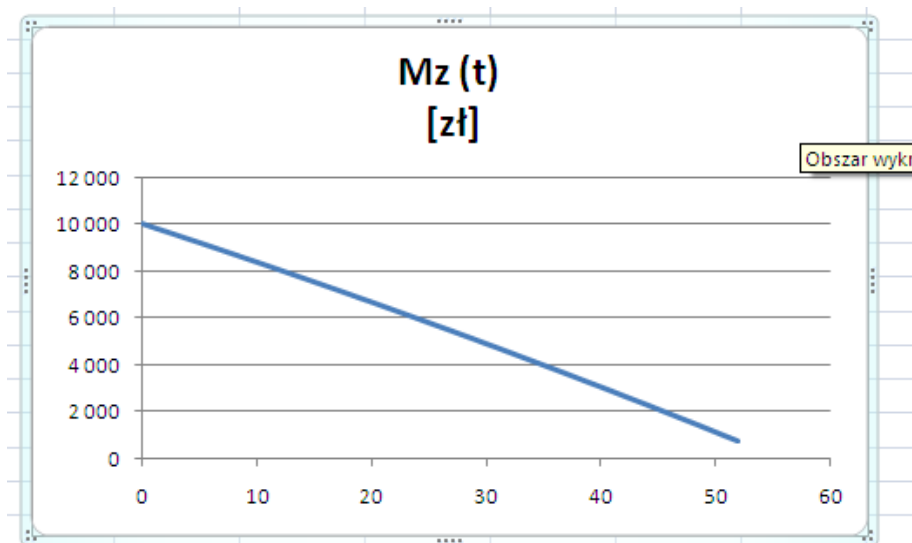
### cz. 1. - Dylemat rentierki Zuzanny.

1.1. Zaprogramuj arkusz kalkulacyjny w taki sposób, by uzyskać czterokolumnową tabelę obrazującą zmianę majątku Zuzi oraz wykres jej majątku w funkcji czasu. Tabela winna zawierać kolumny:

- „biegnącego” czasu (liczonego w tygodniach),
- „bieżącego” majątku  $M_Z(t)$ , obliczonego zgodnie z procedurą wynikającą ze wzoru (2),
- cotygodniowych zmian majątku  $\Delta M_Z$  (jest to kolumna pomocnicza);
- kolumnę majątku  $M(t)$  obliczonego zgodnie ze wzorem (4), którą dodasz wykonując polecenie nr 1.7.

1.2. Zapewnij użytkownikowi możliwość wprowadzania własnych wartości czterech parametrów zagadnienia ( $\Delta t$ ,  $\lambda$ ,  $M_0$ ,  $W$ ); jako wartości domyślne przyjmij:  $\Delta t = 1$  tydzień,  $\lambda = 0,004$ /tydzień (0,4%/tydzień),  $M_0 = 10.000$  zł,  $W = 200$  zł/tydzień.

	A	B	C	D	E	F	G
				t [tydz]	Mz (t) [zł]	$\Delta M$ [zł]	$[M_0 - W/\lambda] \cdot \exp(\lambda \cdot t) + W/\lambda$ [zł]
1				0	10 000	-160	10 000
2	$\Delta t$ [tydz]			1	9 840	-161	9 840
3	1			2	9 679	-161	9 679
4				3	9 518	-162	9 517
5				4	9 356	-163	9 355
6	$\lambda$ [1/tydz]			5	9 194	-163	9 192
7	0,004	4		6	9 030	-164	9 028
8				7	8 866	-165	8 864
9				8	8 702	-165	8 699
10	$M_0$ [zł]			9	8 537	-166	8 534
11	10000			10	8 371	-167	8 368
12				11	8 204	-167	8 201
13				12	8 037	-168	8 033
14	$W$ [zł/tydz]			13	7 869	-169	7 865
15	200			14	7 701	-169	7 696
16				15	7 532	-170	7 527
17				16	7 362	-171	7 356
18				17	7 191	-171	7 185



1.3. (\*) W porozumieniu z nauczycielem matematyki lub podstaw przedsiębiorczości przekonaj się, że zaproponowane jako domyślne oprocentowanie lokaty (0,4%/tydzień) jest równoważne oprocentowaniu w skali rocznej w wysokości ok. 23,1%. Jest to bardzo wysoka wartość, charakterystyczna dla rozchwianej gospodarki, będącej na pograniczu tzw. hiperinflacji.

1.4. Przekonaj się, że zmiana wartości oprocentowania  $\lambda$  może spowodować, że majątek Zuzi będzie malał, rósł bądź pozostanie stały. Jednak nie osiągnie on żadnego stanu stabilnego - poza przypadkiem, gdy będzie stały. Jeśli  $M_Z$  maleje, to zbliża się do zera nie asymptotycznie, lecz coraz szybciej (przyjmij interpretację, w myśl której gdy  $M_Z$  osiąga wartość ujemną, to „rentierskie” życie Zuzi się kończy). Jeśli zaś  $M_Z$  rośnie, to też coraz szybciej i wzrasta w sposób zbliżony do wykładniczego.

1.5. Przekonaj się, że zmiana wartości pozostałych dwóch parametrów ( $M_0$  i  $W$ ) powoduje te same efekty, co zauważone w punkcie 4. Wyprowadź warunek, jaki muszą spełniać parametry  $\lambda$ ,  $M_0$  i  $W$  by majątek  $M_Z$  był stały w czasie.

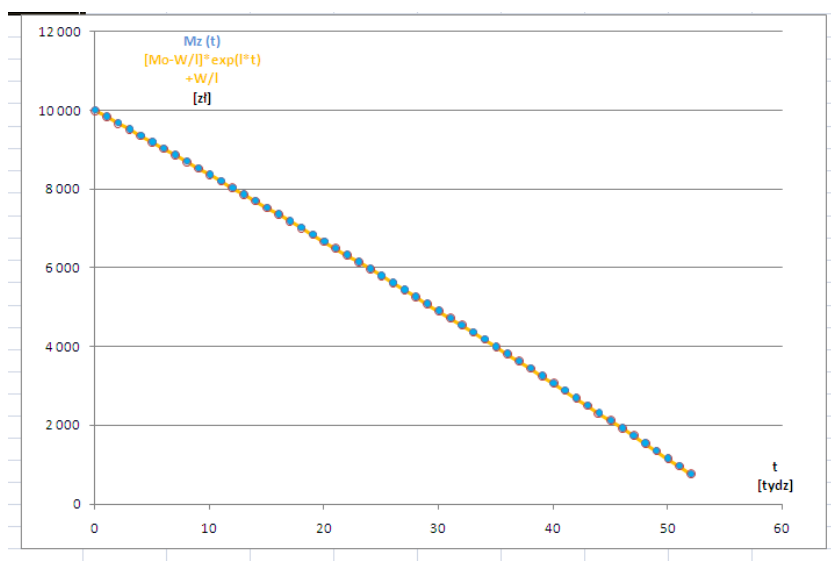
1.6. Sformułuj „dylemat rentiera”, uzupełniając następujące zdanie: Jeśli rentier ma określony majątek początkowy  $M_0$  i może liczyć na określone jego oprocentowanie  $\lambda$ , to istnieje ....., równa ....., która zapewnia, że jego majątek pozostanie stały w czasie. Jeśli zależy mu na wypłacie  $W$  większej niż ....., to musi liczyć się z tym, że .....

W porozumieniu z nauczycielem podstaw przedsiębiorczości zapoznaj się z podstawowymi mechanizmami, stosowanymi przez towarzystwa ubezpieczeniowe oferujące produkty rentierskie (np. renty dożywotnie), których celem jest uniknięcie owego dylematu, wynikającego z niestabilności majątku rentiera, który (poza specyficznym przypadkiem) albo maleje do zera albo się nieograniczenie rozrasta.

1.7. Wypełnij czwartą kolumnę tabeli -  $M(t)$  - wartościami funkcji

$$M(t) = (M_0 - W/\lambda) \cdot e^{\lambda t} + W/\lambda. \quad (4)$$

Funkcja ta opisuje „dokładny” przebieg majątku Zuzi. Przedstaw na wspólnym wykresie obie zależności:  $M_Z$  i  $M$  w funkcji czasu i porównaj te zależności.

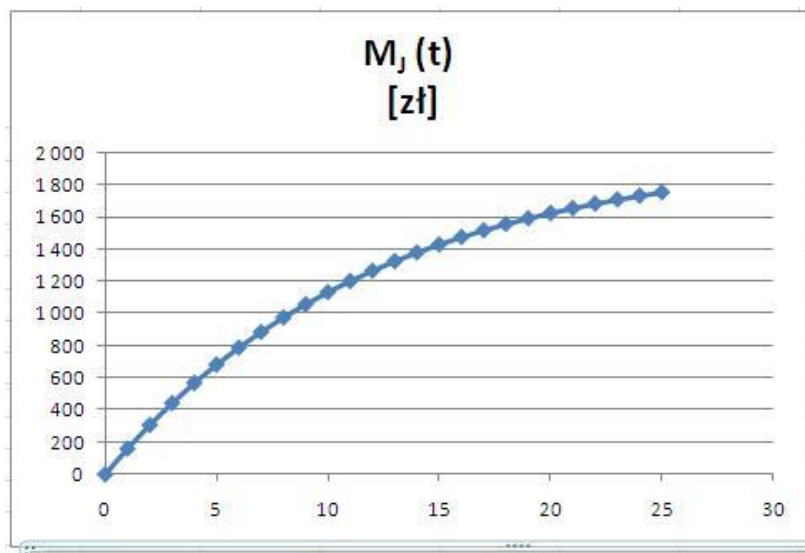


## cz. 2. - Stabilne finanse Janusza.

2.1. Skopiuj arkusz z części 1., zapisz jako nowy arkusz i wprowadź w nim niezbędne modyfikacje, by przedstawił on majątek Janusza, zgodnie z procedurą wynikającą ze wzoru (3). Zrezygnuj z wielkości  $W$  (cotygodniowa wypłata renty) na rzecz  $P$  - cotygodniowe przychody. Przyjmij domyślne wartości:  $P = 500$  zł/tydzień,  $M_0 = 100$  zł oraz  $\lambda = 40\%$ /tydzień. Kolumnę majątku  $M(t)$  pozostaw na razie pustą.

	A	B	C	D	E	F
				t	$M_J(t)$	$\Delta M$
				[tydz]	[zł]	[zł]
1						
2		$\Delta t$ [tydz]		0	0	160
3		1		1	160	147
4				2	307	135
5				3	443	125
6		$\lambda$ [1/tydz]		4	567	115
7		0,08	8	5	682	105
8				6	787	97
9				7	884	89
10		$M_0$ [zł]		8	974	82
11		0		9	1 056	76
12				10	1 131	70
13				11	1 201	64
14		$P$ [zł/tydz]		12	1 265	59
15		160		13	1 323	54
16				14	1 378	50
17				15	1 427	46

2.2. Zwróć uwagę, że w odróżnieniu od majątku Zuzanny, wartość majątku Janusza stabilizuje się - dąży asymptotycznie do pewnej stałej wartości końcowej, którą będziemy oznaczać  $M_k$ . Z wygenerowanej tabeli oraz wykresu można odczytać, że dla zaproponowanych wartości domyślnych  $M_k = 1250$  zł.



2.3. Zbadaj wpływ parametru  $M_0$  na przebieg zależności  $M_J(t)$ . Przekonaj się, że zależność ta może być malejąca, rosnąca bądź stała. Przekonaj się także, że niezależnie od  $M_0$ , majątek Janusza stabilizuje się - dąży asymptotycznie do tej samej wartości  $M_k$ .

2.4. Zbadaj wpływ parametru  $P$  na przebieg zależności  $M_J(t)$ . Przekonaj się, że zmiany  $P$  także mogą spowodować, iż zależność ta będzie malejąca, rosnąca bądź stała. Przekonaj się także, że majątek Janusza stabilizuje się, choć wartość  $M_k$ , do której asymptotycznie dąży ten majątek, zależy od  $P$ . Zwróć też uwagę, że czas, po którym zależność  $M_J(t)$  staje się praktycznie stała, w niewielkim tylko stopniu zmienia się wraz ze zmianami  $P$ .

2.5. Zbadaj wpływ parametru  $\lambda$  na przebieg zależności  $M_J(t)$ . Przekonaj się, że zmiany  $\lambda$  powodują (podobnie jak dwa poprzednie parametry), iż zależność ta będzie malejąca, rosnąca bądź stała. Przekonaj się także, że wartość  $M_k$ , do której asymptotycznie dąży majątek Janusza zależy od  $\lambda$ . Wyprowadź związek pomiędzy  $M_k$ ,  $P$  oraz  $\lambda$ . Zwróć też uwagę, że czas, po którym zależność  $M_J(t)$  staje się praktycznie stała, istotnie zmienia się wraz ze zmianami  $\lambda$ .

2.6. (\*) Przypomnij sobie pojęcie czasu połowicznego zaniku (problem informatyczny o funkcji wykładniczej oraz paragraf 3.4 w pierwszym tomie podręcznika). W arkuszu ustaw następujące wartości parametrów:  $M_0 = 0$ ;  $\lambda = 0,08/\text{tydzień}$  i  $P = 160 \text{ zł/tydzień}$ . Wypełnij czwartą kolumnę tabeli -  $M(t)$  - wartościami funkcji opisującej „dokładny” przebieg majątku Janusza:

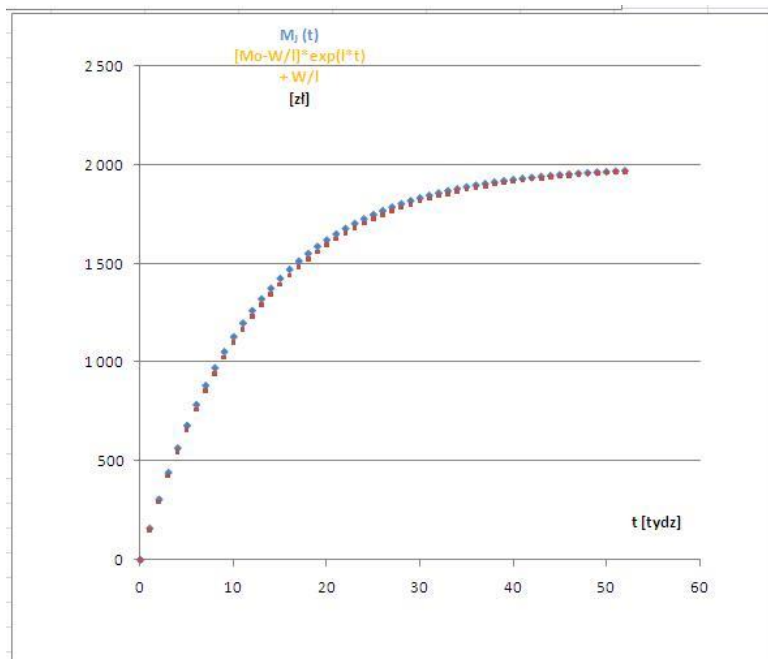
$$M(t) = (M_0 - P/\lambda) \cdot e^{-\lambda t} + P/\lambda. \quad (5)$$

Wykaż, analizując tabelę wartości i wykres, że funkcja ta ma „czas połowicznego narastania”  $T_{1/2}$ . Rozumiemy przez to czas, po którym różnica pomiędzy bieżącą wartością funkcji  $M_J(t)$  a jej wartością końcową  $M_k$  zmaleje dwukrotnie:

$$M_k - M(t + T_{1/2}) = \frac{1}{2}[M_k - M(t)]. \quad (6)$$

Wskazówka: przy zaproponowanych wartościach parametrów  $T_{1/2} \approx 8,66$  tygodnia.

	A	B	C	D	E	F	G
				t [tydz]	$M_J(t)$ [zł]	$\Delta M$ [zł]	$[(M_0 - W/\lambda) \cdot \exp(-\lambda t) + W/\lambda]$ [zł]
1							
2		$\Delta t$ [tydz]		0	0	160	0
3		1		1	160	147	154
4				2	307	135	296
5				3	443	125	427
6		$\lambda$ [1/tydz]		4	567	115	548
7		0,08	8	5	682	105	659
8				6	787	97	762
9				7	884	89	858
10		$M_0$ [zł]		8	974	82	945
11		0		9	1 056	76	1 026
12				10	1 131	70	1 101
13				11	1 201	64	1 170
14		$P$ [zł/tydz]		12	1 265	59	1 234
15		160		13	1 323	54	1 293
16				14	1 378	50	1 347
17				15	1 427	46	1 398



### III. Do pracowni fizycznej

1. Zapoznaj się z fragmentem paragrafu 1.3.6 e-podręcznika, w którym opisany jest problem utrzymywania się stałego stężenia izotopu węgla  $^{14}\text{C}$  w atmosferze. Rozstrzygnij, czy problem ten jest podobny do zagadnienia Zuzanny (i opisywany jest równaniem typu (2)) czy do zagadnienia Janusza (i opisywany jest równaniem typu (3)). Pokaż analogię pomiędzy tym problemem a wybranym przez Ciebie zagadnieniem.
2. (\*) Zapoznaj się z pojęciem „sprzężenie zwrotne” (wyszukaj je w encyklopedii lub internecie). Zastanów się nad różnicą pomiędzy „sprzężeniem zwrotnym ujemnym” a „sprzężeniem zwrotnym dodatnim”. Rozstrzygnij, które z tych pojęć pasuje do zagadnienia Zuzanny a które do zagadnienia Janusza.
3. (\*) W porozumieniu z nauczycielem fizyki wyszukaj inne zjawiska, w których występuje stały w czasie „czynnik napędowy”, któremu towarzyszy „czynnik hamujący” proporcjonalny do wielkości charakteryzującej zjawisko (przykłady: prędkość ciała w ośrodku lepkiem, poruszającego się pod wpływem stałej siły „napędowej” i siły hamującej proporcjonalnej do prędkości; gromadzenie ładunku na okładkach kondensatora ładowanego stałym napięciem w obwodzie z opornikiem, temperatura ciała podgrzewanego stałym w czasie strumieniem ciepła i stygnącego w tempie proporcjonalnym do różnicy pomiędzy jego temperaturą a temperaturą otoczenia). Dla wybranego zagadnienia przygotuj arkusz opisujący takie zjawisko, analogiczny do arkusza Janusza. Uzupełnij przygotowany arkusz o kolumnę i wykres, obrazujące zmiany w czasie innej wielkości charakterystycznej dla wybranego zagadnienia (np. w zagadnieniu z ruchem ciała w ośrodku lepkiem zbadaj przebytą drogę; w zagadnieniu z kondensatorem zbadaj natężenie prądu ładowania w obwodzie; w zagadnieniu z podgrzewanym ciałem zbadaj moc, z jaką ciało pozbywa się energii na rzecz otoczenia).
4. (\*) Jeśli w klasie przerabiane już było zjawisko samoindukcji (rozdział 4. trzeciego tomu e-podręcznika) to rozwiąż zadanie 2. (polecenia a-c) z §3.4.4. Następnie wykorzystaj arkusz kalkulacyjny do rozwiązania dalszego ciągu tego zadania:

d) Przyjmij, że zależność natężenia prądu od czasu w obwodzie ma postać, której wykres został przedstawiony (orientacyjnie) na rys. x.2b:

$$I(t) = I_{\max} \cdot (1 - e^{-t/\tau})$$

gdzie  $I_{\max} = U/R$  a  $\tau = L/R$  ma interpretację charakterystycznego czasu narastania natężenia prądu. Uważa się, konwencjonalnie, że po upływie czasu  $t = 3 \cdot \tau$ , natężenie prądu praktycznie przestaje narastać. Zwróć uwagę, że w poleceniach ‘a’ i ‘b’ przyjęto, że natężenie prądu przestało narastać po upływie  $0,12 \text{ s}$ , czyli po czasie  $t = 3,84 \cdot \tau$ .

- W arkuszu kalkulacyjnym sporządź tabelę wartości funkcji  $I(t)$  dla  $t \in \langle 0; n \cdot \tau \rangle$ , gdzie  $n$  jest parametrem zadawanym przez użytkownika (domyślnie  $n = 3,84$ ). Tabela winna zawierać  $N$  wartości funkcji ( $N$  jest zadawane przez użytkownika; domyślnie  $N = 100$ ). Przygotuj arkusz tak, by użytkownik mógł wprowadzać dowolne wartości zmiennych  $U$ ,  $R$  oraz  $L$ , zawsze podawane w jednostkach SI. Oceń liczbowo, na ile dokładne jest przyjęcie, w poleceniach ‘a’ i ‘b’, że po upływie czasu  $t = 3,84 \cdot \tau$ , natężenie prądu praktycznie przestaje narastać.
- W tym samym arkuszu przygotuj wykres  $I(t)$ . Oceń graficznie, na ile dokładne jest przyjęcie, w poleceniach ‘a’ i ‘b’, że po upływie czasu  $t = 3,84 \cdot \tau$ , natężenie prądu praktycznie przestaje narastać.
- Uzupełnij tabelę o niezbędne rubryki (wiersze lub kolumny), które pozwolą na obliczanie wartości funkcji  $|\varepsilon_{ind}(t)|$  wraz z wykresem tej funkcji.
- Oblicz średnią wartość  $|\varepsilon_{ind}(t)|$  dla  $n = 3,84$  i porównaj wynik z wynikami otrzymanymi w poleceniach ‘a’ i ‘b’. Który z trzech wyników jest najlepszym przybliżeniem średniej wartości SEM indukcji? Uzasadnij swoje przekonanie.

e) Przyjmij, że zależność wartości  $\varepsilon_{ind}$  od czasu w obwodzie ma postać funkcji wykładniczej:



$$|\mathcal{E}_{ind}(t)| = \frac{L \cdot I_{\max}}{\tau} \cdot e^{-t/\tau}$$

- W arkuszu kalkulacyjnym sporządź tabelę wartości funkcji  $|\mathcal{E}_{ind}(t)|$  dla  $t \in \langle 0; n \cdot \tau \rangle$ , gdzie  $n$  jest parametrem zadawanym przez użytkownika (domyślnie  $n = 3,84$ ). Tabela winna zawierać  $N$  wartości funkcji ( $N$  jest zadawane przez użytkownika; domyślnie  $N = 100$ ). Przygotuj arkusz tak, by użytkownik mógł wprowadzać dowolne wartości zmiennych  $U$ ,  $R$  oraz  $L$ , zawsze podawane w jednostkach SI.
  - Oblicz, na podstawie tabeli, średnią wartość  $|\mathcal{E}_{ind}(t)|$  dla  $n = 3,84$ ; zastosuj przy tym procedurę, w której obliczysz pole powierzchni pod wykresem  $|\mathcal{E}_{ind}(t)|$  i pole to podzielisz przez długość przedziału czasu:  
wartość średnia funkcji w zadanym przedziale =  
(pole powierzchni pod wykresem funkcji w tym przedziale) / (długość przedziału)
  - Porównaj wynik z wynikami otrzymanymi w poleceniach 'a', 'b' i 'd'. Który z czterech wyników jest najlepszym przybliżeniem średniej wartości SEM indukcji? Uzasadnij swoje przekonanie.
- f) Zastosowanie rachunku całkowego pozwala wyprowadzić następujący, dokładny wzór na średnią wartość  $|\mathcal{E}_{ind}(t)|$ :

$$|\mathcal{E}_{ind}(t)|_{\text{sr}} = \frac{U}{n} \cdot (1 - e^{-n})$$

Porównaj ten wynik z wynikami uzyskanymi w poleceniach 'a', 'b', 'd' i 'e'.

## Komentarze, wskazówki, rozwiązania

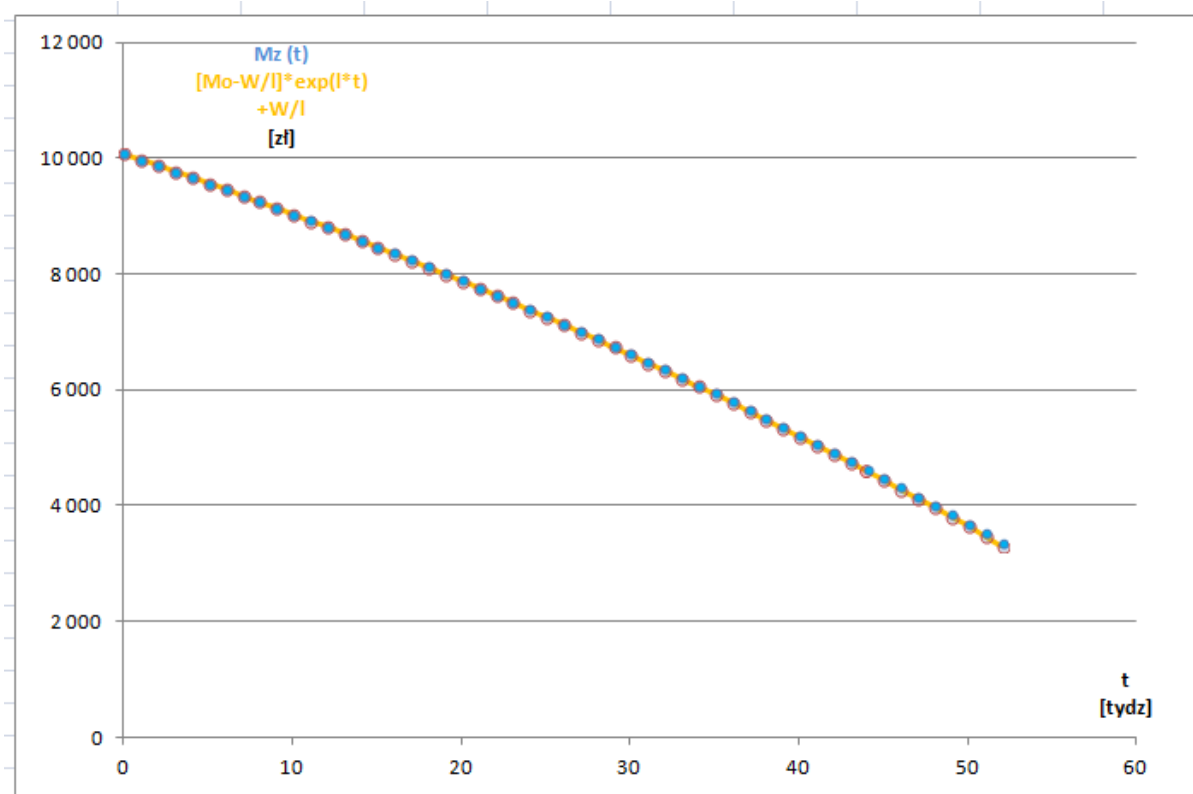
1. Sprawy majątkowe Zuzanny i Janusza są pozornie odległe od rzeczywistości zjawisk fizycznych. Ale tylko pozornie, w e - podręczniku omówiono problem stałego stężenia izotopu węgla  $^{14}\text{C}$ . Skoro ten izotop cały czas się rozpada, to musi być istnieć czynnik, który powoduje ciągle dostarczanie tego izotopu do atmosfery. Tym czynnikiem jest promieniowanie kosmiczne, a ściślej promieniowanie słoneczne, niosące strumień wysokoenergetycznych neutronów. Co ciekawe, zwiększanie ilości izotopów węgla  $^{14}\text{C}$  powoduje zwiększenie szybkości ich ubywania. Wskutek tych procesów zawartość izotopu węgla  $^{14}\text{C}$  w atmosferze jest stała w skali kilku tysięcy lat.

Przyjrzyjmy się teraz finansom Zuzanny i Janusza.

### 2. Na początek finanse Zuzanny.

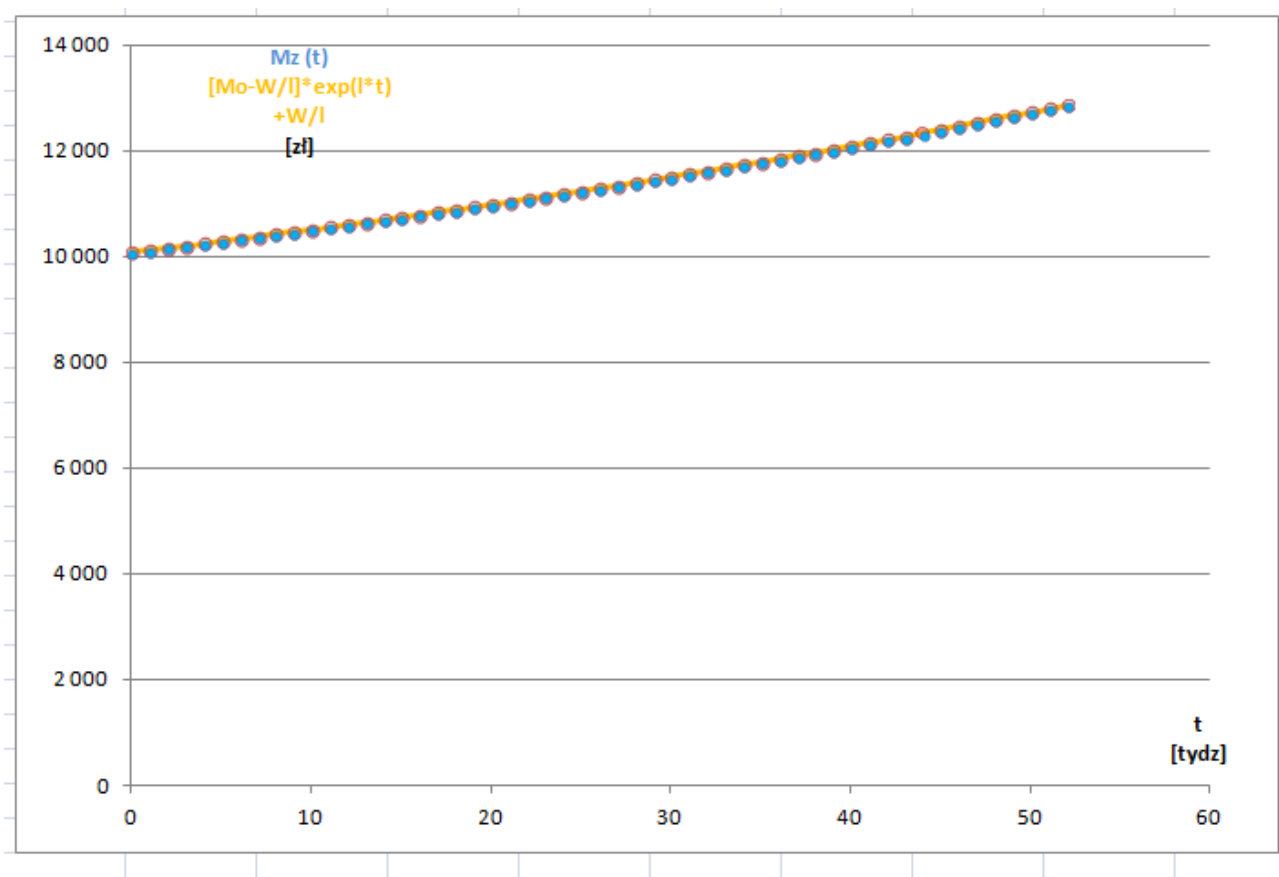
Gdy oprocentowanie majątku Zuzanny jest takie, że odsetki są mniejsze od tygodniowych wydatków to jej majątek bardzo szybko będzie maleć.

<b><math>\Delta t</math> [tydz]</b>
1
< <input type="text"/> >
<b><math>\lambda</math> [1/tydz]</b>
0,01      10
< <input type="text"/> >
<b><math>M_0</math> [zł]</b>
10081
< <input type="text"/> >
<b><math>W</math> [zł/tydz]</b>
200
< <input type="text"/> >



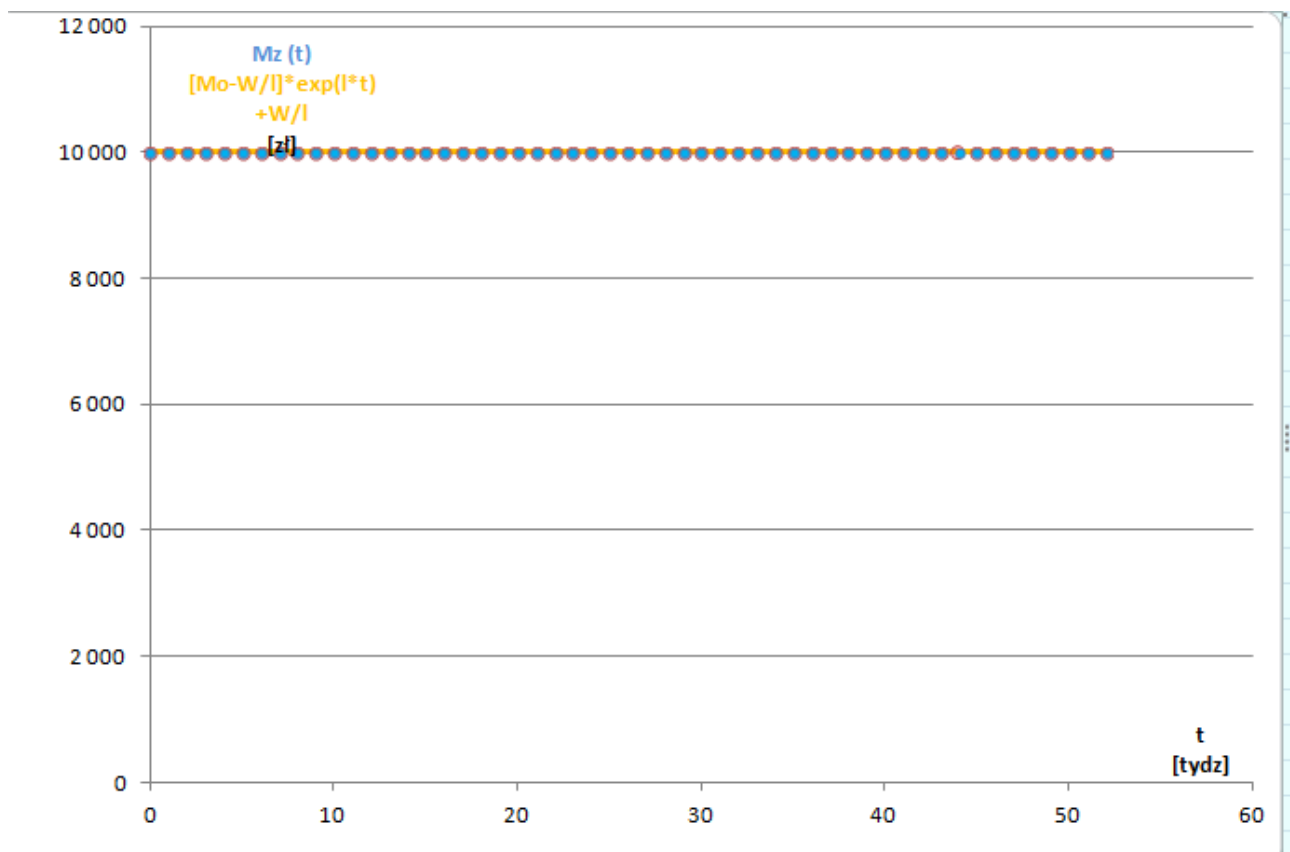
Ale Zuzanna może okazać się rozsądną osobą i jej tygodniowe wydatki będą mniejsze od przyrostu odsetek na koncie. W takim przypadku jej majątek będzie wzrastał.

<b><math>\Delta t</math> [tydz]</b>	
1	
< <input type="text" value="1"/> >	
<b><math>\lambda</math> [1/tydz]</b>	
0,01      10	
< <input type="text" value="0,01"/> >	
<b><math>M_0</math> [zł]</b>	
10081	
< <input type="text" value="10081"/> >	
<b><math>W</math> [zł/tydz]</b>	
60	
< <input type="text" value="60"/> >	



Nietrudno zauważyć, że gdy Zuzanna będzie wydawać tyle, ile w ciągu tygodnia będą wynosiły odsetki, to jej majątek nie będzie ulegał zmianie.

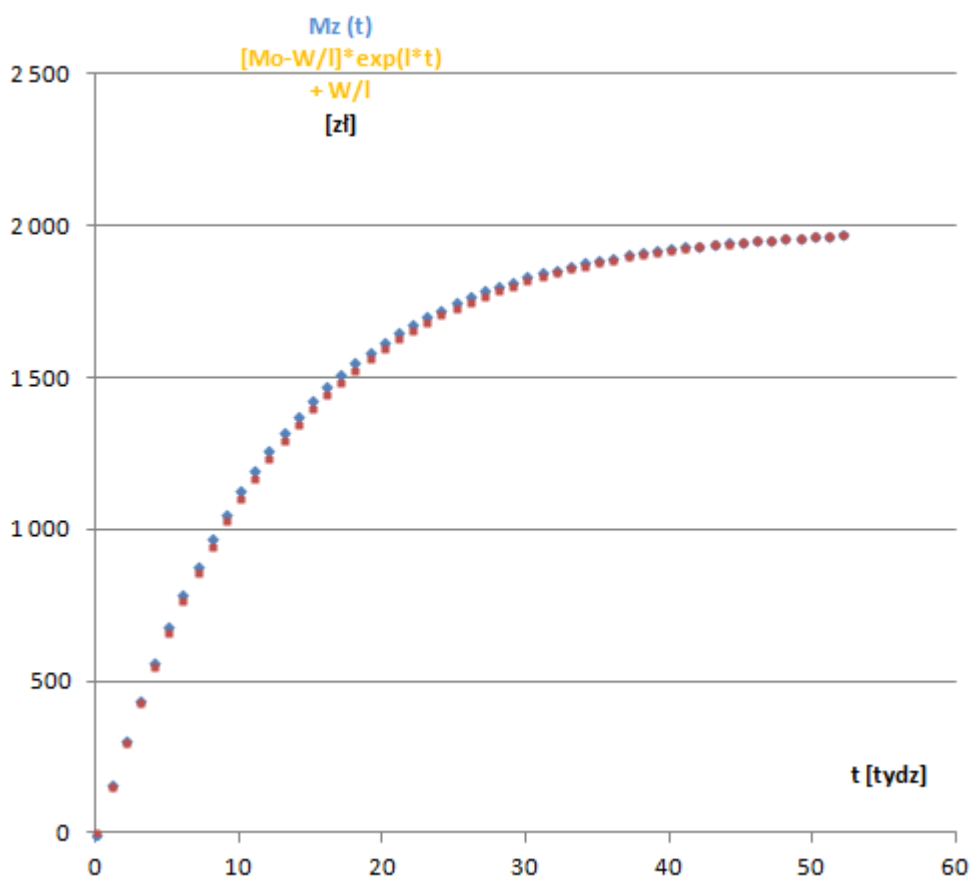
<b><math>\Delta t</math> [tydz]</b>	
1	
< <input type="text" value="1"/> >	
<b><math>\lambda</math> [1/tydz]</b>	
0,004	4
< <input type="text" value="0,004"/> >	
<b><math>M_0</math> [zł]</b>	
10000	
< <input type="text" value="10000"/> >	
<b><math>W</math> [zł/tydz]</b>	
40	
< <input type="text" value="40"/> >	



### 3. A teraz Janusz.

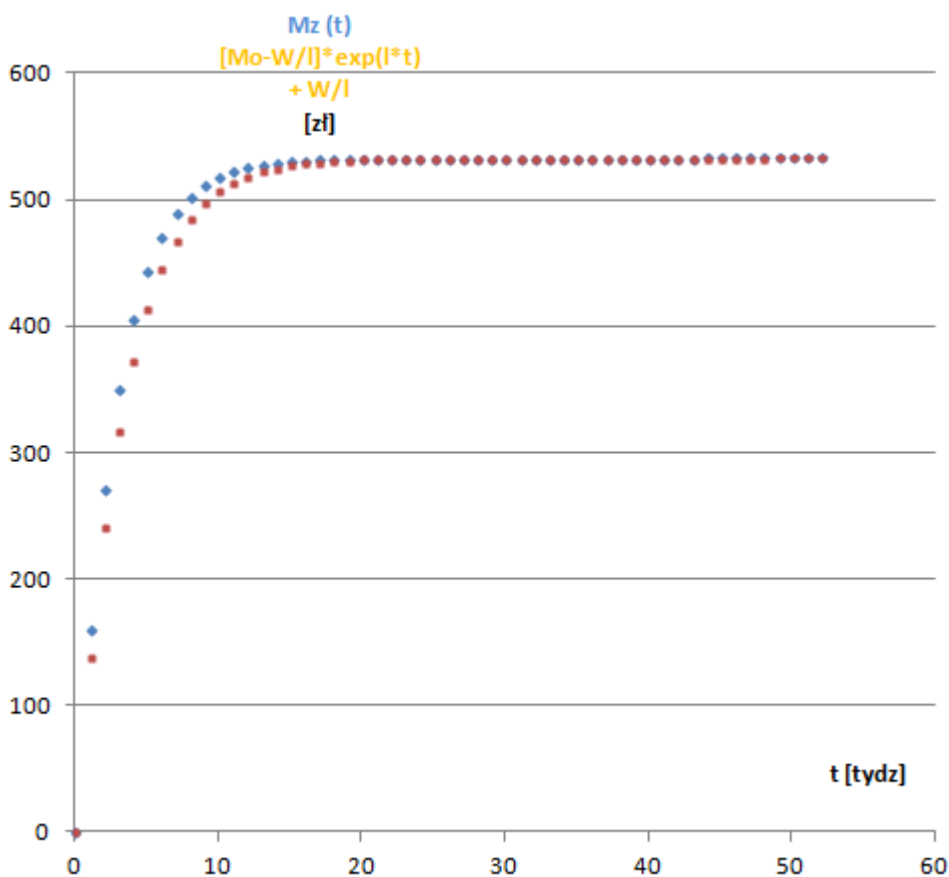
Nieco inna sytuacja jest z majątkiem Janusza. Obserwujemy u niego wzrost majątku, ale niejednostajny, gdyż każdego tygodnia wydaje pewien jego procent. Jednak po pewnym czasie obserwujemy wyraźną stabilizację. Majątek Janusza osiąga pewną wartość i pomimo stałych dochodów nie ulega zmianie, gdyż stabilizują się także wydatki.

<b><math>\Delta t</math> [tydz]</b>	
1	
<input type="text" value="1"/>	
<b><math>\lambda</math> [1/tydz]</b>	
0,08	8
<input type="text" value="0,08"/>	
<b><math>M_0</math> [zł]</b>	
0	
<input type="text" value="0"/>	
<b><math>P</math> [zł/tydz]</b>	
160	
<input type="text" value="160"/>	



W tym przypadku ten ustabilizowany stan przypada na kwotę 2000 zł.

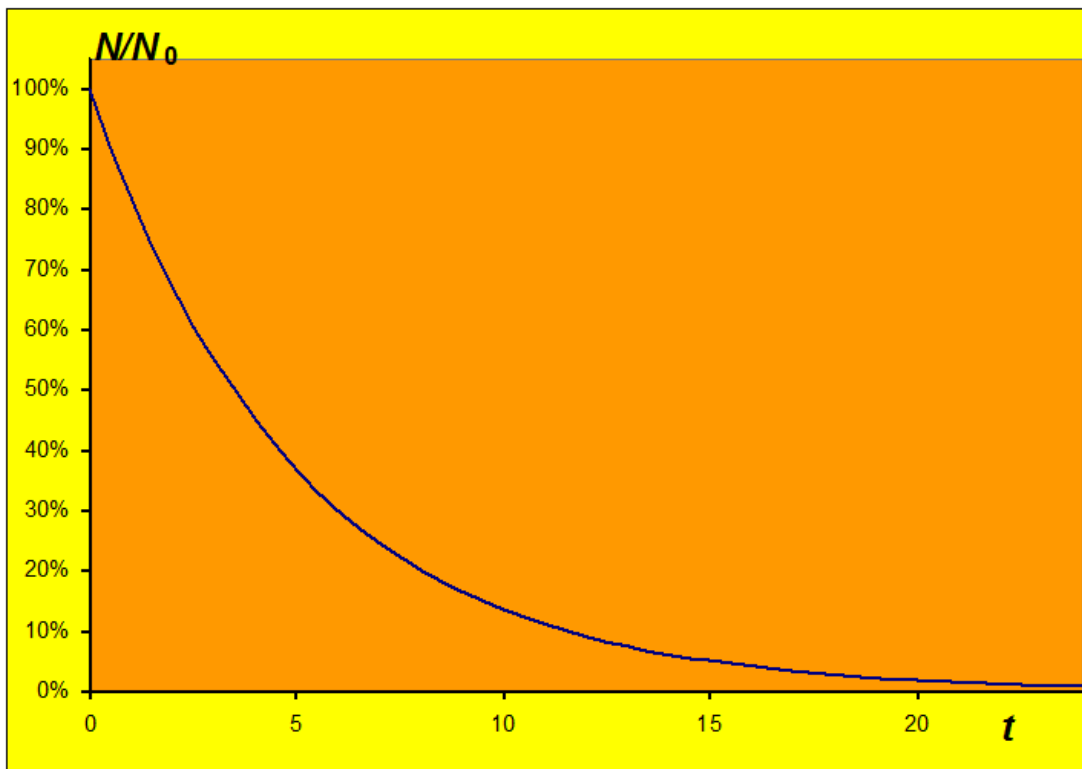
$\Delta t$ [tydz]	1
$\lambda$ [1/tydz]	0,3 30
$M_0$ [zł]	0
$P$ [zł/tydz]	160



A w tym przypadku jest to kwota nieco ponad 500 zł. Jest ona mniejsza od poprzedniej, gdyż przy takich samych przychodach zwiększyły się wydatki Janusza, ale i tym razem obserwujemy ustabilizowanie się majątku na pewnym poziomie.

#### 4. Zwróćmy uwagę na wykładniczy charakter stabilizacji majątku Janusza.

Pamiętamy podobną krzywą w części I e-podręcznika. Tam jednak obrazowała ona wykładniczy spadek liczby jąder izotopów promieniotwórczych.



Tutaj natomiast obserwujemy wykładnicze narastanie gotówki :).

W przykładzie z fizyki jądrowej wprowadziliśmy czas połowicznego rozpadu. Tutaj analogiczną wielkość nazwiemy czasem połowicznego wzrostu, albo przyrostu czy narastania.

Przypomnijmy zatem, że czas połowicznego rozpadu określa czas po którym rozpadowi ulegnie połowa jąder izotopu. W naszym przypadku czas połowicznego narastania, to będzie czas po którym różnica między majątkiem końcowym a majątkiem bieżącym zmaleje dwukrotnie.

W naszej tabeli majątek końcowy  $M_k = 1996$  zł. Majątek bieżący np. w trzecim tygodniu wynosił 427 zł. Różnica zatem wnosi 1569 zł. Różnica zmniejszona dwukrotnie czyli 784,5 zł będzie w tygodniu jedenastym, czyli czas połowicznego narastania wynosi około 8 tygodni.

t [tydz]	$M_z(t)$ [zł]	$\Delta M$ [zł]	$[M_0 - W/\lambda] \cdot \exp(\lambda \cdot t) + W/\lambda$ [zł]
0	0	160	0
1	160	147	154
2	307	135	296
3	443	125	427
4	567	115	548
5	682	105	659
6	787	97	762
7	884	89	858
8	974	82	945
9	1 056	76	1 026
10	1 131	70	1 101
11	1 201	64	1 170
12	1 265	59	1 234
13	1 323	54	1 293
14	1 378	50	1 347

t [tydz]	Mz (t) [zł]	ΔM [zł]	$\frac{W/\lambda] \cdot \exp(\lambda \cdot t)}{+ W/\lambda}$ [zł]
0	0	160	0
1	160	147	154
2	307	135	296
3	443	125	427
4	567	115	548
5	682	105	659
6	787	97	762
7	884	89	858
8	974	82	945
9	1 056	76	1 026
10	1 131	70	1 101
11	1 201	64	1 170
12	1 265	59	1 234
13	1 323	54	1 293
14	1 378	50	1 347
15	1 427	46	1 398
16	1 473	42	1 444
17	1 515	39	1 487
18	1 554	36	1 526
19	1 590	33	1 563
20	1 623	30	1 596
21	1 653	28	1 627

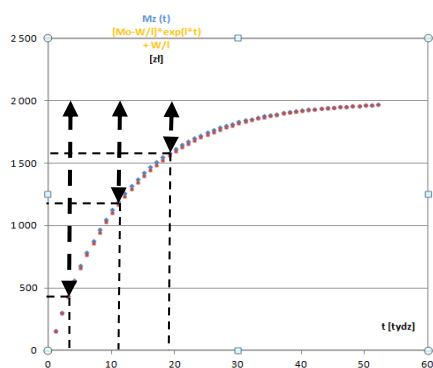
3. tydzień,  $1969 - 427 = 1542$

11. tydzień.  $1969 - 1170 = 799$

19. tydzień,  $1969 - 1563 = 406$

Widzimy, że czas narastania wynosi około 8 tygodni po których różnica między bieżącym stanem majątku, a stanem końcowym zmniejsza się około dwa razy.

Na poniższym rysunku różnice te oznaczono symbolami  $r_3$ ,  $r_{11}$  i  $r_{19}$ .





## „Szereg promieniotwórczy”

### I. Z pracowni fizycznej.

#### 1. Naturalne szeregi promieniotwórcze.

W paragrafie 3.3 pierwszego tomu e-podręcznika omówiono problematykę występowania na Ziemi naturalnych izotopów promieniotwórczych. Podlegają one przemianom  $\alpha$  lub  $\beta$ , z bardzo różnymi czasami połowicznego zaniku  $T_{1/2}$  (to ostatecznie pojęcie jest omówione w §3.4, wraz z pojęciem stałej zaniku promieniotwórczego  $\lambda$ ). Tak jak cała ziemska materia, izotopy te powstały w wybuchu masywnej gwiazdy na długo przed uformowaniem Układu Słonecznego. Z kolei od czasu powstania Słońca i planet - w tym Ziemi - minęło na pewno 4,5 miliarda lat. Gdy więc zadajemy pytanie o obecność na Ziemi izotopów **długożyciowych** (o czasach połowicznego zaniku porównywalnych z wiekiem Ziemi), np. uranu  $^{238}\text{U}$  ( $T_{1/2} = 4,5$  mld lat) czy toru  $^{232}\text{Th}$  ( $T_{1/2} = 13,9$  mld lat), to odpowiedź jest oczywista. Od początku uformowania Ziemi jakaś część jąder atomowych takich izotopów uległa przemianie, pozostałe jeszcze nie.

Istnieją jednak na Ziemi naturalne izotopy **krótkożyciowe**, których czasy połowicznego zaniku są rzędu lat, dni, godzin, sekund a nawet mniej. Jak to jest możliwe, że jądra atomowe takich izotopów nie uległy praktycznie całkowitemu rozpadowi od czasu uformowania Ziemi? Odpowiedź na to pytanie wiąże się z istnieniem tzw. szeregów („rodzin”) promieniotwórczych i występowaniem w nich równowagi promieniotwórczej pomiędzy izotopem początkowym w szeregu („ojcem rodziny”) a pozostałymi izotopami. Przybliżymy sobie to pojęcie na przykładzie zaczerpniętym ze świata finansów.

#### 2. Dwuosobowa rodzina „promieniotwórcza”.

Przypomnij sobie pierwszą historyjkę o Zuzannie i Januszu, rodzeństwie, które dostało prezent urodzinowy w postaci niemałej gotówki. Janusz postanowił wtedy, że będzie co tydzień wydawał taką samą część  $\lambda$  swoich bieżących zasobów ( $\lambda = 0,1/\text{tydzień}$ ). W efekcie, po roku Janusz był praktycznie bez grosza. Rodzice, widząc te skłonności syna, w kolejne urodziny zmienili zasady: kwotę w wysokości  $D_0$  należną Januszowi przekazali w depozyt jego siostrze. Zalecili jej, by pod koniec każdego tygodnia przekazywała bratu zawsze taką samą część  $\lambda_D$  pozostającego depozytu  $D$  (ustalono, że  $\lambda_D$  będzie równe 10% na tydzień - tak jak Janusz ustalił w poprzednim roku dla swoich wydatków). Przekazanymi środkami Janusz może dysponować dowolnie.

Nieco upokorzony Janusz (kto by nie był w jego sytuacji?) postanowił, że zrobi wszystkim na złość i będzie wydawał w każdym tygodniu określoną część swojego majątku  $M$ , ale znacznie większą niż w poprzednim roku. Ustalił więc sobie, że tempo wydawania przez niego pieniędzy wynosić będzie  $\lambda_J = 0,25/\text{tydzień}$  (oznacza to, że Janusz wyda - w każdym tygodniu - jedną czwartą pieniędzy, jaką miał na początku tygodnia!).

Na podstawie tego opisu możemy sformułować następujące dwa równania, które pozwolą zaprogramować arkusz przedstawiający w funkcji czasu stan zarządzanego przez Zuzannę depozytu  $D(t)$  oraz stan majątku Janusza  $M(t)$ :

$$\Delta D = -\lambda_D \cdot D \cdot \Delta t \quad (1)$$

$$\Delta M = -\Delta D - \lambda_J \cdot M \cdot \Delta t \quad (2)$$

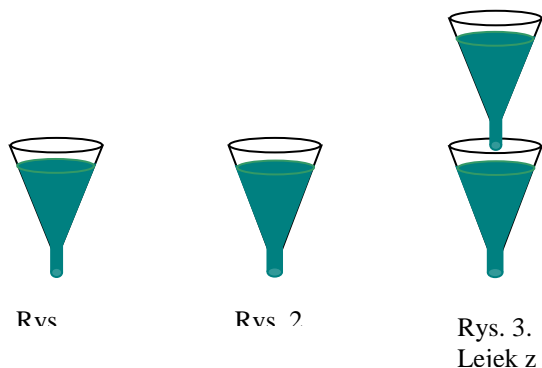
Pierwsze równanie opisuje wykładniczy zanik depozytu w funkcji czasu. Cotygodniowa zmiana wysokości depozytu  $\Delta D$  jest bowiem ujemna. W drugim równaniu uwzględniono dwa przyczynki do zmiany majątku  $M$ , jakim dysponuje bezpośrednio Janusz. Pierwszy składnik po prawej stronie równania (2) jest dodatni (bo  $\Delta D$  jest ujemne); opisuje on fakt, że ile pieniędzy ubyło z depozytu, tyle zostaje przekazane przez Zuzkę Januszowi. Drugi człon, ujemny, opisuje wydawanie pieniędzy przez Janusza. Na tej podstawie możemy przewidywać, że majątek Janusza  $M(t)$  może zarówno rosnąć jak i maleć.

Warto zwrócić uwagę, że stosunek  $\lambda_J/\lambda_D$  równy 2,5 oznacza, że czas połowicznego zaniku majątku Janusza powinien stanowić 40% (odwrotność 2,5) czasu połowicznego zaniku depozytu u Zuzanny. Tak byłoby, gdyby Janusz wydawał posiadany majątek w oderwaniu od tego depozytu. Okaże się jednak, że charakter zaniku  $M(t)$  będzie inny niż oczekiwany; wiąże się to z osiągnięciem przez ten majątek swoistej równowagi z depozytem  $D(t)$ , od którego pochodzi.

### 3. Co jeszcze tak działa?

W trzeciej części ćwiczenia objaśnimy szczegółowo, na czym polega równowaga w szeregu promieniotwórczym. Równowaga ta nie jest jednak wyłączną cechą takich szeregów. Występuje ona zarówno w przyrodzie jak i w technice, w wielu układach, w których wyodrębnia się podukład „nadrzędny” (zasilający, sterujący) oraz „podrzędny” (zasilany, sterowany). Ten ostatni ma pewne cechy własne, wynikające z jego fizycznych właściwości albo technicznej konstrukcji. W naszym przykładzie takim zasilanym podukładem jest majątek Janusza. Jego cechą własną jest czas połowicznego zaniku  $M(t)$ , wynikający z podjętej przez Janusza decyzji o wartości  $\lambda_J$ . Jednak istnienie podukładu zasilającego - u nas jest to depozyt - powoduje, że podukład zasilany „zatraca” własną cechę, przejmując ją od układu zasilającego. Jest to niezależne od stanu początkowego obu układów, jeśli tylko stan ten pozwoli na osiągnięcie równowagi.

Można to zilustrować na przykładzie dwóch stożkowych lejeków. Tempo wypływu wody z każdego z nich jest tym większe, im więcej jest w nim wody. Jednak tempo to zależy także od innych cech lejka, w tym od szerokości wylotu. Nie ma wątpliwości, że czas charakterystyczny  $\tau_1$  wypływu wody z lejka na rys. 1 jest dłuższy od tak samo rozumianego czasu  $\tau_2$  lejka na rys. 2. - gdy lejki te napelnimy do tego samego poziomu i gdy woda z nich wypływa niezależnie. Gdy jednak będziemy zasilac lejek 2 wodą z lejka 1 (rys.3), to po osiągnięciu stanu równowagowego, woda z lejka 2 wypływać będzie w takim samym tempie jak z lejka 1.



## II. W pracowni informatycznej.

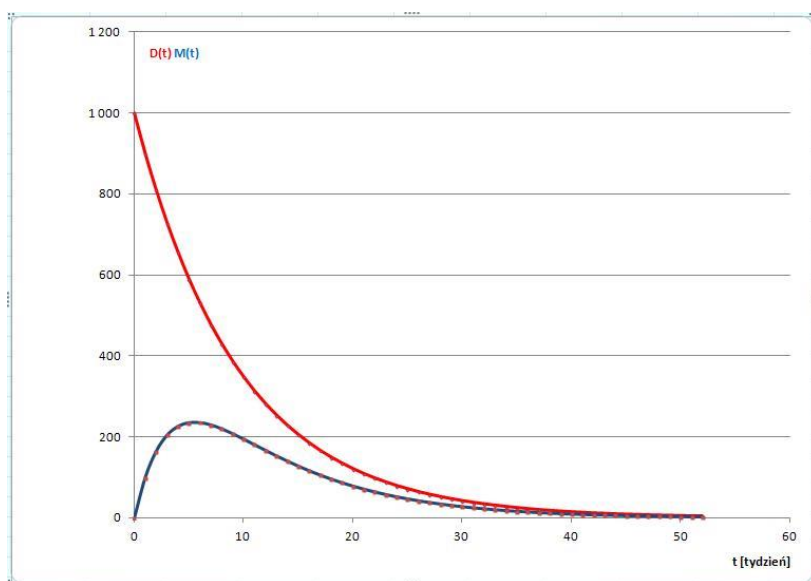
1. W pustym arkuszu przygotuj pięć komórek na wprowadzanie wartości parametrów zagadnienia (w nawiasie podano proponowane wartości domyślne): kroku czasowego ( $\Delta t = 1$  tydzień), współczynnika cotygodniowej wypłaty z depozytu ( $\lambda_D = 0,1$ /tydzień, czyli 10% na tydzień), początkowej wartości depozytu ( $D_0 = 1000$  zł), współczynnika cotygodniowego wydatkowania pieniędzy przez Janusza ( $\lambda_J = 0,25$ /tydzień), początkowej wartości majątku Janusza ( $M_0 = 0$ ).

2. Przygotuj tabelę zawierającą:

- kolumnę bieżącego czasu, z krokiem  $\Delta t$ , powinna ona obejmować około roku;
- kolumnę stanu depozytu  $D(t)$ ;
- kolumnę (pomocniczą) tygodniowej zmiany depozytu  $\Delta D$ , obliczanej według wzoru (1);
- kolumnę stanu majątku Janusza  $M(t)$ ;
- kolumnę (pomocniczą) tygodniowej zmiany majątku  $\Delta M$ , obliczanej według wzoru (2);

t [tydz]	D (t) [zł]	$\Delta D$ [zł]	M (t) [zł]	$\Delta M$ [zł]
0	=A7	=-D2*\$A\$5*\$A\$3	=\$A\$11	=\$F2*\$A\$9*\$A\$3-E2
=C2+\$A\$3	=D2+E2	=-D3*\$A\$5*\$A\$3	=F2+G2	=\$F3*\$A\$9*\$A\$3-E3

3. Sporządź wspólny wykres zależności  $D(t)$  oraz  $M(t)$ . Zwróć uwagę, że majątek Janusza z początku rośnie, po czym zaczyna maleć. Objaśnij ten fakt.

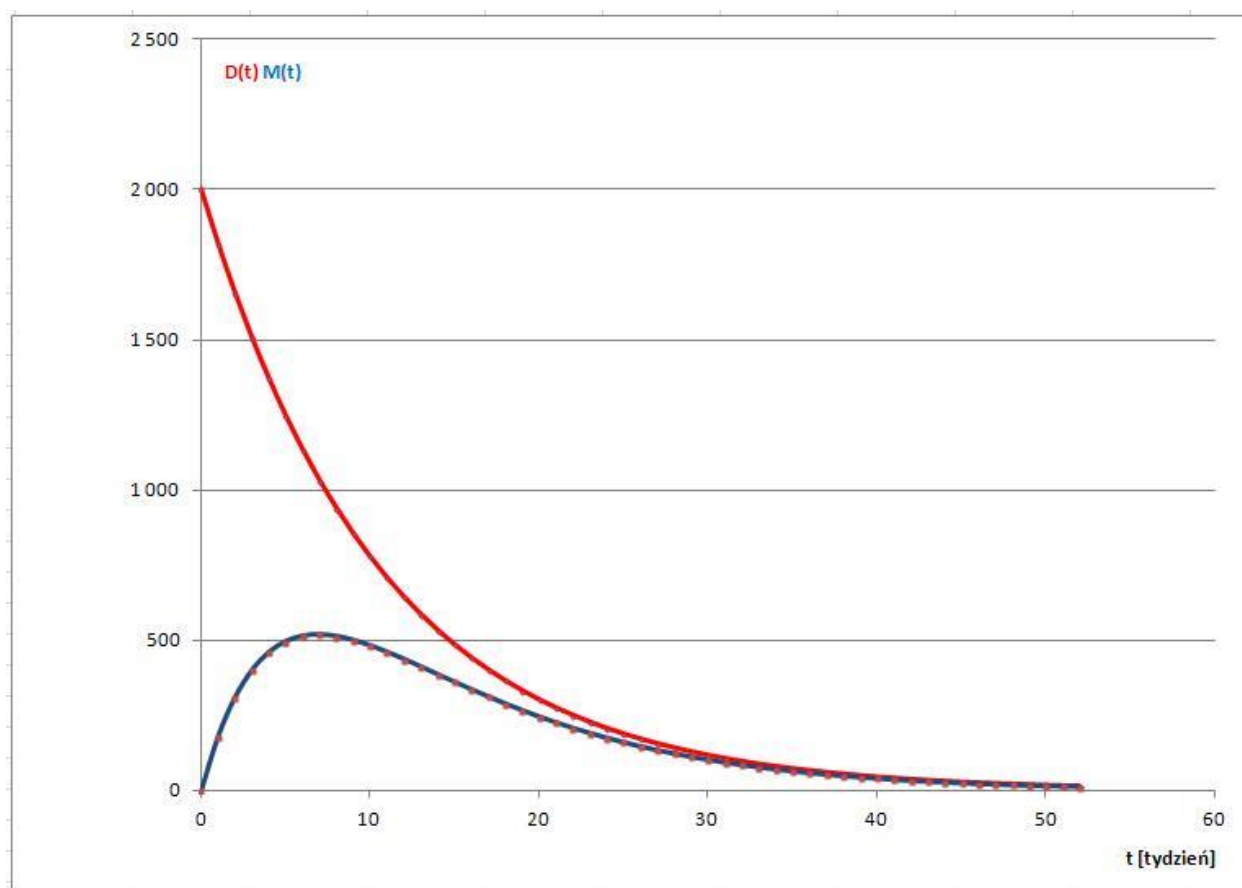


4. Zmieniaj wartość początkową depozytu. Przekonaj się, że zmiana ta nie wpływa znacząco na przebieg majątku  $M(t)$ .
5. Zwiększaj majątek początkowy Janusza (w granicach  $M_0 < D_0$ ). Opisz zmiany w przebiegu  $M(t)$  wywołane zwiększaniem  $M_0$ .
6. Zmieniaj wartość współczynnika  $\lambda_D$  (w granicach  $\lambda_D < \lambda_J$ ). Opisz skutki zwiększania i zmniejszania  $\lambda_D$  dla przebiegu  $M(t)$ . Czy uważasz, że sytuacja, w której  $M(t)$  staje się większe niż  $D(t)$ , jest paradoksalna lub wręcz niemożliwa w rzeczywistości?
7. Zmieniaj wartość współczynnika  $\lambda_J$  (w granicach  $\lambda_D < \lambda_J$ ). Opisz skutki zwiększania i zmniejszania  $\lambda_J$  dla przebiegu  $M(t)$ . Czy uważasz, że sytuacja, w której  $M(t)$  staje się większe niż  $D(t)$ , jest paradoksalna lub wręcz niemożliwa w rzeczywistości?

Przygotuj suwaki do płynnej zmiany wskazanych wartości. Jak tworzyć suwaki opisane jest w treści lekcji 24.

	A	B
1		<b>SUWAKI</b>
2	$\Delta t$ [tydz]	
3	1	
4	$\lambda_D$ [1/tydz]	<b>10</b>
5	<b>0,1</b>	<input type="text" value="0,1"/>
6	$D_0$ [zł]	
7	<b>1000</b>	<input type="text" value="1000"/>
8	$\lambda_M$ [1/tydz]	<b>25</b>
9	<b>0,25</b>	<input type="text" value="0,25"/>
10	$M_0$ [zł]	
11	<b>0</b>	<input type="text" value="0"/>

Poniżej wykresy zależności  $D(t)$  oraz  $M(t)$  po zmianie wartości początkowych.



### III. Do pracowni fizycznej.

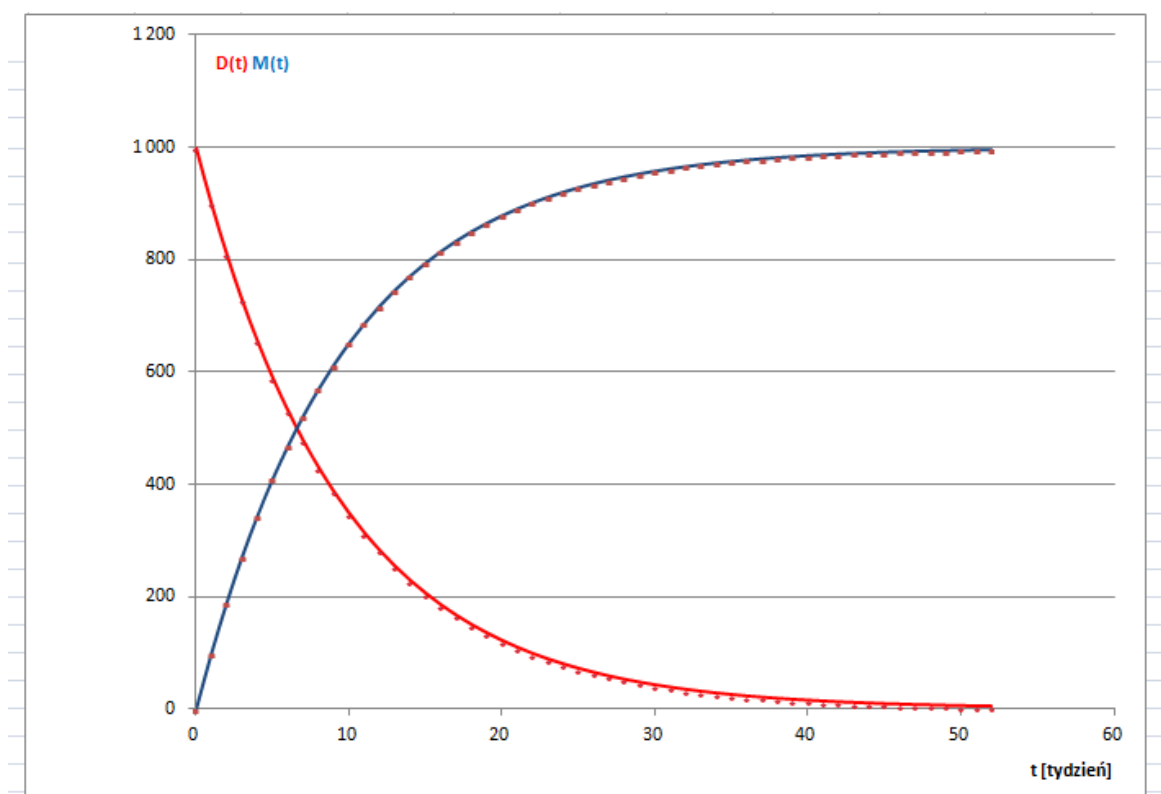
#### 1. Zapoznajmy się z działaniem modelu.

Przyjrzyjmy się tabeli zapisanej w arkuszu, a następnie popatrzymy jak działa nasz model.

Ustalmy depozyt dla Janusza, który jest u Zuzanny na 1000 złotych. Ustalmy tygodniową wypłatę dla Janusza w wysokości 10% aktualnego depozytu. Majątek Janusza będzie wzrastał:

100, 190, 271, ... Gdyby Janusz nie wydawał pieniędzy, to po pewnym czasie cały depozyt znalazłby się w jego kieszeni. Zwróćmy jednak uwagę (tabela), że nawet po roku, jeszcze skromna część jego majątku znajduje się u Zuzanny.

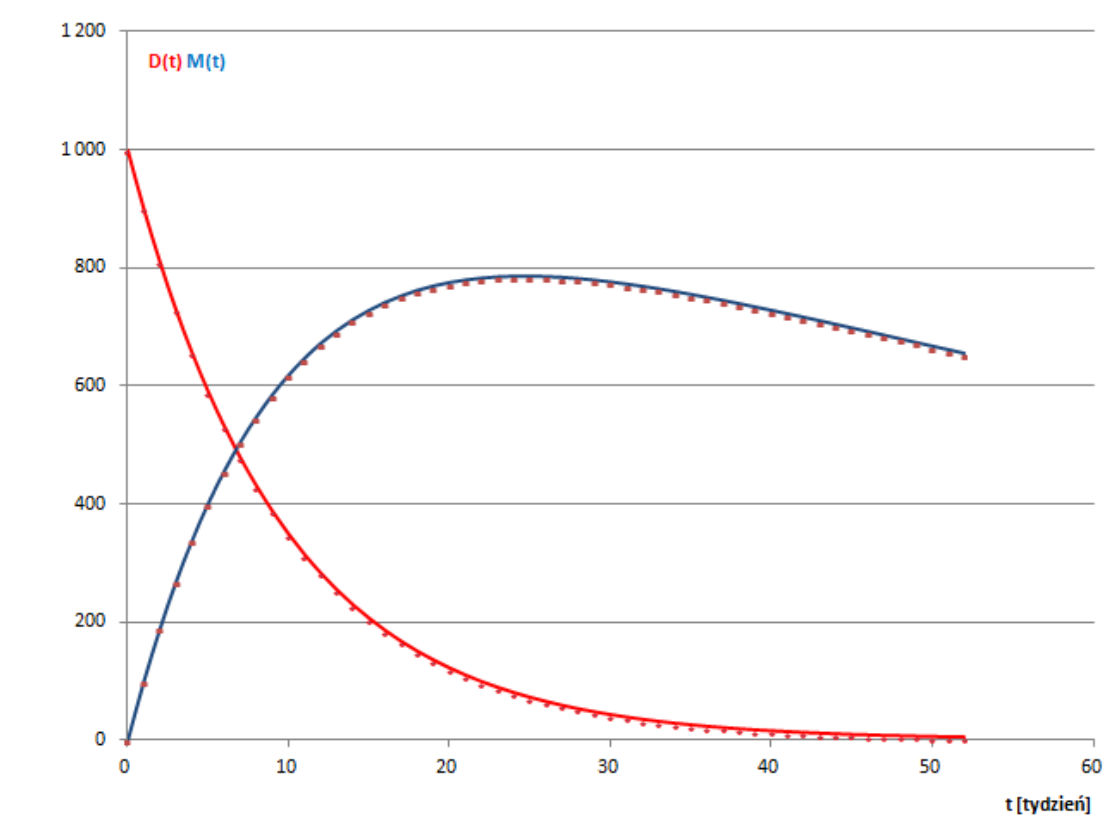
40	15	▼	-1	985	1
41	13	▼	-1	987	1
42	12	▼	-1	988	1
43	11	▼	-1	989	1
44	10	▼	-1	990	1
45	9	▼	-1	991	1
46	8	▼	-1	992	1
47	7	▼	-1	993	1
48	6	▼	-1	994	1
49	6	▼	-1	994	1
50	5	▼	-1	995	1
51	5	▼	0	995	0
52	4	▼	0	996	0



Dajmy teraz szansę Januszowi wydawać pieniądze. Ustalamy, że Janusz jest oszczędny, nie wydaje wszystkich pieniędzy, które otrzyma. Mamy możliwość obserwacji jak zmienia się jego majątek gdy tygodniowo wydaje od 1% do 30% kwoty, którą posiada. W każdym przypadku obserwujemy wzrost majątku Janusza, ale tylko do pewnego czasu. Popatrzmy na kilka przypadków:

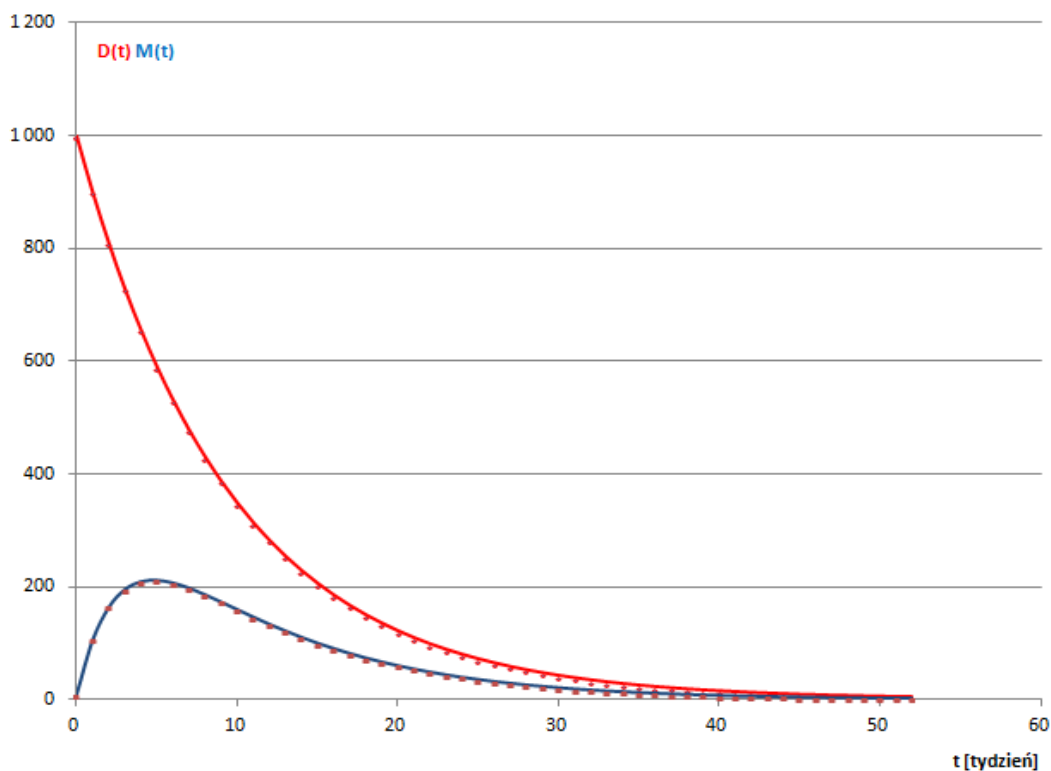
Janusz bardzo oszczędny -  $\lambda_J = 1\%$  na tydzień

W 27 tygodniu jego majątek osiąga maksimum równe 782 zł (tabela).



Janusz mało oszczędny -  $\lambda_J = 30\%$  na tydzień

A teraz założmy, że Janusz wydaje w każdym tygodniu 30% kwoty, którą posiada. W tym przypadku, maksimum zostaje osiągnięte już po 5 dniach (a więc wcześniej niż w przypadku „oszczędnego” Janusza). Wartość w maksimum wynosi jedynie 213 złotych i jest niższe niż w poprzednim przykładzie - jak zresztą można było oczekiwać.



Widać stąd, że na początku obserwujemy wzrost majątku Janusza, jednak w związku z tym, że wydaje on pieniądze, to pewnym czasie jego majątek zaczyna maleć. Nie może rosnąć w nieskończoność gdyż depozyt pozostawiony w gestii Zuzanny topnieje.

## 2. Osiąganie równowagi.

W obu ostatnich przykładach możemy zaobserwować ciekawą prawidłowość. Następuje ona po osiągnięciu maksimum i polega na tym, że co pewien okres czasu majątek Janusza maleje o połowę. Jest to związane z osiąganiem przez funkcję  $M(t)$  swoistej równowagi z funkcją  $D(t)$ .

Przypomnijmy (§3.4 1. tomu e-podręcznika), że czas połowicznego zaniku  $T_{1/2}$  związany jest z parametrem  $\lambda$  związkiem odwrotnie proporcjonalnym:

$$T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

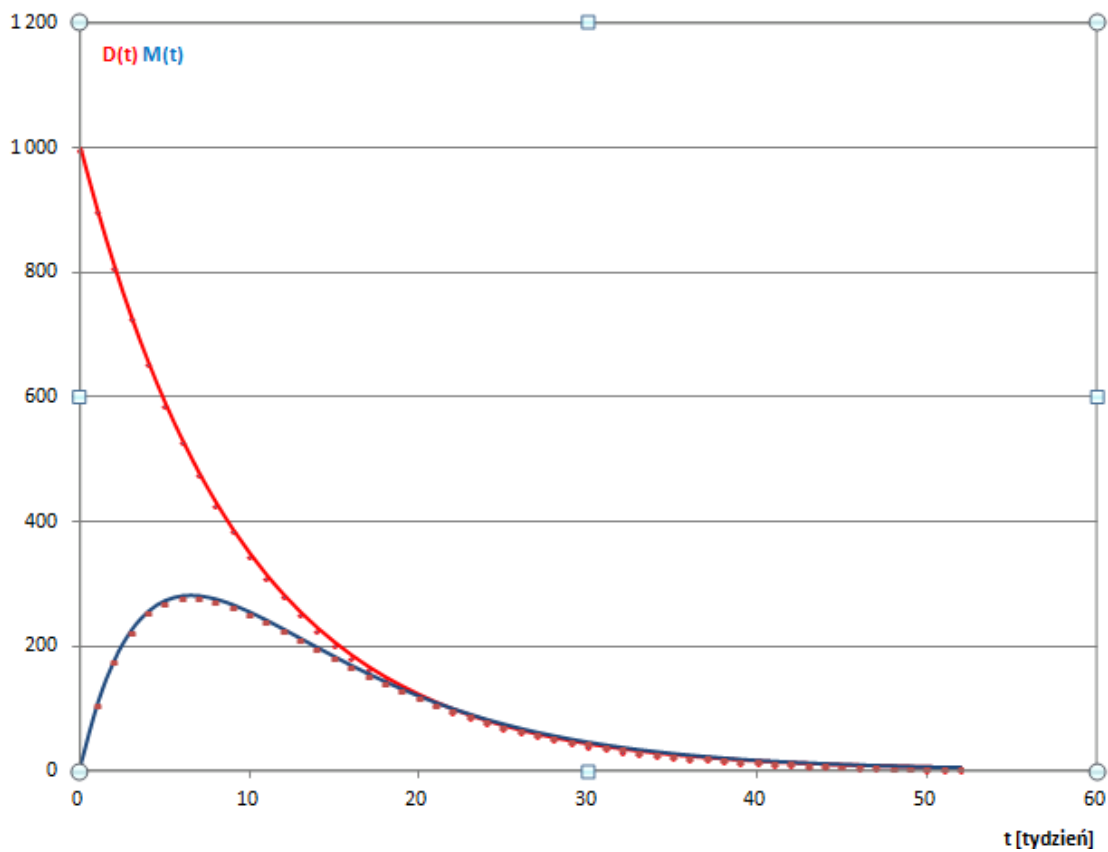
Ponieważ  $\ln(2) \approx 0,693$ , to dla domyślnych wartości  $\lambda_D$  i  $\lambda_J$  użytych w arkuszu uzyskamy przybliżone wartości czasów połowicznego zaniku  $T_D \approx 7$  tygodni i  $T_J \approx 2,8$  tygodnia.

Osiąganie równowagi pomiędzy majątkiem Janusza a depozytem u Zuzanny możesz prześledzić wykonując poniższe polecenia. Po stwierdzeniu każdej prawidłowości, zapisz wniosek z niej wynikający dla tempa zaniku  $D(t)$ ,  $M(t)$  i dla osiągnięcia stanu równowagi  $M(t)$  z  $D(t)$ . Możesz zacząć od przejrzenia kilku przykładowych realizacji i komentarzy do nich.

- 2.1 Sprawdź (skorzystaj raczej z tabeli niż z wykresu), że stan depozytu wykazuje następującą prawidłowość: jeśli weźmiemy wartość  $D(t)$  w dowolnym tygodniu, to po siedmiu tygodniach wartość ta spadnie - w rozsądnym przybliżeniu - do połowy wartości sprzed siedmiu tygodni. Jest to prawidłowość charakterystyczna dla zaniku wykładniczego.
- 2.2 Zbadaj (skorzystaj także z tabeli), czy zależność  $M(t)$  ma opisaną wyżej własność (przyjmij  $M_0 = 0$ ). Spróbuj znaleźć taki tydzień, w którym  $M(t)$  stanowi - w rozsądnym przybliżeniu - połowę wartości  $M$  sprzed około trzech tygodni ( $T_J \approx 2,8$  tygodnia). Przeprowadź podobne próby przy innych wartościach  $M_0$  ( $M_0 < D_0$ ). Twoje próby zakończą się zapewne niepowodzeniem.
- 2.3 Powtórz powyższe badanie (zaczynij od  $M_0 = 0$  i też skorzystaj raczej z tabeli), ale tym razem szukaj takiego tygodnia, w którym  $M(t)$  stanowi - w rozsądnym przybliżeniu - połowę wartości  $M$  sprzed **siedmiu** tygodni. Przeprowadź podobne próby przy innych wartościach  $M_0$  ( $M_0 < D_0$ ). Tym razem, Twoje próby zakończą się zapewne sukcesem. Takich tygodni znajdziesz wiele (tak jak w punkcie 1.1), choć nie od samego początku procesu, lecz po upływie kilkunastu (może dwudziestu kilku) pierwszych tygodni i na pewno po osiągnięciu przez  $M(t)$  swojej maksymalnej wartości.
- 2.4 Powtórz obserwację z punktu 5. drugiej części ćwiczenia (tu spróbuj skorzystać z wykresu). Zwróć uwagę, że wartość  $M_0$  wpływa na przebieg  $M(t)$  tylko w pierwszej części roku. Po kilkunastu (może dwudziestu kilku) pierwszych tygodniach wpływ  $M_0$  na przebieg  $M(t)$  przestaje być praktycznie zauważalny.

### Przykładowe realizacje.

Ustawmy parametry naszej symulacji tak: Depozyt początkowy - 1000 zł, wydatki Janusza - 19% na tydzień. Otrzymamy takie wykresy:



Po około 20 tygodniach następuje wręcz zrównanie wartości depozytu i majątku.

Popatrzmy na zawartość tabeli D(t).

t [tydz]	D (t) [zł]
0	1 000
1	900
2	810
3	729
4	656
5	590
6	531
7	478
8	430
9	387
10	349
11	314
12	282
13	254
14	229
15	206
16	185
17	167
18	150
19	135
20	122
21	109
22	98
23	89
24	80
25	72
26	65
27	58
28	52
29	47
30	42
31	38
32	34
33	31
34	28
35	25



Zauważmy pewną prawidłowość. Depozyt cały czas maleje, ale w szczególny sposób. Co siedem dni wartość depozytu zmniejsza się mniej więcej o połowę. W tabeli zaznaczono to kolorami żółtym (tygodnie 2., 9., 16., itd.) oraz zielonym (tygodnie 5., 12., 19., itd.).

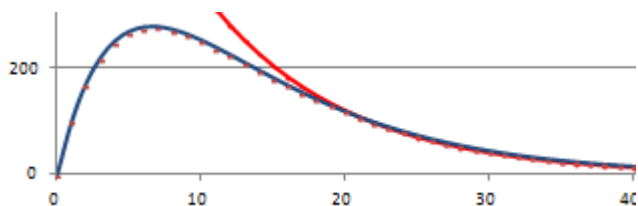
Czy tak samo zachowuje się majątek Janusza? Tak, ale dopiero od chwili, gdy depozyt i majątek zaczynają jednakowo maleć, co zaznaczono kolorem niebieskim:

11	314	-31	240	-1
12	282	-28	226	-1
13	254	-25	211	-1
14	229	-23	197	-1
15	206	-21	182	-1
16	185	-19	168	-1
17	167	-17	155	-1
18	150	-15	142	-1
19	135	-14	130	-1
20	122	-12	119	-1
21	109	-11	108	-1
22	98	-10	99	-1
23	89	-9	90	-1
24	80	-8	82	-1
25	72	-7	74	-1
26	65	-6	67	-1
27	58	-6	61	-1
28	52	-5	55	-1
29	47	-5	50	-1
30	42	-4	45	-1
31	38	-4	41	-1
32	34	-3	37	-1
33	31	-3	33	-1
34	28	-3	30	-1
35	25	-3	27	-1
36	23	-2	24	-1
37	20	-2	22	-1

A teraz, założmy, że Janusz na początku roku dysponował pewnym kapitałem  $M_0$ . Popatrzmy jak będzie zmieniał się jego majątek w czasie.

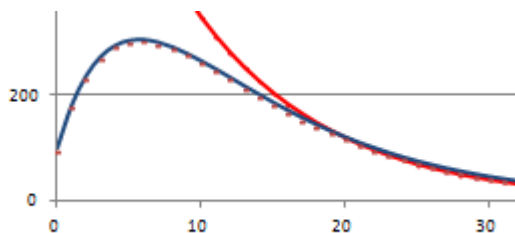
Jako wzorec weźmy  $M_0 = 0$  zł

17	167	-17	154	-13
18	150	-15	142	-12
19	135	-14	130	-11
20	122	-12	119	-10
21	109	-11	108	-10
22	98	-10	99	-9
23	89	-9	90	-8
24	80	-8	82	-8



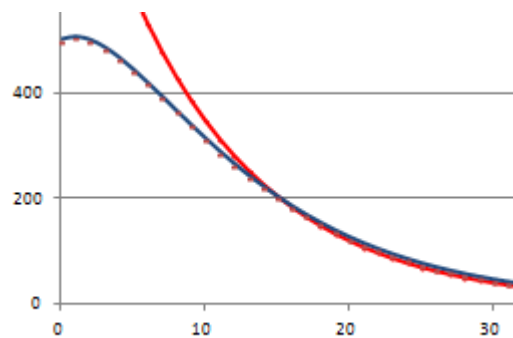
Zbadajmy  $M_0 = 100$  zł

16	185	-19	171	-14
17	167	-17	157	-13
18	150	-15	144	-12
19	135	-14	132	-12
20	122	-12	120	-11
21	109	-11	109	-10
22	98	-10	100	-9
23	89	-9	91	-8
24	80	-8	82	-8
25	72	-7	75	-7



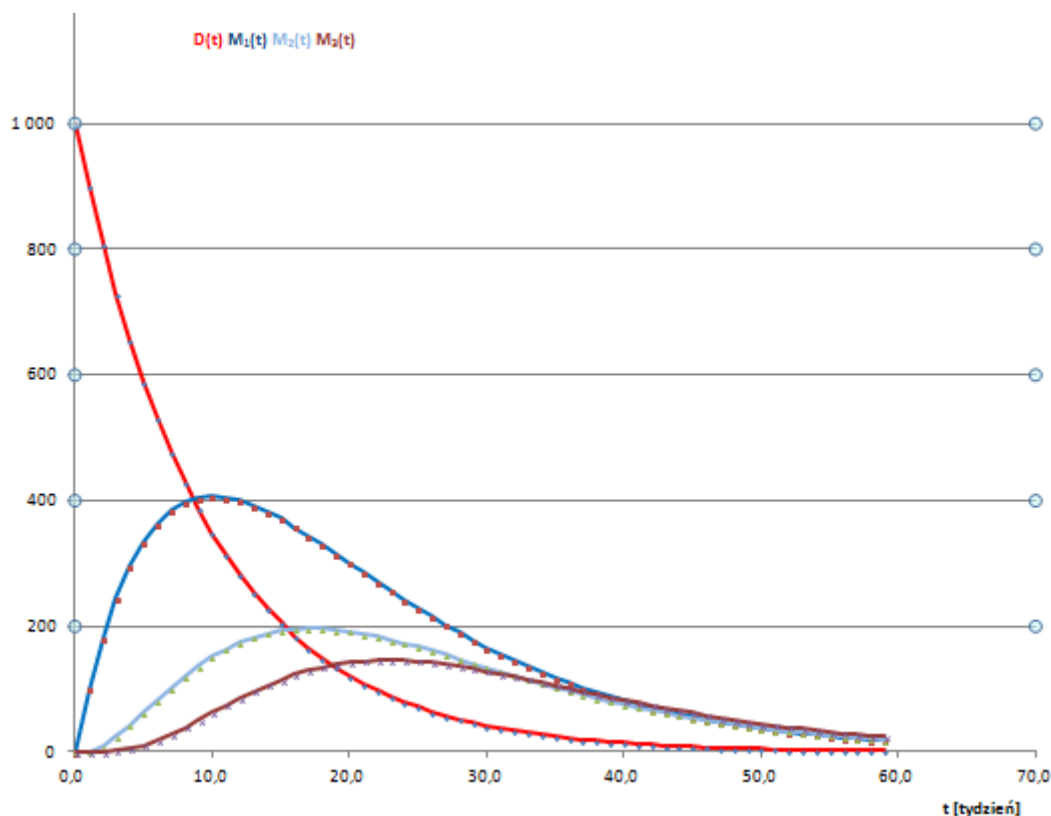
Zbadajmy też  $M_0 = 500$  zł

12	282	▼ -28	265	-22
13	254	▼ -25	243	-21
14	229	▼ -23	222	-19
15	206	▼ -21	203	-18
16	185	▼ -19	185	-17
17	167	▼ -17	168	-15
18	150	▼ -15	153	-14
19	135	▼ -14	139	-13
20	122	▼ -12	126	-12
21	109	▼ -11	114	-11
22	98	▼ -10	103	-10
23	89	▼ -9	94	-9
24	80	▼ -8	85	-8
25	72	▼ -7	77	-7



### 3. Kilkelementowa rodzina promieniotwórcza.

Przeprogramuj swój arkusz tak, by uzyskać ilustrację sytuacji bardziej zbliżonej do rzeczywistych szeregów promieniotwórczych. Oprócz depozytu u Zuzanny i majątku Janusza wprowadź jeszcze dwie zmienne  $M_2$  i  $M_3$ . Przyjmij dla nich parametry  $\lambda_2$  i  $\lambda_3$  (uszanuj zasadę, że  $\lambda_D$  jest najmniejsze ze wszystkich  $\lambda$ ) oraz początkowe wartości  $M_{02}$  i  $M_{03}$  równe zero. Dla każdej ze zmiennych przygotuj dwie kolumny: wartości tej zmiennej i cotygodniowej jej zmiany. Zmianę tę oblicz zgodnie ze wzorem (2), odpowiednio „przesunięty”. Dodaj wykresy nowych zmiennych do już istniejącego wykresu.



3.1 Zbadaj wpływ wartości początkowych na przebieg wykresów  $M(t)$ . Zauważ, że podobnie jak wcześniej, zmiany te są zauważalne tylko w pierwszych tygodniach.

3.2 Zbadaj wpływ wartości  $\lambda$  na przebieg wykresów  $M(t)$ . Zweryfikuj hipotezę: „Im większą wartość  $\lambda$  ma izotop rodziny promieniotwórczej, tym jego zawartość wśród innych izotopów jest mniejsza”.

### 4. Rzeczywisty szereg promieniotwórczy - uranowy „ $4n + 2$ ”.

Izotop uranu  $^{238}\text{U}$  jest początkiem szeregu promieniotwórczego, którego wszystkie izotopy mają wspólną cechę: ich liczby masowe  $A$  są podzielne przez cztery z resztą dwa (stąd nazwa „ $4n + 2$ ”). W

tabeli pokazano kilka pierwszych i ostatnich izotopów tego szeregu - zajrzyj do internetu, jeśli interesuje Cię cały szereg czy pozostałe trzy szeregi. W tabeli podano też nazwę przemiany prowadzącej do następnego członka rodziny oraz przybliżony czas połowicznego zaniku dla izotopu wyjściowego. Warto zwrócić uwagę, że szereg ten w kilku miejscach się rozgałęzia - niektóre izotopy podlegają zarówno przemianie  $\alpha$  jak i  $\beta^-$ .

${}^{238}_{92}\text{U}$	$\alpha \rightarrow$ $4,5 \cdot 10^9$ lat	${}^{234}_{90}\text{Th}$	$\beta^- \rightarrow$ 24 dni	${}^{234}_{91}\text{Pa}$	$\beta^- \rightarrow$ 1,2 min	${}^{234}_{92}\text{U}$	$\alpha \rightarrow$ $2,5 \cdot 10^5$ lat	${}^{230}_{90}\text{Th}$	$\alpha \rightarrow$ $8 \cdot 10^4$ lat
(.....)	$\alpha \rightarrow$	${}^{210}_{82}\text{Pb}$	$\beta^- \rightarrow$ 19,4 lat	${}^{210}_{83}\text{Bi}$	$\beta^- \rightarrow$ 5 dni	${}^{210}_{84}\text{Po}$	$\alpha \rightarrow$ 138 dni	${}^{206}_{82}\text{Pb}$	trwały
(.....)	$\beta^- \rightarrow$				$\alpha \rightarrow$ $10^4$ lat	${}^{206}_{81}\text{Tl}$	$\beta^- \rightarrow$ 4,2 min		

Zwróć uwagę na olbrzymią rozpiętość czasów połowicznego zaniku izotopów w tym szeregu. Zastanów się nad możliwością zaprogramowania „losów” takiej rodziny w arkuszu. Na jakie problemy napotkasz?

## „Wykres w skali logarytmicznej. Krzywa rezonansowa obwodu RLC.”

### I. Z pracowni fizycznej.

W wielu zagadnieniach, nie tylko z zakresu fizyki, mamy do czynienia z zależnościami (funkcjami), których dziedziny (bądź zbiory wartości) są bardzo rozległe. By prawidłowo opisać badane zjawisko, konieczne jest prześledzenie jego zachowania w zakresie kilku rzędów wielkości zmiennej niezależnej. Przykładem może tu być opis głośności słyszalnych przez człowieka dźwięków (zagadnienie krzywych izofonicznych, opisane w §5.13 3. tomu e-podręcznika). Zakres słyszalnych częstotliwości obejmuje trzy rzędy wielkości (od kilkunastu herców do kilkunastu tysięcy herców). W takich sytuacjach zastosowanie w wykresach typowej **skali liniowej** bywa nieefektywne, gdyż skala taka nie pozwala przedstawić na wykresie wszystkich istotnych aspektów problemu. Stosuje się wtedy **skalę logarytmiczną**, która pozwala wyeksponować interesujący fragment zależności, bez utraty „ogólnego spojrzenia na całość”.

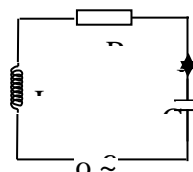
Wykonując proponowane ćwiczenie przekonasz się o użyteczności skali logarytmicznej. Nauczysz się takiego organizowania tabeli i wykresu, by uzyskać czytelny obraz badanego zjawiska. Przedstawimy to na przykładzie tzw. krzywej rezonansowej obwodu RLC. Zagadnienie to nie jest wprawdzie ujęte jako obowiązkowe w programie nauczania fizyki na poziomie rozszerzonym, ale jest ciekawe i pouczające. Warto się z nim zapoznać, gdyż jest ono podstawą wielu zjawisk z zakresu elektrotechniki, radiotechniki i elektroniki.

1. W rozdziale 3.6 e-podręcznika opisano podstawowe właściwości obwodów prądu przemiennego.

Ograniczono się tam do omówienia obwodów zawierających źródło napięcia sinusoidalnie zmiennego o amplitudzie  $\varepsilon_0$  i częstotliwości  $\omega$  oraz tzw. oporu czynnego, czyli opornika o oporze  $R$  (paragrafy 3.6.1 i 3.6.2 e-podręcznika). Zależność  $\varepsilon(t)$  dana jest równaniem:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cdot \sin(\omega t) \quad (1)$$

2. W obwód z napięciem przemiennym można także włączyć tzw. elementy bierny, czyli kondensator o pojemności  $C$  (§1.7 e-podręcznika) oraz zwojnicę (cewkę indukcyjną) o współczynniku samoindukcji  $L$  (§4.4 e-podręcznika). Uzyskuje się w ten sposób obwód RLC (w dalszym ciągu rozpatrujemy jedynie szeregowe połączenie opisanych elementów, jak na rysunku obok).



W obwodzie RLC płynie prąd sinusoidalnie zmienny w czasie, o natężeniu danym równaniem:

$$I(t) = I_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad (2)$$

gdzie:

- $I_0$  to amplituda płynącego prądu,
- $\omega$  to częstość zmian prądu (równa zawsze częstości zmian napięcia),
- $\varphi$  to przesunięcie fazowe pomiędzy prądem a napięciem, opisujące fakt, iż przebieg zmian tych wielkości nie jest synchroniczny. Brak synchronizacji prądu z napięciem wynika właśnie z obecności w obwodzie elementów biernych  $L$  i  $C$ .

3. Odpowiednikiem oporu elektrycznego jest cecha elementu biernego zwana jego zawadą i oznaczana symbolem  $Z_C$  (zawada pojemnościowa) oraz  $Z_L$  (zawada indukcyjna); zawada wyrażana jest, podobnie jak opór, w omach. Podstawowa różnica pomiędzy zawadą a oporem polega na tym, że zawada zależy

nie tylko od właściwości elementu (jego pojemności lub indukcyjności) ale także od częstości zmian przyłożonego napięcia:

$$Z_C = 1/(C \cdot \omega) \quad \text{oraz} \quad Z_L = L \cdot \omega \quad (3)$$

Nieco nietypowe jest także wyrażenie podające wypadkową zawadę elementów połączonych szeregowo - nie jest ona zwykłą sumą zawad elementów składowych, lecz wyraża się wzorem:

$$Z_{RLC} = \sqrt{R^2 + (Z_C - Z_L)^2} \quad (4)$$

4. Z tego wyrażenia wynika związek amplitudy natężenia prądu  $I_0$  z amplitudą napięcia  $\varepsilon_0$ . Ma on postać zbliżoną do prawa Ohma:

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{Z_{RLC}} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + (Z_C - Z_L)^2}} \quad (5)$$

5. Przesunięcie fazowe  $\varphi$  wyraża się najprościej poprzez swoje funkcje trygonometryczne:

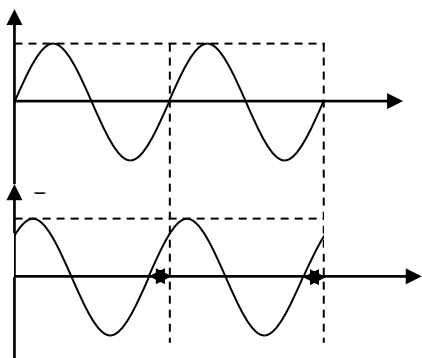
$$\cos\varphi = \frac{R}{Z_{RLC}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (Z_C - Z_L)^2}} \quad (6)$$

oraz

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{Z_C - Z_L}{R} \quad (7)$$

Ostatni wzór pokazuje, że przesunięcie fazowe  $\varphi$  może być dodatnie (dla obwodów „pojemnościowych”, w których  $Z_C > Z_L$ ) lub ujemne (dla obwodów „indukcyjnych”, w których  $Z_C < Z_L$ ). Wartości  $\varphi$  są ograniczone do przedziału  $\langle -\pi/2; +\pi/2 \rangle$ , czyli od  $-90^\circ$  do  $+90^\circ$ .

Na wykresie pokazano sinusoidalny przebieg  $\varepsilon(t)$  oraz przesunięty w fazie o  $\varphi = +\pi/4$  ( $+45^\circ$ ) przebieg  $I(t)$  w obwodzie „pojemnościowym”.



6. Specyficzną cechą obwodu RLC jest możliwość uzyskania w nim stanu rezonansowego. Polega to na takim doborze parametrów  $L$ ,  $C$  i  $\omega$ , by zminimalizować zawadę  $Z_{RLC}$ . Jeśli spojrzymy uważnie na wzór (3), to zauważymy, że gdy  $Z_C = Z_L$  to  $Z_{RLC} = R$ . Każda inna relacja pomiędzy  $Z_C$  i  $Z_L$  prowadzi do wzrostu  $Z_{RLC}$ . Równość  $Z_C = Z_L$  oznacza zaś, po uwzględnieniu wzoru (2), że:

$$\omega^2 = \frac{1}{L \cdot C} \quad (8)$$

Przy takim doborze parametrów, nie tylko zawada całkowita obwodu jest minimalna, ale natężenie prądu w nim płynące jest maksymalne, zaś przesunięcie fazowe  $\varphi = 0$ . Taki obwód „wyróżnia” częstotliwość daną wzorem (8) - jest on szczególnie podatny na zasilanie napięciem zmiennym z tą częstotliwością. Częstość tę nazywa się częstotliwością rezonansową obwodu i oznaczana jest symbolem  $\omega_0$ :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad (9)$$

Ta właściwość obwodu jest wykorzystywana np. w nadajnikach i odbiornikach fal radiowych.

7. Odpowiednio programując arkusz kalkulacyjny zbadasz funkcję  $I_0(\omega)$ , czyli krzywą rezonansową obwodu. Jest to zależność amplitudy natężenia prądu w obwodzie RLC od częstotliwości napięcia zasilającego ten obwód. Jest ona wyrażona wzorem (5) z uwzględnieniem wzorów (3):

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{Z_{RLC}} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2}} \quad (10)$$

Szczególnie ciekawym aspektem krzywej rezonansowej jest osiągnięcie przez natężenie prądu maksymalnej wartości przy  $\omega = \omega_0$ .

## II. W pracowni informatycznej.

### Wstęp.

Przygotuj arkusz kalkulacyjny zgodnie z następującymi wskazówkami. Arkusz ten będzie następnie kopiowany i odpowiednio modyfikowany dla potrzeb kolejnych części ćwiczenia.

1. W pierwszej kolumnie przygotuj komórki do wprowadzania wartości parametrów zagadnienia (w nawiasach podano wartości domyślne i sugerowany zakres dopuszczalnych wartości):
  - amplitudy napięcia zmiennego  $\varepsilon_0$  (10 V, nie ma merytorycznej potrzeby zmieniania wartości tego parametru);
  - oporu R (10  $\Omega$ , od 0,1  $\Omega$  do 1000  $\Omega$ );
  - współczynnika samoindukcji cewki L (0,001 H, od  $10^{-6}$  H do 1 H);
  - pojemności kondensatora C ( $10^{-6}$  F, od  $10^{-9}$  F do  $10^{-3}$  F);
  - w kolejnej komórce program oblicza wartość częstości rezonansowej obwodu  $\omega_0$  (wzór (9));

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad \text{A15: } =1/\text{PIERWIASTEK}(A9*A13)$$

- pod nią przygotuj komórkę „krok  $\omega$ ”; będzie ona zawierała wielkość służącą do zmieniania wartości  $\omega$  dla potrzeb wykresu i będzie różna w różnych częściach ćwiczenia. W pierwszym arkuszu „krok  $\omega$ ” wynosi jedną dziesiątą wartości  $\omega_0$ .

$$\text{A18: } =A16/10$$

Do zmiany zakresów wartości R, L i C użyj pasków przewijania.

	A	B
1		
2	$\varepsilon_0$ [V]	
3	10	
4	R [ $\Omega$ ]	
5	188,9	
6		
7		
8	L [H]	
9	4,13E-01	
10		
11		
12	C [F]	
13	6,28E-07	
14		
15	$\omega_0$ [1/s]	
16	1,96E+03	
17	krok $\omega$ "+"	
18	1,96E+02	
19		

Ustawienie pasków przewijania.

Ponieważ parametry pasków mogą przyjmować tylko wartości całkowite dodatnie w celu uzyskania właściwych danych do rozwiązania zadania należy wykonać dodatkowe czynności.

W arkuszu „dane wejściowe” przygotuj tabelę:

	A	B	C	D	E
1					
2					
3		R [ $\Omega$ ]	L [H]	C [F]	
4	min	0,1	0,0000001	0,0000000001	
5	max	1000	1	0,001	
6	przyrost	0,1	0,001	0,0000001	
7					
8					
9	Wartości ustawione w paskach przewijania				
10					
11	min	1	1	1	
12	max	10000	1000	1000	
13	przyrost	1	1	1	
14					
15					

Wartości maksymalne pasków obliczone są na podstawie wzoru

$(\max - \min) / \text{przyrost}$

i danych z komórek B4:D6

Ponieważ otrzymane wartości dla L i C nie są liczbami całkowitymi do wyników została dodana liczba 0,001.

Wielkość max dla R została powiększona o 1

2. Kolejne kolumny arkusza to tabela zawierająca obliczane wg wzorów wartości

B14		fx					
	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	$\varepsilon_0$ [V]		$\omega$ [1/s]	$Z_C$ [ $\Omega$ ]	$Z_L$ [ $\Omega$ ]	$Z_{RLC}$ [ $\Omega$ ]	$I_0(\omega)$ [A]
3	10						
4	R [ $\Omega$ ]						
5	10						
6							
7							
8	L [H]						
9	1,00E-03						
10							
11							
12	C [F]						
13	1,00E-06						
14							
15	$\omega_0$ [1/s]						
16	3,16E+04						
17	krok $\omega$ "+"						
18	3,16E+03						
19							
20							
21							
22							



$\omega$  [1/s] zawiera 20 wartości tej zmiennej. Rozmieść je według następującego przepisu:

- w wierszu 12. kolumny umieść wartość  $\omega_0$ ;

C12: =A16

- w dziewięciu komórkach wcześniejszych (do wiersza 2) umieść wartości coraz mniejsze od  $\omega_0$ , każdorazowo o „krok  $\omega$ ”;

C11: =C12-\$A\$18

- w dziesięciu komórkach późniejszych (do wiersza 21) umieść wartości coraz większe od  $\omega_0$ , każdorazowo o „krok  $\omega$ ”;

C13: =C12+\$A\$18

- wiersz 11 tabeli warto wyróżnić (np. kolorem) - opisuje on stan rezonansowy obwodu.

Takie zorganizowanie kolumny  $\omega$  zapewnia, że bez względu na zmianę wartości parametrów L i C, najbardziej interesująca cecha krzywej rezonansowej - jej maksimum - zawsze znajdzie się wewnątrz dziedziny wykresu.

$Z_C$  [ $\Omega$ ]- kolumna (pomocnicza) zawady pojemnościowej  $Z_C$  wypełniona zgodnie ze wzorem (3);

D3: =1/(\$A\$13\*C3)

$Z_L$  [ $\Omega$ ]- kolumna (pomocnicza) zawady indukcyjnej  $Z_L$  także wypełniona zgodnie ze wzorem (3);

E3: =\$A\$9\*C3

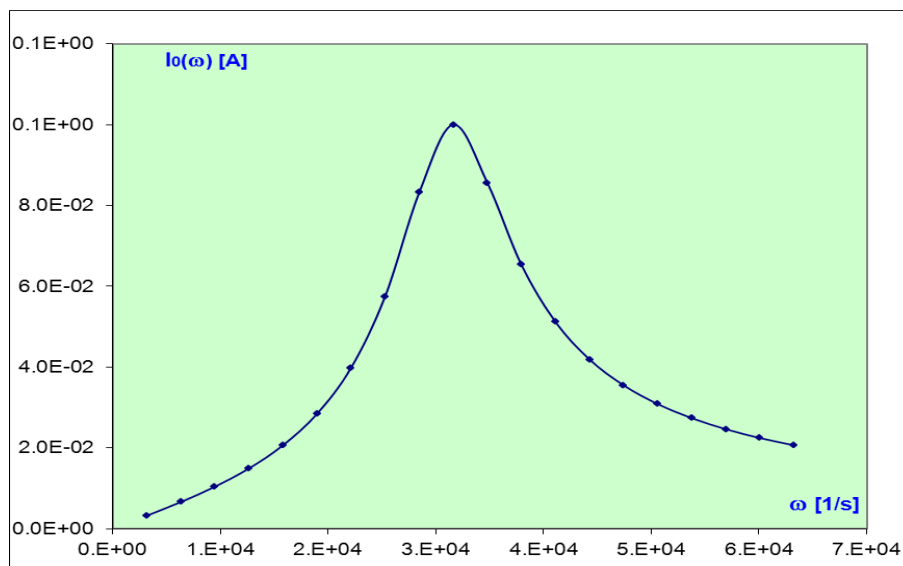
$Z_{RLC}$  [ $\Omega$ ] - kolumna (pomocnicza) zawady całkowitej  $Z_{RLC}$  wypełniona zgodnie ze wzorem (4);

F3: =PIERWIASTEK(\$A\$5^2+(D3-E3)^2)

$I_0(\omega)$  [A]- kolumna amplitudy natężenia prądu  $I_0(\omega)$  wypełniona zgodnie ze wzorem (5).

G3: =\$A\$3/F3

3. Rozważ sformatowanie wszystkich komórek zawierających liczby jako komórki z kategorii „naukowe”, zachowując dwie (górną trzy) cyfry po przecinku. Dzięki temu ich wartości będą wyświetlane jako liczby typu x,yy·10<sup>uu</sup> - ułatwia to ich odczyt.
4. Sporządź wykres zależności  $I_0(\omega)$ .

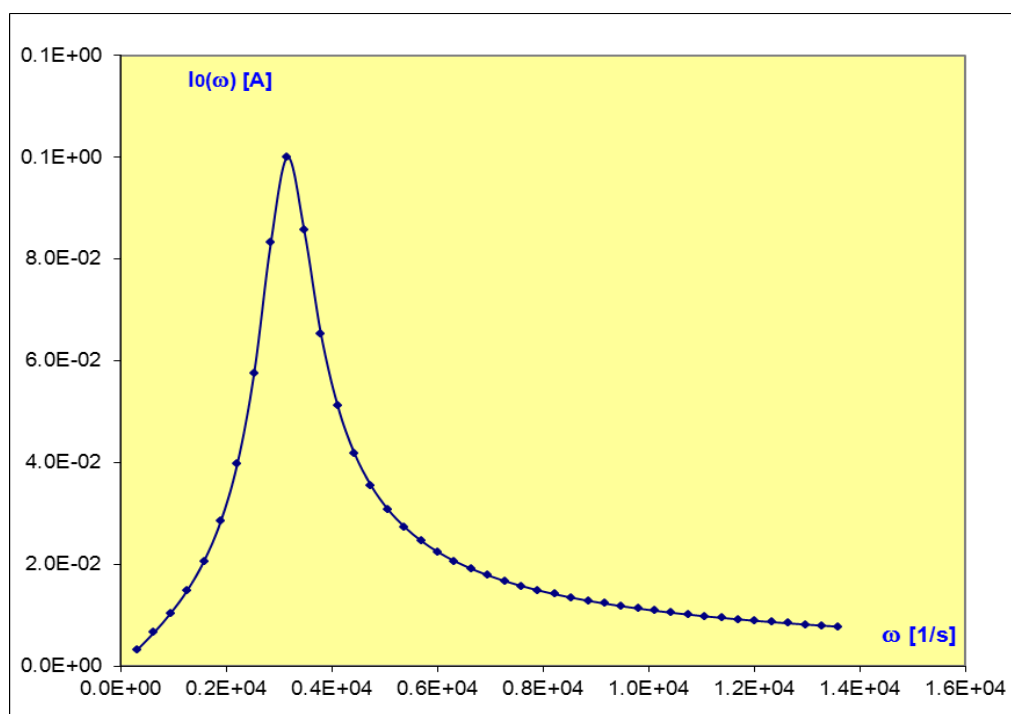


## Część 1. Wykres w skali liniowej.

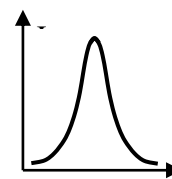
1.1. Pobieźny ogląd wykresu, uzyskanego na podstawie wartości domyślnych parametrów, pokazuje wprawdzie oczekiwany kształt krzywej rezonansowej, ale pozostawia pewien niedosyt. Zwróć uwagę, że maksimum natężenia prądu w punkcie  $\omega = \omega_0$  jest wyraźnie widoczne, ale malenie tego natężenia jest albo istotnie niesymetryczne w obu kierunkach albo „niedopracowane graficznie”. Nie da się też w sposób przekonujący określić zachowań tego natężenia na końcach dziedziny.

- Można sobie wyobrazić (na podstawie wykresu), że gdy  $\omega$  dąży do zera, to  $I_0(\omega)$  także zbiega do zera. Brakuje jednak punktu, który by o tym jednoznacznie przekonywał. Dostawienie w tabeli takiego punktu metodą kolejnego odjęcia „kroku  $\omega$ ” spowodowałoby osiągnięcie przez zmienną  $\omega$  wartości zero - ta jednak leży poza dziedziną funkcji (10).

- Trudno sobie wyobrazić jak przebiega  $I_0(\omega)$ , gdy  $\omega$  staje się dużo większe od  $\omega_0$ . Możesz spróbować uzupełnić tabelę o 10-20 punktów obliczonych metodą dodania „kroku  $\omega$ ”. Efekt nie będzie w pełni zadowalający: wraz ze wzrostem informacji o charakterze malenia  $I_0(\omega)$  przy dużych wartościach  $\omega$ , coraz mniej szczegółów widać w okolicach samego maksimum.



1.2. Powróć do ustawień domyślnych i zwiększaj wartość oporu  $R$  kolejno o  $10 \Omega$ . Przekonaj się, że wykres staje się coraz mniej wyrazisty, a dla wartości  $R$  powyżej  $50 \Omega$  nie można wręcz rozpoznać charakterystycznego kształtu krzywej rezonansowej (rys. 1). Tu nie pomaga nawet zabieg poszerzenia dziedziny opisany w poprzednim punkcie - nie da się w ten sposób odtworzyć charakterystycznego „wyplaszczenia” krzywej dla  $\omega < \omega_0$ .



rys. 1.

## Część 2. Alternatywne określanie dziedziny wykresu; od skali liniowej do logarytmicznej.

- 2.1 Skopiuj poprzedni arkusz do nowego; przywróć ustawienia domyślne. W komórce „krok  $\omega$ ” wpisz liczbę 1,6 (lub zbliżoną, z okolic 1,2 - 2,0). Liczba ta posłuży do konstrukcji kolumny zmiennej niezależnej  $\omega$ . Tym razem jednak zastosujemy inną procedurę: zamiast odejmować „krok  $\omega$ ” (wyrażony jako ułamek  $\omega_0$ ) od  $\omega_0$ , będziemy tę ostatnią wielkość dzielić przez bezwymiarowy współczynnik „krok  $\omega$ ” tylekroć, ile chcemy wypełnić komórek w górę kolumny (w naszym przykładzie 9 komórek). Analogicznie, zamiast dodawać „krok  $\omega$ ” do  $\omega_0$ , będziemy tę ostatnią wielkość mnożyć przez „krok  $\omega$ ” tylekroć, ile chcemy wypełnić komórek w dół kolumny (w naszym przykładzie 10 komórek). Wprowadź te zmiany do kolumny  $\omega$ .

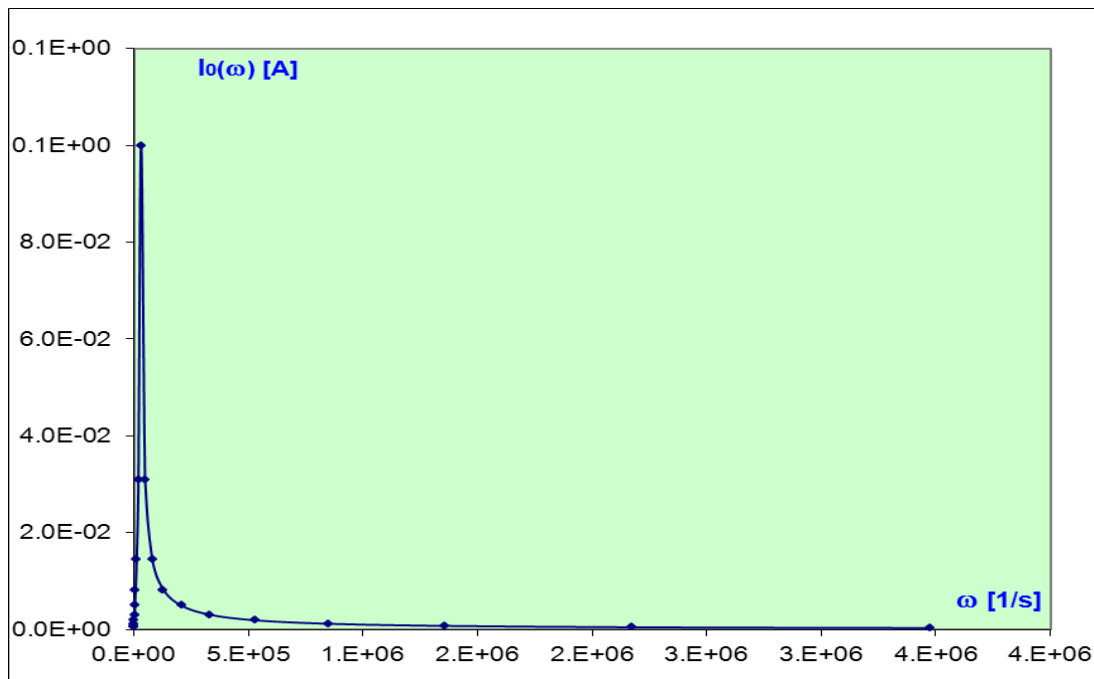
$$C11: =C12/\$A\$18$$

$$=A16$$

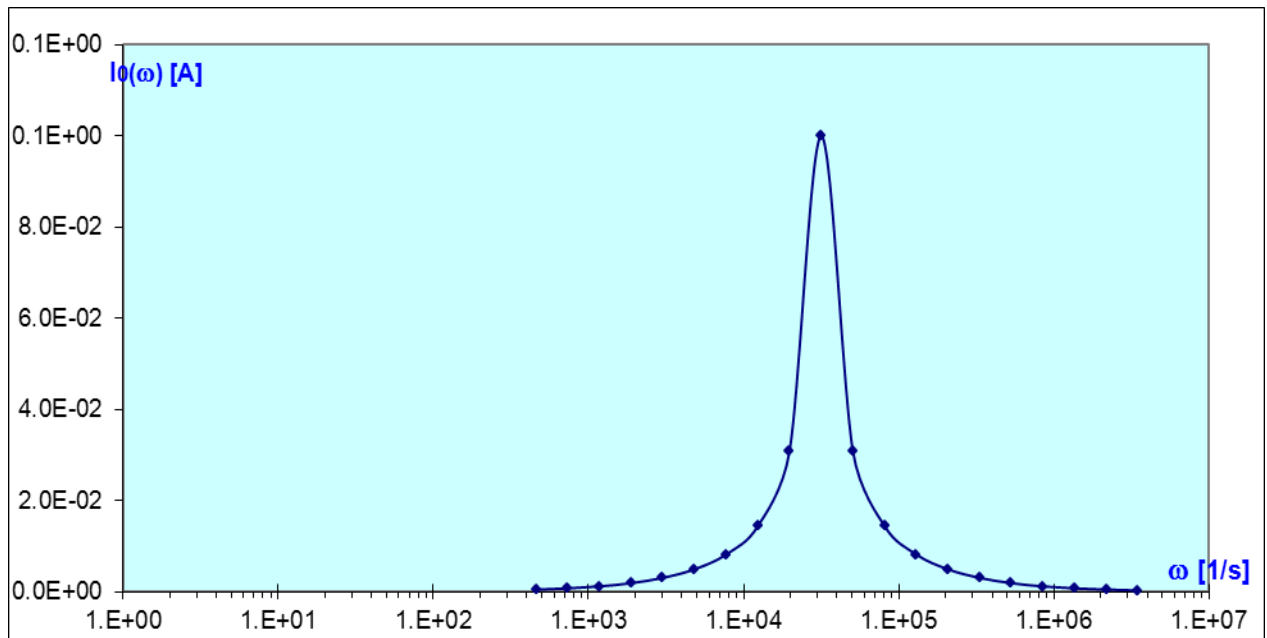
$$C13: =C12*\$A\$18$$

W ten sposób definiujemy dziedzinę zmiennej  $\omega$  za pomocą ciągu geometrycznego o ilorazie „krok  $\omega$ ”. Dla dwudziestu wyrazów ciąg ten ma rozpiętość prawie czterech rzędów wielkości (to dla ilorazu 1,6 - możesz sprawdzić, że  $1,6^{19}$  to prawie osiem tysięcy). Nawet niewielkie zmiany wartości „krok  $\omega$ ” spowodują spore zmiany w rozmiarze dziedziny naszej funkcji - sprawdź to dla wartości 1,2 i dla 2,0.

- 2.2 Uzyskany efekt - w postaci wykresu - zdecydowanie nie jest zadowalający. Tak szeroka dziedzina  $\omega$ , określona za pomocą ciągu geometrycznego, nie nadaje się na oś zorganizowaną w skali liniowej.



W okienku „Formatowanie osi x”, w zakładce „skala” zaznacz „skala logarytmiczna”. Przyjrzyj się uważnie nowej organizacji osi x. Zasadnicza różnica (w porównaniu ze skalą liniową) sprowadza się do określenia, czemu odpowiadają jednakowe odstępy na tej osi (np. pomiędzy znacznikami). W przypadku skali liniowej odpowiadają one jednakowym **różnicom** pomiędzy wartościami na osi. W przypadku skali logarytmicznej odpowiadają one jednakowym **ilorazom** wartości na osi. Dzięki temu, wartości zmiennej ustawione są „co rząd wielkości” (do przeliczeń dla potrzeb skali logarytmicznej stosuje się na ogół logarytmy dziesiętne), a na osi może zmieścić się zakres odpowiadający kilku a nawet kilkunastu rzędom wielkości.



Skala logarytmiczna ma jednak poważne ograniczenie: możemy ją stosować tylko gdy wartości zmiennej są wszystkie dodatnie. Taka jest bowiem dziedzina funkcji logarytm - nie obejmuje ona zera ani liczb ujemnych. Więcej na temat tworzenia skali logarytmicznej znajdziesz w części 3. ćwiczenia.

- 2.3 Zbadaj wpływ zmian oporu  $R$  w takim samym zakresie jak w punkcie 1.2. Przekonaj się, że wykres w skali logarytmicznej jest bardziej stabilny i pozwala lepiej porównywać przebiegi dla różnych  $R$ . W razie potrzeby zmień nieco wartość parametru „krok  $\omega$ ”, by dopasować rozmiar dziedziny.
- 2.4 Zbadaj wpływ zmian wartości parametrów  $L$  i  $C$  na przebieg i kształt krzywej rezonansowej. Przeprowadź to badanie na obu wykresach: liniowym i logarytmicznym. Porównaj uzyskiwane efekty.

### Część 3. (dla chętnych) Samodzielne tworzenie skali logarytmicznej.

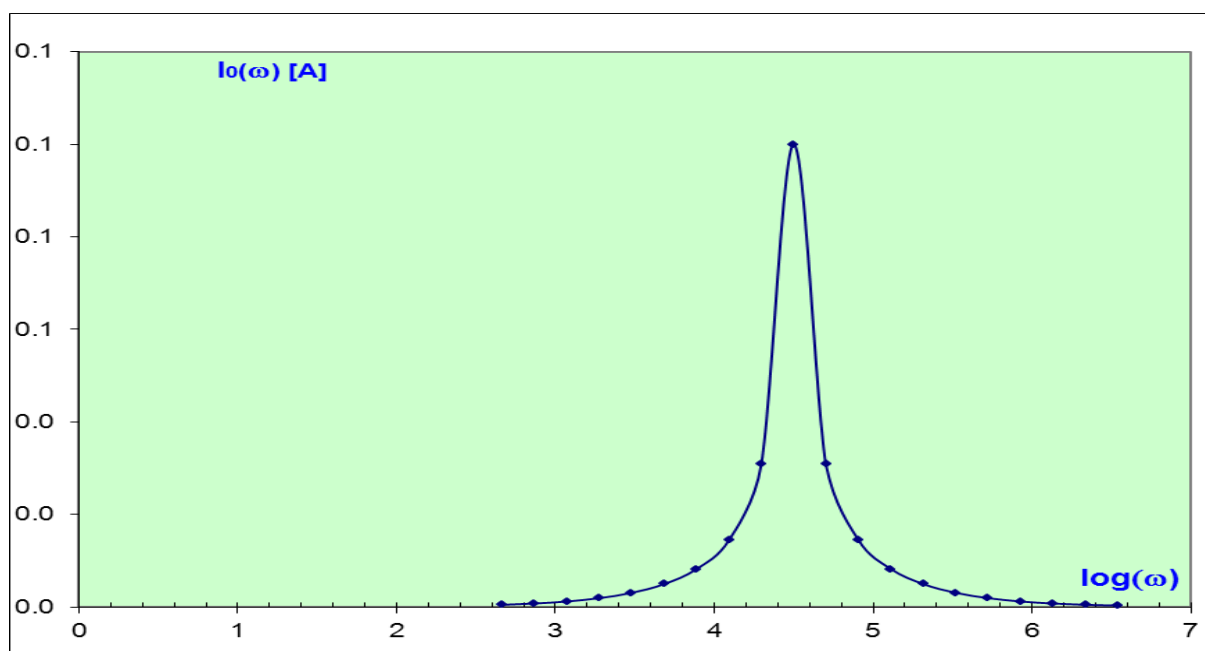
Skopiuj poprzedni arkusz do nowego; przywróć ustawienia domyślne. Przygotuj nową kolumnę, która posłuży jako zbiór wartości do osi odciętych wykresu w skali logarytmicznej. Pamiętaj jednak, że wartości funkcji  $I_0(\omega)$  pozostają obliczone na podstawie kolumny  $\omega$ . Nowa kolumna jest tylko podstawą do utworzenia wykresu. Wypełnij ją w dwóch wersjach.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2	$\varepsilon_0$ [V]		$\omega$ [1/s]	$Z_C$ [ $\Omega$ ]	$Z_L$ [ $\Omega$ ]	$Z_{RLC}$ [ $\Omega$ ]	$I_0(\omega)$ [A]	$\log(\omega)$	$\log(\omega/\omega_0)$
3	10								
4	R [ $\Omega$ ]								
5	10								
6									
7									
8	L [H]								
9	1,00E-03								
10									
11									
12	C [F]								
13	1,00E-06								
14									
15	$\omega_0$ [1/s]								
16	3,16E+04								
17	krok $\omega$ "razy"								
18	1,60E+00								
19									
20									
21									
22									

- 3.1. Wersja „bezpośrednia”. Do kolumny „ $\log(\omega)$ ” wstaw logarytm dziesiętny (funkcja ta nazywa się LOG lub LOG10) wartości z kolumny zmiennej  $\omega$ .

H3: =LOG(C3)

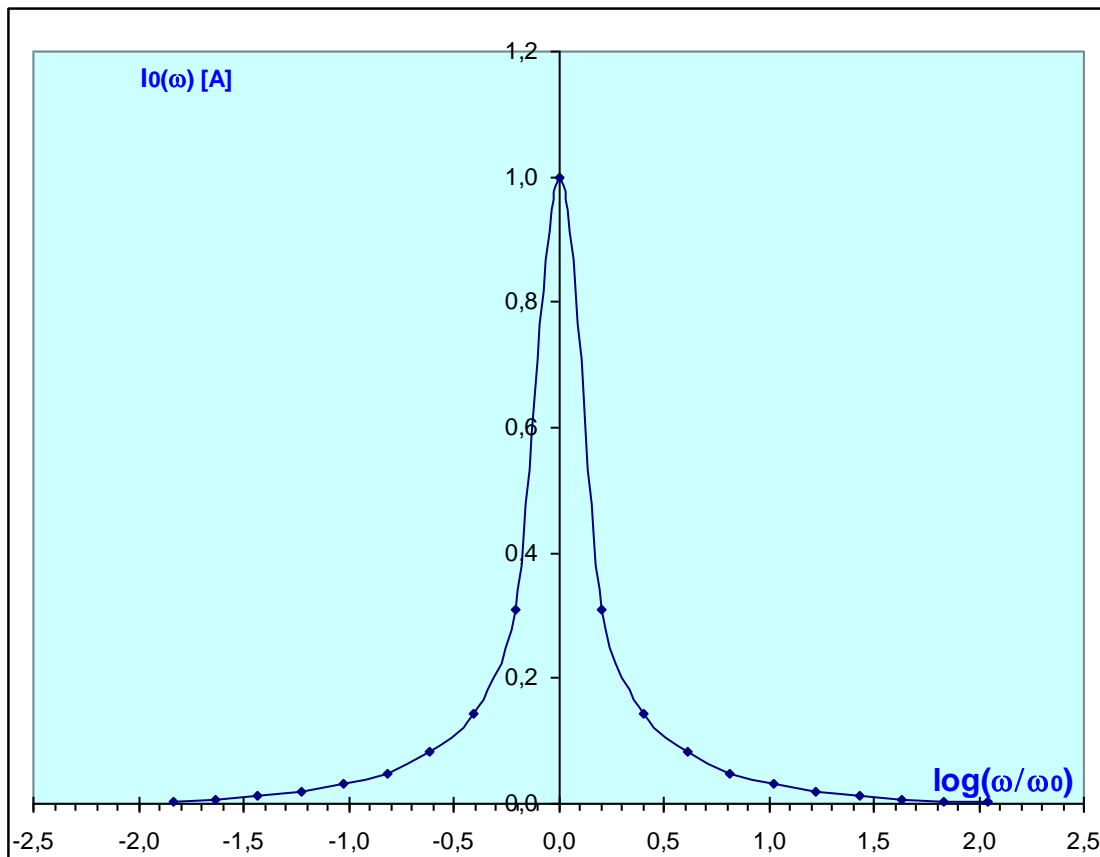
Sporządź wykres, w którym na osi odciętych („oś x”) odłożysz wartości „ $\log(\omega)$ ” a na osi rzędnych wartości z kolumny „ $I_0(\omega)$ ”. Wybierz jednak, przy tworzeniu wykresu, wykres w skali liniowej (nie zaznaczaj skali logarytmicznej w okienku „Formatowanie osi”, zakładka „skala”) - logarytmiczny charakter skali zapewniony jest poprzez kolumnę „ $\log(\omega)$ ”.



- 3.2. Wersja „rozbudowana”. Jeżeli w opisywanym zagadnieniu występuje wzorcowa wartość zmiennej, charakterystyczna dla samego zagadnienia, to można tę wartość wykorzystać do utworzenia skali logarytmicznej. W przypadku krzywej rezonansowej taką wzorcową wartością jest częstotliwość rezonansowa  $\omega_0$ . Utwórz za jej pomocą kolumnę „ $\log(\omega/\omega_0)$ ”.

G3: =LOG(C3/\$A\$16)

Sporządź wykres, w którym na osi odciętych odłożysz wartości z tej właśnie kolumny, a na osi rzędnych wartości z kolumny „ $I_0(\omega)$ ”. Zwróć uwagę na symetrię uzyskanego wykresu. Zaletą takiego postępowania jest wyraźne podzielenie dziedziny wykresu (w wersji „logarytmicznej”) na część „ujemną” oraz na część „dodatnią”. Pierwsza odpowiada wartościom  $\omega < \omega_0$  (wtedy iloraz  $\omega/\omega_0$  jest mniejszy od jedności, więc jego logarytm jest ujemny), a druga odpowiada wartościom  $\omega > \omega_0$  (wtedy logarytm z  $\omega/\omega_0$  jest dodatni).



- 3.3. Wykorzystaj jeden z wykresów logarytmicznych i zbadaj wpływ parametrów L i C na przebieg krzywej rezonansowej. Przekonaj się, że:
- wersja „3.1” lepiej nadaje się do opisywania przesunięć krzywej rezonansowej wzdłuż osi odciętych („w kierunku prawo-lewo”);
  - zmiany tych parametrów nie wpływają na wysokość rezonansu, czyli na wartość  $I_0(\omega = \omega_0)$ ;
  - zmiany tych parametrów wpływają na tzw. szerokość połówkową rezonansu (to pojęcie jest objaśnione w części III ćwiczenia).

### III. Do pracowni fizycznej.

**Zad. 1.** Na podstawie analizy wzorów (9) i (10) uzasadnij wyniki spostrzeżeń z poleceń 3.3.a) oraz 3.3.b) poprzedniej części ćwiczenia.

**Zad. 2.** Zbadaj zależność szerokości połówkowej ' $s_\omega$ ' rezonansu od wartości oporu R w obwodzie RLC. Wykorzystaj do tego tabele i wykresy przygotowane w części II tego ćwiczenia, odpowiednio je modyfikując.

Szerokość połówkowa krzywej rezonansowej (rys. 2.) to odległość pomiędzy dwiema wartościami częstości  $\omega_g$  i  $\omega_d$ :

$$s_\omega = \omega_g - \omega_d,$$

które mają właściwości takie, że:

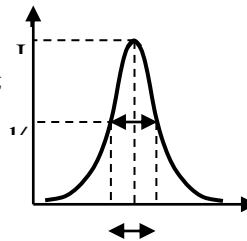
$$I_0(\omega_g) = I_0(\omega_d) = \frac{1}{2} \cdot I_{\max},$$

gdzie  $I_{\max}$  jest maksymalną wartością amplitudy natężenia prądu w obwodzie, osiąganą dla  $\omega = \omega_0$ .

Im większa szerokość połówkowa, tym obwód mniej precyzyjnie wyróżnia częstotliwość  $\omega_0$ . W radiokomunikacji i elektronice ogromne znaczenie ma konstruowanie obwodów o możliwie małej szerokości połówkowej.

W badaniu nastawiaj wartości R w zakresie od  $10 \Omega$  do około  $150 \Omega$  i dla każdej wartości R odczytaj z tabeli i wykresu częstości  $\omega_g$  i  $\omega_d$ , a następnie oblicz  $s_\omega$ . Postaraj się uzyskać dużą precyzję odczytu poprzez zagęszczenie wartości  $\omega$  w tabeli oraz wprowadzenie odpowiednich linii pomocniczych na wykresie. Uwzględnij także fakt, iż zmiana wartości R wpływa na wysokość krzywej rezonansowej, czyli na wartość  $I_{\max} = I_0(\omega = \omega_0)$ .

Badanie przeprowadź zarówno na wykresie o skali liniowej jak i na wykresie o skali logarytmicznej. Sporządź wykres zależności  $s_\omega(R)$ .



Rys. 2. Szerokość

### Rozwiązania, wskazówki, komentarze

**Zad. 1.** Na podstawie analizy wzorów (9) i (10) uzasadnij wyniki spostrzeżeń z poleceń 3.3.a) oraz 3.3.b) poprzedniej części ćwiczenia.

**3.3a)** Wzór (9) pokazuje, że częstość  $\omega_0$  zależy zarówno od L ( $Z_L$ ), jak i od C ( $Z_C$ ). Maksimum wykresu przypada dla wartości  $\omega = \omega_0$ .

W wersji 3.1 wykres w skali logarytmicznej zawiera na osi odciętych logarytm z tzw. liczbowej wartości  $\omega$ , pozbawionej jednostek. Oznacza to, że położenie maksimum wykresu (czyli wartość  $\omega_0$ ) po prostu przesuwa się wzdłuż osi odciętych w miarę zmian wartości L bądź C. Przesunięcie to łatwo widać na wykresie.

W wersji 3.2 wykres zawiera na osi rzędnych logarytm **stosunku**  $\omega$  do  $\omega_0$ . Maksimum wykresu zawsze przypada na osi rzędnych (w punkcie „ $\log(\omega/\omega_0) = 0$ ”), gdyż  $\omega = \omega_0$  oznacza  $\omega/\omega_0 = 1$ , czyli właśnie  $\log(\omega/\omega_0) = 0$ . Zmiany wartości L bądź C nie powodują więc przesunięcia maksimum wykresu w prawo bądź w lewo, lecz jedynie niewielkie zmiany szerokości połówkowej tego wykresu.

**3.3b)** Wzór (10) pokazuje, że amplituda natężenia prądu  $I_0$  zależy od  $\omega$ , ale wśród parametrów zależności  $I_0(\omega)$  występują L oraz C:

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2}}$$

Maksymalną wartość  $I_{\max}$  amplituda prądu przyjmuje w stanie rezonansowym, gdy  $\omega = \omega_0$ . Zgodnie z rozumowaniem przeprowadzonym w punkcie 6. pierwszej części ćwiczenia, w stanie rezonansowym  $Z_L = Z_C$  (czyli  $L\omega = 1/C\omega$ ); powoduje to, że:

$$I_{\max} = I_0(\omega = \omega_0) = \frac{\varepsilon_0}{R}$$

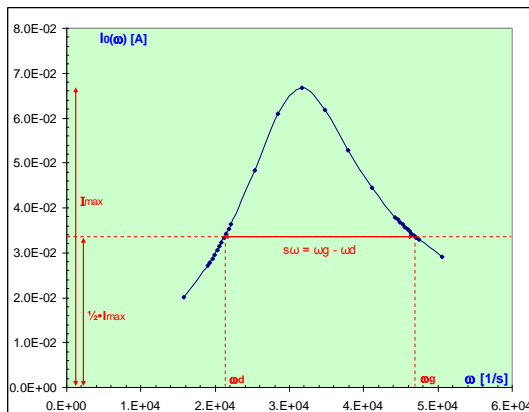
Wartość ta zależy jedynie od amplitudy napięcia zasilającego i od wartości oporu, więc zmiany wartości  $L$  oraz  $C$  nie mają na nią wpływu.

**Zad. 2.** Zbadaj zależność szerokości połówkowej ' $s_\omega$ ' rezonansu od wartości oporu  $R$  w obwodzie RLC.

Wykorzystamy do tego tabele i wykresy przygotowane w części II tego ćwiczenia. Zmodyfikujemy je w ten sposób, że wyróżnimy dziedzinę tabeli i wykresu w okolicach  $\omega_g$  i  $\omega_d$ , po czym w tych okolicach zagęścimy próbkowanie częstotliwości - zmniejszymy „krok  $\omega$ ” 10-krotnie. W tych okolicach odnajdziemy - z określoną dokładnością - wartości  $\omega_d$  i  $\omega_g$ , które spełniają warunek:

$$I_0(\omega_g) = I_0(\omega_d) = \frac{1}{2} \cdot I_{\max}$$

Wartości te posłużą nam do wyznaczenia  $s_\omega$ . Przykład takiej modyfikacji, wykonanej dla wartości oporu  $R = 15 \Omega$ , przedstawiono poniżej w postaci wykresu i tabeli.





$\varepsilon_0$ [V]	$\omega$ [1/s]	$Z_c$ [ $\Omega$ ]	$Z_L$ [ $\Omega$ ]	$Z_{RLC}$ [ $\Omega$ ]	$I_0(\omega)$ [A]
10	1,58E+04	6,32E+01	1,58E+01	4,97E+01	2,01E-01
R [ $\Omega$ ]	1,90E+04	5,27E+01	1,90E+01	3,69E+01	2,71E-01
15	1,93E+04	5,18E+01	1,93E+01	3,58E+01	2,79E-01
	1,96E+04	5,10E+01	1,96E+01	3,48E+01	2,87E-01
	1,99E+04	5,02E+01	1,99E+01	3,38E+01	2,96E-01
L [H]	2,02E+04	4,94E+01	2,02E+01	3,28E+01	3,05E-01
1,00E-03	2,06E+04	4,87E+01	2,06E+01	3,18E+01	3,14E-01
	2,09E+04	4,79E+01	2,09E+01	3,09E+01	3,23E-01
	2,12E+04	4,72E+01	2,12E+01	3,00E+01	3,33E-01
	2,15E+04	4,65E+01	2,15E+01	2,92E+01	3,43E-01
C [F]	2,18E+04	4,58E+01	2,18E+01	2,83E+01	3,53E-01
1,00E-06	2,21E+04	4,52E+01	2,21E+01	2,75E+01	3,64E-01
	2,53E+04	3,95E+01	2,53E+01	2,07E+01	4,84E-01
$\omega_0$ [1/s]	2,85E+04	3,51E+01	2,85E+01	1,64E+01	6,09E-01
3,16E+04	3,16E+04	3,16E+01	3,16E+01	1,50E+01	6,67E-01
krok $\omega$ "+"	3,48E+04	2,87E+01	3,48E+01	1,62E+01	6,18E-01
3,16E+03	3,79E+04	2,64E+01	3,79E+01	1,90E+01	5,27E-01
	4,11E+04	2,43E+01	4,11E+01	2,25E+01	4,44E-01
krok $\omega$ "+" pomniejszony	4,43E+04	2,26E+01	4,43E+01	2,64E+01	3,79E-01
3,16E+02	4,46E+04	2,24E+01	4,46E+01	2,68E+01	3,74E-01
	4,49E+04	2,23E+01	4,49E+01	2,72E+01	3,68E-01
	4,52E+04	2,21E+01	4,52E+01	2,75E+01	3,63E-01
	4,55E+04	2,20E+01	4,55E+01	2,79E+01	3,58E-01
	4,59E+04	2,18E+01	4,59E+01	2,83E+01	3,53E-01
	4,62E+04	2,17E+01	4,62E+01	2,87E+01	3,48E-01
	4,65E+04	2,15E+01	4,65E+01	2,91E+01	3,43E-01
	4,68E+04	2,14E+01	4,68E+01	2,95E+01	3,39E-01
	4,71E+04	2,12E+01	4,71E+01	2,99E+01	3,34E-01
	4,74E+04	2,11E+01	4,74E+01	3,03E+01	3,30E-01
	5,06E+04	1,98E+01	5,06E+01	3,43E+01	2,92E-01

$I_{max}$  6,67E-01  
 $\frac{1}{2} \cdot I_{max}$  3,33E-01  
 $\omega_d$  2,12E+04  
 $\omega_g$  4,71E+04  
 $\Delta\omega = \omega_g - \omega_d$  2,59E+04

Nastawianie różnych wartości R prowadzi do wykresu zależności  $s_\omega(R)$ , która jest zależnością rosnącą: im większy opór R w obwodzie rezonansowym, tym szerokość połówkowa rezonansu jest większa.

## I. Zadanie „o dziesięć mniej”.

Powszechnie znana jest reklama, w której pokazuje się, że niestosowanie się do ograniczenia prędkości na jezdni może skutkować wypadkiem. Brakuje w niej jednak ważkiej (i przemawiającej do wyobraźni!) informacji: z jaką prędkością uderzy w przeszkodę (inny pojazd, pieszego, itp.) samochód, który jedzie z początkową prędkością „o dziesięć większą” od innego samochodu, któremu udało się zatrzymać tuż przed ową przeszkodą.

Ruch obu samochodów składa się z dwóch etapów: ruchu jednostajnego i ruchu jednostajnie zmiennego pod wpływem siły tarcia opon o jezdnię. Do programu przyjmuje się następujące założenia:

1. Oba samochody i obaj kierowcy są identyczne i mają jednakowe warunki na jezdni, z wyjątkiem początkowej prędkości  $v_0$ .
2. Początkowe prędkości samochodów różnią się o  $\Delta v$ :

$$v_{02} = v_{01} + \Delta v.$$

3. Oba kierowcy postrzegają przeszkodę w tej samej chwili  $t_0$  (umownie  $t_0 = 0$ ) i w tym samym położeniu  $x_0$  (umownie  $x_0 = 0$ ). Odległość  $s$  do przeszkody jest dobierana tak, że przy ustalonych warunkach i parametrach samochód (1) zdąży zatrzymać się tuż przed przeszkodą („uderzy” w nią z prędkością końcową równą zero). Samochód (2), w tych samych warunkach, uderzy więc w przeszkodę z końcową prędkością  $v_2 \neq 0$ .
4. Oba kierowcy rozpoczynają hamowanie po jednakowym czasie reakcji  $t_r$ . Do momentu rozpoczęcia hamowania samochody przebywają ruchem jednostajnym, prostoliniowym drogę  $s_{ri}$ :

$$s_{ri} = v_{0i} \cdot t_r$$

5. Po rozpoczęciu hamowania samochody poruszają się ruchem jednostajnie opóźnionym prostoliniowym, w którym wartość przyspieszenia  $a$  (ujemnego) wynika ze współczynnika tarcia statycznego opon o jezdnię  $\mu$ , ale nie zależy od masy samochodu  $m$ :

$$|a| = \mu \cdot F_n / m = \mu \cdot m \cdot g / m = \mu \cdot g$$

6. Samochód (1) zatrzymuje się po czasie hamowania  $t_h$ , obliczanym z równania:

$$v_1(t_h) = -a \cdot t_h + v_{01} = 0$$

7. W trakcie hamowania samochód (1) przebywa drogę hamowania  $s_{h1}$  daną wzorem:

$$s_{h1} = -\frac{1}{2} \cdot a \cdot t_h^2 + v_{01} \cdot t_h$$

8. Tak więc odległość  $s$ , zwana **całkowitą** drogą hamowania dla samochodu (1), w jakiej obaj kierowcy spostrzegli przeszkodę wynosi:

$$s = s_{r1} + s_{h1}$$

Całkowita droga hamowania  $s$  zależy od  $v_{01}$ ,  $t_r$  oraz  $\mu$ . Droga ta nie jest jednak **całkowitą** drogą hamowania dla samochodu (2), gdyż pojazd ten nie zatrzymał się tuż przed przeszkodą.

9. Samochód (2) uderzy w przeszkodę po przebyciu tej samej odległości  $s$ , na którą składają się droga  $s_{r2}$  przebyta (ruchem jednostajnym) w trakcie reagowania kierowcy na widok przeszkody oraz droga  $s_{h2}$  (przebyta ruchem jednostajnie opóźnionym) w trakcie hamowania. Jeżeli  $s_{r2} \leq s$  (dalej zakłada się, że warunek ten jest spełniony), to:

$$s_{h2} = s - s_{r2}$$

10. Samochód (2) uderzy w przeszkodę po czasie  $t_u$  od rozpoczęcia hamowania, obliczanym z równania kwadratowego:

$$s_{h2} = -\frac{1}{2} \cdot a \cdot t_u^2 + v_{02} \cdot t_u$$

11. Samochód (2) uderzy w przeszkodę z prędkością  $v_2$  daną wzorem:

$$v_2 = -a \cdot t_u + v_{02}$$

Końcowa prędkość  $v_2$ , zależna od parametrów:  $v_{01}$ ,  $\Delta v$ ,  $t_r$  oraz  $\mu$ , jest właśnie wynikiem „działania” programu.

## II. Rozwiązanie w arkuszu kalkulacyjnym.

Program „O dziesięć mniej” pozwala zilustrować numerycznie oraz za pomocą wykresów różne aspekty zależności całkowitej drogi hamowania oraz końcowej prędkości  $v_2$  od czterech parametrów zagadnienia, czyli od  $v_{01}$ ,  $\Delta v$ ,  $t_r$  oraz  $\mu$ . Wartości te wprowadzane są za pomocą pól kombi.

- Używane w programie wartości  $v_{01}$  odzwierciedlają przedział realnie dopuszczalnych prędkości w ruchu drogowym; jako domyślną warto przyjąć ograniczenie prędkości w ruchu miejskim (50 km/h). Warto też wyróżnić w programie następujące prędkości: 30 km/h (typowe ograniczenie na terenie osiedli mieszkaniowych), 90 km/h (dopuszczalna prędkość na typowych drogach) oraz 120 km/h i 140 km/h (dopuszczalna prędkość na drogach ekspresowych i autostradach).
- Domyślną wartością  $\Delta v$  jest 10 km/h, zgodnie z tytułem programu. Warto dopuścić wartości  $\Delta v$  od bliskich zeru do nawet 100 km/h, by pokazać potencjalne skutki „piractwa drogowego”.
- Czas prostej reakcji człowieka na pojedynczy bodziec jest rzędu 0,1 - 0,2 sekundy. Kilkuczynnościowa reakcja „zdjąć nogę z gazu i wdepnąć w hamulec” trwa co najmniej 0,5 sekundy (ta wartość może pojawiać się jako domyślna) i może wydłużyć się, nawet kilkakrotnie, w związku z czynnikami takimi, jak zaabsorbowanie własnymi myślami, rozmową, równoległym wykonywaniem innych czynności (jedzenie, picie, rozmowa przez telefon), zmęczeniem czy niedyspozycją psychofizyczną (wywołaną lekami, alkoholem czy narkotykami).
- Współczynnik tarcia opon o jezdnię w optymalnych warunkach drogowych może osiągać wartość  $\mu = 1$ , którą można zaproponować jako domyślną. Zużyte opony czy obniżona jakość nawierzchni (np. drobne nierówności na jezdni) powodują obniżenie wartości  $\mu$  o ok. 0,2 - 0,3. Mokra nawierzchnia dodatkowo sprowadza  $\mu$  do okolic 0,5; jeszcze większe obniżenie  $\mu$  może wynikać z obecności na jezdni warstewki wody (tzw. akwaplanacja) lub ubitej warstwy mokrego śniegu. Lód na jezdni sprowadza współczynnik tarcia opon o nawierzchnię do okolic  $\mu = 0,1$ .

Wartości ustalane za pomocą pól kombi

	A	B	C
1			
2	$v_{01}$ [km/h]	30	
3	$v_{01}$ [m/s]	8,3	
4			
5	$\Delta v$ [km/h]	10	
6	$\Delta v$ [m/s]	2,8	
7			
8	$v_{02}$ [km/h]	40	
9	$v_{02}$ [m/s]	11,1	
10			
11	$t_r$ [s]	1	
12			
13	wsp. tarcia $\mu$	0,8	
14	$a$ [m/s <sup>2</sup> ]	7,85	

$v_{01}$  [km/h] 10 - 140

$\Delta v$  [km/h] 5 - 100

$t_r$  [s] 0,1 – 2,5

$\mu$  0,1 - 1

1. Rozwiązanie równań z założeń z pkt od I.1 do I.11.,

	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Samochód 1			Droga hamowania	Samochód 2				
2	Sr1 [m]	th [s]	Sh1 [m]	S [m]	Sr2 [m]	Sh2 [m]	tu [s]	V2 [m/s]	V2 [km/h]
3	17,5	1,1	4,4	21,9	23,3	-1,4	-0,1	12,1	43,4

$$\begin{aligned}
 Sr1 &= v01[m/s] \cdot tr[s] && = B3 * B11 \\
 th[s] &= v01[m/s] \cdot a[m/s^2] && = B3 * B14 \\
 Sh1[m] &= -0,5 \cdot a[m/s^2] \cdot th^2[s] + v01[m/s] \cdot th[s] && = 0,5 * B14 * F3^2 + B3 * F3 \\
 S[m] &= Sr1 - Sh1 && = E3 + G3 \\
 Sr2[m] &= V02[m/s] \cdot tr[s] && = B9 * B11 \\
 Sh2[m] &= S[m] - Sr2[m] && = H3 - I3 \\
 th[s] &= (v02[m/s] - \sqrt{v02^2 - 2aSh}) / a && = (B9 - \text{PIERWIASTEK}(B9^2 - 2 * B14 * J3)) / B14 \\
 V2[m/s] &= -a[m/s^2] \cdot tu[s] + v02[m/s] && = -B14 * K3 + B9 \\
 V2[km/h] &= 3,6 V2[m/s] && = 3,6 * L3
 \end{aligned}$$

2. Wygenerowanie przez program wykresów zależności:

- położenia  $x_1$  i  $x_2$  obu samochodów od czasu (od chwili  $t_0$  do chwili zatrzymania przy przeszkodzie);
- prędkości  $v_1$  i  $v_2$  obu samochodów od czasu (od chwili  $t_0$  do chwili zatrzymania przy przeszkodzie);
- prędkości  $v_1$  i  $v_2$  obu samochodów od położenia (od położenia  $x_1 = x_2 = x_0$  do położenia  $x_1 = x_2 = s$ ).

Tabela danych do wykresów:

Tabela zawiera 20 pozycji.

Wyznaczenie odcinka czasowego:

$$\Delta t = (tr + th) / 19$$

	A
15	
16	$\Delta t$
17	0,166
18	

Wartości początkowe wprowadzone do pierwszego wiersza tabeli:

$$X1=0 \quad E6 \quad 0$$

$$V1=V01 \quad F6 \quad =B3$$

$$t=0 \quad H6 \quad 0$$

$$X2=0 \quad I6 \quad 0$$

$$V2=V02 \quad J6 \quad =B9$$

	D	E	F	G	H	I	J	K
4								
5		X1 [m]	V1 [m/s]	V1 [km/h]	t [s]	X2 [m]	V2 [m/s]	V2 [km/h]
6		0,0	8,3	30	0,000	0	11,1	40
7		1,4	8,3	30	0,166	1,8	11,1	40
8		2,8	8,3	30	0,333	3,7	11,1	40
9		4,2	8,3	30	0,499	5,5	11,1	40
10		5,5	8,3	30	0,666	7,4	11,1	40
16		13,9	8,3	30	1,664	18,5	11,1	40
17		15,3	8,3	30	1,831	20,3	11,1	40
18		16,6	8,3	30	1,997	21,9	0,0	0
19		17,9	7,8	28	2,163	21,9	0,0	0
20		19,1	6,5	24	2,330	21,9	0,0	0
21		20,1	5,2	19	2,496	21,9	0,0	0
22		20,9	3,9	14	2,663	21,9	0,0	0
23		21,4	2,6	9	2,829	21,9	0,0	0
24		21,7	1,3	5	2,995	21,9	0,0	0
25		21,8	0,0	0	3,162	21,9	0,0	0

Wzory wypełniające pozostałe wiersze tabeli:

$$x_{1i+1} = \text{jeżeli}(t_i < t_r; v_{01}\Delta t + x_{1i}; -0,5a(\Delta t^2 + v_{01}\Delta t + x_i))$$

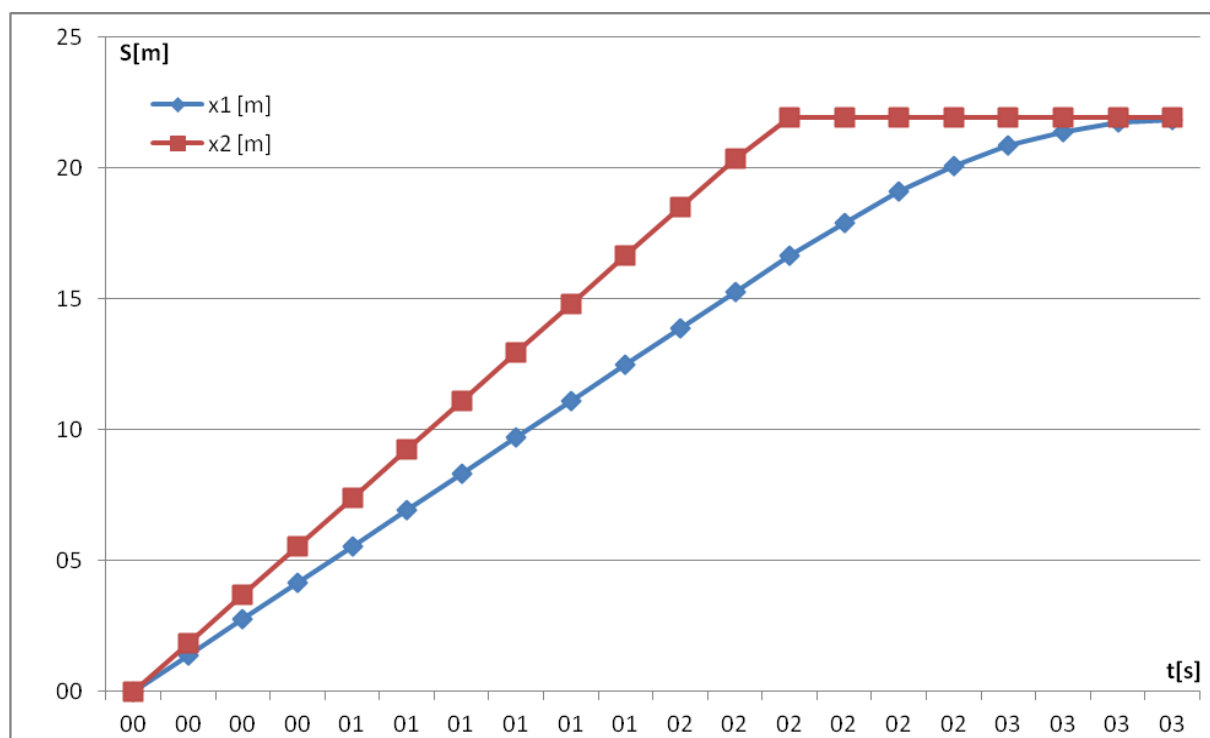
$$v_{1i+1} = \text{jeżeli}(t_i < t_r; v_{1i}; a(t_i - \Delta t) + v_{01i})$$

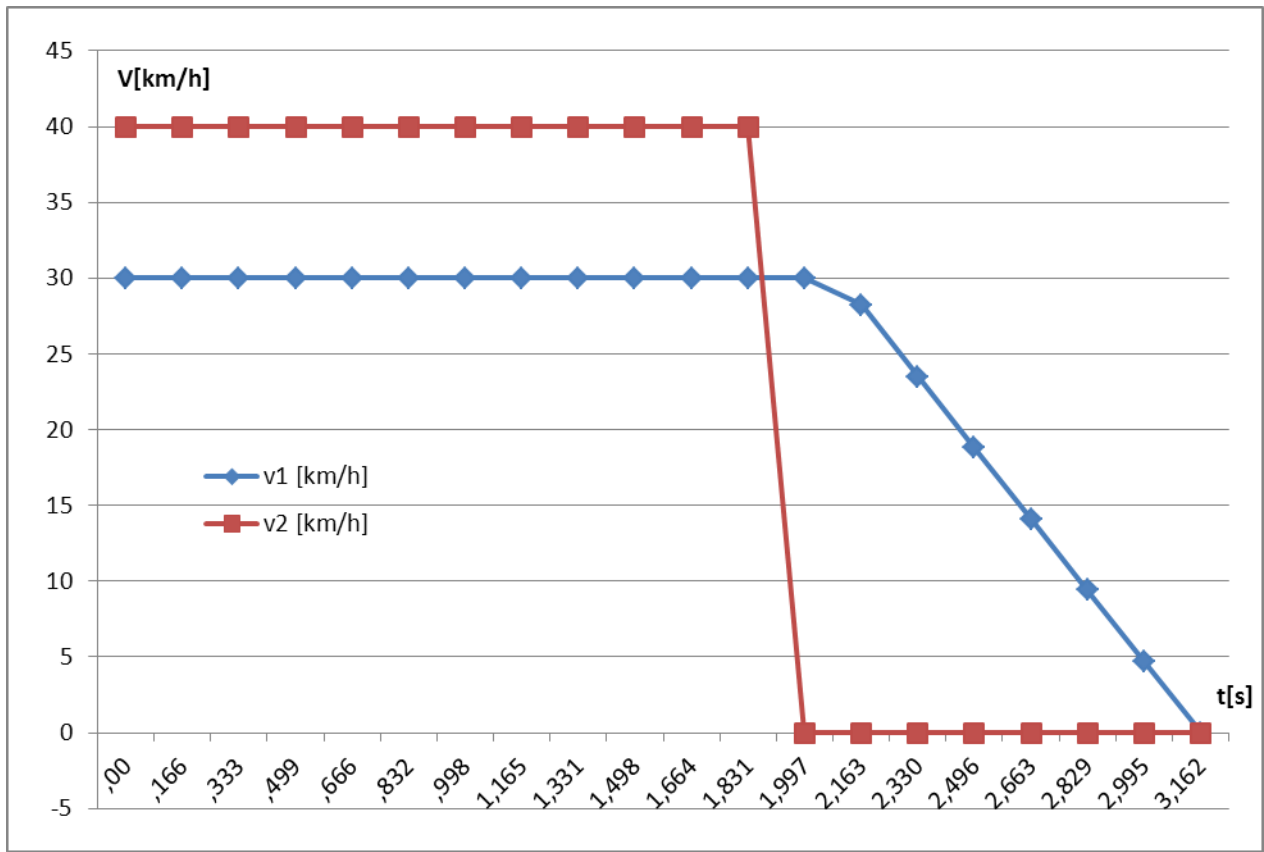
$$t_{i+1} = t_i + \Delta t$$

$$x_{2i+1} = \text{jeżeli}(t_i < (t_r + t_u); \text{jeżeli}(t_i < t_r; v_{02}\Delta t + x_{2i}; -0,5a(\Delta t^2 + v_{2i}\Delta t + x_{2i})); s)$$

$$v_{2i+1} = \text{jeżeli}(t_i < (t_r + t_u); \text{jeżeli}(t_i < t_r; v_{2i}; -a(t_i - t_r) + v_{02}); 0)$$

Wykresy obrazujące przebieg zmian drogi i prędkości w czasie.



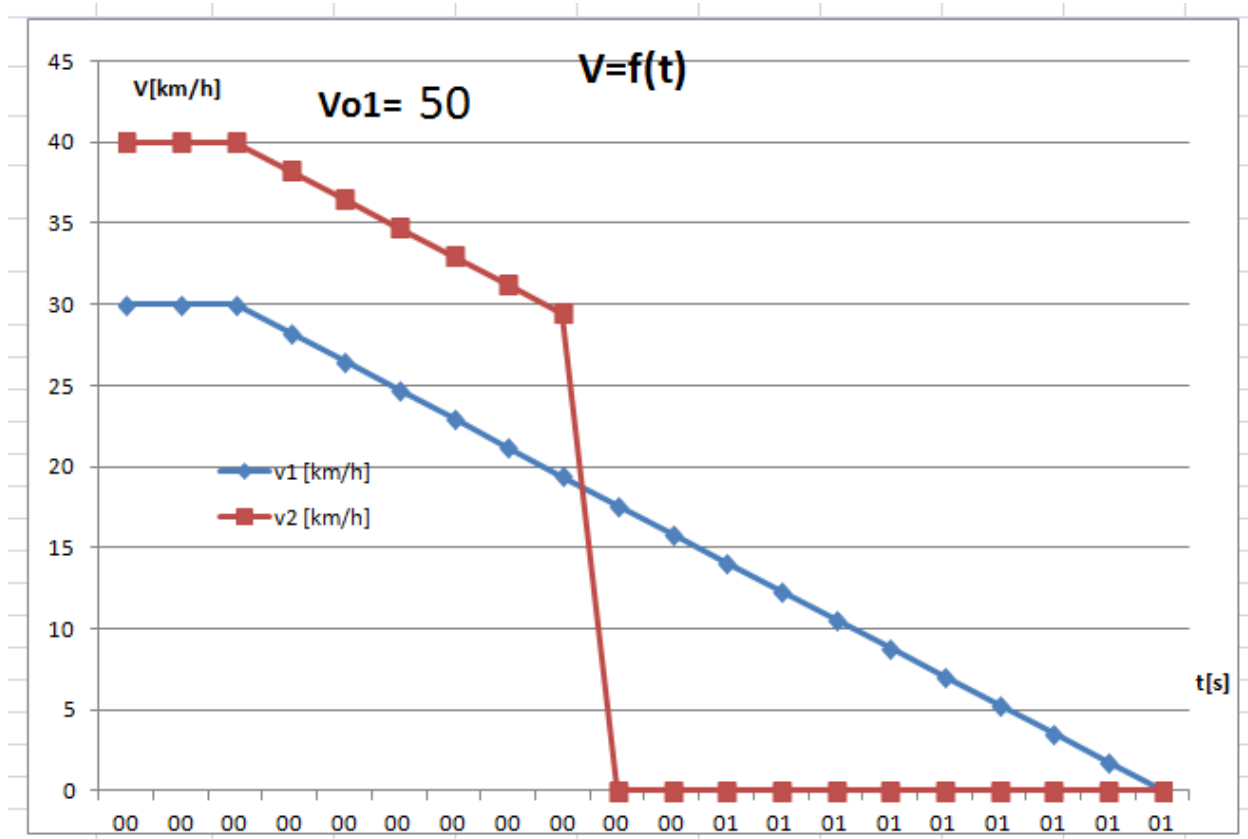


### III. Interpretacja wyników

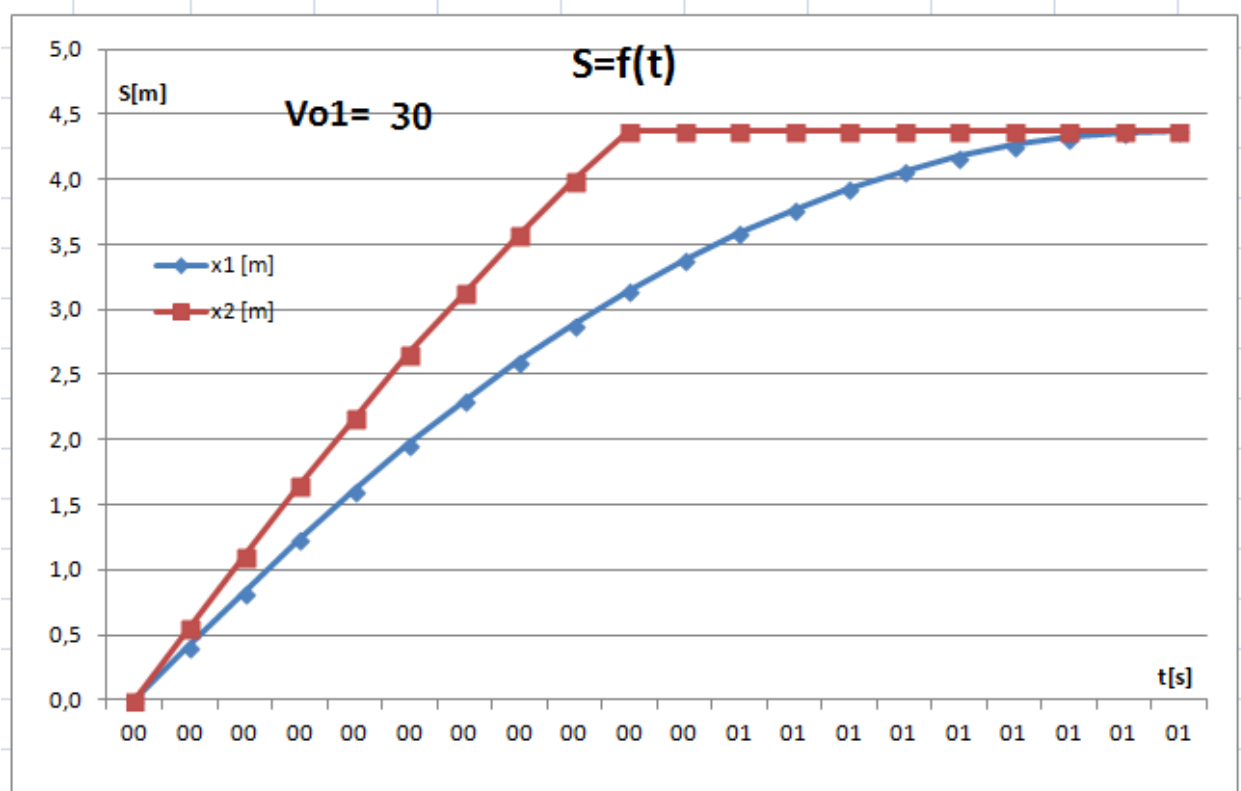
Wynik naszego doświadczenia, a właściwie symulacji zależy od czterech parametrów przez nas ustalonych (prędkość początkowa, czas reakcji, współczynnik tarcia, różnica prędkości). Współczynnik tarcia zależy od warunków panujących na jezdni, ale również od stanu ogumienia za które odpowiada kierowca. Czas reakcji zależy od stanu kierowcy, czy jest wypoczęty, czy zmęczony, od warunków atmosferycznych, od pory dnia i zapewne od kilku jeszcze czynników. Może on być bardzo krótki, rzędu ułamka sekundy, ale też może być bardzo długi ponad sekundę. W czasie reakcji kierowcy samochód porusza się po ustalonym wcześniej torze i z ustaloną wcześniej prędkością. Aby lepiej zauważyć wpływ poszczególnych parametrów na wynik, zmieniamy najpierw tylko jeden parametr, pozostałe zaś niech pozostaną ustalone.

#### P.1

Prędkość jednego samochodu ustalamy na 30 km/h, a drugiego na 40 km/h. Pozostałe parametry: współczynnik tarcia 1, a czas reakcji 0,1 s. Czyli mamy warunki bardzo korzystne. Dobra przyczepność opon do podłoża i bardzo krótki czas reakcji kierowcy. Popatrzmy na wykresy  $v(t)$  i  $s(t)$  dla obu samochodów.



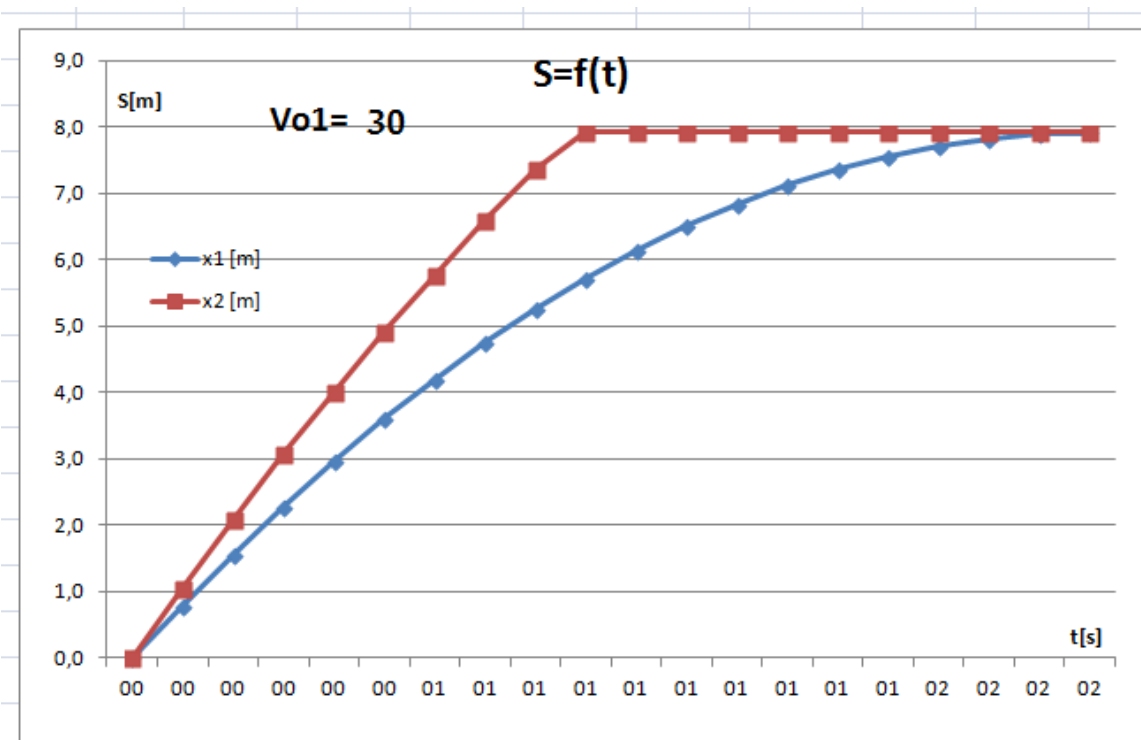
Czas reakcji ustaliliśmy na 0,1 s, czyli za kierownicą siedzi sprawny kierowca. W tym czasie samochody pokonują odpowiednio: 4 m i 5 m. Mało? Przejście dla pieszych ma podobną szerokość. Samochód poruszający się z prędkością 40 km/h uderzył w przeszkodę z prędkością 30 km/h.



Oba samochody pokonują do przeszkody taką samą drogę. Z wykresu możemy odczytać, że jest to około 4,5 m. Samochód "1" zatrzymuje się dokładnie przed przeszkodą, natomiast samochód "2" nie wytracił prędkości w chwili dotarcia do przeszkody, zatem porusza się dalej.....co skutkuje zderzeniem z przeszkodą. Oba samochody jadą ze stosunkowo niewielką prędkością, jednak jeśli zauważymy, że masa samochodu to ponad 1000 kg, to zderzenie będzie zawsze dotkliwe dla kierowcy i dla przeszkody. A gdyby przeszkoda był pieszy na jezdni ?

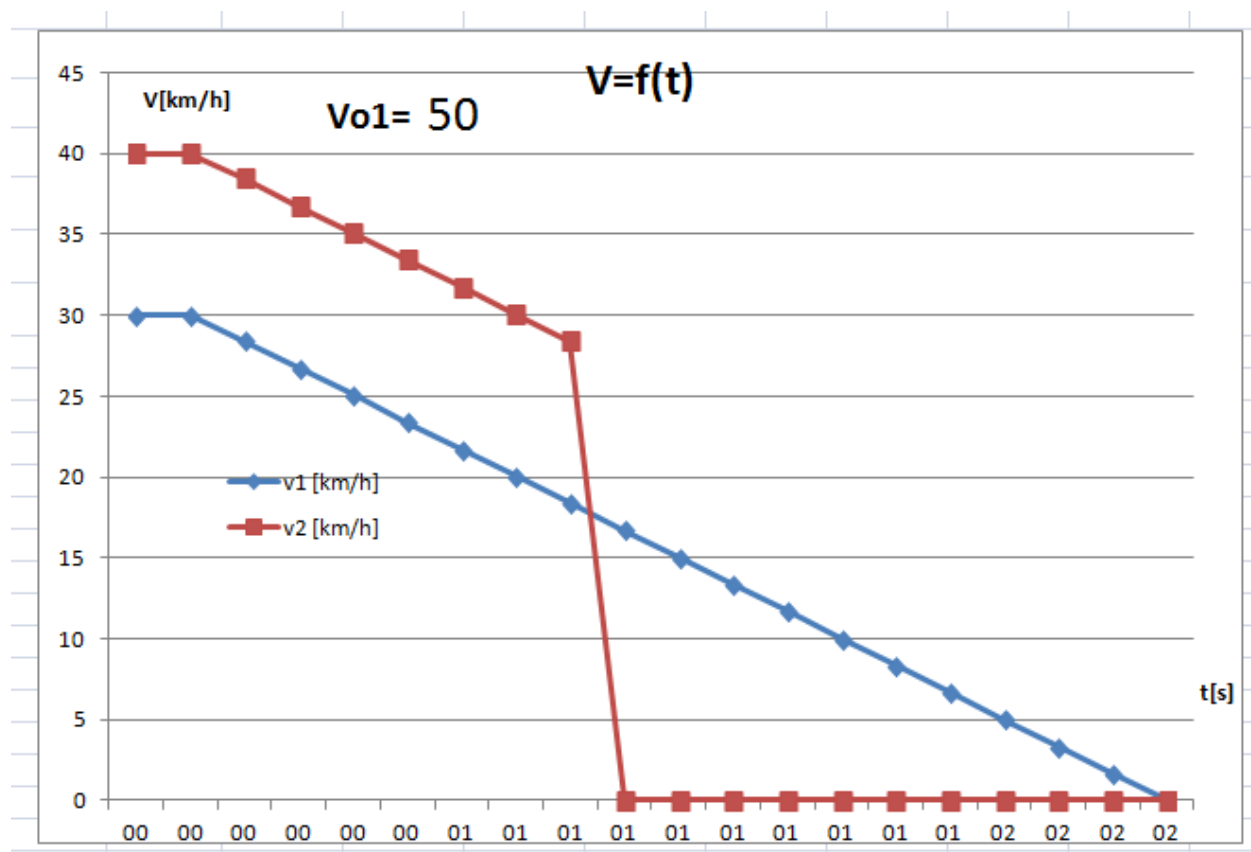
P.2.

Zmniejszmy współczynnik tarcia do 0,5, pozostałe parametry pozostawmy bez zmiany:



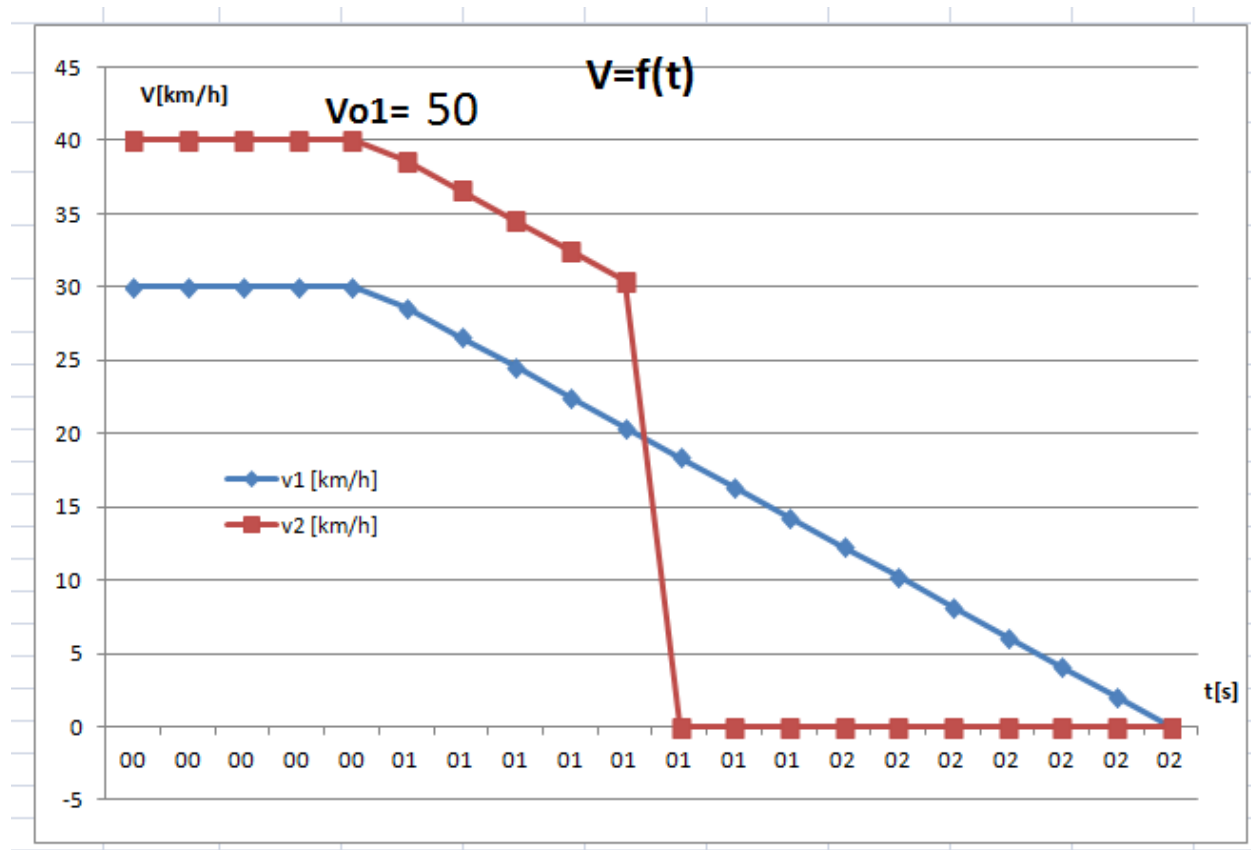


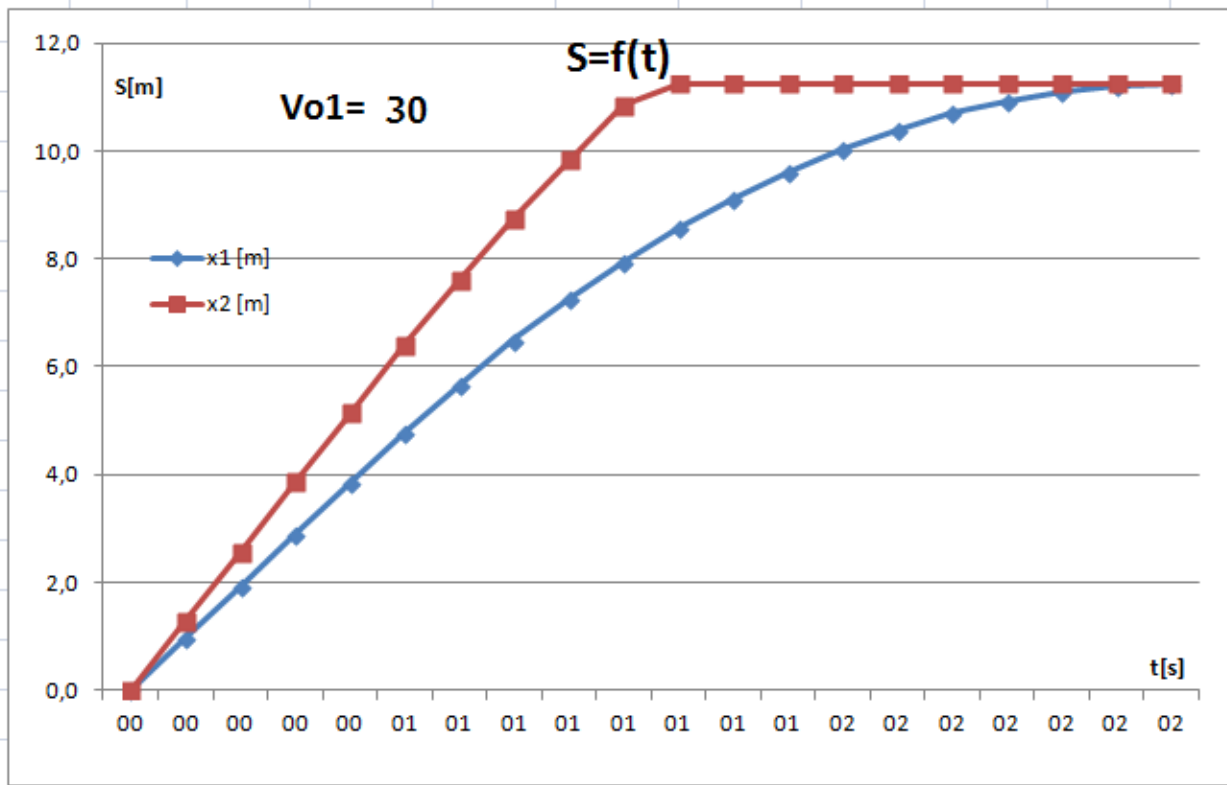
Widzimy, że tym razem droga hamowania wydłużyła się do 8,5 m, czyli niemal dwukrotnie. Mówiąc droga hamowania mamy na myśli bezpieczną drogę hamowania dla samochodu jadącego z prędkością 30 km/h, który w naszym modelu zdąży wyhamować.



### P3.

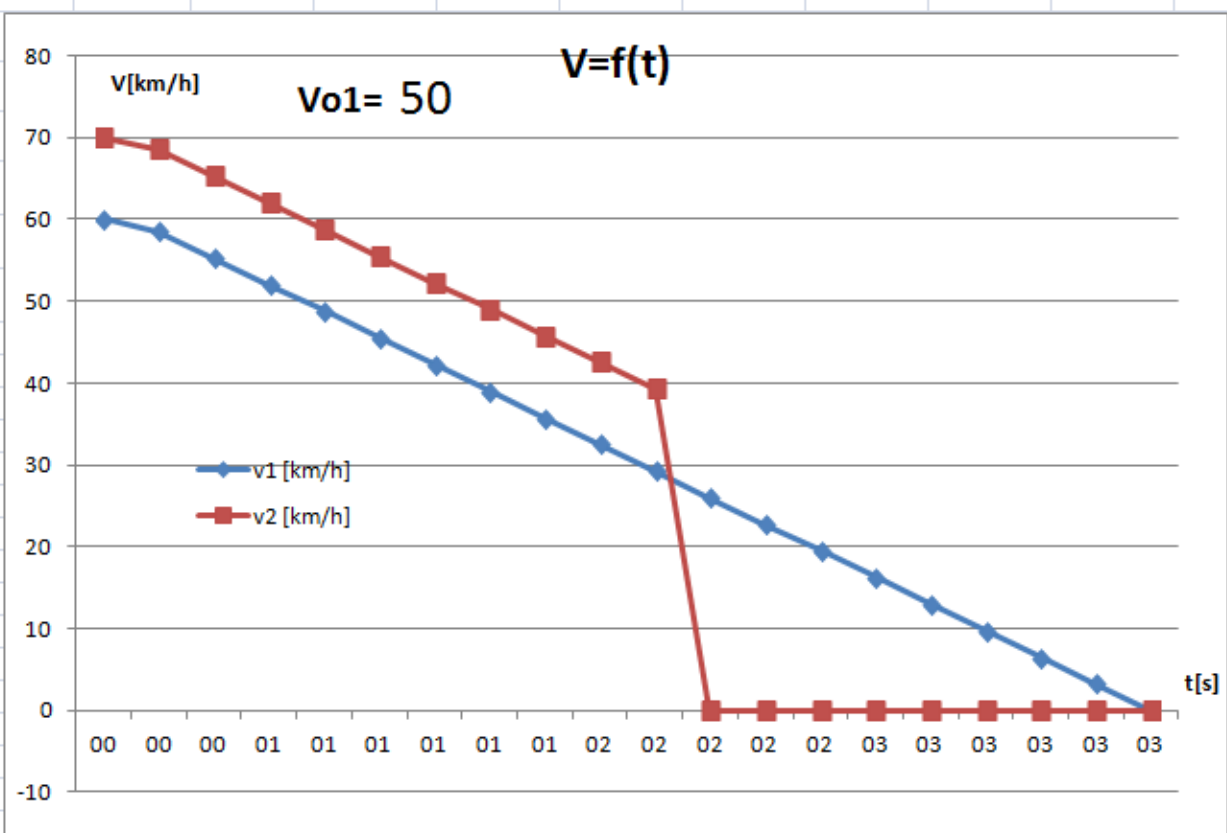
Ustalmy teraz czas reakcji 0,5 s, współczynnik tarcia 0,5. Warunki na drodze uległy pogorszeniu.



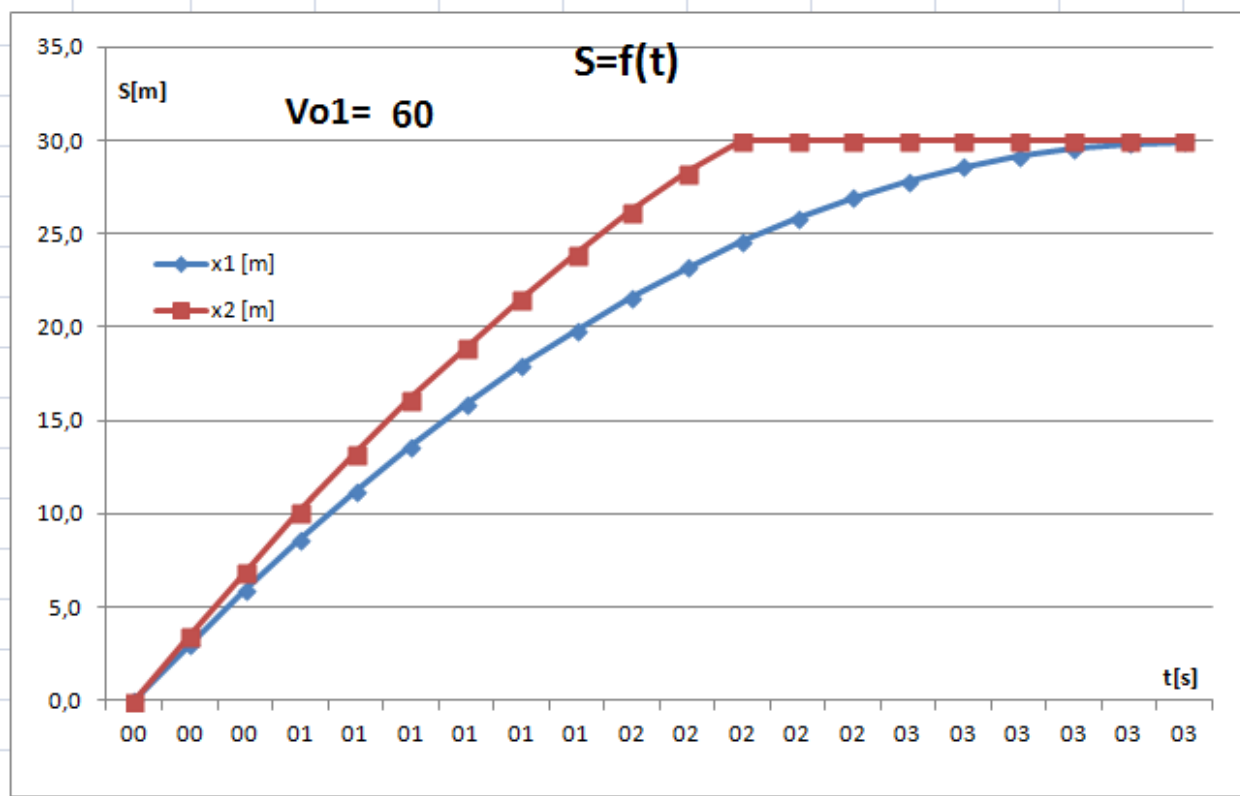


**P.4.**

Prędkości samochodów: 60 km/h i 70 km/h, współczynnik tarcia: 0,5, czas reakcji: 0,5 s.



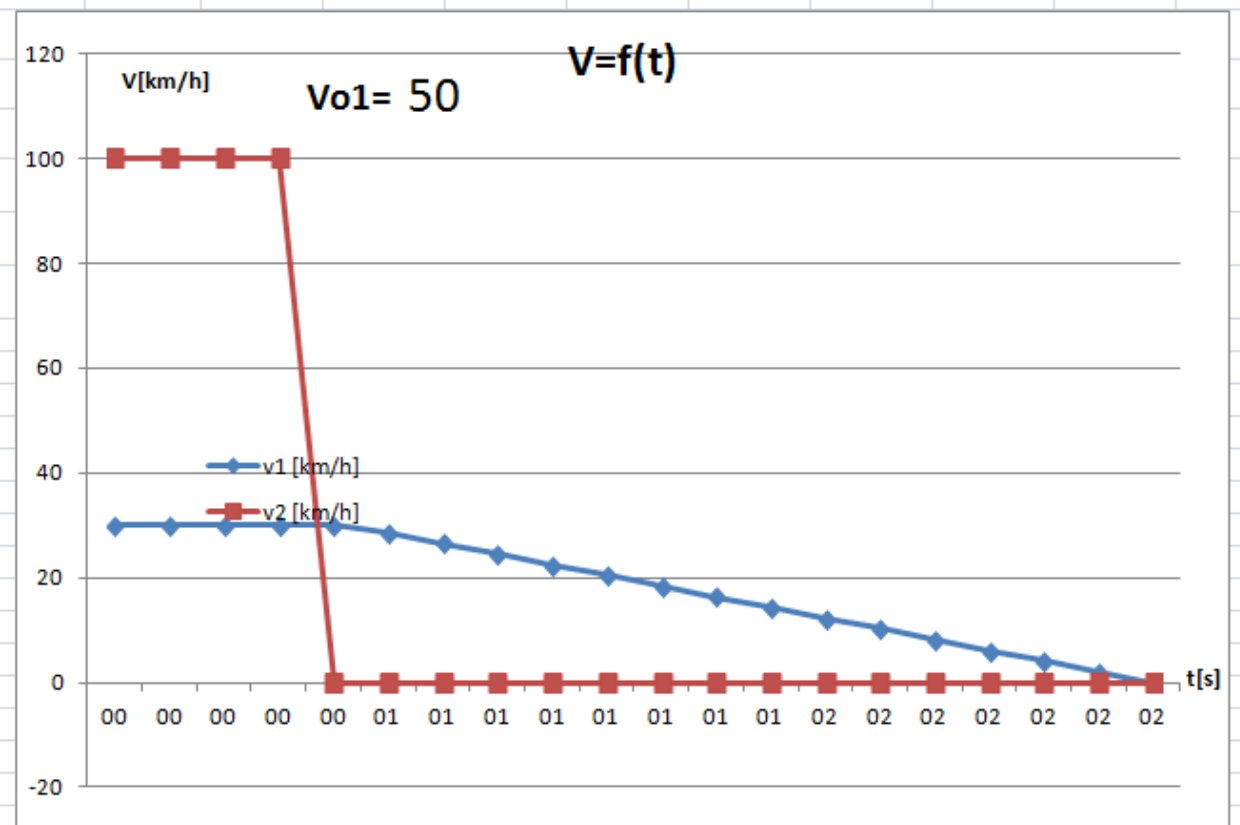
Zauważmy, że w tym przypadku samochód uderza w przeszkodę z prędkością 40 km/h.



Droga hamowania wyniosła dla samochodu jadącego z prędkością 60 km/h w tych warunkach, 30 m. Samochód jadący z prędkością o 10 km/h większą w chwili uderzenia miał prędkość 40 km/h, zatem, aby wyhamować, powinien rozpocząć hamowanie znacznie wcześniej.

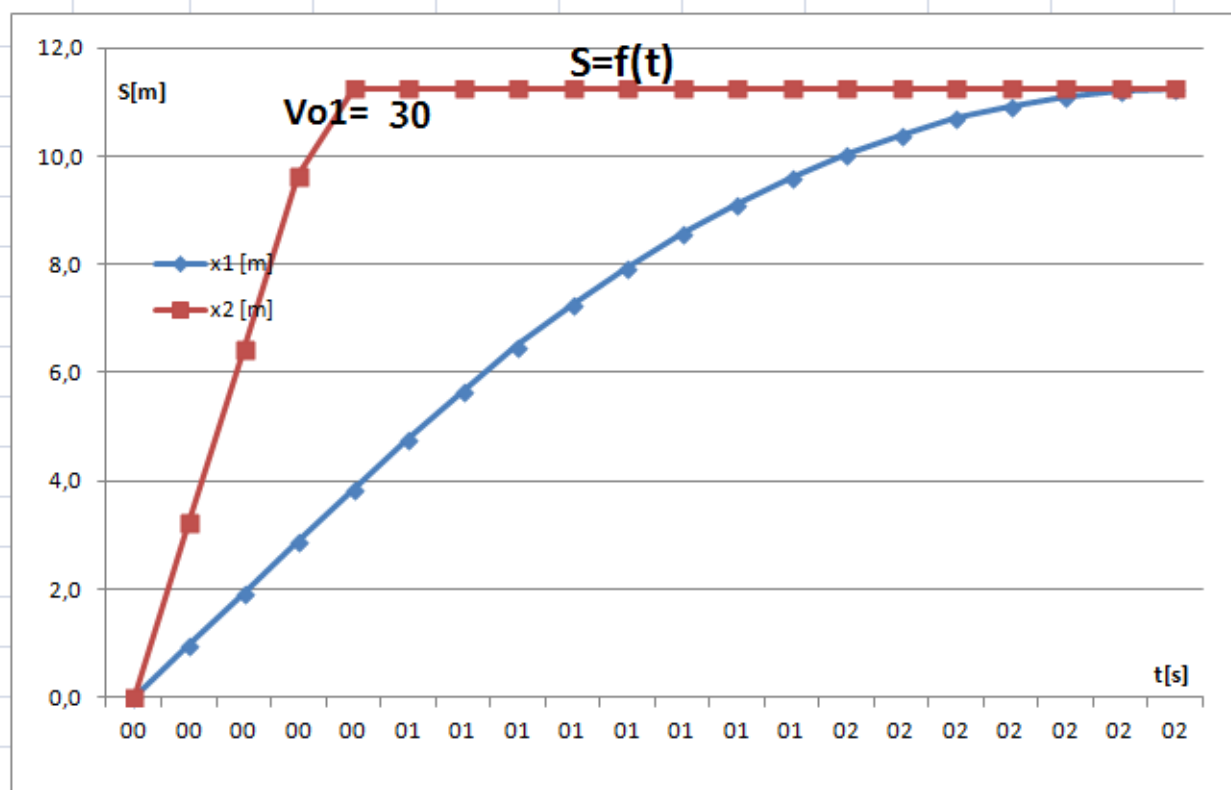
**P.5.**

Rozpatrzmy jeszcze ekstremalny przypadek.  $v_2=100$  km/h. Pozostałe parametry pozostawmy bez zmiany.



Zwróćmy uwagę, że w tym przypadku, samochód uderzył w przeszkodę w czasie reakcji kierowcy...  
Prędkość w chwili zderzenia z przeszkodą wynosiła 100 km/h.

Można by zwiększyć prędkość samochodu jeszcze bardziej. Pogorszyć warunki poprzez zmniejszenie współczynnika tarcia. Ale to pozostawiamy czytelnikowi.



## II. Do pracowni fizycznej.

Na bazie wyników działania programu przygotować kilka wykresów (przykłady podano niżej), obrazujących zmiany całkowitej drogi hamowania oraz rozmiar zagrożenia w przypadku kolizji, związane z czynnikami zależnymi od woli kierowcy. Można przy tym podzielić cztery parametry programu na dwie kategorie.

- $v_{01}$  i  $\mu$  to czynniki niezależne bezpośrednio od woli kierowcy; wynikają one z określonej sytuacji drogowej (np. ograniczenia prędkości, warunków pogodowych) lub technicznej (np. stanu opon). Oczywiście kierowca winien uwzględniać te czynniki podczas prowadzenia samochodu.
- $\Delta v$  i  $t_r$  to czynniki zależne niemal bezpośrednio od woli kierowcy.

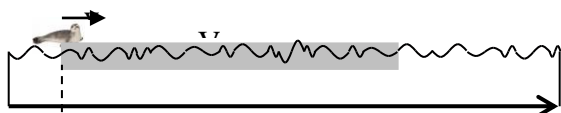
Takie wykresy, można przedstawić, przykładowo, w formie plakatu na szkolnej wystawie poświęconej bezpieczeństwu na drodze.

1. Przedstawić w formie wykresu wpływ wartości  $\Delta v$  na całkowitą drogę hamowania  $s$  oraz końcową prędkość  $v_2$  przy różnych zestawach  $v_{01}$  i  $\mu$  (np. na autostradzie przy dobrej pogodzie, co może odpowiadać  $v_{01} = 140$  km/h i  $\mu = 0,9$  czy w obszarze zabudowanym w deszczu, co może odpowiadać  $v_{01} = 50$  km/h i  $\mu = 0,5$ ).
2. Przedstawić w formie wykresu wpływ wartości  $t_r$  na całkowitą drogę hamowania  $s$  oraz końcową prędkość  $v_2$  przy różnych zestawach  $v_{01}$  i  $\mu$ , odpowiadającym określonym sytuacjom drogowym.
3. Przedstawić wyniki powyższych zależności na wykresach "trójwymiarowych". Dziedziną takiego wykresu jest iloczyn kartezjański zbiorów wartości  $\Delta v$  i  $t_r$  (tworzy on płaszczyznę, będącą podstawą takiego wykresu), zaś wartość ( $s$  lub  $v_2$ ) jest odkładana w kierunku prostopadłym do tej płaszczyzny.

## „Zderzenie niesprężyste - przekaz pędu i energii kinetycznej”

### Wstęp: Naukowy spór o zasady zachowania

Uczniowie na lekcji fizyki rozwiązywali nieco zmienioną wersję zadania 6. z §2.2.6 e-podręcznika: „Foka o masie  $m = 100$  kg płynie z prędkością  $v_0 = 8$  m/s i wślizguje się na fragment lodowej kry, początkowo nieruchomy względem wody (rys. 1.). Oblicz końcową prędkość, jaką uzyskuje kra (wraz z foką) przy założeniu, że można pominąć siłę oporu wody. Masa kry  $M = 8000$  kg.”



Rys. 1. Foka wślizguje się na krę z prędkością  $v_0$ . Początkowa prędkość kry  $V = 0$ .

Okazało się, że jedni uczniowie stosowali przy rozwiązywaniu zadania zasadę zachowania pędu (w postaci skalarnej, co jest tu dopuszczalne):

$$m \cdot v_0 + M \cdot 0 = (m + M) \cdot V \Rightarrow V = v_0 \cdot \frac{m}{m + M} \quad (1)$$

Daje to wartość końcowej prędkości kry  $V \approx 0,0988$  m/s.

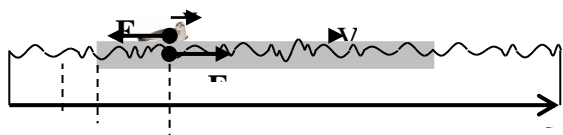
Inni uczniowie z kolei stosowali zasadę zachowania energii kinetycznej:

$$\frac{1}{2} m \cdot v_0^2 + \frac{1}{2} M \cdot 0^2 = \frac{1}{2} (m + M) \cdot V^2 \Rightarrow V = v_0 \cdot \sqrt{\frac{m}{m + M}} \quad (2)$$

To zaś daje wartość prędkości kry  $V \approx 0,889$  m/s.

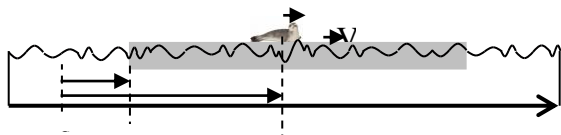
Są to dwa istotnie różne wyniki, pomiędzy którymi należy rozstrzygnąć. Oto krótki przegląd argumentacji zwolenników obu metod, którą przedstawili podczas dyskusji na lekcji.

1. Uczniowie powoływali się na fakt, że foka i kra stanowią - w warunkach zadania - układ zamknięty (izolowany), co upoważnia do stosowania wybranej zasady zachowania.
2. Niektórzy powoływali się też na III zasadę dynamiki Newtona: foka ślizgając się po krze jest poddana sile tarcia, która spowalnia jej ruch; jednocześnie foka działa na krę taką samą siłą tarcia (lecz przeciwnie zwróconą) i wprawia krę w ruch przyspieszony. (rys. 2.)



Rys. 2. Prędkość foki  $v$  maleje pod wpływem siły  $F_{k \rightarrow f}$ , z jaką kra działa na fokę. Analogicznie, prędkość kry  $V$  rośnie pod wpływem siły  $F_{f \rightarrow k}$ . Jednak prędkość  $v$  jest ciągle większa niż  $V$ , więc w każdym odstępie czasu  $\Delta t$  droga przebywana przez fokę (względem wody) jest dłuższa od drogi przebywanej przez krę.

3. Wnioski wyciągane przez zwolenników poszczególnych równań były jednak nieco różne:
  - a. stosujący równanie (1) twierdzili, że skoro foka i kra oddziałują wzajemnie siłami o jednakowej wartości (oraz przeciwnie skierowanymi), to powinny przekazywać sobie jednakowe co do wartości i przeciwnie skierowane pędy;
  - b. korzystający z równania (2) uważali zaś, że oddziaływanie jednakowymi co do wartości siłami pociąga za sobą jednakowe co do wartości zmiany energii kinetycznych oddziałujących obiektów: ile energii kinetycznej utraci foka, tyle uzyska kra.
4. Wszyscy byli zgodni co do tego, że siła tarcia, o której mowa, to siła tarcia dynamicznego, której działanie ustaje, gdy prędkości foki i kry osiągną jednakowe wartości. Od tego momentu układ „foka + kra” porusza się jako całość ruchem jednostajnym, a wspólna końcowa prędkość  $V = v$  jest właśnie szukaną w zadaniu prędkością (rys. 3.).



Rys. 3. Prędkość foki  $v$  i prędkość kry  $V$  uzyskały jednakowe wartości, więc działanie siły tarcia dynamicznego ustało. Całkowita droga przebyta przez fokę jest dłuższa od drogi przebytej przez krę.

Po wysłuchaniu dyskusji, nauczycielka stwierdziła, że rację mają zwolennicy równania (1). Przypomniała, że zasada zachowania pędu obowiązuje w każdym oddziaływaniu w obrębie zamkniętego układu, zaś zasada zachowania energii mechanicznej tylko wtedy, gdy pomiędzy składnikami układu działają wyłącznie siły zachowawcze (§2.3.2 oraz §2.3.4 e-podręcznika). W przypadku ślizgu foki po krze występuje siła tarcia dynamicznego, które nie jest zachowawcze. Wyklucza to stosowanie zasady zachowania energii mechanicznej do tego zderzenia.

Warunki, w których obowiązywałaby zasada zachowania energii kinetycznej byłyby jeszcze bardziej specyficzne: przy zachowanej energii mechanicznej musiałoby dojść do odtworzenia pierwotnego stanu energii potencjalnej układu. Przykładem takiego procesu jest zderzenie sprężyste, w którym początkowa energia kinetyczna ciał zamienia się w energię potencjalną (np. związaną z ich odkształceniem). W drugiej części zderzenia zgromadzona energia potencjalna zostaje w całości przekształcona z powrotem w energię kinetyczną, a zderzające się ciała przyjmują swoje pierwotne kształty.

Nauczycielka podkreśliła jednak, że argumenty przedstawione przez zwolenników równania (2) są na tyle interesujące i sugestywne, że warto poświęcić trochę wysiłku na szczegółowe objaśnienie, dlaczego są błędne. Zaproponowała więc stworzenie, za pomocą arkusza kalkulacyjnego, matematycznego modelu ślizgu foki po krze. Pokazywałby on, jak stopniowo zmieniają się prędkości, pędy i energie kinetyczne foki oraz kry. Model ten powinien objaśnić, dlaczego w takim zderzeniu zachowany jest całkowity pęd układu, zaś jego energia kinetyczna ulega częściowemu rozproszeniu. Podstawową cechą modelu będzie ujawnienie w nim roli siły tarcia w przebiegu zderzenia foki z krą.

Uczniowie przystali na tę propozycję. Ze względu na stopień skomplikowania problemu postanowiono jednak podzielić rozumowanie i realizację informatyczną na trzy części. W pierwszej przedstawiony będzie związek siły z przyspieszeniem i prędkością, w drugiej związek siły z pędem i jego przekazem, zaś w trzeciej związek siły z pracą i z przekazem energii kinetycznej oraz jej rozpraszaniem.

## Część 1. Przyspieszenie i prędkość foki oraz kry.

Postanowiono przyjąć jako wyjściowe parametry do opracowywanego modelu dane liczbowe z rozwiązywanego zadania. Dane te uzupełniono założoną wartością współczynnika tarcia dynamicznego foki o krę:  $\mu = 0,2$ . Spore rozbieżności poglądów na temat wartości  $\mu$  pozostawiono bez rozstrzygnięcia - spodziewano się, że uzyskane wyniki nie powinny istotnie zależeć od tej wartości.

Istotą modelu będzie przedstawienie stanu ruchu foki oraz kry w poszczególnych chwilach. Począwszy od chwili początkowej  $t_0 = 0$ , w ramach modelu obliczane będą parametry ruchu (w tym prędkości, pędy i energie kinetyczne) foki i kry. Takie obliczenia przeprowadzane będą kolejno dla chwil  $t_1 = t_0 + \Delta t$ ,  $t_2 = t_0 + 2\Delta t$ , itd.

W modelu postanowiono wykorzystać matematyczny opis ruchu jednostajnie zmiennego - siła tarcia pomiędzy foką a krą jest stała w czasie i powoduje ona jednostajnie opóźniony ruch foki i jednostajnie przyspieszony ruch kry. (rys. 2.). Oba te ruchy kończą się jednocześnie (i przechodzą w ruch jednostajny) w chwili, gdy prędkości foki i kry się wyrównają (rys. 3.).

W poszczególnych odstępach czasu  $\Delta t$  zapisać więc można:

$$\Delta v = a_f \cdot \Delta t \quad \text{i} \quad \Delta V = a_k \cdot \Delta t, \quad (3a; 3b)$$

gdzie przyspieszenie foki:

$$a_f = -F/m = -\mu \cdot g, \quad (4)$$

zaś przyspieszenie kry:

$$a_k = +F/M = +\mu \cdot g \cdot (m/M). \quad (5)$$

Symbolem  $F$  oznaczono tu wartość siły tarcia:

$$F = \mu \cdot mg \quad (6)$$

Na koniec ustalono, że jako odstęp czasu  $\Delta t$  przyjęta zostanie jedna dziesiąta pewnego czasu charakterystycznego, możliwego do wskazania w tym problemie. Czas  $t_{\text{char}}$  to taki, po którym foka zatrzymałaby się względem wody pod wpływem siły tarcia  $F$ ; wyraża się on wzorem:

$$t_{\text{char}} = -\frac{v_0}{a_f} = \frac{m \cdot v_0}{F} \quad (7)$$

Ponieważ model „kończy pracę” w chwili, gdy foka zatrzymuje się względem kry, to wszystkie czasy w nim występujące będą na pewno mniejsze od  $t_{\text{char}}$ .

Model będzie miał postać tabeli, w której w funkcji czasu  $t$  przedstawione zostaną chwilowe wartości prędkości foki  $v$  oraz kry  $V$ . Na bazie tabeli zostaną sporządzone odpowiednie wykresy. Parametry modelu zostaną przedstawione w oddzielnych komórkach arkusza, by umożliwić śledzenie wpływu zmian ich wartości na przewidywania modelu.



**W pracowni informatycznej - arkusz „Prędkość”.**

1. W pierwszej kolumnie arkusza „Prędkość” umieść wartości parametrów zagadnienia. Wszystkie wartości wstawiaj w jednostkach SI, wpiszuj te jednostki przy oznaczeniu wielkości.
  - a) Dla foki: masa  $m = 100$  kg i początkowa prędkość  $v_0 = 8$  m/s.
  - b) Dla kry: masa  $M = 8000$  kg i początkowa prędkość  $V_0 = 0$  m/s.
  - c) Dla siły: współczynnik tarcia  $\mu = 0,2$  i wartość siły zgodnie ze wzorem (6); przyjmij, dla uproszczenia,  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>.
  - d) Dla czasu:  $t_{char}$  zgodnie ze wzorem (7) i wartość  $\Delta t = 0,1 \cdot t_{char}$ . Zapoznaj się (na tym etapie pobieżnie) z problematyką przedstawioną w punkcie 6b i pozostaw miejsce dla ewentualnych kolejnych wartości  $\Delta t'$ ,  $\Delta t''$ , itd.

	A	B	C
1			
2			
3		m [kg]	
4		100	
5		v <sub>0</sub> [m/s]	
6		8	
7			
8		M [kg]	
9		8000	
10		V <sub>0</sub> [m/s]	
11		0	
12			
13		μ [.]	
14		0,2	
15		F <sub>t</sub> [N]	
16		200	
17			
18		t <sub>char</sub> [s]	
19		4	
20		Δt [s]	
21		0,4	
22		0,04	
23		0,004	
24		0,0004	
25			

2. Przygotuj tabelę:

	A	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1										
2			foka				kra			
3		t	v	a	Δv	V	a	ΔV		
4		[s]	[m/s]	[m/s^2]	[m/s]	[m/s]	[m/s^2]	[m/s]		

W kolumnie t[s] umieść bieżący czas. Rozpocznij od czasu  $t = 0$ , który umieścisz w umownym „wierszu zerowym” (komórka D5).

W każdym następnym wierszu umieść wartość większą o  $\Delta t$  od poprzedniej.

$$D6: =D5+\$B\$21$$

Przygotuj w ten sposób kilka wierszy - nie więcej, niż 10, by czas w kolumnie ‘t’ nie przekroczył wartości  $t_{char}$ .

3. Kolejne trzy kolumny zawierać będą informacje o ruchu foki.

a) W pierwszej z nich umieszczone zostaną malejące wartości v - prędkości foki. W „zerowym wierszu” wprowadź wartość  $v_0$  z pierwszej kolumny.

$$F5: =\$B\$6$$

Formuła ta nie zostanie przeciągnięta do wiersza pierwszego.

Kolejne wiersze zostaną wypełnione formułą:

$$F6: =F5+H5$$

- b) Druga z nich zawierać będzie jednakowe, ujemne wartości  $a_f$  - przyspieszenia foki obliczonego zgodnie ze wzorem (4).

$$G5: =-B16/B4$$

Formuła z „wiersza zerowego” zostanie przeciągnięta do wiersza pierwszego i następnych.

*Uwaga: zamiast tej kolumny można umieścić przyspieszenie foki w jednej komórce w obszarze przeznaczonym na parametry foki (punkt 1a.) i odwoływać się do tej komórki.*

- c) W trzeciej kolumnie umieścisz  $\Delta v$  - jednakowe, ujemne przyrosty prędkości foki, zgodnie ze wzorem (3a).

$$H5: =G5*B21$$

Formuła z „wiersza zerowego” tej kolumny zostanie przeciągnięta do wiersza pierwszego i następnych. Przyrosty te posłużą do obliczenia prędkości w kolumnie ‘v’ w kolejnych wierszach.

- d) Przygotuj zgodnie z tym przepisem kilka wierszy - nie więcej, niż liczba przygotowanych wierszy kolumny ‘t’.

4. Na podobnych zasadach jak wyżej, trzy kolumny zawierać będą informacje o ruchu kry.

- a. W pierwszej z nich umieszczone zostaną rosnące wartości  $V$  - prędkości kry. W „zerowym wierszu” wprowadź wartość  $V_0$  z pierwszej kolumny; formuła ta nie zostanie przeciągnięta do wiersza pierwszego.

$$J5: =B11$$

Kolejne wiersze zostaną wypełnione formułą:

$$J6: =J5+L5$$

- b. Druga z nich zawierać będzie jednakowe, dodatnie wartości  $a_k$  - przyspieszenia kry obliczonego zgodnie ze wzorem (5).

$$K5: =+B16/B9$$

Formuła z „wiersza zerowego” zostanie przeciągnięta do wiersza pierwszego i następnych.

*Uwaga: zamiast tej kolumny można umieścić przyspieszenie kry w jednej komórce w obszarze przeznaczonym na parametry kry (punkt 1b.) i odwoływać się do tej komórki.*

- c. W trzeciej kolumnie umieścisz  $\Delta V$  - jednakowe, dodatnie przyrosty prędkości kry, zgodnie ze wzorem (3b).

$$L5: =K5*B21$$

Formuła z „wiersza zerowego” zostanie przeciągnięta do wiersza pierwszego i następnych. Przyrosty te posłużą do obliczenia prędkości w kolumnie ‘V’ w kolejnych wierszach.

- d. Przygotuj zgodnie z tym przepisem tyle samo wierszy, ile w punkcie 3.

5. Sformatuj poszczególne kolumny tabeli w taki sposób, by wyświetlane w nich liczby zawierały tyle cyfr znaczących, ile jest niezbędne do śledzenia zmian poszczególnych wielkości w miarę upływu czasu.

6. Przeciągnij formuły wierszami aż do uzyskania wiersza, w którym prędkość foki osiągnie wartość mniejszą od prędkości kry. Ten „wiersz nadmiarowy” jest ewidentnie niezgodny z prawami fizyki - nie mieści się on w dziedzinie modelu. Wiersz poprzedzający „wiersz nadmiarowy” będziemy nazywać „wierszem końcowym” modelu.

- a. Sprawdź, czy prędkość foki w „wierszu końcowym” jest równa prędkości kry w tym wierszu z dokładnością taką, która Cię zadowala. Jeśli tak, to przejdź do punktu 7. Jeśli zaś nie, to wykonaj poniższe polecenia, których celem jest zwiększenie dokładności modelu, czyli zmniejszenie różnicy pomiędzy prędkością foki a prędkością kry w „wierszu końcowym”.

- b. Przygotuj komórkę dla nowego odstępu czasowego  $\Delta t'$ , który będzie stanowił jedną dziesiątą dotychczasowego odstępu  $\Delta t$ .

	A	B	C
17			
18		tchar [s]	
19		4	
20		$\Delta t$ [s]	
21		0,4	
22		0,04	
23		0,004	
24		0,0004	
25			

$\Delta t'$ [s] B22: B21/10

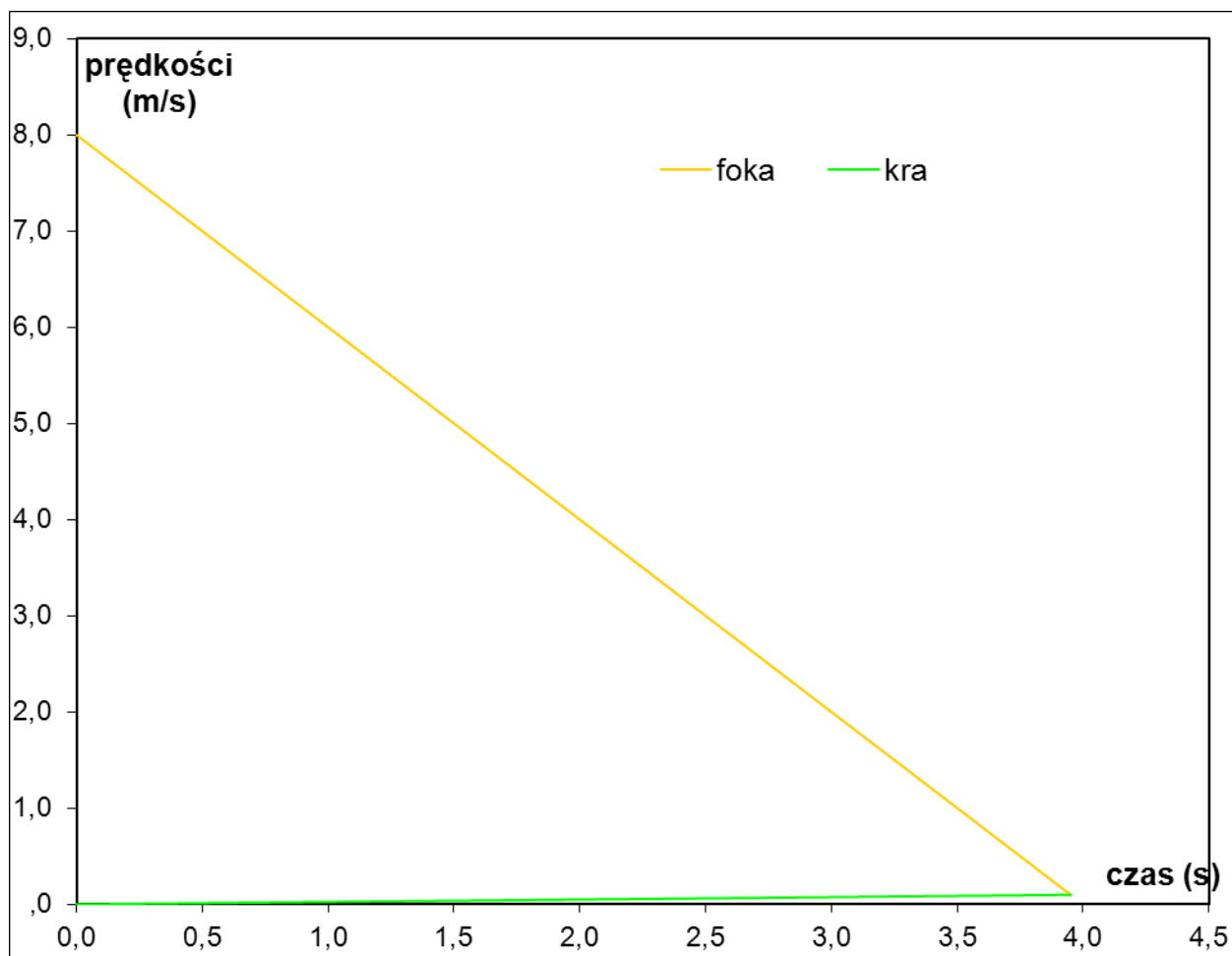
$\Delta t'$ [s] B23: B22/10

$\Delta t'$ [s] B24: B23/10

W „wierszu końcowym” zmodyfikuj komórki, w których obliczane są  $\Delta v$  i  $\Delta V$  w taki sposób, by zawierały one odstęp  $\Delta t'$  zamiast dotychczas używanego odstępu  $\Delta t$ .

- W „wierszu nadmiarowym” zmodyfikuj komórkę, w której obliczany jest nowy czas  $t$  w taki sposób, by zawierała ona odstęp  $\Delta t'$  zamiast dotychczasowego odstępu  $\Delta t$ .
- Przeciągnij z „wiersza końcowego” do „wiersza nadmiarowego” formuły z kolumn ‘ $\Delta v$ ’ i ‘ $\Delta V$ ’. W ten sposób „wiersz nadmiarowy” staje się „wierszem pierwszym” obszaru tabeli o dokładności obliczeń zwiększonej o jeden rząd wielkości.
- Dopasuj liczbę wyświetlanych cyfr znaczących do nowej dokładności. Przeciągnij formuły z „wiersza pierwszego” aż do uzyskania wiersza, w którym prędkość foki ponownie osiągnie wartość mniejszą od prędkości kry. Rozważ oznaczenie nowego obszaru tabeli innym kolorem tła niż obszaru poprzedniego. Dalej postępuj zgodnie z zapisem punktu 6.

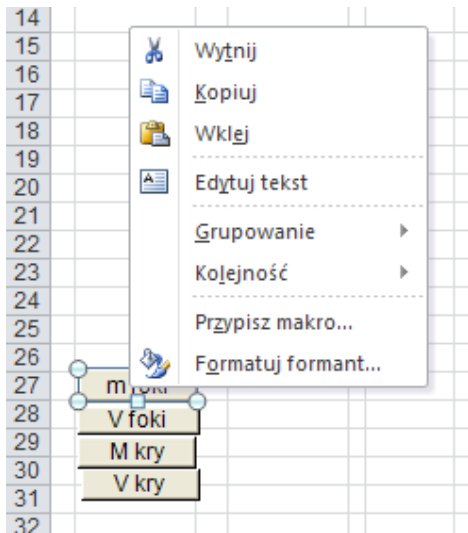
8. Sporządź wykres, na którym przedstawiś zależność obu prędkości -  $v$  i  $V$  - od czasu.



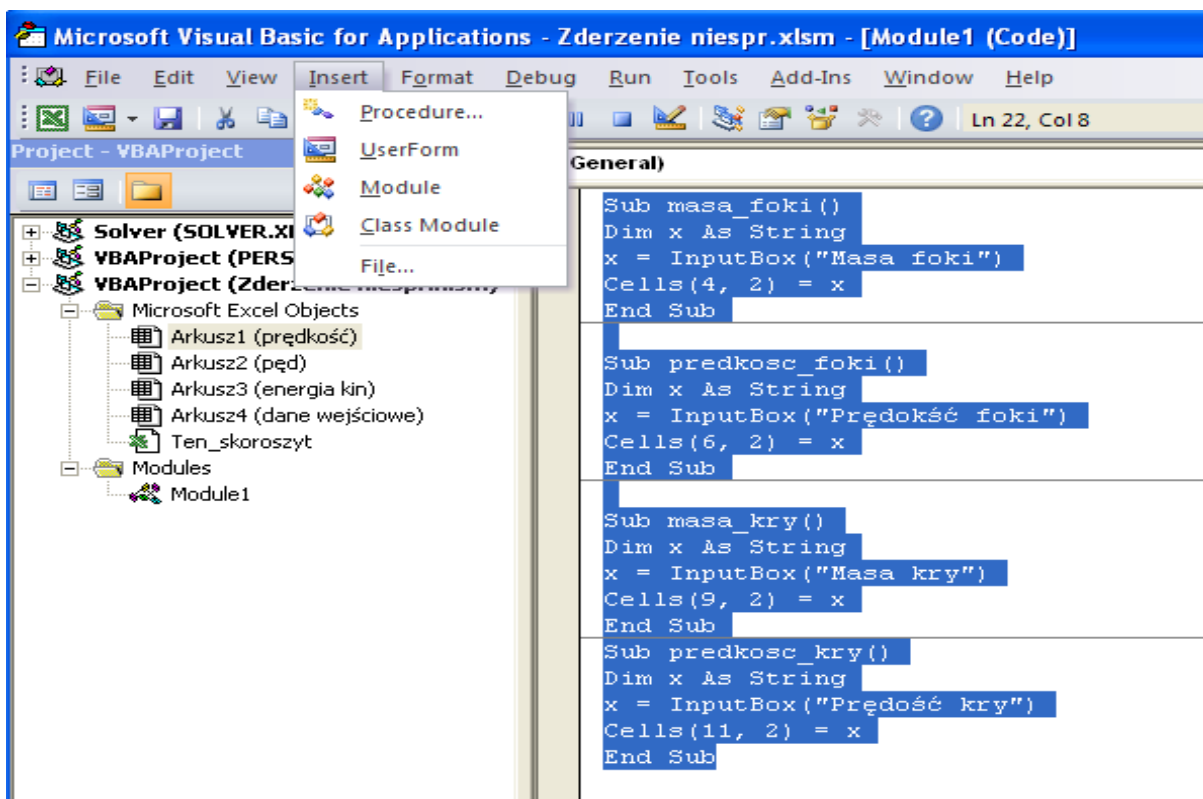
- Zmiana wartości czterech parametrów modelu: mas foki i kry oraz ich początkowych prędkości. W tym celu przygotuj 4 przyciski (Karta Developer/Wstaw formanty)

	A	B	C
26			
27		m foki	
28		V foki	
29		M kry	
30		V kry	
31			
32			

Etykiety na przyciskach zmien wybierając z menu kontekstowego „Edytuj tekst”

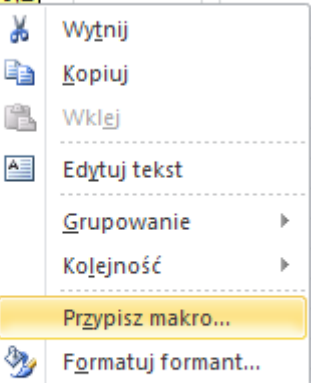


Otwórz Visual Basic, dodaj do bieżącego arkusza nowy moduł i wpisz w nim procedury.



Przyciskom przypisz odpowiednie makra wybierając z menu kontekstowego „Przypisz makro”.

13	$\mu$ [.]	
14	0.2	
15	$F_t$ [N]	
16		
17		
18	$t_{char}$ [s]	
19		
20	$\Delta t$ [s]	
21		
22	0	
23	0,	
24	0,0	
25		
26		
27	m fo...	
28	V foki	
29	M kry	
30	V kry	
31		



Zatwierdź ustawienia klikając w dowolnej komórce arkusza.  
 Kliknięcie odpowiedniego przycisku uruchamia funkcję która pozwala wprowadzać dane z klawiatury.  
 Danymi mogą być tylko liczby. Inne dane będą powodować błędne wyniki.

## Do pracowni fizycznej.

- Zmieniaj kolejno wartości czterech parametrów modelu: **mas foki i kry oraz ich początkowych prędkości**. W każdym przypadku porównaj uzyskaną w modelu **prędkość końcową, wspólną dla foki i kry**, z wartościami obliczonymi z zastosowania wzorów (1) i (2).

### Komentarz fizyczny

Stosując model teoretyczny uczniowie obliczyli ze wzorów (1) i (2) prędkości kry wraz z foką. przypomnijmy wartości:

Z zastosowaniem zasady zachowania pędu

$$v \approx 0,0988 \frac{m}{s}$$

Z zastosowaniem zasady zachowania energii kinetycznej:

$$v \approx 0,889 \frac{m}{s}$$

Teraz popatrzmy jaki jest wynik tej prędkości uzyskany w naszej symulacji:

t [s]	foka			kra		
	v [m/s]	a [m/s <sup>2</sup> ]	$\Delta v$ [m/s]	V [m/s]	a [m/s <sup>2</sup> ]	$\Delta V$ [m/s]
3,9492	0,1016	-2,0	-0,0008	0,09873	0,025	0,00001
3,9496	0,1008	-2,0	-0,0008	0,09874	0,025	0,00001
3,9500	0,1000	-2,0	-0,0008	0,09875	0,025	0,00001
3,95040	0,0992	-2,0	-0,0008	0,09876	0,025	0,00001
3,95080	0,0984	-2,0	-0,0008	0,09877	0,025	0,000010

Jak widać prędkość kry wraz z foką jest zbliżona do wartości obliczonej z zasady zachowania pędu.

Sprawdźmy, czy uzyskamy podobny rezultat (zgodny z rozwiązaniem z zastosowaniem zasady zachowania pędu) gdy zmienimy parametry. W poniższej tabeli zapisano zmianę masy foki przy stałej prędkości, a następnie zmieniono prędkość na 10 m/s, a masę zmieniano podobnie jak poprzednio. Obliczona prędkość końcową kry z foką wykorzystując; zasadę zachowania pędu i zasadę zachowania energii kinetycznej. Jak widać prędkości znacznie się różnią.

Zasada zach. pędu			
v, m/s	Vk, m/s	m, kg	M, kg
8	0,098765432	100	8000
8	0,088998764	90	8000
8	0,079207921	80	8000
10	0,12345679	100	8000
10	0,111248455	90	8000
10	0,099009901	80	8000

Zasada zach. energii
Vk, m/s
0,888888889
0,843795065
0,796029752
1,111111111
1,054743831
0,99503719

Teraz sprawdźmy jaką prędkość uzyska kra z foką gdy zastosujemy przygotowaną symulację w arkuszu kalkulacyjnym.

m [kg]	t	foka			kra		
		v [m/s]	a [m/s <sup>2</sup> ]	Δv [m/s]	V [m/s]	a [m/s <sup>2</sup> ]	ΔV [m/s]
100	0,0	10,0	-2,0	-1,0	0,00	0,025	0,01
Vo [m/s]	0,5	9,0	-2,0	-1,0	0,01	0,025	0,01
10	1,0	8,0	-2,0	-1,0	0,03	0,025	0,01
M [kg]	1,5	7,0	-2,0	-1,0	0,04	0,025	0,01
8000	2,0	6,0	-2,0	-1,0	0,05	0,025	0,01
Vo [m/s]	2,5	5,0	-2,0	-1,0	0,06	0,025	0,01
0	3,0	4,0	-2,0	-1,0	0,08	0,025	0,01
	3,5	3,0	-2,0	-1,0	0,09	0,025	0,01
μ [.]	4,0	2,0	-2,0	-1,0	0,10	0,025	0,01
0,2	4,5	1,0	-2,0	-0,10	0,11	0,025	0,001
Ft [N]	4,55	0,90	-2,0	-0,10	0,114	0,025	0,001
200	4,60	0,80	-2,0	-0,10	0,115	0,025	0,001
	4,65	0,70	-2,0	-0,10	0,116	0,025	0,001
tchar [s]	4,70	0,60	-2,0	-0,10	0,118	0,025	0,001
5	4,75	0,50	-2,0	-0,10	0,119	0,025	0,001
Δt [s]	4,80	0,40	-2,0	-0,10	0,120	0,025	0,001
0,5	4,85	0,30	-2,0	-0,10	0,121	0,025	0,001
0,05	4,90	0,20	-2,0	-0,010	0,1225	0,025	0,0001
0,005	4,905	0,190	-2,0	-0,010	0,1226	0,025	0,0001
0,0005	4,910	0,180	-2,0	-0,010	0,1228	0,025	0,0001
	4,915	0,170	-2,0	-0,010	0,1229	0,025	0,0001
	4,920	0,160	-2,0	-0,010	0,1230	0,025	0,0001
m foki	4,925	0,150	-2,0	-0,010	0,1231	0,025	0,0001
V foki	4,930	0,140	-2,0	-0,010	0,1233	0,025	0,0001
M kry	4,935	0,130	-2,0	-0,0010	0,1234	0,025	0,00001
V kry	4,9355	0,1290	-2,0	-0,0010	0,12339	0,025	0,00001
	4,9360	0,1280	-2,0	-0,0010	0,12340	0,025	0,00001
	4,9365	0,1270	-2,0	-0,0010	0,12341	0,025	0,00001
	4,9370	0,1260	-2,0	-0,0010	0,12343	0,025	0,00001
	4,9375	0,1250	-2,0	-0,0010	0,12344	0,025	0,00001
	4,93800	0,1240	-2,0	-0,0010	0,12345	0,025	0,00001
	4,93850	0,1230	-2,0	-0,0010	0,12346	0,025	0,000013

Widzimy zgodność uzyskanego wyniku z wynikiem jaki uzyskano wykorzystując zasadę zachowania pędu. Moglibyśmy zmieniać kolejne parametry, rezultat byłby podobny.

Sformułuj wniosek wynikający z tych prób poprzez uzupełnienie zdania:

„Wyniki uzyskane za pomocą matematycznego modelu wślizgu foki na krę [dowodzą poprawności / świadczą o poprawności / nie mają związku z rozstrzygnięciem poprawności] metody stosowanej przez zwolenników [równania (1) / równania (2) / nie da się rozstrzygnąć], gdyż uzyskana w modelu ....”.

2. Zmieniaj wartość współczynnika tarcia pomiędzy foką a krę. Opisz wpływ zmian tego parametru na uzyskiwaną końcową prędkość oraz na przebieg zależności  $v(t)$  oraz  $V(t)$ .

Zwróćmy uwagę, że zmiana tego parametru nie pływa na prędkość końcową kry z foką. Zwróć uwagę, że we wzorach (1) i (2) nie ma współczynnika tarcia.

Czy zatem współczynnik tarcia nie ma żadnego znaczenia? Aby odpowiedzieć na to pytanie zwróć uwagę na czas przy różnych wartościach współczynnika tarcia.

Zachęcamy do przeprowadzenia symulacji bardzo ekstremalnych np. jaki byłby wynik gdyby masy foki i kry były porównywalne, albo gdyby nie było tarcia. warto trochę się "pobawić ta symulacją.

## Część 2. Przekaz pędu pomiędzy foką a krą.

### Z pracowni fizycznej.

W §2.2.5 e-podręcznika opisano pojęcie popędu siły  $F$ . W jednowymiarowym zagadnieniu, jakim jest wślizg foki na krę, możemy zapisać wyrażenie na popęd  $I$  siły  $F$  w postaci skalarnej:

$$I = F \cdot \Delta t \quad (8)$$

Zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona zmiana pędu  $\Delta p$  ciała jest równa popędowi siły wypadkowej  $F$  działającej na to ciało:

$$\Delta p = I = F \cdot \Delta t \quad (9)$$

W części drugiej matematycznego modelu ślizgu foki po krze przedstawione zostaną zmiany pędu foki oraz kry w związku z działającą siłą i upływającym czasem.



## W pracowni informatycznej - arkusz „Pęd”.

- Skopiuj do pierwszej kolumny nowego arkusza „Pęd” wartości parametrów zagadnienia z arkusza „Prędkość”. Wykorzystaj dwukrotnie opcję „Wklej specjalnie”:
  - za pierwszym razem wybierz „Wklej łącznie” - dzięki temu wszystkie wartości z arkusza „Prędkości” zostaną przeniesione do arkusza „Pędy” w taki sposób, że modyfikacja parametru zagadnienia w obrębie pierwszego z nich zostanie automatycznie przeniesiona do drugiego;
  - za drugim razem wybierz „Formaty” - dzięki temu zachowasz w arkuszu „Pęd” wszystkie formaty, jakie zostały użyte w arkuszu „Prędkości”.
- Skopiuj do kolejnej kolumny nowego arkusza „Pęd” wartości czasów z kolumny ‘t’ arkusza „Prędkości”. Wykorzystaj dwukrotnie opcję „Wklej specjalnie”, by uzyskać te same efekty, co w przypadku kolumny parametrów zagadnienia.
- Kolejne dwie kolumny zawierać będą informacje o pędzie foki i jego zmianach.

	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1									
2		foka			kra				
3		p	$\Delta I = -F \cdot \Delta t = \Delta p$		p	$\Delta I = +F \cdot \Delta t = \Delta p$			pcałk
4		[kgm/s]	[kgm/s]		[kgm/s]	[kgm/s]			[kgm/s]

- W „zerowym wierszu” pierwszej z nich wprowadź iloczyn  $m \cdot v_0$  - masy foki i początkowej jej prędkości.

$$F5: =B\$4*B\$6$$

Formuła ta nie zostanie przeciągnięta do wiersza pierwszego.

- Druga z nich zawierać będzie jednakowe, ujemne wartości  $\Delta I$  - popędu siły tarcia F działającej na fokę - obliczonego zgodnie ze wzorem (8).

$$G5: =-B\$16*B\$21$$

- Formuła z „wiersza zerowego” tej kolumny zostanie przeciągnięta do wiersza pierwszego i następnych. Zgodnie ze wzorem (9) obliczony popęd  $\Delta I$  jest równy zmianie pędu  $\Delta p$  foki w bieżącym odcinku czasowym  $\Delta t$ .

- W kolumnie ‘p’, w wierszu pierwszym, wpisz formułę, która zapewni, iż bieżąca wartość pędu p będzie sumą wartości z poprzedniego wiersza i przyrostu  $\Delta p$ , obliczonego w poprzednim wierszu.

$$F6: =F5+G5$$

Ta formuła może zostać przeciągnięta do kolejnych wierszy.

- Przygotuj zgodnie z tym przepisem tyle wierszy, ile jest wierszy czasu. W wierszach, w których w arkuszu „Prędkości” następowało zmniejszenie wartości  $\Delta t$  (by zapewnić żadaną dokładność osiągnięcia jednakowych prędkości przez fokę i krę), wstaw w kolumnie ‘ $\Delta I$ ’ odpowiednio zmniejszone wartości  $\Delta t$ ’ i dalej, ewentualnie jeszcze mniejsze.

- Na podobnych zasadach jak wyżej, kolejne dwie kolumny zawierać będą informacje o pędzie kry i jego zmianach.

	A	I	J
1			
2		kra	
3		p	$\Delta I = +F \cdot \Delta t = \Delta p$
4		[kgm/s]	[kgm/s]

- W „zerowym wierszu” pierwszej z nich wprowadź iloczyn  $M \cdot V_0$  - masy kry i początkowej jej prędkości.

$$I5: =B\$9*B\$11$$

Formuła ta nie zostanie przeciągnięta do wiersza pierwszego.

- Druga z nich zawierać będzie jednakowe, ujemne wartości  $\Delta I$  - popędu siły tarcia F działającej na krę - obliczonego zgodnie ze wzorem (8).

$$J5: =+B\$16*B\$21$$

Formuła z „wiersza zerowego” tej kolumny zostanie przeciągnięta do wiersza pierwszego i następnych. Zgodnie ze wzorem (9) obliczony popęd  $\Delta I$  jest równy zmianie pędu  $\Delta p$  foki w bieżącym odcinku czasowym  $\Delta t$ .

- c. W kolumnie ‘p’, w wierszu pierwszym, wpisz formułę, która zapewni, iż bieżąca wartość pędu p będzie sumą wartości z poprzedniego wiersza i przyrostu  $\Delta p$ , obliczonego w poprzednim wierszu.

$$I6: =I5+J5$$

Ta formuła może zostać przeciągnięta do kolejnych wierszy.

- d. Przygotuj zgodnie z tym przepisem tyle wierszy, ile jest wierszy czasu. W wierszach, w których w arkuszu „Prędkości” następowało zmniejszenie wartości  $\Delta t$  (by zapewnić żadaną dokładność osiągnięcia jednakowych prędkości przez fokę i krę), wstaw w kolumnie ‘ $\Delta I$ ’ odpowiednio zmniejszone wartości  $\Delta t$  i dalej, ewentualnie jeszcze mniejsze.

5. W ostatnim wierszu kolumn ‘ $\Delta I$ ’ foki i kry wstaw formułę, która zapewni zsumowanie wszystkich cząstkowych popędów siły, obliczonych w modelu. Opisz te dwie komórki za pomocą komentarza.

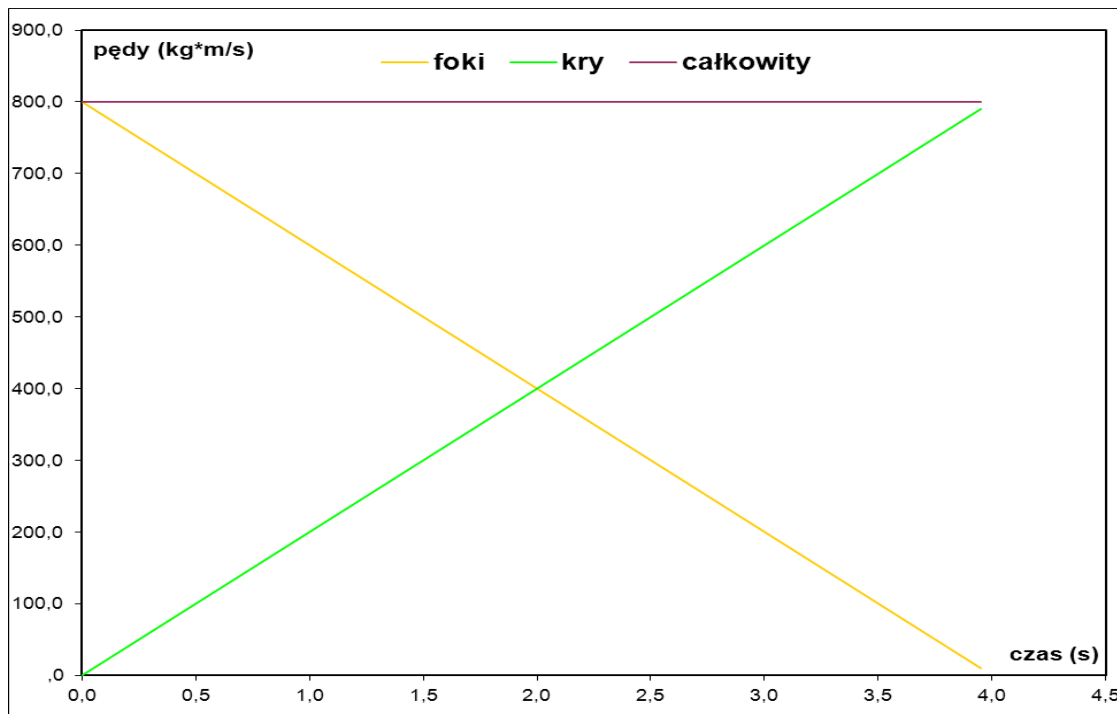
6. W ostatniej kolumnie, całkowitego pędu układu, wstaw sumę pędów foki i kry z każdego wiersza.

	I	J	K	L	M
2	kra				
3	p	$\Delta I = +F \cdot \Delta t = \Delta p$		pcałk	
4	[kgm/s]	[kgm/s]		[kgm/s]	

$$L5: =F5+I5$$

7. Sformatuj poszczególne kolumny tabeli (ew. pojedyncze komórki lub ich grupy) w taki sposób, by wyświetlane w nich liczby zawierały tyle cyfr znaczących, ile jest niezbędne do śledzenia zmian poszczególnych wielkości w miarę upływu czasu.

8. Sporządź wykres, na którym przedstawiś zależność obu pędów - foki i kry - od czasu. Uzupełnij wykres o linię przedstawiającą pęd całkowity.



9. Zmiana wartości czterech parametrów modelu: mas foki i kry oraz ich początkowych prędkości. W tym celu przekopij 4 przyciski z ćwiczenia poprzedniego.

	A	B
27		
28		
29		m foki
30		V foki
31		M kry
32		V kry
33		
34		

Wszystkie podłączone do przycisków procedury będą zmieniały odpowiednie parametry.

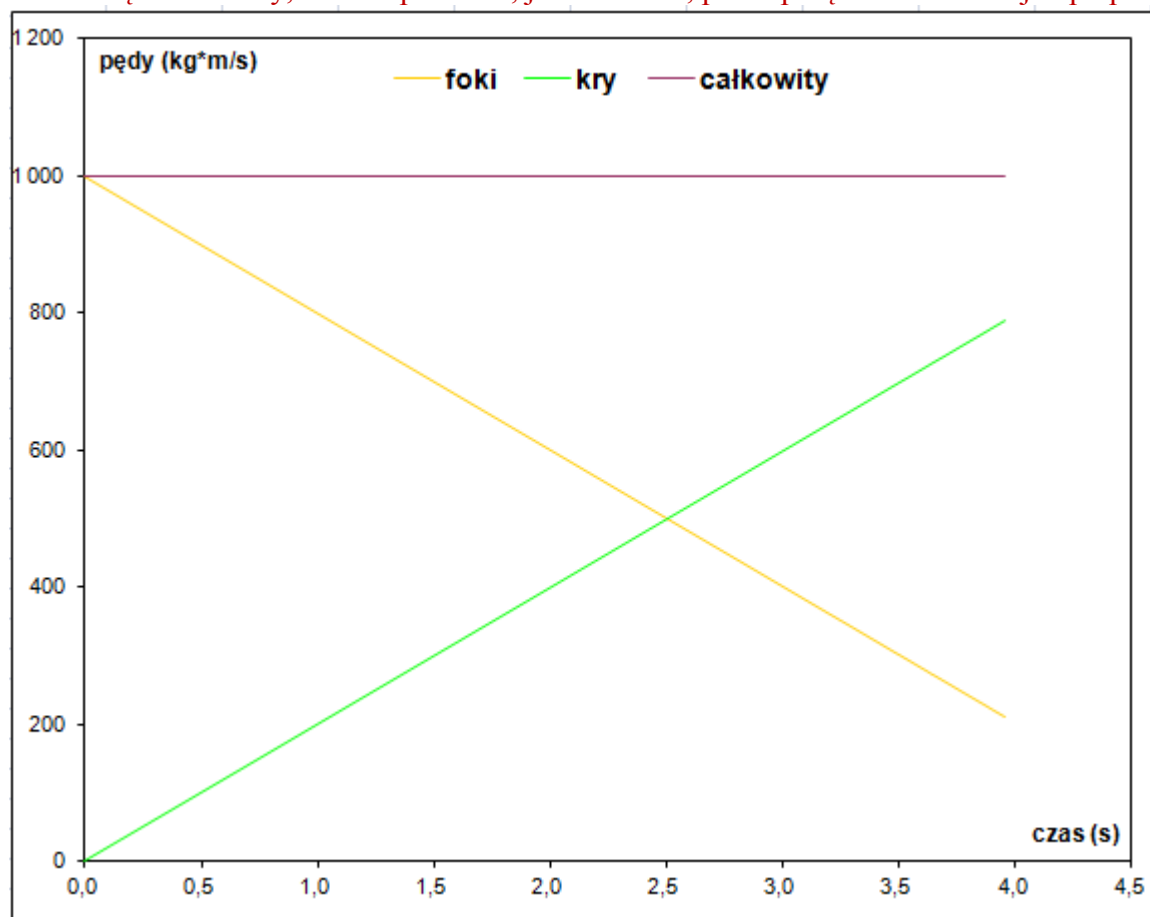
## Do pracowni fizycznej.

- Zawartość kolumny „całkowity pędu układu” nie pozostawia wątpliwości, że w badanym zjawisku pęd podlega zasadzie zachowania. Zbadaj, czy tak jest dla różnych wartości parametrów układu - mas oraz początkowych prędkości foki i kry.

Warto pozmieniać parametry układu, aby zobaczyć jaki wpływ te zmiany mają na poszczególne ciała układu "foka - kra". Zwróćmy uwagę, że pęd foki maleje, a pęd kry rośnie. W ostatniej kolumnie mamy pęd całkowity układu, ten pęd nie ulega zmianie. Warto się o tym przekonać dokonując samodzielnie zmian parametrów i to w bardzo różny sposób.

m [kg]	t [s]	foka		kra		pcałk [kgm/s]
		p [kgm/s]	$\Delta l = -F \cdot \Delta t = \Delta p$ [kgm/s]	p [kgm/s]	$\Delta l = +F \cdot \Delta t = \Delta p$ [kgm/s]	
100	0,0	1 000	-80	0	80	1 000
vo [m/s]	0,4	920	-80	80	80	1 000
10	0,8	840	-80	160	80	1 000
	1,2	760	-80	240	80	1 000
M [kg]	1,6	680	-80	320	80	1 000
8000	2,0	600	-80	400	80	1 000
Vo [m/s]	2,4	520	-80	480	80	1 000
0	2,8	440	-80	560	80	1 000

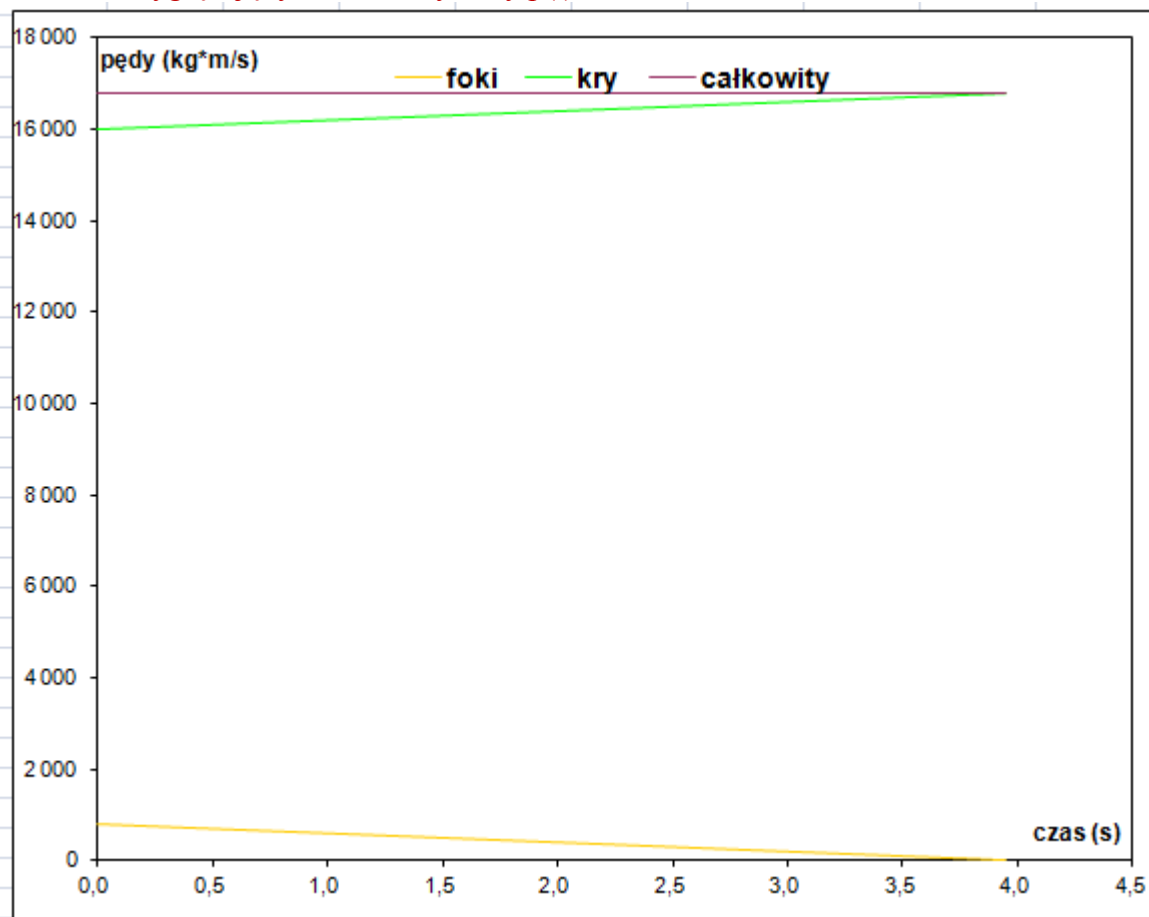
Te zmiany pięknie widać na wykresie zależności p(t). Pęd foki (linia żółta) maleje, pęd kry (linia zielona) rośnie. Pęd całkowity, to linia pozioma, jest taki sam, przed połączeniem ciał i już po połączeniu.



W zadaniu rozważamy przypadek, gdy kra spoczywa, ale przecież tak nie musi być. Przyjmijmy, że kra porusza się. I tym razem całkowity pęd nie ulega zmianie.

		foka		kra		
m [kg]	t	p	$\Delta l = -F \cdot \Delta t = \Delta p$	p	$\Delta l = +F \cdot \Delta t = \Delta p$	pcałk
	[s]	[kgm/s]	[kgm/s]	[kgm/s]	[kgm/s]	[kgm/s]
100	0,0	800	-80	16 000	80	16 800
vo [m/s]	0,4	720	-80	16 080	80	16 800
8	0,8	640	-80	16 160	80	16 800
	1,2	560	-80	16 240	80	16 800
M [kg]	1,6	480	-80	16 320	80	16 800
8000	2,0	400	-80	16 400	80	16 800
Vo [m/s]	2,4	320	-80	16 480	80	16 800
2	2,8	240	-80	16 560	80	16 800

Ciekawie wyglądają tym razem wykresy p(t).



- Zinterpretuj wartości uzyskane w komórkach utworzonych w punkcie 5. Opisz znaczenie faktu, że jedna zawiera wielkość przeciwną do drugiej, dla rozstrzygnięcia naukowego sporu pomiędzy zwolennikami równania (1) a zwolennikami równania (2).

Popatrzmy na wartości zawarte w tych komórkach:

t [s]	foka		kra		pcałk [kgm/s]
	p [kgm/s]	$\Delta I = -F \cdot \Delta t = \Delta p$ [kgm/s]	p [kgm/s]	$\Delta I = +F \cdot \Delta t = \Delta p$ [kgm/s]	
0,0	800	-80	0	80	800
0,4	720	-80	80	80	800
0,8	640	-80	160	80	800
1,2	560	-80	240	80	800
1,6	480	-80	320	80	800
2,0	400	-80	400	80	800
2,4	320	-80	480	80	800
2,8	240	-80	560	80	800
3,2	160	-80	640	80	800
3,6	80	-8	720	8	800
3,64	72	-8	728	8	800,0
3,68	64	-8	736	8	800,0
3,72	56	-8	744	8	800,0
3,76	48	-8	752	8	800,0
3,80	40	-8	760	8	800,0
3,84	32	-8	768	8	800,0
3,88	24	-8	776	8	800,0
3,92	16	-0,8	784	0,8	800,0
3,924	15,2	-0,8	784,8	0,8	800,00
3,928	14,4	-0,8	785,6	0,8	800,00
3,932	13,6	-0,8	786,4	0,8	800,00
3,936	12,8	-0,8	787,2	0,8	800,00
3,940	12,0	-0,8	788,0	0,8	800,00
3,944	11,2	-0,8	788,8	0,8	800,00
3,948	10,4	-0,08	789,6	0,08	800,00
3,9484	10,32	-0,08	789,68	0,08	800,000
3,9488	10,24	-0,08	789,76	0,08	800,000
3,9492	10,16	-0,08	789,84	0,08	800,000
3,9496	10,08	-0,08	789,92	0,08	800,000
3,9500	10,00	-0,08	790,00	0,08	800,000
3,9504	9,92	-0,08	790,08	0,08	800,000
3,9508	9,84	-790,16	790,16	790,16	800,000

Widzimy, że całkowity popęd siły działający na fokę wynosi - 790 Ns, a na krę +790 Ns. Popędy mają jednakowe wartości bezwzględne. Gdyby te wartości były inne oznaczałoby to, że na układ "foka - kra" działają siły zewnętrzne.

### Część 3. Przekaz energii kinetycznej pomiędzy foką a krą.

#### Z pracowni fizycznej.

W §2.3.1 e-podręcznika opisano pojęcie pracy siły  $F$ . W jednowymiarowym zagadnieniu, jakim jest wślizg foki na krę, możemy zapisać wyrażenie na pracę  $\Delta W$  siły  $F$  w postaci wzoru:

$$\Delta W = F \cdot \Delta s \cdot \cos(\alpha) \quad (10)$$

Symbolem  $\Delta s$  oznaczono tu fragment drogi przebywanej przez ciało, podczas działania na nie siły  $F$ . Kąt  $\alpha$  w jednowymiarowym zagadnieniu może przyjmować jedną z dwóch wartości:

- $\alpha = 0$  (wtedy  $\cos\alpha = 1$ ) gdy siła  $F$  działa zgodnie ze zwrotem prędkości ciała;
- $\alpha = 180^\circ$  ( $\alpha = \pi$ , wtedy  $\cos\alpha = -1$ ) gdy siła  $F$  działa przeciwnie do zwrotu prędkości ciała.

Siła  $F_{f \rightarrow k}$ , z jaką foka działa na krę odpowiada przypadkowi 'a' - ma ona zwrot zgodny z prędkością  $V$  i przyspiesza krę: prędkość  $V$  rośnie pod jej wpływem. Odwrotnie jest z siłą  $F_{k \rightarrow f}$ , z jaką kra działa na fokę: ma ona zwrot przeciwny do prędkości  $v$ , co odpowiada przypadkowi 'b'. Dlatego też ruch foki jest ruchem opóźnionym a jej prędkość  $v$  maleje.

Zgodnie z definicją energii kinetycznej (§2.3.3 e-podręcznika) praca siły wypadkowej  $F$  działającej na ciało jest równa zmianie jego energii kinetycznej:

$$\Delta E_{\text{kin}} = W = F \cdot \Delta s \cdot \cos(\alpha) \quad (11)$$

Fragmenty drogi  $\Delta s$  przebywane w poszczególnych odcinkach czasu  $\Delta t$  związane są z przyspieszeniem 'a' (foki lub kry) oraz z prędkością ( $v$  lub  $V$ ) na początku każdego odcinka  $\Delta t$ . Do obliczenia  $\Delta s$  w przypadku ruchu jednostajnie zmiennego (taki model ruchu przyjęto przy obliczaniu prędkości  $v$  oraz  $V$ ) służy wyrażenie znane z §2.1.4 e-podręcznika:

$$\Delta s = \frac{1}{2} \cdot a_f \cdot \Delta t^2 + v \cdot \Delta t \quad (\text{dla foki}) \quad \text{i} \quad \Delta s = \frac{1}{2} \cdot a_k \cdot \Delta t^2 + V \cdot \Delta t \quad (\text{dla kry}) \quad (12a; 12b)$$

Przyspieszenia  $a_f$  i  $a_k$  w tych wzorach obliczane są zgodnie ze wzorami (4) i (5).

W trzeciej części matematycznego modelu ślizgu foki po krze przedstawione zostaną zmiany energii kinetycznej foki oraz kry w związku z działającą pomiędzy nimi siłą i przebywaną drogą.

**W pracowni informatycznej - arkusz „Energia kinetyczna”.**

1. Skopiuj do pierwszej kolumny nowego arkusza „Energia kinetyczna” wartości parametrów zagadnienia z arkusza „Prędkość”. Wykorzystaj dwukrotnie opcję „Wklej specjalnie”, podobnie jak w punkcie 1. drugiej części ćwiczenia.
2. Skopiuj do kolejnej kolumny nowego arkusza „Energia kinetyczna” wartości czasów z kolumny ‘t’ arkusza „Prędkości”. Wykorzystaj, podobnie jak powyżej, dwukrotnie opcję „Wklej specjalnie”.

	A	B	C	D	E
1					
2					
3		m [kg]		t	
4		100		[s]	
5		v <sub>0</sub> [m/s]			
6		8			
7					
8		M [kg]			
9		8000			
10		V <sub>0</sub> [m/s]			
11		0			
12					
13		μ [.]			
14		0,2			
15		F <sub>t</sub> [N]			
16		200			
17					
18		t <sub>char</sub> [s]			
19		4			
20		Δt [s]			
21		0,4			
22		0,04			
23		0,004			
24		0,0004			
25					
26					
27		m foki			
28		V foki			
29		M kry			
30		V kry			
31					
32					

3. Kolejnych pięć kolumn zawierać będą informacje o energii kinetycznej foki i jej zmianach. Dwie pierwsze zawierać będą niezbędne informacje do obliczenia cząstkowych dróg Δs foki w poszczególnych odcinkach czasowych Δt; trzecia będzie zawierała cząstkowe drogi Δs. W czwartej kolumnie umieszczone zostaną wartości energii kinetycznych foki, zaś w piątej cząstkowe prace ΔW siły tarcia F<sub>k→f</sub> działającej na fokę ze strony kry.

	A	E	F	G	H	I	J
1							
2		foka					
3		v	a	Δs	E <sub>kin</sub>	ΔW = -F*Δs = ΔE <sub>k</sub>	
4		[m/s]	[m/s^2]	[m]	[J]	[J]	

- a) W pierwszej z tych pięciu kolumn, ‘v’, umieść skopiowane wartości prędkości foki, obliczone w arkuszu „Prędkość”. Wykorzystaj dwukrotnie opcję „Wklej specjalnie”, podobnie jak wyżej.



- b) Do drugiej z nich skopiuj przyspieszenia foki 'a', obliczone w arkuszu „Prędkość”. Tu także wykorzystaj dwukrotnie opcję „Wklej specjalnie”, podobnie jak wyżej.
- c) W trzeciej umieść formułę pozwalającą obliczyć cząstkowe drogi  $\Delta s$  przebywane przez fokę w zadanym odcinku  $\Delta t$ , z przyspieszeniem z kolumny 'a' i z początkową prędkością z kolumny 'v', zgodną ze wzorem (12a).

$$H5: =0,5*G5*\$B\$21^2+F5*\$B\$21$$

- d) Kolejna, czwarta kolumna 'E<sub>kin</sub>' zawiera wartości energii kinetycznej foki. W „zerowym wierszu” wprowadź iloczyn  $\frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_0)^2$  - połowy masy foki i kwadratu początkowej jej prędkości; formuła ta nie zostanie przeciągnięta do wiersza pierwszego.

$$I5: =\$B\$4*\$B\$6^2/2$$

- e) Ostatnia kolumna zawierać będzie ujemne wartości  $\Delta W$  - pracy siły tarcia F działającej na fokę - obliczonej zgodnie ze wzorem (10), z uwzględnieniem znaku 'minus'. Formuła z „wiersza zerowego” tej kolumny zostanie przeciągnięta do wiersza pierwszego i następnych. Zgodnie ze wzorem (11) obliczona elementarna praca  $\Delta W$  jest równa zmianie energii kinetycznej  $\Delta E_{kin}$  foki w bieżącym odcinku czasowym  $\Delta t$ .

$$J5: =-\$B\$16*H5$$

- f) W kolumnie 'E<sub>kin</sub>', w wierszu pierwszym, wpisz formułę, która zapewni, iż bieżąca wartość energii kinetycznej będzie sumą wartości z poprzedniego wiersza i przyrostu  $\Delta E_{kin}$ , obliczonego w wierszu poprzednim. Ta formuła może zostać przeciągnięta do kolejnych wierszy.

$$I6: =I5+J5$$

- g) Przygotuj zgodnie z tym przepisem tyle wierszy, ile jest wierszy czasu. W wierszach, w których w arkuszu „Prędkości” następowało zmniejszenie wartości  $\Delta t$  (by zapewnić żadaną dokładność osiągnięcia jednakowych prędkości przez fokę i krę), wstaw w kolumnie 'Δs' odpowiednio zmniejszone wartości  $\Delta t$  i dalej, ewentualnie jeszcze mniejsze.

4. W analogiczny sposób przygotuj pięć kolumn z informacjami o energii kinetycznej kry i jej zmianach. Dwie pierwsze zawierać będą niezbędne informacje do obliczenia cząstkowych dróg  $\Delta s$  kry w poszczególnych odcinkach czasowych  $\Delta t$ ; trzecia będzie zawierała obliczone drogi cząstkowe. W czwartej kolumnie umieszczone zostaną wartości energii kinetycznych kry, zaś w piątej cząstkowe prace  $\Delta W$  siły tarcia  $F_{f \rightarrow k}$  działającej na krę ze strony foki.

	A	E	K	L	M	N	O	P	Q
1									
2				kra					
3				V	a	Δs	E <sub>kin</sub>	ΔW = -F*Δs = ΔEk	
4				[m/s]	[m/s^2]	[m]	[J]	[J]	

- b) W pierwszej z tych pięciu kolumn, 'V', umieść skopiowane wartości prędkości kry, obliczone w arkuszu „Prędkość”. Wykorzystaj dwukrotnie opcję „Wklej specjalnie”, podobnie jak opisano kilkakrotnie wyżej.
- c) Do drugiej z nich skopiuj przyspieszenia kry 'a', obliczone w arkuszu „Prędkość”. Tu także wykorzystaj dwukrotnie opcję „Wklej specjalnie”.

- d) W trzeciej umieść formułę pozwalającą obliczyć cząstkowe drogi  $\Delta s$  przebywane przez krę w zadanym odcinku  $\Delta t$ , z przyspieszeniem z kolumny 'a' i z początkową prędkością z kolumny 'V', zgodną ze wzorem (12b).

$$N5: =0,5*M5*\$B\$21^2+L5*\$B\$21$$

- e) Kolejna, czwarta kolumna 'E<sub>kin</sub>' zawiera wartości energii kinetycznej kry. W „zerowym wierszu” wprowadź iloczyn  $\frac{1}{2} \cdot M \cdot (V_0)^2$  - połowy masy kry i kwadratu początkowej jej prędkości; formuła ta nie zostanie przeciągnięta do wiersza pierwszego.

$$O5: =\$B\$9*\$B\$11^2/2$$

- f) Ostatnia kolumna zawierać będzie dodatnie wartości  $\Delta W$  - pracy siły tarcia F działającej na krę - obliczonej zgodnie ze wzorem (10), z uwzględnieniem znaku 'plus'. Formuła z „wiersza zerowego” tej kolumny zostanie przeciągnięta do wiersza pierwszego i następnych. Zgodnie ze wzorem (11) obliczona elementarna praca  $\Delta W$  jest równa zmianie energii kinetycznej  $\Delta E_{kin}$  kry w bieżącym odcinku czasowym  $\Delta t$ .

$$R5: =+\$B\$16*N5$$

- g) W kolumnie 'E<sub>kin</sub>', w wierszu pierwszym, wpisz formułę, która zapewni, iż bieżąca wartość energii kinetycznej będzie sumą wartości z poprzedniego wiersza i przyrostu  $\Delta E_{kin}$ , obliczonego w wierszu poprzednim. Ta formuła może zostać przeciągnięta do kolejnych wierszy.

$$O6: =O5+P5$$

- h) Przygotuj zgodnie z tym przepisem tyle wierszy, ile jest wierszy czasu. W wierszach, w których w arkuszu „Prędkości” następowało zmniejszenie wartości  $\Delta t$  (by zapewnić żadaną dokładność osiągnięcia jednakowych prędkości przez fokę i krę), wstaw w kolumnie 'Δs' odpowiednio zmniejszone wartości  $\Delta t$  i dalej, ewentualnie jeszcze mniejsze.

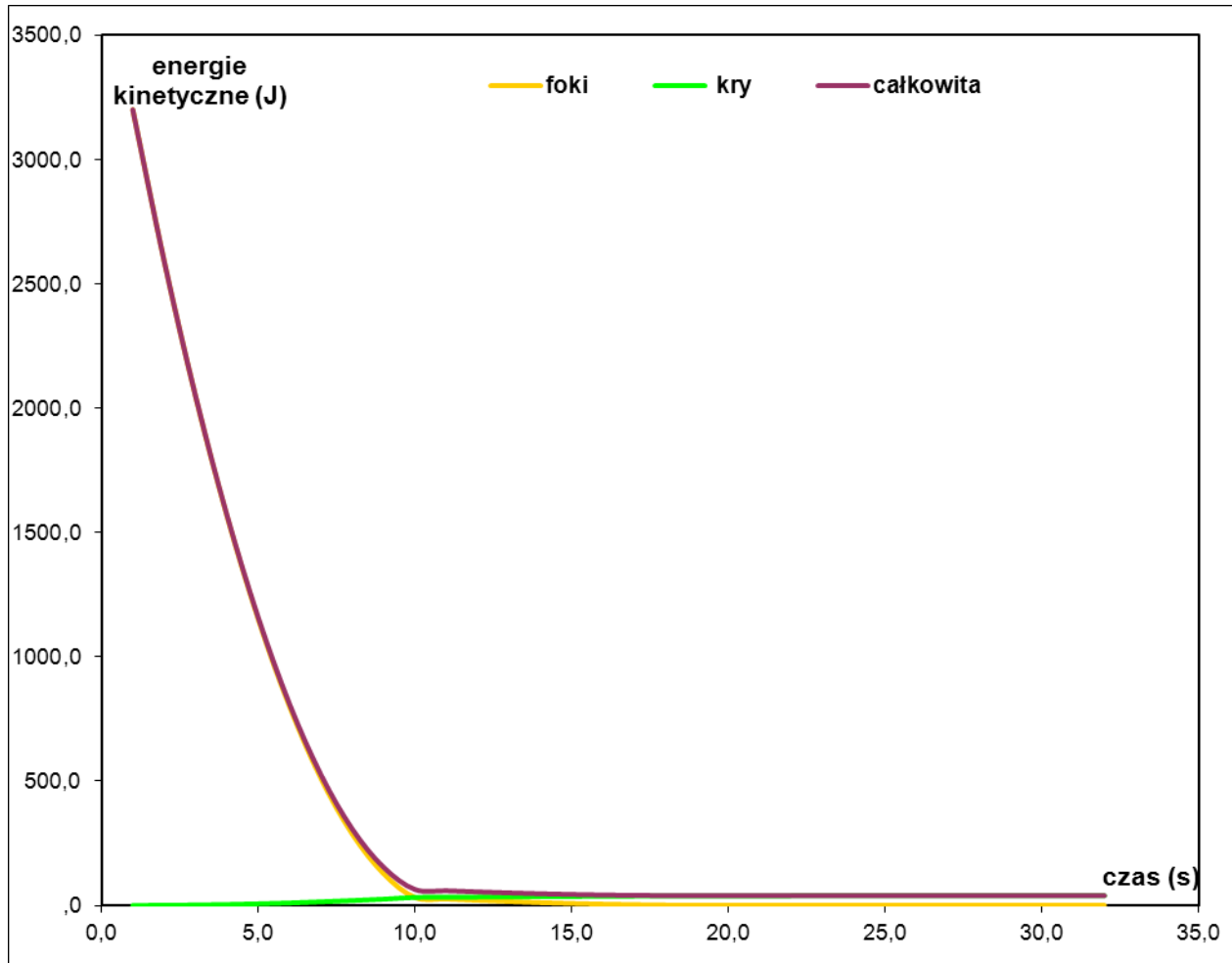
5. W ostatnim wierszu kolumn 'Δs' foki i kry wstaw formułę, która zapewni zsumowanie wszystkich cząstkowych dróg, obliczonych w modelu. Uzyskasz w ten sposób całkowitą drogę przebytą - odpowiednio - przez fokę  $s_f$  i krę  $s_k$ , do chwili wyrównania ich prędkości. Podobnie, w ostatnim wierszu kolumn 'ΔW' foki i kry wstaw formułę, która zapewni zsumowanie wszystkich cząstkowych prac siły, obliczonych w modelu. W ten sposób uzyskasz całkowitą pracę wykonaną - odpowiednio - przez siłę działającą na fokę  $W_{\rightarrow f}$  i siłę działającą na krę  $W_{\rightarrow k}$ , do chwili wyrównania ich prędkości. Opisz każdą z tych czterech komórek za pomocą komentarza.

6. W ostatniej kolumnie, całkowitej energii kinetycznej układu, wstaw sumę energii kinetycznej foki i kry z każdego wiersza.

	A	E	K	R	S
1					
2					
3					E <sub>całk</sub>
4					[J]

R5: =I5+O5

- Sformatuj poszczególne kolumny tabeli (ew. pojedyncze komórki lub ich grupy) w taki sposób, by wyświetlane w nich liczby zawierały tyle cyfr znaczących, ile jest niezbędne do śledzenia zmian poszczególnych wielkości w miarę upływu czasu.
- Sporządź wykres, na którym przedstawisz zależność obu energii kinetycznych - foki i kry - od czasu. Uzupełnij wykres o linię przedstawiającą całkowitą energię kinetyczną.



Zwróć uwagę, że w przypadku gdy stosunek  $m$  do  $M$  jest dużo mniejszy od jedności, to przebieg zależności  $E_{kin}$  foki od czasu jest słabo czytelny; podobnie jest przy końcu wykresu, gdzie wszystkie trzy linie zlewają się nieco ze sobą. Rozważ więc utworzenie kopii sporządzonego wykresu i takie dobranie skali na nowym wykresie, by wyeliminować te niedogodności.

- Zmiana wartości czterech parametrów modelu: mas foki i kry oraz ich początkowych prędkości. W tym celu przekopij 4 przyciski z ćwiczenia poprzedniego.

	A	B
27		
28		
29		m foki
30		V foki
31		M kry
32		V kry
33		
34		

Wszystkie podłączone do przycisków procedury będą zmieniały odpowiednie parametry.

## Do pracowni fizycznej.

- Zawartość kolumny „całkowita energia kinetyczna” (punkt 6. arkusza „Energia kinetyczna”) nie pozostawia wątpliwości, że w badanym zjawisku energia kinetyczna nie podlega zachowaniu.
  - Zbadaj, czy tak jest dla różnych wartości parametrów układu - mas oraz początkowych prędkości foki i kry.
  - Wskaż właściwe uzupełnienie zdania: „Im stosunek  $m/M$  jest większy, tym stosunek końcowej energii kinetycznej układu do jego początkowej energii kinetycznej jest [większy i zbliża się do jedności / większy i rośnie nieograniczenie / mniejszy i zbliża się do zera / mniejszy i zbliża się do jedności / nie da się jednoznacznie określić tej zależności / stosunek  $m/M$  w ogóle nie wpływa na stosunek energii kinetycznych].”.
- Zinterpretuj wartości uzyskane w komórkach utworzonych w punkcie 5. W tym celu wskaż właściwe uzupełnienia poniższych zdań i ewentualnie uzupełnij brakujące elementy.
  - Całkowita droga przebyta przez fokę  $s_f$  jest zawsze [mniejsza / równa / większa / nie da się jednoznacznie określić] od całkowitej drogi przebytej przez krę  $s_k$ .
  - Powyższa relacja wynika z faktu, że [masa foki jest ..... masy kry / początkowa prędkość foki jest ..... początkowej prędkości kry / wartość bezwzględna przyspieszenia foki jest ..... przyspieszenia kry / wartość siły  $F_{k \rightarrow f}$  jest ..... wartości  $F_{f \rightarrow k}$ ]. *Wskaż właściwy(e) czynnik(i) i uzasadnij pokrótce jego (ich) wpływ na relację pomiędzy  $s_f$  i  $s_k$ .*
  - Bezwzględna wartość całkowitej pracy  $W_{\rightarrow f}$  jest zawsze [mniejsza / równa / większa / nie da się jednoznacznie określić] od całkowitej pracy  $W_{\rightarrow k}$ .
  - Powyższa relacja wynika bezpośrednio z faktu, że [masa foki jest ..... masy kry /  $s_f$  i  $s_k$  spełniają relację wskazaną w punkcie ‘a’ / początkowa prędkość foki jest ..... początkowej prędkości kry / wartość bezwzględna przyspieszenia foki jest ..... przyspieszenia kry / wartość siły  $F_{k \rightarrow f}$  jest ..... wartości  $F_{f \rightarrow k}$ ]. *Wskaż właściwy(e) czynnik(i) i uzasadnij pokrótce jego (ich) wpływ na relację pomiędzy  $W_{\rightarrow f}$  i  $W_{\rightarrow k}$ .*
  - Uzupełnij poniższe zdanie tak, by stanowiło ono ostateczny wniosek płynący z użycia utworzonego matematycznego modelu:

Układ „foka + kra” należy traktować jako układ [izolowany / nieizolowany]. Wybór ten [wynika z faktu / jest niezależny od faktu / pociąga za sobą fakt], że energia kinetyczna układu w opisywanym procesie [po prostu znika / jest wyprowadzana poza układ w formie energii {kinetycznej / potencjalnej / wewnętrznej}] / pozostaje w układzie, ale zmienia formę na {potencjalną / wewnętrzną}].

## Rozwiązania, wskazówki, komentarze

- Zawartość kolumny „całkowita energia kinetyczna” (punkt 6. arkusza „Energia kinetyczna”) nie pozostawia wątpliwości, że w badanym zjawisku energia kinetyczna nie podlega zachowaniu.

Poniższa tabela pokazuje, że po każdym kroku czasowym całkowita energia kinetyczna układu jest mniejsza niż w kroku poprzednim. Tak więc malenie energii kinetycznej nie jest zjawiskiem „nagłym”, lecz postępuje w trakcie całego procesu ślizgu foki po krze.

$E_{całk}$ [J]
3 200
2 592
2 050
1 572
1 158
810
526,4
307,6
153,6
64,4
59,044
54,336
50,276
46,864
44,100
41,984
40,516
39,696
39,64964
39,60976
39,57636
39,54944
39,52900
39,51504
39,50756
39,5071684
39,5068416
39,5065796
39,5063824
39,5062500

- a) Zbadaj, czy tak jest dla różnych wartości parametrów układu - mas oraz początkowych prędkości foki i kry.

Warto poćwiczyć i pozmieniać parametry układu, aby sprawdzić jak działa symulacja. Łatwo się przekonasz, że każdy zestaw początkowych parametrów układu kończy się maleniem całkowitej energii kinetycznej, choć w różnym tempie, zależnym przede wszystkim od mas foki ( $m$ ) oraz kry ( $M$ ).

- b) Wskaż właściwe uzupełnienie zdania: „Im stosunek  $m/M$  jest większy, tym stosunek końcowej energii kinetycznej układu do jego początkowej energii kinetycznej jest [większy i zbliża się do jedności / ~~większy i rośnie nieograniczenie~~ / ~~mniejszy i zbliża się do zera~~ / ~~mniejszy i zbliża się do jedności~~ / ~~nie da się jednoznacznie określić tej zależności~~ / ~~stosunek  $m/M$  w ogóle nie wpływa na stosunek energii kinetycznych~~].”.

Na energię kinetyczną wpływ mają masa i prędkość ciała. Na energię układu "foka - kra" wpływają: masy tych ciał i prędkość początkowa foki (zgodnie z warunkami zadania, kra na początku spoczywa.). Zatem początkowa energia kinetyczna układu to energia kinetyczna foki:

$$E_0 = \frac{mv_0^2}{2}$$

Natomiast energia końcowa to łączna energia kinetyczna foki i kry, które poruszają się ze wspólną prędkością  $V$ :

$$E_k = \frac{(m + M)V^2}{2}$$

Wyznamy stosunek tych energii:

$$\frac{E_k}{E_0} = \frac{\frac{(m+M)V^2}{2}}{\frac{mv_0^2}{2}} = \frac{(m+M)}{m} \cdot \left(\frac{V}{v_0}\right)^2$$

Można odnieść mylne wrażenie, że im większa masa kry tym większa końcowa energia kinetyczna układu. Ale masa M wpływa także na końcową prędkość V, zgodnie ze wzorem (1):

$$V = v_0 \cdot \frac{m}{m+M} \Rightarrow \frac{V}{v_0} = \frac{m}{m+M}$$

Tak więc ostatecznie:

$$\frac{E_k}{E_0} = \frac{m}{m+M}$$

Masa kry M znajduje się w mianowniku otrzymanego wyrażenia. Widać więc, że w miarę wzrostu tej masy (w porównaniu do masy foki m) stosunek końcowej energii kinetycznej do początkowej maleje. Z kolei w miarę malenia M wobec m (czyli wzrostu m wobec M), stosunek energii rośnie.

W „abstrakcyjnej” sytuacji, w której to masa foki m byłaby dużo większa w porównaniu z M, ułamek po prawej stronie wyrażenia zbliżałby się do jedności, pozostając jednak od jedności mniejszy (jego licznik jest na pewno mniejszy od mianownika). Oznaczałoby to, że wartość końcowej energii zbliżałaby się do wartości początkowej.

Powyższe tezy możesz zilustrować poprzez utworzenie w arkuszu kolumny  $E_k/E_0$ .

2. Zinterpretuj wartości uzyskane w komórkach utworzonych w punkcie 5. W tym celu wskaż właściwe uzupełnienia poniższych zdań i ewentualnie uzupełnij brakujące elementy.

a) Całkowita droga przebyta przez fokę  $s_f$  jest zawsze [~~mniejsza / równa /~~ większa / ~~nie da się jednoznacznie określić~~] od całkowitej drogi przebytej przez krę  $s_k$ .

Aby na to pytanie odpowiedzieć, wystarczy spojrzeć na kolumny „ $\Delta s$ ” tabeli. Relację  $s_f > s_k$  uzyskamy niezależnie od wartości początkowych parametrów - zbadaj ten fakt.

Podobnie, argumentem za tą relacją jest rysunek 3. Pokazuje on, że foka ślizga się po rozpędzającej się krze; foka musi więc przebyć dłuższą drogę względem wody niż sama kra - licząc do chwili wyrównania obu prędkości.

b) Powyższa relacja wynika z faktu, że [~~masa foki jest ..... masy kry / początkowa prędkość foki jest~~ większa od ~~początkowej prędkości kry / wartość bezwzględna przyspieszenia foki jest~~ ..... ~~przyspieszenia kry / wartość siły  $F_{k \rightarrow f}$  jest~~ ..... ~~wartości  $F_{f \rightarrow k}$~~ ].

Ogólny dowód tej relacji można przedstawić następująco:

$$v_0 > V_0 \Rightarrow$$

[Początkowa prędkość foki musi być większa od początkowej prędkości kry - inaczej kra uciekłaby przed foką.]

$$\frac{1}{2} \cdot (v_0 + V) > \frac{1}{2} \cdot (V_0 + V) \Rightarrow$$

[Do obu stron nierówności dodajemy końcową prędkość foki i kry, po czym obie strony nierówności mnożymy przez  $\frac{1}{2}$ .]

$$v_{sr} > V_{se} \Rightarrow$$

[Średnia prędkość foki jest większa od średniej prędkości kry.]

$$v_{sr} \cdot \Delta t > V_{se} \cdot \Delta t \Rightarrow$$

[Czas ruchu foki jest taki sam jak czas ruchu kry - licząc od początku ślizgu do chwili wyrównania prędkości.]

$$s_f > s_k \quad \blacksquare$$

[Wniosek: droga przebyta przez fokę jest zawsze dłuższa od drogi przebytej przez krę.]

foka				kra				
	$\Delta s$ [m]	$E_{kin}$ [J]	$\Delta W = -F \cdot \Delta s = \Delta E_k$ [J]	V [m/s]	a [m/s <sup>2</sup> ]	$\Delta s$ [m]	$E_{kin}$ [J]	$\Delta W = -F \cdot \Delta s = \Delta E_k$ [J]
0	3,04	3 200	-608	0,00	0,025	0,002	0,0	0,4
0	2,72	2 592	-544	0,01	0,025	0,006	0,4	1,2
0	2,40	2 048	-480	0,02	0,025	0,010	1,6	2,0
0	2,08	1 568	-416	0,03	0,025	0,014	3,6	2,8
0	1,76	1 152	-352	0,04	0,025	0,018	6,4	3,6
0	1,44	800	-288	0,05	0,025	0,022	10,0	4,4
0	1,12	512	-224	0,06	0,025	0,026	14,4	5,2
0	0,80	288	-160	0,07	0,025	0,030	19,6	6,0
0	0,48	128	-96	0,08	0,025	0,034	25,6	6,8
0	0,0304	32	-6,08	0,09	0,025	0,003620	32,4	0,724
0	0,0272	25,92	-5,44	0,091	0,025	0,003660	33,124	0,732
0	0,0240	20,48	-4,80	0,092	0,025	0,003700	33,856	0,740
0	0,0208	15,68	-4,16	0,093	0,025	0,003740	34,596	0,748
0	0,0176	11,52	-3,52	0,094	0,025	0,003780	35,344	0,756
0	0,0144	8,00	-2,88	0,095	0,025	0,003820	36,100	0,764
0	0,0112	5,12	-2,24	0,096	0,025	0,003860	36,864	0,772
0	0,0080	2,88	-1,60	0,097	0,025	0,003900	37,636	0,780
0	0,000624	1,28	-0,1248	0,0980	0,025	0,0003922	38,416	0,07844
0	0,000592	1,1552	-0,1184	0,0981	0,025	0,0003926	38,49444	0,07852
0	0,000560	1,0368	-0,1120	0,0982	0,025	0,0003930	38,57296	0,07860
0	0,000528	0,9248	-0,1056	0,0983	0,025	0,0003934	38,65156	0,07868
0	0,000496	0,8192	-0,0992	0,0984	0,025	0,0003938	38,73024	0,07876
0	0,000464	0,7200	-0,0928	0,0985	0,025	0,0003942	38,80900	0,07884
0	0,000432	0,6272	-0,0864	0,0986	0,025	0,0003946	38,88784	0,07892
0	0,00004144	0,5408	-0,008288	0,0987	0,025	0,000039482	38,96676	0,0078964
0	0,00004112	0,532512	-0,008224	0,09871	0,025	0,000039486	38,9746564	0,0078972
0	0,00004080	0,524288	-0,008160	0,09872	0,025	0,000039490	38,9825536	0,0078980
0	0,00004048	0,516128	-0,008096	0,09873	0,025	0,000039494	38,9904516	0,0078988
0	0,00004016	0,508032	-0,008032	0,09874	0,025	0,000039498	38,9983504	0,0078996
0	0,00003984	0,500000	-0,007968	0,09875	0,025	0,000039502	39,0062500	0,0079004
0	0,00003952	0,492032	-0,007904	0,09876	0,025	0,000039506	39,0141504	0,0079012
0	15,99757936	0,484128	-3199,515872	0,09877	0,025	0,195110258	39,0220516	39,0220516

c) Bezwzględna wartość całkowitej pracy  $W_{\rightarrow f}$  jest zawsze [mniejsza / równa / większa / nie da się jednoznacznie określić] od całkowitej pracy  $W_{\rightarrow k}$ .

Aby na to pytanie odpowiedzieć wystarczy spojrzeć na kolumny „ $\Delta W$ ” tabeli.

d) Powyższa relacja wynika bezpośrednio z faktu, że [masa foki jest ..... masy kry /  $s_f$  i  $s_k$  spełniają relację wskazaną w punkcie ‘a’ / początkowa prędkość foki jest ..... początkowej prędkości kry / wartość bezwzględna przyspieszenia foki jest ..... przyspieszenia kry / wartość siły  $F_{k \rightarrow f}$  jest **równa** wartości  $F_{f \rightarrow k}$ ].

Wartość bezwzględna obu prac wyraża się wzorem:

$$|W| = F \cdot s$$

Siły działające na fokę i na krę mają jednakowe wartości, tak więc relacja  $s_f > s_k$  jest uzasadnieniem dla związku  $W_{\rightarrow f} > W_{\rightarrow k}$ .



foka	kra
$\Delta W = -F^* \Delta s = \Delta E_k$	$\Delta W = -F^* \Delta s = \Delta E_k$
[J]	[J]
-608	0,4
-544	1,2
-480	2,0
-416	2,8
-352	3,6
-288	4,4
-224	5,2
-160	6,0
-96	6,8
-6,08	0,724
-5,44	0,732
-4,80	0,740
-4,16	0,748
-3,52	0,756
-2,88	0,764
-2,24	0,772
-1,60	0,780
-0,1248	0,07844
-0,1184	0,07852
-0,1120	0,07860
-0,1056	0,07868
-0,0992	0,07876
-0,0928	0,07884
-0,0864	0,07892
-0,008288	0,0078964
-0,008224	0,0078972
-0,008160	0,0078980
-0,008096	0,0078988
-0,008032	0,0078996
-0,007968	0,0079004
-0,007904	0,0079012
<b>-3199,515872</b>	<b>39,0220516</b>

e) Uzupełnij zdanie tak, by stanowiło ono ostateczny wniosek płynący z użycia utworzonego matematycznego modelu:

Układ „foka + kra” należy traktować jako układ [izolowany / ~~nieizolowany~~]. ...

Warto przypomnieć sobie, jaki układ nazywamy izolowanym, a jaki nieizolowanym. Rozpatrywany przez nas układ jest izolowany, gdyż pominęliśmy wpływ **sił zewnętrznych** na fokę i krę. Takimi siłami są grawitacja (zakładamy, że jest ona zrównoważona przez siłę wyporu wody) oraz siła oporu wody (tę pomijamy na mocy jawnego założenia).

... Wybór ten [~~wynika z faktu~~ / jest niezależny od faktu / ~~pociąga za sobą fakt~~], że energia kinetyczna układu...

W układzie izolowanym obowiązują zasady zachowania; w naszym przykładzie istotne są zasady zachowania pędu i energii (**całkowitej**). W tej części zdania rozpatrujemy związek izolowanego charakteru układu z nieobowiązaniem zasady zachowania energii kinetycznej, czyli tylko jednej formy energii. Takiego związku najzwyczajniej w świecie nie ma, gdyż energia może zmieniać formę zarówno w układzie izolowanym jak i nieizolowanym.

... energia kinetyczna układu w opisywanym procesie [~~po prostu znika~~ / ~~jest wyprowadzana poza układ w formie energii {kinetycznej / potencjalnej / wewnętrznej}~~ / pozostaje w układzie, ale zmienia formę na {potencjalną / wewnętrzną}].

Pamiętajmy, że energia jest zawsze zachowana. Jeśli więc w układzie izolowanym "gdzieś znika" jakaś energia, to musi się "gdzieś indziej" w tym układzie pojawić energia w innej formie.

W warunkach zadania, skoro postanowiliśmy pominąć opór, jaki stawia woda ruchowi kry, nie ma oddziaływań, które by wyprowadzało przekształconą energię kinetyczną poza układ.

Zamiana formy energii odbywa się wyłącznie poprzez pracę siły tarcia dynamicznego, jedynej siły wewnątrzukładowej zdolnej do wykonywania pracy (siła nacisku foki na krę jest prostopadła do przemieszczenia, nie wykonuje więc pracy; podobnie jest z siłą reakcji kry na fokę). Tarcie dynamiczne jest oddziaływaniem niezachowawczym, które przekształca energię mechaniczną w

energię wewnętrzną. Ta ostatnia pozostaje w układzie, czego skutkiem jest podgrzanie brzucha fokii i powierzchni kry.

## „Charakterystyka napięciowo-prądowa ogniwa”

### I. Z pracowni fizycznej.

Wykonano doświadczenie, **którego celem** jest zbadanie charakterystyki napięciowo-prądowej ogniwa, porównanie wyników z przewidywaniami teoretycznymi oraz wyznaczenie siły elektromotorycznej (SEM)  $\varepsilon$  i oporu wewnętrznego  $r$  tego ogniwa (przypomnij sobie te pojęcia, omówione w par. 3.2.1 i 3.2.7 e-podręcznika).

#### Przewidywania teoretyczne.

Drugie prawo Kirchhoffa (patrz par. 3.2.8 e-podręcznika), zastosowane do zamkniętego obwodu na rys. 1, pozwala zapisać dwa równania, przewidujące wskazania każdego z mierników:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r} \text{ oraz } U = R \cdot I$$

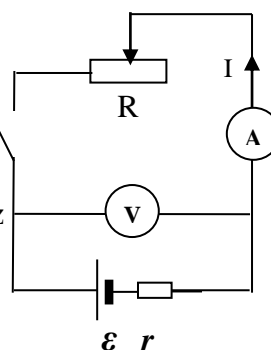
Po wyeliminowaniu z nich oporu  $R$ , który w każdym pomiarze jest inny, uzyskujemy:

$$U = \varepsilon - r \cdot I \quad (1)$$

Związek ten opisuje charakterystykę napięciowo-prądową ogniwa, czyli zależność napięcia  $U$  podawanego do obwodu przez ogniwo od natężenia prądu  $I$ , czerpanego z tego ogniwa. Jest to zależność liniowa, o postaci  $y = a \cdot x + b$ , której współczynnik wolny ‘ $b$ ’ jest równy SEM  $\varepsilon$ , zaś współczynnik kierunkowy ‘ $a$ ’ jest równy (z dokładnością do znaku) oporowi wewnętrznemu  $r$ .

**Zmontowano obwód** (rys. 1.) składający się z:

- ogniwa (np. bateria płaska „3R12” o nominalnej sile elektromotorycznej 4,5 V);
- potencjometru  $R$  (o regulowanym oporze w zakresie do 30  $\Omega$ );
- amperomierza (analogowego; w doświadczeniu wykorzystano dwa jego zakresy: do 0,6 A z podziałką co 0,01 A oraz do 3 A z podziałką co 0,05 A, klasa przyrządu na obu zakresach wynosi 2,0);
- woltomierza (analogowego, o zakresie do 6 V, klasie 1,5, z podziałką co 0,1 V i oporze wewnętrznym 6 k $\Omega$ );
- wyłącznika.



Rys. 1. Obwód do badania charakterystyki  $U(I)$  ogniwa [ $\varepsilon$ ;  $r$ ]

#### Przebieg i wyniki pomiarów.

W doświadczeniu nastawiono kilkanaście różnych położeń potencjometru, nie notując przy tym wartości jego oporu. Dla każdego położenia zamknięto na krótki czas obwód, odczytano wskazania mierników, po czym obwód otwarto (takie postępowanie pozwala zminimalizować wyczerpywanie się baterii, co mogłoby zmienić jej SEM i opór wewnętrzny w trakcie pomiarów). Uzyskane wyniki pomiarów przedstawia poniższa tabela. Podano w niej (i zaznaczono różnicą w odcieniu koloru) dwa odczyty dla tego położenia potencjometru, w którym dokonano zmiany zakresu amperomierza.

$I$ [A]	0,15	0,18	0,22	0,27	0,30	0,35	0,41	0,51
$U$ [V]	4,5	4,5	4,4	4,3	4,2	4,2	4,1	4,0
$I$ [A]	0,57	0,55	0,65	0,75	0,90	1,15	1,50	2,25
$U$ [V]	4,0	3,9	4,0	3,8	3,7	3,4	3,1	2,3

## II. W pracowni informatycznej.

### Analiza danych z pomiaru.

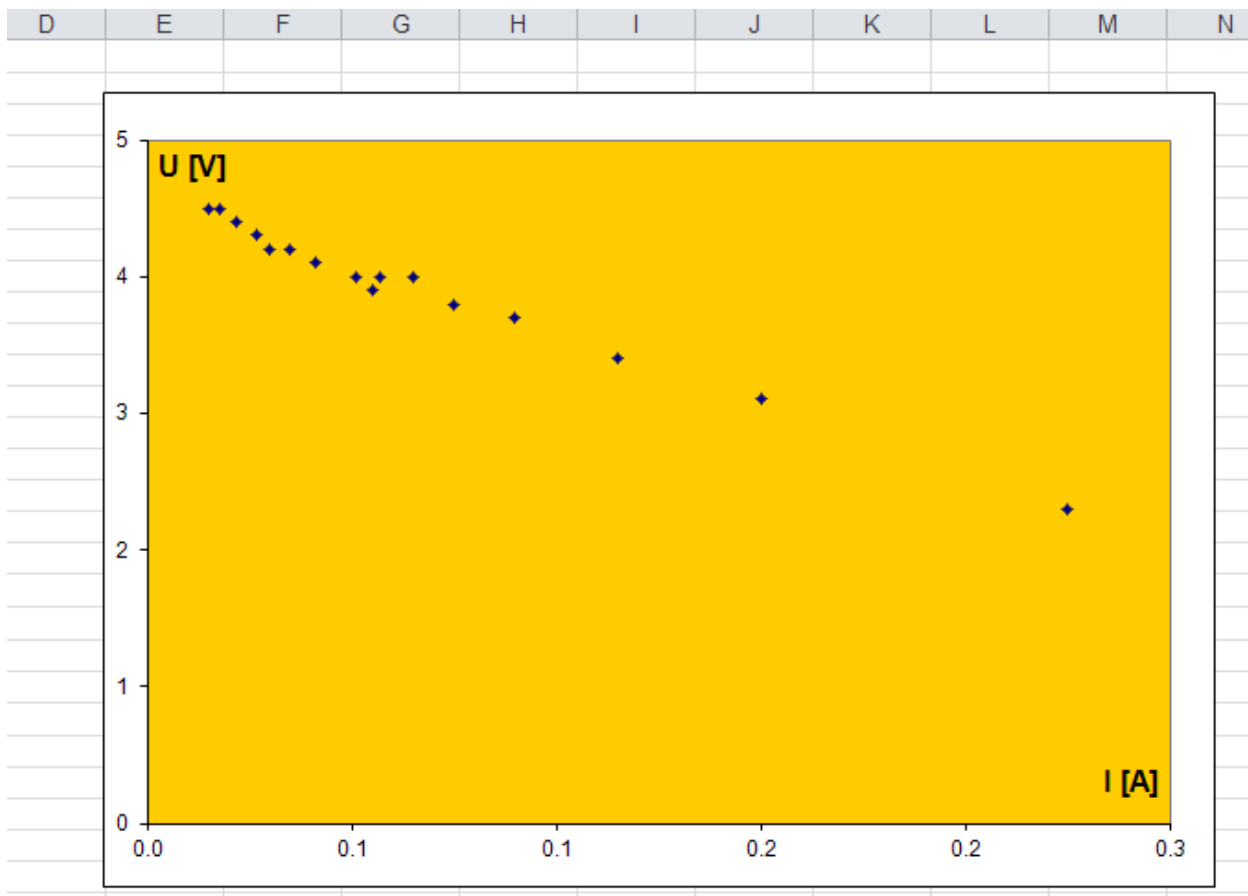
1. W arkuszu przygotuj tabelę

	A	B	C	D
1				
2		I [A]	U [V]	
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				

2. Wpisz wyniki pomiarów w dwóch kolumnach: I oraz U. W tabeli umieszczono przykładowe wyniki pomiarów.

	A	B	C	D
1				
2		I [A]	U [V]	
3		0,15	4,5	
4		0,18	4,5	
5		0,22	4,4	
6		0,27	4,3	
7		0,30	4,2	
8		0,35	4,2	
9		0,41	4,1	
10		0,51	4,0	
11		0,57	4,0	
12		0,55	3,9	
13		0,65	4,0	
14		0,75	3,8	
15		0,90	3,7	
16		1,15	3,4	
17		1,50	3,1	
18		2,25	2,3	
19				

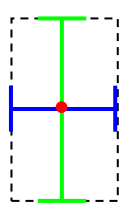
3. Sporządź wykres (1) zależności U(I). Wykres winien zawierać same dane pomiarowe, bez jakiegokolwiek linii łączącej punkty.



4. Skopiuj wykres i dodaj do punktów elementy służące analizie wyników.

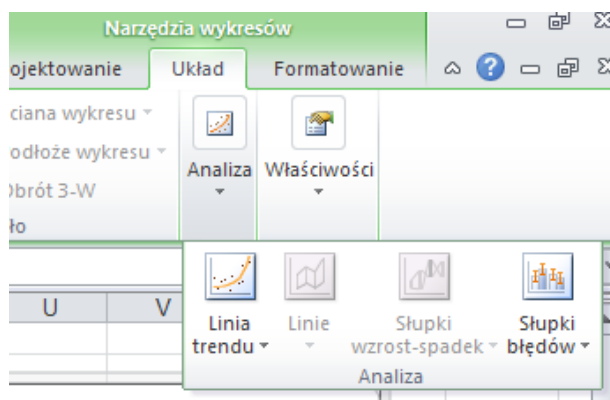
Rozważ zmniejszenie rozmiaru punktów, by nie dominowały one na wykresie. W tym celu wskaż kursorem dowolny z punktów, kliknij „prawą myszą”, wybierz „Formatuj serie danych” i otwórz zakładkę „Desenie”.

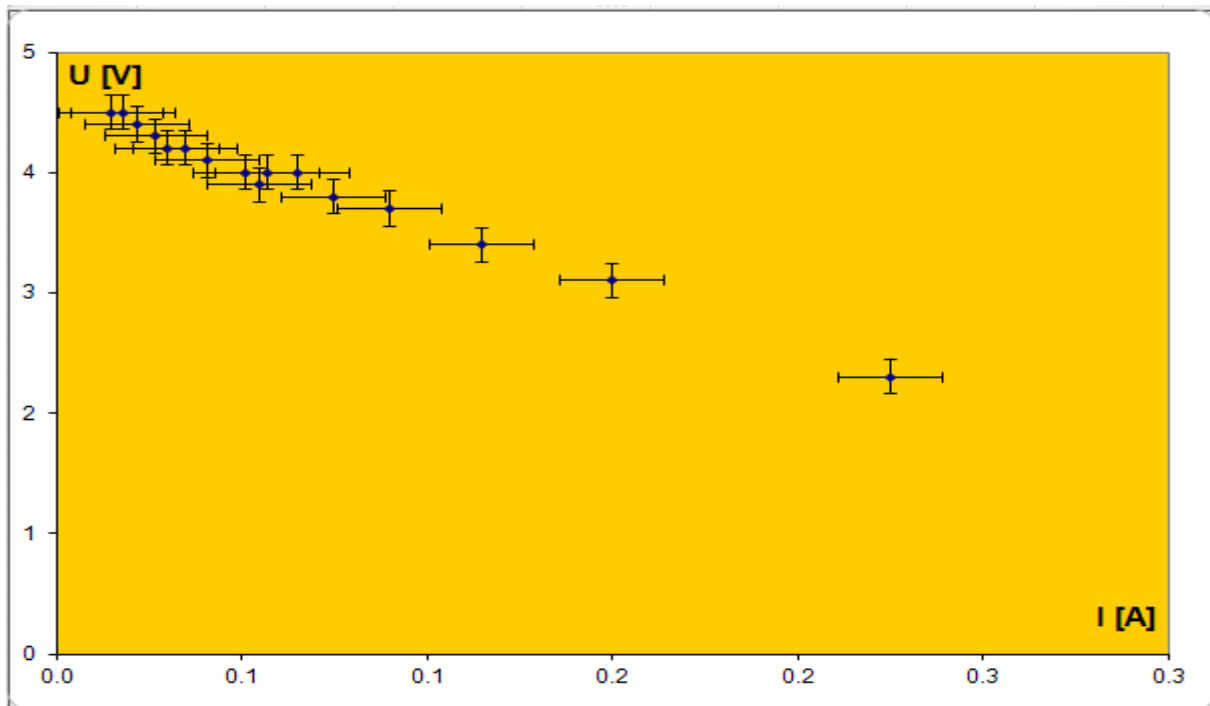
5. Dodaj do wykresu prostokąty niepewności pomiarowej (tzw. prostokąty błędów). Polega to na otoczeniu każdego punktu prostokątem, wewnątrz którego najprawdopodobniej znajduje się prawdziwe położenie punktu. Trzeba to wykonać w dwóch niezależnych od siebie krokach, oddzielnie dla osi rzędnych, oddzielnie dla osi odciętych. W efekcie pojedynczy punkt pomiarowy na wykresie może wyglądać następująco:



- kolorem niebieskim zaznaczono słupek niepewności natężenia prądu, odłożonego na osi odciętych;
- kolorem zielonym zaznaczono słupek niepewności napięcia, odłożonego na osi rzędnych;
- linią przerywaną zaznaczono cały prostokąt niepewności pomiarowej, który nie pojawi się na wykresie.

- Dodaj do punktów słupki błędów z błędem standardowym.





- Zaznacz pionowe słupki błędów i ustaw stałą wartość błędu 0,14 V, zgodnie z opisem w §3.2.9 e-podręcznika. Jest to precyzja pojedynczego odczytu napięcia na użytym w doświadczeniu woltomierzu, z uwzględnieniem jego klasy.

**Formatowanie słupków błędów**

**Pionowe słupki błędów**

Kolor linii  
Styl linii  
Cień  
Poświata i wygładzone krawędzie

**Pionowe słupki błędów**

Wyświetl

Kierunek

Qba  
 Minus  
 Plus

Styl końca

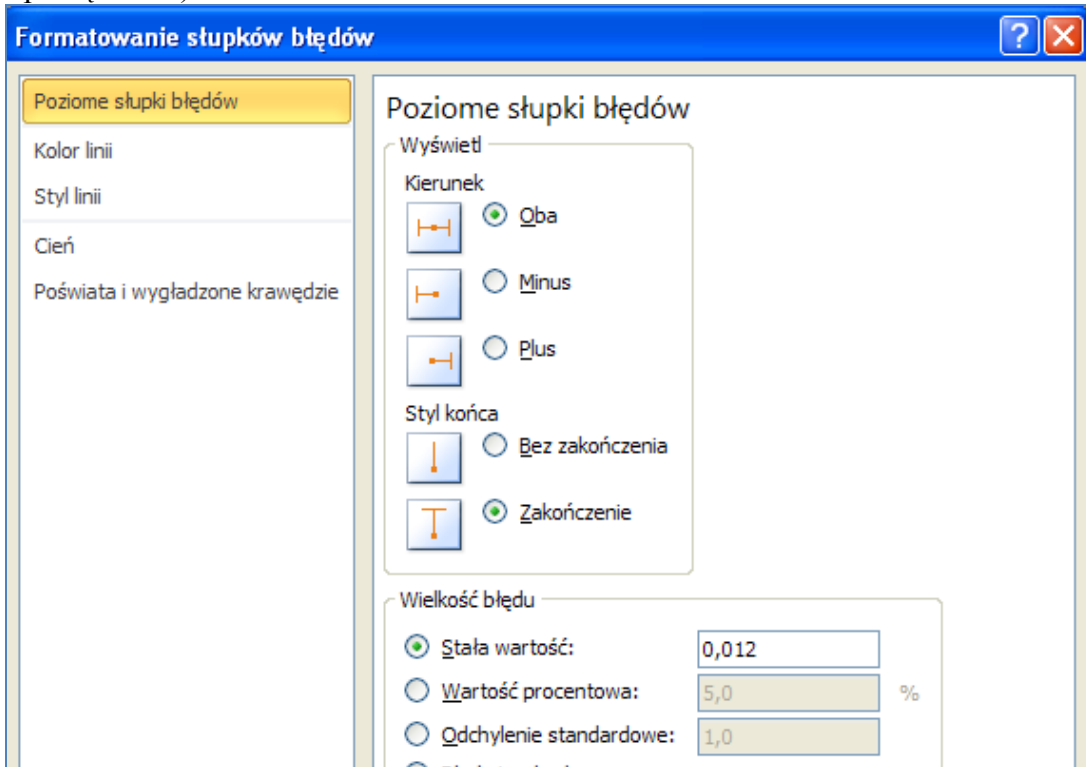
Bez zakończenia  
 Zakończenie

Wielkość błędu

Stała wartość: 0,14  
 Wartość procentowa: 5,0 %  
 Odchylenie standardowe: 1,0  
 Błąd standardowy  
 Niestandardowa: Określ wartość

Zamknij

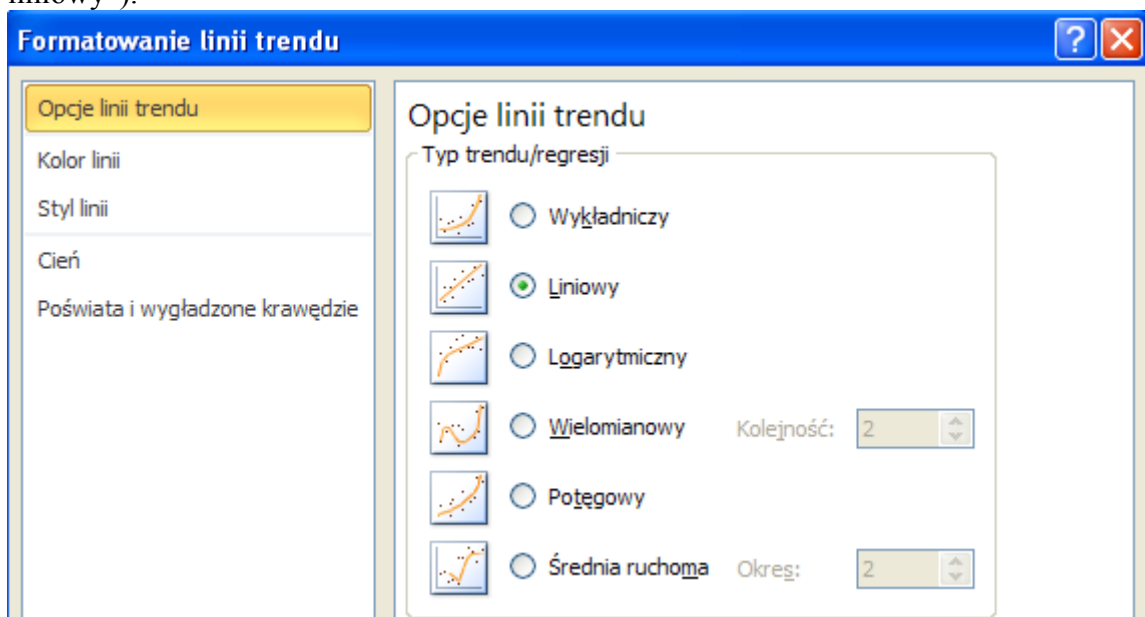
- Zaznacz poziome słupki błędów i ustaw stałą wartość błędu 0,012A zgodną z precyzją pojedynczego odczytu oraz klasy użytego amperomierza (tak jak opisano to w §3.2.9 e-podręcznika).



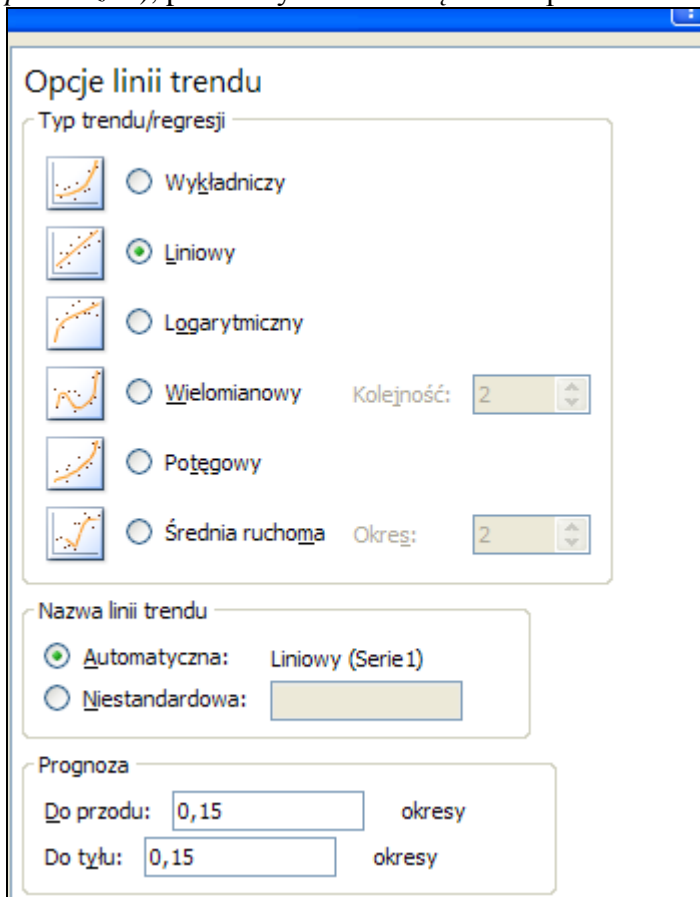
- Zwróć uwagę, że po zmianie zakresu amperomierza (z 0,6 A na 3 A) precyzją ta ulega pogorszeniu. Zastanów się nad możliwością uwzględnienia na wykresie różnych rozmiarów słupka niepewności dla różnych punktów (wskazówka: zapoznaj się z opcjami określania niestandardowych wartości błędów) - jeśli znajdziesz na to rozwiązanie, zastosuj je; oblicz przy tym nową, zwiększoną niepewność pomiaru natężenia prądu. W przeciwnym razie pozostaw jednakową dla wszystkich punktów wartość 0,012 A, ale pamiętaj o tym w trakcie analizy wyników i wyciągania wniosków.

6. Dodaj do punktów tzw. linię trendu.

Najedź kursorem na jeden z punktów pomiarowych i kliknij „prawą myszą”; wybierz „Dodaj linię trendu”. Linia trendu to optymalna linia, która niekoniecznie łączy punkty, lecz przechodzi możliwie blisko pomiędzy nimi. Program Excel pozwala wybrać różne postacie funkcyjne linii optymalnej - zgodnie z przewidywaniami teoretycznymi wybierz funkcję liniową („typ linii trendu - liniowy”).



- Rozważ taki dobór grubości linii trendu, by zapewnić przejrzystość wykresu. W tym celu wskaż linię kursorem, kliknij „prawą myszą”, wybierz „formatuj linię trendu” i w „Deseniach” dobierz żadaną grubość.
- Rozważ przedłużenie linii trendu do jej przecięcia z osią rzędnych (osią U). W tym celu wskaż linię kursorem, kliknij „prawą myszą”, wybierz „formatuj linię trendu” i w „Opcjach” wybierz „prognozę do tyłu” (doceń ten *oksymoron!*); ustaw ją na 0,15 jednostki. Ponieważ najmniejsze zmierzone natężenie prądu wynosiło właśnie 0,15 A, to ten zabieg przedłuży linię trendu do osi rzędnych. Możesz także, odpowiednio dobierając wartość „prognozy do przodu” (teraz doceń *pleonazm!*), przedłużyć nieco linię trendu poza ostatni punkt pomiarowy.



7. Uzupełnij wynik pomiaru o wartości i niepewności pomiarowe współczynników kierunkowego 'a' i wolnego 'b' prostej optymalnej.

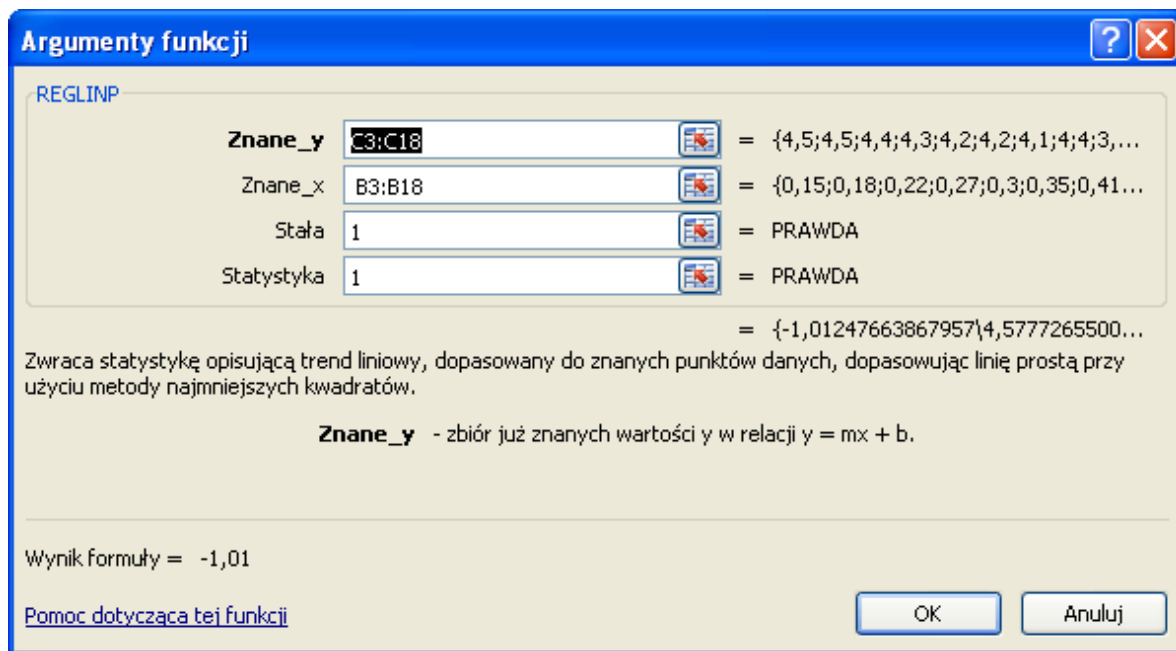
- W arkuszu przygotuj tabelę:

	A	B	C	D
1				
19				
20		a; $\Delta a$ [ $\Omega$ ]	b; $\Delta b$ [V]	
21				
22				
23				

- Zaznacz obszar:  
B21:C22



- W komórkę B21 wprowadź funkcję REGLINP(). Za pomocą rozwiniętego okna dialogowego wprowadź jako zmienne:



„znane\_y”  
kolumnę U  
arkusza;  
„znane\_x”  
kolumnę I  
arkusza.  
Stałym logicznym  
„stała” i  
„statystyka”

przypisz wartości 1.

Funkcja jest funkcją tablicową, żeby wypełnić obliczonymi danymi cały zaznaczony obszar zatwierdź ją kombinacją klawiszy: CTRL+SHIFT+ENTER.

Dwie górne to, odpowiednio, wartości współczynnika kierunkowego ‘a’ i wolnego ‘b’ optymalnej prostej, poprowadzonej na wykresie. Dwie dolne to niepewności pomiarowe  $\Delta a$  i  $\Delta b$  tych współczynników; niepewności te są obliczone na podstawie rozrzutu punktów wokół optymalnej prostej.

### III. Do pracowni fizycznej.

Kolejnym krokiem wykonanym w programie odpowiadają elementy analizy i interpretacji uzyskanych wyników. Poniżej podano pytania, na które fizyk winien odpowiedzieć i wyciągnąć stosowne wnioski (niektóre przykładowe wnioski zawarto w tekście). Zwróć uwagę na trzy kategorie pytań i wniosków:

- prowadzące do realizacji założonych celów doświadczenia, stanowiące argumentację za (lub przeciw) zgodności wyników z oczekiwaniami;
- stanowiące stwierdzenie osiągnięcia (lub nie) założonych celów;
- stanowiące element podsumowania doświadczenia i dyskusji uzyskanych wyników.

Pamiętaj, analizując wyniki i wyciągając wnioski, że masz do czynienia z wynikami pomiarów, które są obciążone niepewnością pomiarową. Wynik doświadczenia nie jest zbiorem punktów czy wykresem funkcji, sporządzonym na podstawie wzoru.

#### 1. Wstępna, jakościowa ocena ułożenia punktów pomiarowych na wykresie (1).

**1.1** Czy wyniki pomiarów układają się wzdłuż jakiegokolwiek sensownej linii? Wniosek:

- jeśli tak, oznacza to, że napięcie podawane przez ogniwo do obwodu rzeczywiście zależy od natężenia prądu, jak przewiduje teoria;
- jeśli nie - czyli punkty ułożyły się chaotycznie - to .....

**1.2** Czy którykolwiek pojedynczy pomiar jawnie odstaje od tendencji wskazanej przez pozostałe? Wniosek:

- jeśli tak, oznacza to, że najprawdopodobniej popełniono błąd grubo i wtedy należy.....;
- jeśli nie, to .....

**1.3** Czy ułożenie punktów przypomina oczekiwaną linię „teoretyczną” (tutaj: linię prostą)? Wniosek:

- jeśli tak, oznacza to, że .....
- jeśli nie, to .....

#### 2. Ocena ilościowa dopasowania funkcji liniowej do danych pomiarowych - wykres (2).

**2.1** Czy wyniki pomiarów układają się losowo wokół zaproponowanej linii prostej optymalnej, niektóre nad nią a inne pod nią? Wniosek:

- jeśli tak, oznacza to, że napięcie podawane przez ogniwo do obwodu jest ....., zgodnie z teorią, a stwierdzone drobne odstępstwa wynikają z niepewności pomiarowej;
- jeśli nie - czyli punkty układają się wyraźnie wokół jakiejś linii krzywej - to .....

**2.2** Czy prosta optymalna przechodzi przez ogromną większość prostokątów niepewności pomiarowej? Wniosek:

- jeśli tak, oznacza to, że rozrzut punktów wokół prostej optymalnej mieści się w granicach .....
- jeśli nie - czyli prosta optymalna omija sporą część prostokątów niepewności - to należy przypuszczać że któryś z użytych mierników ma gorszą/lepszą (wskaz właściwe) precyzję, niż wynika to z jego cech, podanych przez producenta. Taki miernik należy wymienić na nowy i .....

#### 3. Interpretacja i ocena uzyskanych wartości współczynników optymalnej funkcji liniowej. Opis właściwości badanego ogniwa.

Jeśli ocena z punktów 1 i 2 wypadła pozytywnie, to zgodnie ze wzorem (1) współczynnik kierunkowy 'a' optymalnej prostej (dokładniej: jego wartość bezwzględna) odpowiada oporowi wewnętrznemu ogniwa  $r$ ; niepewność pomiarowa  $\Delta a = \Delta r$ . Z kolei współczynnik wolny 'b' prostej optymalnej jest równy SEM  $\epsilon$  źródła a niepewność pomiarowa  $\Delta b = \Delta \epsilon$ .

**3.1** Czy uzyskana wartość  $\epsilon$ , z uwzględnieniem niepewności pomiarowej  $\Delta \epsilon$ , jest zgodna z nominalną wartością SEM, podaną przez producenta? Wniosek:

- jeśli tak, oznacza to, że .....
- jeśli nie, to wynik większy, niż podał producent może oznaczać, że producent ....., zaś wynik mniejszy musi oznaczać, że producent .....

- 3.2 Producent nie podał żadnej informacji o oporze wewnętrznym ogniwa. Jaki wzorzec należałoby przyjąć, gdzie szukać informacji o nim, by ocenić wiarygodność uzyskanego wyniku?
- 3.3 Jedną z istotnych cech każdego źródła napięcia jest tzw. prąd zwarcia. Jest to maksymalne natężenie prądu  $I_{\max}$ , który może dostarczyć ogniwo, w dość ekstremalnej sytuacji: gdy jego bieguny połączy się przewodem o zerowym oporze. Taka czynność nazywa się „zwarcie ogniwa” lub „spowodowaniem krótkiego spięcia”. W instalacjach często stosuje się bezpieczniki, zapobiegające negatywnym skutkom zwarcia źródła napięcia.
- Na podstawie wyników doświadczenia (wartości współczynników ‘a’ i ‘b’ prostej optymalnej) oblicz  $I_{\max}$  badanego ogniwa i oszacuj jego niepewność pomiarową.
  - Czy zastosowany w doświadczeniu amperomierz mógłby posłużyć do pomiaru  $I_{\max}$ ?
  - Wykorzystaj czynności opisane w części II.4 do wskazania wartości  $I_{\max}$  na wykresie  $U(I)$ .
4. Inne uwagi do organizacji i przebiegu doświadczenia.
- 4.1 W trakcie doświadczenia zmieniono zakres amperomierza. Czy zabieg ten jest widoczny w wynikach doświadczenia?
- 4.2 Idealny woltomierz powinien mieć nieskończony opór wewnętrzny, zaś idealny amperomierz powinien mieć opór zerowy.
- Z czym należy porównać opór wewnętrzny użytego w doświadczeniu woltomierza, by stwierdzić, że w przybliżeniu spełnia on rolę woltomierz idealnego?
  - Uzasadnij tezę, że natężenie prądu  $I_v$  płynącego przez woltomierz nie przekracza 1 mA.
  - Wartość ta jest górną granicą **błędu systematycznego** popełnianego w doświadczeniu w związku z przyjęciem, że amperomierz wskazuje natężenie prądu płynącego przez ogniwo. Rozstrzygnij, czy wskazania amperomierza są **systematycznie** zaniżone czy zawyżone w związku ze skończoną wartością oporu wewnętrznego woltomierza.
  - Wskaż właściwe uzupełnienie zdania i uzasadnij swój wybór: „**Błąd systematyczny** (o którym mowa wyżej) w porównaniu z niepewnością pomiarową wynikającą z cech użytego amperomierza [praktycznie nie wpływa na wynik doświadczenia i może być pominięty w analizie / powinien być uwzględniony w ocenie niepewności pomiarowej ostatecznego wyniku doświadczenia / zdecydowanie dominuje w tym doświadczeniu, co podważa wiarygodność uzyskanych wyników].
  - Dlaczego w tym doświadczeniu nie jest istotna znajomość oporu wewnętrznego amperomierza?

## Rozwiązania, wskazówki, komentarze

Uwaga: Poniższe „rozwiązania, wskazówki, komentarze” odnoszą się do danych pomiarowych przedstawionych w tabeli w części I ćwiczenia. Należy więc pamiętać, że dla wyników pomiaru wykonanego przez Ciebie, w Twojej pracowni, właściwe mogą być nieco inne odpowiedzi.

### 1. Wstępna, jakościowa ocena ułożenia punktów pomiarowych na wykresie (1).

#### 1.1 Czy wyniki pomiarów układają się wzdłuż jakiegokolwiek sensownej linii?

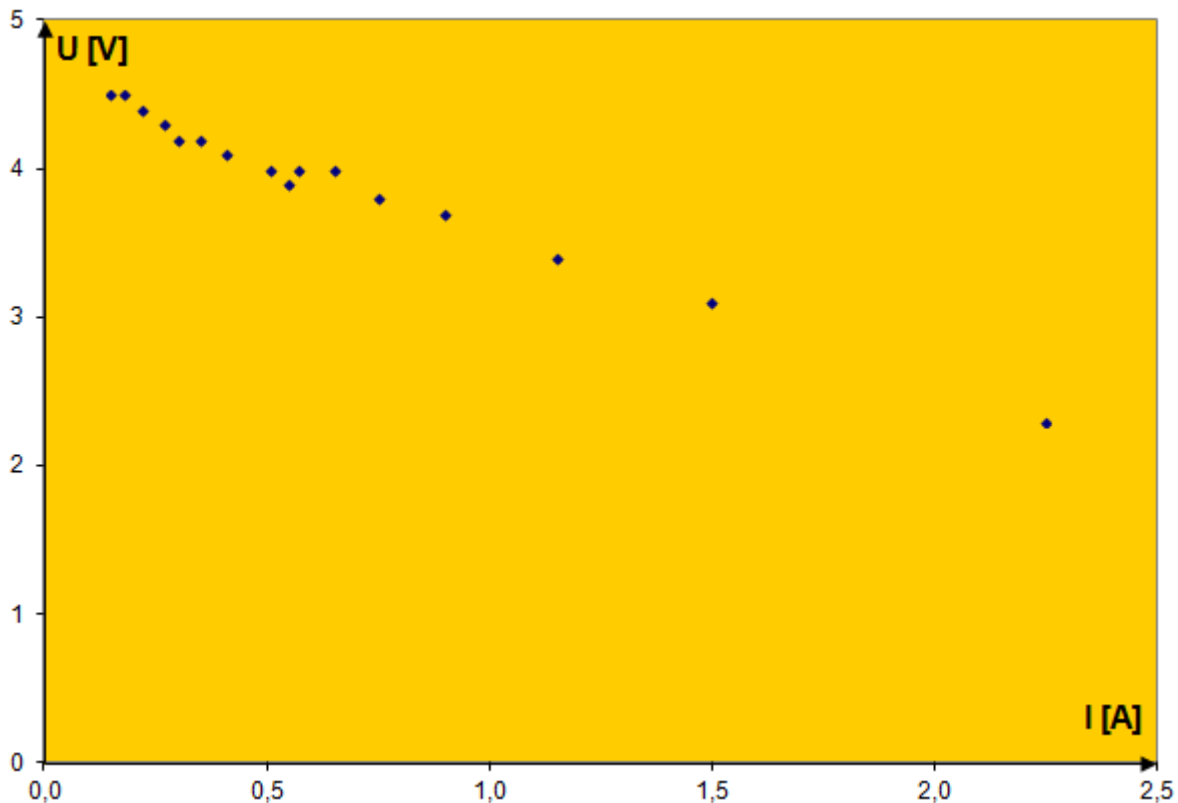
Tak. Wstępna analiza ułożenia punktów pomiarowych wyraźnie wskazuje na pewną tendencję ich ułożenia - jest to tendencja malejąca. Punkty nie są ułożone losowo na wykresie, choć w ich ułożeniu można doszukać się nieco chaosu. Trudno więc jednoznacznie wskazać kształt linii, która by najlepiej przybliżyła obserwowany trend.

Wniosek: oznacza to, że napięcie podawane przez ogniwo do obwodu rzeczywiście zależy od natężenia prądu oraz że jest to zależność malejąca, tak jak przewiduje teoria.

#### 1.2 Czy którykolwiek pojedynczy pomiar jawnie odstaje od tendencji wskazanej przez pozostałe?

Nie. Żaden pojedynczy pomiar nie odstaje od ogólnej tendencji w sposób zwracający szczególną uwagę.

Wniosek: można przyjąć, że w pomiarach nie popełniono błędu grubego, a stwierdzony niewielki chaos w ułożeniu punktów wynika raczej z naturalnej niepewności pomiarowej.



### 1.3 Czy ułożenie punktów przypomina oczekiwaną linię „teoretyczną” (tutaj: linię prostą)?

Nie można tego wykluczyć, choć widoczny w ułożeniu punktów lekki chaos nie pozwala też tego potwierdzić.

Wniosek: Należy pogłębić analizę o elementy ilościowe, takie jak naniesienie prostokątów niepewności pomiarowej i poprowadzenie optymalnej linii prostej.

## 2. Ocena ilościowa dopasowania funkcji liniowej do danych pomiarowych - wykres (2).

### 2.1 Czy wyniki pomiarów układają się losowo wokół zaproponowanej optymalnej linii prostej, niektóre nad nią a inne pod nią?

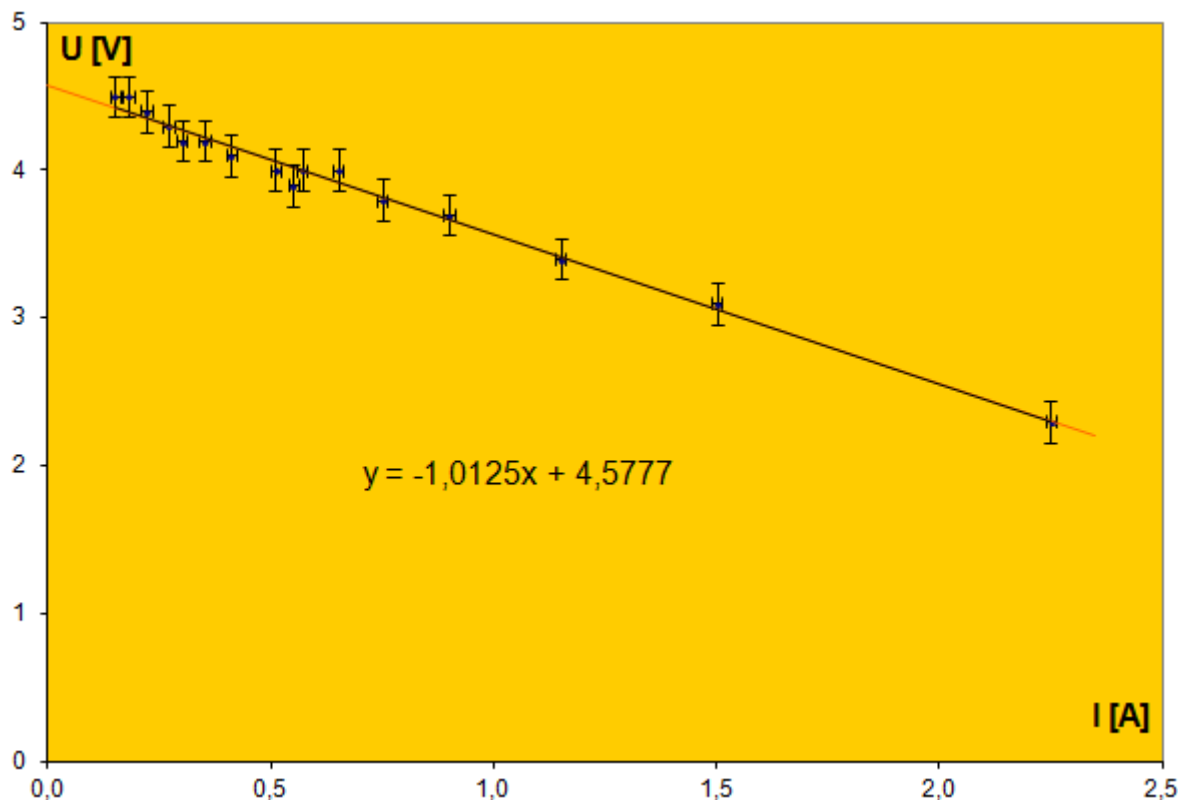
Tak. Punkty nie leżą wprawdzie dokładnie na linii optymalnej, ale jest to normalne, gdyż współrzędne tych punktów są wynikiem pomiaru a nie obliczeń. Odstępstwa punktów od linii optymalnej mają charakter losowy i nie wskazują żadnego innego trendu niż liniowy.

Wniosek: napięcie podawane przez ogniwo do obwodu jest liniową funkcją natężenia prądu, zgodnie z teorią, a stwierdzone drobne odstępstwa wynikają z niepewności pomiarowej.

### 2.2 Czy prosta optymalna przechodzi przez ogromną większość prostokątów niepewności pomiarowej?

Tak. Zwróćmy uwagę, że wykreślona linia przechodzi przez obszar niepewności każdego punktu.

Wniosek: rozrzut punktów wokół prostej optymalnej mieści się w granicach niepewności pomiarowej, a linia prosta dobrze opisuje obserwowaną w doświadczeniu prawidłowość.



3. Interpretacja i ocena uzyskanych wartości współczynników optymalnej funkcji liniowej. Opis właściwości badanego ogniwa.

Ocena z punktów 1 i 2 wypadła pozytywnie. Równanie optymalnej linii trendu to:

$$y = a \cdot x + b$$

Funkcja REGLINP() pozwoliła wyznaczyć:

$$a = -1,01 \pm 0,03 \Omega \quad \text{oraz} \quad b = 4,58 \pm 0,03 \text{ V}$$

Przewidywane przez teorię równanie ma postać:

$$U = -r \cdot I + b$$

W równaniu opisującym linię trendu zmieniamy oznaczenia, tak aby odpowiadało ono równaniu teoretycznemu. Zgodnie ze wzorem (1) współczynnik kierunkowy 'a' optymalnej prostej (dokładniej: jego wartość bezwzględna) odpowiada oporowi wewnętrznemu ogniwa  $r$ ; niepewność pomiarowa  $\Delta a = \Delta r$ . Z kolei współczynnik wolny 'b' prostej optymalnej jest równy SEM  $\varepsilon$  źródła a niepewność pomiarowa  $\Delta b = \Delta \varepsilon$ .

**3.1** Czy uzyskana wartość  $\varepsilon$ , z uwzględnieniem niepewności pomiarowej  $\Delta \varepsilon$ , jest zgodna z nominalną wartością SEM, podaną przez producenta?

Uzyskaliśmy  $\varepsilon = 4,58 \pm 0,03 \text{ V}$ .

Wniosek: Jest to wynik nieco większy od nominalnej SEM, podanej przez producenta. Można przypuszczać, że producent wolał minimalnie zaniżyć podawaną wartość SEM, by nie narazić się na zarzut niedotrzymania parametrów.

**3.2** Producent nie podał żadnej informacji o oporze wewnętrznym ogniwa. Jaki wzorzec należałoby przyjąć, gdzie szukać informacji o nim, by ocenić wiarygodność uzyskanego wyniku?

Nie mamy informacji o oporze wewnętrznym ogniwa. Możemy przyjąć, że otrzymana wartość jest właściwa, ale możemy tę wartość również zweryfikować np. skontaktować się z producentem baterii.

**3.3** Na podstawie wyników doświadczenia (wartości współczynników 'a' i 'b' prostej optymalnej) oblicz  $I_{\max}$  badanego ogniwa i oszacuj jego niepewność pomiarową.

W naszym obwodzie popłynie prąd zwarcia o maksymalnej wartości natężenia, gdy opór zewnętrzny będzie równy zero, czyli zakładamy, że  $U = 0$  V, zatem:

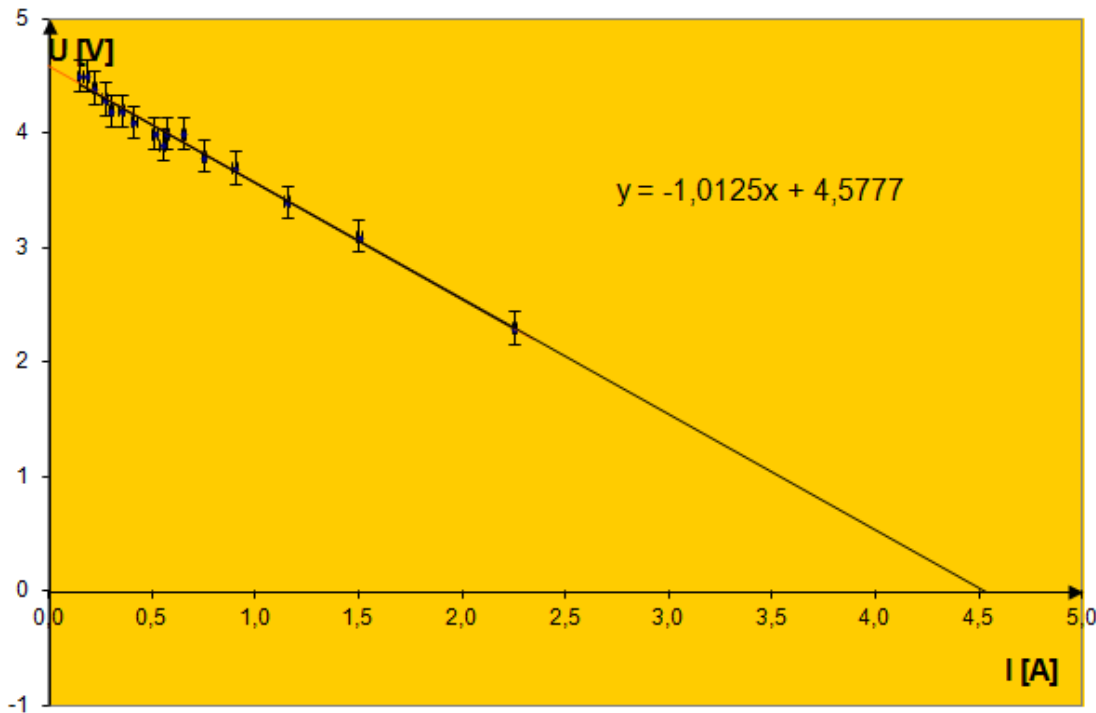
$$I_{\max} = \frac{\mathcal{E}}{r}$$

Po podstawieniu wyznaczonych wartości siły elektromotorycznej i oporu wewnętrznego otrzymamy:

$$I_{\max} = 4,52 \text{ A}$$

Jak widać, jest to wartość znacznie przekraczająca oba zakresy użytego w doświadczeniu amperomierza.

- Wykorzystaj czynności opisane w części II.4 do wskazania wartości  $I_{\max}$  na wykresie  $U(I)$ .



Na wykresie wartość natężenia prądu zwarcia możemy odczytać w punkcie przecięcia wykresu z osią odciętych. Jak widać wartość ta jest zbliżona do wartości wyliczonej wcześniej.

Znamy niepewności wyznaczenia siły elektromotorycznej i oporu wewnętrznego, obliczmy więc niepewność wyznaczenia natężenia prądu zwarcia.

$$I_{\max} = \frac{\mathcal{E}}{r}$$

Niepewność względna natężenia prądu zwarcia wynosi:

$$\frac{\Delta I_{\max}}{I_{\max}} = \frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}} + \frac{\Delta r}{r}$$

Stąd:

$$\Delta I_{\max} = \left( \frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}} + \frac{\Delta r}{r} \right) \cdot I_{\max}$$

Po wstawieniu danych liczbowych i obliczeniach otrzymamy:

$$\Delta I_{\max} = 0,16 \text{ A}$$

Tak więc ostatecznie mamy  $I_{\max} = (4,52 \pm 0,16) \text{ A}$

#### 4. Inne uwagi do organizacji i przebiegu doświadczenia.

4.1 W trakcie doświadczenia zmieniono zakres amperomierza. Czy zabieg ten jest widoczny w wynikach doświadczenia?

Amperomierz użyty w doświadczeniu miał nie tylko różne zakresy, ale także różne dokładności; mógł także mieć na tych dwóch zakresach różne opory wewnętrzne. Fakt zmiany zakresu możemy zauważyć w postaci niewielkiego „skoku” w charakterystyce; skok ten przypada na moment przełączenia zakresu. Jednak skok ten mieści się w granicach niepewności pomiarowej na obu skalach, więc nie ma on znaczenia dla uzyskanych wyników.

**4.2** Idealny woltomierz powinien mieć nieskończony opór wewnętrzny, zaś idealny amperomierz powinien mieć opór zerowy.

- Z czym należy porównać opór wewnętrzny użytego w doświadczeniu woltomierza, by stwierdzić, że w przybliżeniu spełnia on rolę woltomierza idealnego?

Opór użytego w doświadczeniu woltomierza  $R_V = 6 \text{ k}\Omega$ . Jest on 200 razy większy od maksymalnego oporu potencjometru użytego w tym doświadczeniu. Relacja ta upoważnia do stwierdzenia, że użyty woltomierz może być traktowany jako idealny.

- Uzasadnij tezę, że natężenie prądu  $I_V$  płynącego przez woltomierz nie przekracza 1 mA.

Maksymalną wartość natężenia  $I_V$  możemy oszacować, korzystając z II prawa Kirchhoffa dla oczka zawierającego ogniwo i woltomierz (patrz rys. 1.). Jeśli pominiemy opór  $r$  wobec  $R_V$ , to otrzymamy:

$$I_V = \frac{\varepsilon}{R_V} = 0,75 \text{ mA}$$

- Wartość ta jest górną granicą **błędu systematycznego** popełnianego w doświadczeniu w związku z przyjęciem, że amperomierz wskazuje natężenie prądu płynącego przez ogniwo. Rozstrzygnij, czy wskazania amperomierza są **systematycznie** zaniżone czy zawyżone w związku ze skończoną wartością oporu wewnętrznego woltomierza.

Sposób podłączenia amperomierza (patrz rys. 1.) powoduje, że wskazuje on natężenie prądu płynącego przez potencjometr. Prąd płynący przez ogniwo jest większy od wskazań amperomierza, gdyż jest on sumą tych wskazań oraz natężenia  $I_V$ . Tak więc wskazania amperomierza są systematycznie zaniżone w stosunku do rzeczywistości o wartość mniejszą niż 1 mA.

- Wskaż właściwe uzupełnienie zdania i uzasadnij swój wybór: „**Błąd systematyczny** (o którym mowa wyżej) w porównaniu z niepewnością pomiarową wynikającą z cech użytego amperomierza [praktycznie nie wpływa na wynik doświadczenia i może być pominięty w analizie / powinien być uwzględniony w ocenie niepewności pomiarowej ostatecznego wyniku doświadczenia / zdecydowanie dominuje w tym doświadczeniu, co podważa wiarygodność uzyskanych wyników].

Wybór ten wynika z porównania błędu systematycznego (wynosi on mniej niż 1 mA) z wartością niepewności pomiarowej (wynosi ona 0,012 A, czyli 12 mA) i stwierdzenia, że błąd systematyczny jest o ponad jeden rząd wielkości mniejszy od niepewności pomiarowej pojedynczego odczytu natężenia prądu.

- Dlaczego w tym doświadczeniu nie jest istotna znajomość oporu wewnętrznego amperomierza?

Po pierwsze, sposób podłączenia woltomierza (patrz rys. 1.) powoduje, że wskazuje on napięcie panujące na badanym ogniwie (zgodnie z jego przeznaczeniem w tym doświadczeniu) niezależnie od właściwości amperomierza.

Po drugie, opór wewnętrzny amperomierza sumuje się z oporem potencjometru do wypadkowego oporu w tej gałęzi obwodu. Opór ten nie był w doświadczeniu mierzony,

## „Pomiar oporu wewnętrznego woltomierza”

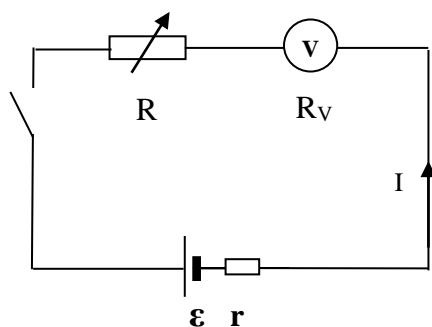
### I. Z pracowni fizycznej.

Wykonano doświadczenie, którego celem jest wyznaczenie oporu wewnętrznego woltomierza.

#### I.1 Podstawy teoretyczne.

W §3.2.9 e-podręcznika przedstawiono podstawowe informacje o miernikach elektrycznych. Wspomniano tam m.in., że opór idealnego woltomierza powinien być nieskończenie wielki, zaś w realnych obwodach stosuje się na ogół woltomierze o oporach wewnętrznych  $R_V$  dużo większych od innych oporów w tych obwodach. Woltomierz wskazujący napięcie pomiędzy swoimi zaciskami, wskazuje jednocześnie napięcie panujące na tym elemencie, z którym jest połączony równolegle. Dzięki dużemu oporowi wewnętrznemu woltomierz pobiera prąd o natężeniu pomijalnym wobec prądu płynącego przez badany element.

Nieco inaczej postępuje się, gdy badanym elementem obwodu jest sam woltomierz. W celu wyznaczenia jego oporu wewnętrznego łączy się go szeregowo z opornikiem o regulowanym oporze elektrycznym  $R$ , który jest rzędu oporu wewnętrznego  $R_V$ . Schemat obwodu wykorzystanego w doświadczeniu pokazano na rys. 1.



Rys. 1. Obwód do wyznaczenia oporu wewnętrznego woltomierza. Przyjmuje się, że  $r \ll R_V$ .

#### Oczekiwane wyniki.

Drugie prawo Kirchhoffa (patrz §3.2.8 e-podręcznika), zastosowane do obwodu na rys. 1, pozwala zapisać dwa równania, przewidujące wskazania woltomierza, oznaczone symbolem  $U$ :

$$I = \frac{\varepsilon}{R + R_V} \quad \text{oraz} \quad U = R_V \cdot I$$

W zapisie przyjęto, że opór wewnętrzny zasilacza  $r$  jest pomijalnie mały wobec oporu  $R_V$ . Po wylimitowaniu z tych równań natężenia prądu  $I$ , które w tym doświadczeniu nie jest mierzone, uzyskujemy:

$$U = \varepsilon \frac{R_V}{R + R_V} \quad (1)$$

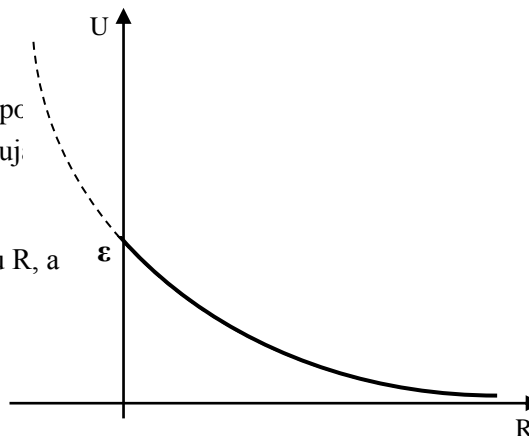
Związek ten opisuje zależność napięcia  $U$  wskazywanego przez woltomierz od wartości oporu  $R$ , połączonego z nim szeregowo. Jest to zależność hiperboliczna, a więc nieliniowa, zbliżona do funkcji odwrotnie proporcjonalnej. Orientacyjny wykres  $U(R)$  przedstawia rys. 2.



Rys. 2. Zależność - zgodnie ze wzorem (1) - napięcia woltomierza od szeregowo połączonego z nim oporu

Linia ciągłą pokazano fragment hiperboli obejmujący obszar  $R \geq 0$ , czyli dziedzinę pomiarów.

Linia przerywaną pokazano fragment hiperboli, odpowiadający ujemnym wartościom argumentu  $R$ , a więc niemającym interpretacji fizycznej.



### Linearyzacja wyników pomiarów.

Pomiar wykonano przede wszystkim w celu wyznaczenia wartości  $R_v$ . Jednak uzyskany wynik będzie wiarygodny tylko wtedy, gdy okaże się, że uzyskane dane doświadczalne układają się zgodnie z zależnością (1). Jedną ze stosowanych metod rozstrzygnięcia tego problemu jest linearyzacja danych pomiarowych, czyli odpowiednie przekształcenie jednej lub obu zmiennych. Efektem tego przekształcenia jest doprowadzenie teoretycznej zależności pomiędzy zmiennymi przekształconymi do postaci funkcji liniowej.

W przypadku funkcji (1) wykorzystujemy odwrócenie zmiennej zależnej  $U$ , zaś zmienną niezależną  $R$  pozostawiamy bez zmian:

$$\frac{1}{U} = \frac{R + R_v}{\varepsilon R_v} = \frac{1}{\varepsilon R_v} \cdot R + \frac{1}{\varepsilon} \quad (2)$$

Uzyskaliśmy liniową zależność pomiędzy oporem  $R$  ( $X = R$ ) a odwrotnością napięcia  $U$  ( $Y = 1/U$ ).

$$Y = a \cdot X + b \quad (2')$$

Współczynnik kierunkowy tej zależności 'a' to odwrotność iloczynu SEM źródła napięcia i oporu woltomierza, zaś jej współczynnik wolny 'b' jest odwrotnością SEM źródła napięcia:

$$b = \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{b} \quad (3)$$

$$a = \frac{1}{\varepsilon R_v} \Rightarrow R_v = \frac{b}{a} \quad (4)$$

Wyrażenie (3) pozwoli porównać otrzymany współczynnik wolny 'b' z wartością SEM źródła napięcia użytego w doświadczeniu. Wyrażenie (4) pozwoli uzyskać wartość oporu  $R_v$  badanego woltomierza.

## I.2 Przebieg doświadczenia

### Elementy obwodu.

- Obwód z rys. 1 może być zasilany baterią lub zasilaczem laboratoryjnym (takiego użyto w doświadczeniu; nastawiono przy tym  $\varepsilon = 6 \text{ V}$ ). Istotne jest, by SEM  $\varepsilon$  źródła napięcia była w całym doświadczeniu stała. Przyjmuje się, że opór wewnętrzny źródła  $r$  może być pominięty wobec oporów  $R$  i  $R_v$ .
- W doświadczeniu użyto analogowego woltomierza, o zakresie do 6 V, klasie 1,5, z podziałką co 0,1 V i oporze wewnętrznym  $R_v = 6 \text{ k}\Omega$  (według danych producenta).
- Jako opornik regulowany posłużyła opornica dekadowa; wykorzystano dekady „x1 k $\Omega$ ” oraz „x10 k $\Omega$ ” do nastawiania oporów  $R$  w zakresie od 0 do 30 k $\Omega$ . Dla wykorzystanych dekad producent opornicy podaje, że dokładność nastawionego oporu nie jest gorsza niż 0,5%.
- Wyłącznik w obwodzie nie jest konieczny. W przypadku używania baterii, zapobiega on niepotrzebnemu jej wyczerpywaniu, co mogłoby doprowadzić do spadku wartości jej SEM.

### Wyniki pomiarów.

W doświadczeniu nastawiono kolejno kilkanaście różnych wartości oporu  $R$ . Wybrano je tak, by uzyskiwać zauważalne zmiany wskazań woltomierza. Nie są one rozłożone równomiernie - wynika to z kształtu zależności  $U(R)$  (rys. 2), która przewiduje największe zmiany  $U$  w okolicach niewielkich wartości  $R$ .

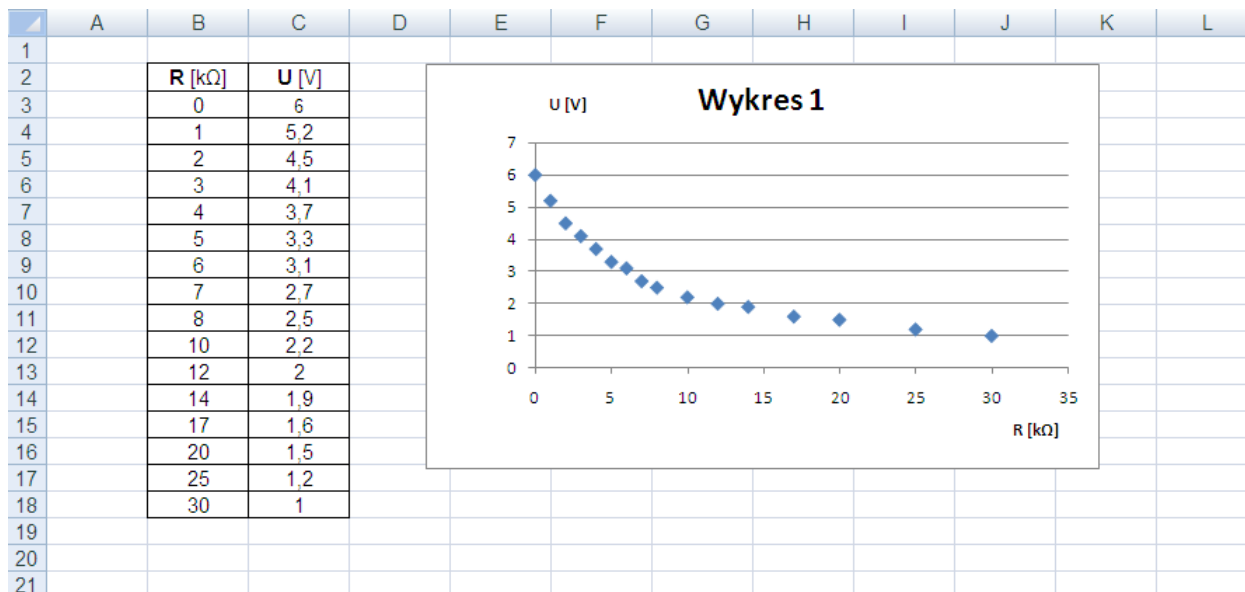
Dla każdej wartości  $R$  zamknięto na krótki czas obwód, odczytano wskazania  $U$  woltomierza, zanotowano je, po czym obwód otwarto. Uzyskane wyniki pomiarów przedstawia poniższa tabela.

R [k $\Omega$ ]	0	1	2	3	4	5	6	7
U [V]	6,0	5,2	4,5	4,1	3,7	3,3	3,1	2,7
R [k $\Omega$ ]	8	10	12	14	17	20	25	30
U [V]	2,5	2,2	2,0	1,9	1,6	1,5	1,2	1,0

## II. W pracowni informatycznej.

### Analiza danych z pomiaru.

1. Do pustego arkusza wpisz wyniki pomiarów w dwóch kolumnach: „R” oraz „U”. Sporządź wykres (1) zależności U(R). Wykres winien zawierać same dane pomiarowe, bez jakiegokolwiek linii łączącej punkty.



2. Dokonaj linearyzacji wyników pomiarów.

2.1 Przygotuj kolumnę „1/U” zawierającą odwrotności wartości wpisanych w kolumnie „U”.

2.2 Przygotuj kolumnę „Δ(1/U)” zawierającą niepewności pomiarowe odwrotności napięcia (kolumna ta przyda się w punkcie 3.1). Wypełnij ją wartościami zgodnie ze wzorem:

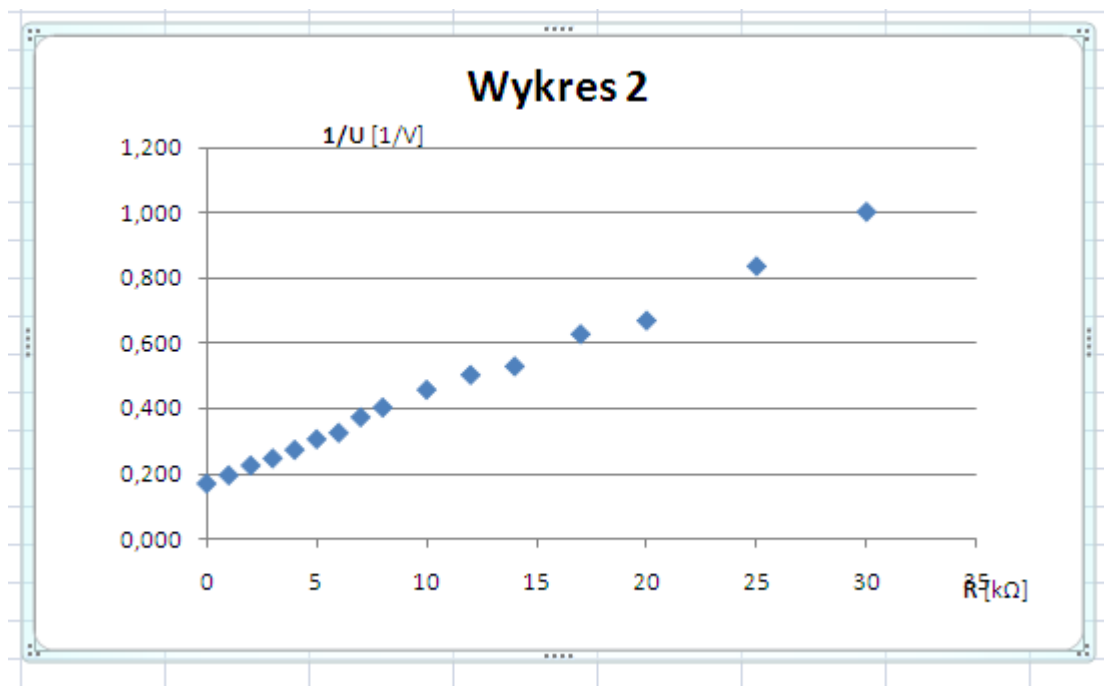
$$\Delta\left(\frac{1}{U}\right) = \frac{\Delta U}{U^2} \quad (5)$$

Wykorzystaj przy tym wartości z kolumny „U” oraz wartość  $\Delta U = 0,14 \text{ V}$ , która wynika z precyzji pojedynczego odczytu napięcia na użytym w doświadczeniu woltomierzu oraz z jego klasy (zgodnie z opisem w §3.2.9 e-podręcznika).

	A	B	C	D	E	F
1						
2		R [kΩ]	U [V]	ΔU [V]	1/U [1/V]	Δ(1/U) [1/V]
3		0	6	0,14	0,167	0,004
4		1	5,2	0,14	0,192	0,005
5		2	4,5	0,14	0,222	0,007
6		3	4,1	0,14	0,244	0,008
7		4	3,7	0,14	0,270	0,01
8		5	3,3	0,14	0,303	0,013
9		6	3,1	0,14	0,323	0,015
10		7	2,7	0,14	0,370	0,019
11		8	2,5	0,14	0,400	0,022
12		10	2,2	0,14	0,455	0,029
13		12	2	0,14	0,500	0,035
14		14	1,9	0,14	0,526	0,039
15		17	1,6	0,14	0,625	0,055
16		20	1,5	0,14	0,667	0,062
17		25	1,2	0,14	0,833	0,097
18		30	1	0,14	1,000	0,140
19						

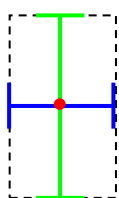
- 2.3 Sporządź wykres (2) zależności  $\frac{1}{U}$  (R) - odwrotności napięcia od oporu.

Wykres ten winien także zawierać same punkty, bez jakiegokolwiek linii łączącej te punkty.



3. Skopiuj wykres (2) i wklej jako nowy w tym samym arkuszu. Na nowym wykresie (3) dodasz do punktów elementy służące ilościowej analizie wyników. Rozważ zmniejszenie rozmiaru punktów, by nie dominowały one na wykresie. W tym celu wskaż kursorem dowolny z punktów, kliknij „prawą myszą”, wybierz „Formatuj serie danych” i otwórz zakładkę „Desenie”.

Dodaj do wykresu (3) prostokąty niepewności pomiarowej (tzw. prostokąty błędów). Polega to na otoczeniu każdego punktu prostokątem, wewnątrz którego najprawdopodobniej znajduje się prawdziwe położenie punktu. Trzeba to wykonać w dwóch niezależnych od siebie krokach, oddzielnie dla osi rzędnych, oddzielnie dla osi odciętych. W efekcie pojedynczy punkt pomiarowy na wykresie może wyglądać następująco:



- kolorem niebieskim zaznaczono słupek niepewności oporu  $R$ , odłożonego na osi odciętych;
- kolorem zielonym zaznaczono słupek niepewności napięcia  $U$ , odłożonego na osi rzędnych;
- linią przerywaną zaznaczono cały prostokąt niepewności pomiarowej, który nie pojawi się na wykresie.

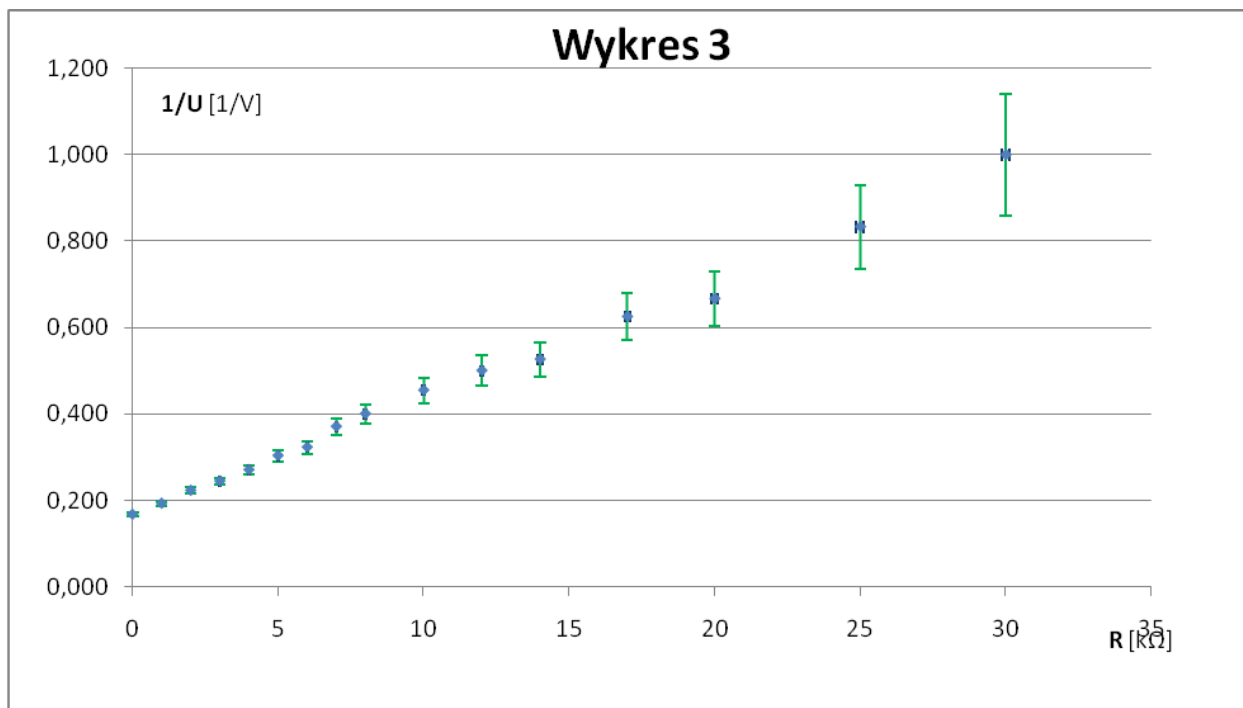
3.1 Dodaj do punktów słupki niepewności pomiarowej odwrotności napięcia, odłożonej na osi rzędnych.

W „Narzędzia wykresów” wybierz „Układ” otwórz zakładkę „Słupki błędów”, następnie „więcej opcji słupków błędu” - wybierz opcję „Oba” i dla „wielkości błędu” wybierz „Niestandardowa”. Ten ostatni wybór wynika z faktu, że wartości niepewności odwrotności napięcia  $\Delta(1/U)$  nie są jednakowe. Wskaż dwukrotnie (raz dla „+”, drugi raz dla „-”) przygotowaną (w punkcie 2.2) kolumnę „ $\Delta(1/U)$ ” jako zawierającą wartość błędu dla poszczególnych wartości  $1/U$ .

3.2 Dodaj do punktów słupki niepewności pomiarowej oporu, odłożonego na osi odciętych.

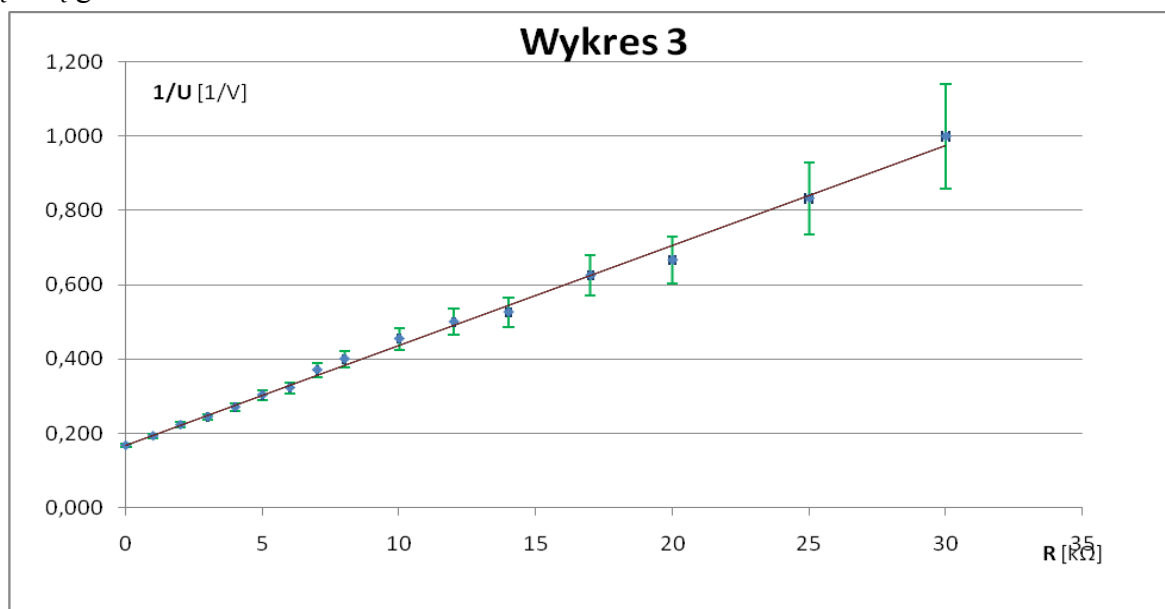
Postępowanie będzie podobne jak w poprzednim punkcie: wartości niepewności  $\Delta R$  nie są jednakowe (nie mają „stałej wartości”). Przygotuj więc kolumnę „ $\Delta R$ ”, która będzie zawierała iloczyny każdej wartości  $R$  pomnożonej przez procentową niepewność oporu, podaną przez producenta opornicy dekadowej i równą 0,5%.

Następnie wybierz „Słupki błędów poziome” i opcję „Niestandardowa” dla „wielkości błędu”. W ramach tej opcji wskaż dwukrotnie (raz dla „+”, drugi raz dla „-”) przygotowaną kolumnę „ $\Delta R$ ” jako zawierającą wartość błędu dla poszczególnych wartości  $R$ .



3.3 Dodaj do punktów tzw. linię trendu. Najedź kursorem na jeden z punktów pomiarowych i kliknij „prawą myszą”; wybierz „Dodaj linię trendu” w menu Narzędzia wykresów. Linia trendu to optymalna linia, która niekoniecznie łączy punkty, lecz przechodzi możliwie blisko pomiędzy nimi. Program Excel pozwala wybrać różne postacie funkcyjne linii optymalnej - zgodnie z przewidywaniami teoretycznymi dla zlinearyzowanych zmiennych wybierz funkcję liniową („typ linii trendu - liniowy”).

Rozważ taki dobór grubości linii trendu, by zapewnić przejrzystość wykresu. W tym celu wskaż linię kursorem, kliknij „prawą myszą”, wybierz „formatuj linię trendu” i w „Deseniach” dobierz żadaną grubość.



4. Uzupełnij wynik pomiaru o wartości i niepewności pomiarowe współczynników kierunkowego ‘a’ i wolnego ‘b’ prostej optymalnej. Wykorzystaj te wartości do wyznaczenia oporu wewnętrznego  $R_v$  badanego woltomierza oraz SEM  $\epsilon$  użytego ogniwa.

4.1 Przygotuj pod wynikami pomiarów i tablicą obliczeń tabelę do obliczania współczynnika a i b funkcji liniowej  $Y = a \cdot X + b$  opisywanej w części „Linearyzacja wyników pomiarów”.

42			
43			
44	a, b		
45	Δa, Δb		
46			
47	ε = 1/b		
48	Rv=b/a		
49			

Zaznacz tablicę o wymiarach 2x2 (jak wyżej). W komórkę w lewym górnym rogu tablicy wprowadź funkcję REGLINP(). (Funkcja ta zwraca statystykę opisującą trend liniowy dopasowany do znanych punktów danych, dopasowując linię prostą przy użyciu metody najmniejszych kwadratów, znany\_y to zbiór już znanych wartości w reakcji  $y=mx+b$ .) Krótko, możemy dzięki tej funkcji arkusza określić współczynnik  $a$  i  $b$  funkcji liniowej prezentowanej linią trendu. Dalej działaj zgodnie z poniższym opisem.

Za pomocą rozwiniętego okna dialogowego wprowadź jako zmienną „znane\_y” kolumnę „1/U” arkusza; jako zmienną „znane\_x” wprowadź kolumnę „R” arkusza. Stałym logicznym „stała” i „statystyka” przypisz wartości 1. Po pojawieniu się w lewej górnej komórce liczby, wciśnij klawisz F2, a po nim CTRL+SHIFT+ENTER. W zaznaczonej tablicy 2x2 pojawią się cztery liczby. Dwie górne to, odpowiednio, wartości współczynnika kierunkowego ‘a’ i wolnego ‘b’ optymalnej prostej, poprowadzonej na wykresie (3). Dwie dolne to niepewności pomiarowe Δa i Δb tych współczynników; niepewności te są obliczone na podstawie rozrzutu punktów wokół optymalnej prostej. W opisie komórek uwzględnij odpowiednie jednostki współczynników.

- 4.2 Pod tablicą z wartościami współczynników ‘a’ i ‘b’ przygotuj miejsce na wpisanie wartości SEM ε i jej niepewności pomiarowej Δε. Za wartość ε przyjmij, zgodnie ze wzorem (3), odwrotność współczynnika wolnego ‘b’. Za niepewność Δε przyjmij niepewność odwrotności współczynnika ‘b’, zgodnie ze wzorem:

$$\Delta \varepsilon = \Delta \left( \frac{1}{b} \right) = \frac{\Delta b}{b^2}$$

- 4.3 Przygotuj miejsce i wpisz wartości oporu woltomierza  $R_v$  i jego niepewności  $\Delta R_v$ . Za wartość  $R_v$  przyjmij, zgodnie ze wzorem (4), iloraz współczynników wolnego ‘b’ przez kierunkowy ‘a’. Niepewność  $\Delta R_v$  oblicz w dwóch etapach. Najpierw wyraż niepewność względną  $R_v$  jako sumę niepewności względnych obu współczynników:

$$\frac{\Delta R_v}{R_v} = \frac{\Delta b}{a} + \frac{\Delta b}{b} \Rightarrow$$

a następnie na tej podstawie wyraż bezpośrednio  $\Delta R_v$ :

$$\Rightarrow \Delta R_v = R_v \cdot \left( \frac{\Delta b}{a} + \frac{\Delta b}{b} \right)$$

42				
43		[1/(V*kΩ)]	[1/V]	
44	a, b	0,0269	0,168	
45	Δa, Δb	0,0005	0,006	
46				
47	ε = 1/b		ε ± Δε [V]	5,95    0,22
48	Rv=b/a			
49			Rv ± ΔRv [kΩ]	6,24    0,34
50				
51				
52	Δε = Δb/b <sup>2</sup>			
53				
54	ΔRV=Rv(Δa/a+Δb/b)			
55				

### III. Do pracowni fizycznej.

Kolejnym krokiem wykonanym w programie odpowiadają elementy analizy i interpretacji uzyskanych wyników. Poniżej podano pytania, na które fizyk winien odpowiedzieć i wyciągnąć stosowne wnioski (niektóre przykładowe wnioski zawarto w tekście). Zwróć uwagę na trzy kategorie pytań i wniosków:

- prowadzące do realizacji założonych celów doświadczenia, stanowiące argumentację za (lub przeciw) zgodności wyników z oczekiwaniami;
- stanowiące stwierdzenie osiągnięcia (lub nie) założonych celów;
- stanowiące element podsumowania doświadczenia i dyskusji uzyskanych wyników.

Pamiętaj, analizując wyniki i wyciągając wnioski, że masz do czynienia z wynikami pomiarów, które są obciążone niepewnością pomiarową. Wynik doświadczenia nie jest zbiorem punktów czy wykresem funkcji, sporządzonym na podstawie wzoru.

#### 1. Wstępna (jakościowa) ocena ułożenia punktów pomiarowych na wykresie (1).

1.1 Czy wyniki pomiarów układają się wzdłuż jakiegokolwiek sensownej linii? Wniosek:

- jeśli tak, oznacza to, że napięcie wskazywane przez woltomierz rzeczywiście zależy od oporu szeregowo połączonego z woltomierzem, jak przewiduje teoria;
- jeśli nie - czyli punkty ułożyły się chaotycznie lub na linii poziomej - to .....

1.2 Czy którykolwiek pojedynczy pomiar jawnie odstaje od tendencji wskazanej przez pozostałe? Wniosek:

- jeśli tak, oznacza to, że najprawdopodobniej popełniono błąd [przypadkowy/ systematyczny / gruby] (wskaz właściwą nazwę dla pomyłki) i wtedy należy.....;
- jeśli nie, to .....

1.3 Czy ułożenie punktów przypomina - choćby w przybliżeniu - oczekiwaną linię „teoretyczną” (rys. 2)? Wniosek:

- jeśli tak, oznacza to, że .....
- jeśli nie, to .....

#### 2. Wstępna (jakościowa) ocena ułożenia punktów pomiarowych na wykresie (2) - po linearyzacji. [Odpowiedzi na kolejne pytania są udzielane przy założeniu, że na pytania 1.1 i 1.3 odpowiedziano „tak”.]

2.1 Czy dane zlinearyzowane układają się wzdłuż jakiegokolwiek sensownej linii? Wniosek:

- jeśli tak, oznacza to, że napięcie wskazywane przez woltomierz rzeczywiście zależy od oporu szeregowo połączonego z woltomierzem, jak przewiduje teoria;
- jeśli nie - czyli punkty ułożyły się chaotycznie lub na linii poziomej - to .....

2.2 Czy ułożenie punktów przypomina - choćby w przybliżeniu - linię prostą? Wniosek:

- jeśli tak, oznacza to, że .....
- jeśli nie, to dane oryginalne nie są ułożone zgodnie z .... **lub** zaproponowana procedura linearyzacyjna jest dobrana w sposób .....

#### 3. Ocena dopasowania funkcji liniowej do danych pomiarowych - wykres (3). [Odpowiedzi na kolejne pytania są udzielane przy założeniu, że na pytania 2.1 i 2.2 odpowiedziano „tak”.]

3.1 Czy zlinearyzowane wyniki pomiarów układają się losowo wokół zaproponowanej linii prostej optymalnej, niektóre nad nią a inne pod nią? Wniosek:

- jeśli tak, oznacza to, że napięcie wskazywane przez woltomierz jest - zgodnie z teorią - powiązane z oporem R zależnością, o której mowa w ....., a stwierdzone drobne odstępstwa wynikają z .....
- jeśli nie - czyli punkty układają się wyraźnie wokół jakiejś linii krzywej - to .....

3.2 Czy prosta optymalna przechodzi przez ogromną większość prostokątów niepewności pomiarowej? Wniosek:

- jeśli tak, oznacza to, że rozrzut punktów wokół prostej optymalnej mieści się w granicach .....

- jeśli nie - czyli prosta optymalna omija sporą część prostokątów niepewności - to należy przypuszczać że któryś z użytych przyrządów (miernik lub opornica dekadowa) ma gorszą/lepszą [wskaż właściwe] precyzję, niż wynika to z jego cech, podanych przez producenta. Taki przyrząd należy wymienić na nowy i .....

**4. Interpretacja i ocena uzyskanych wartości współczynników optymalnej funkcji liniowej. Opis właściwości badanego woltomierza.**

Jeśli ocena z punktów 1, 2 i 3 wypadła pozytywnie, to współczynniki kierunkowy 'a' oraz wolny 'b' optymalnej prostej pozwalają określić - zgodnie ze wzorami (3) i (4) - SEM  $\varepsilon$  źródła oraz opór wewnętrzny  $R_V$  woltomierza.

**4.1 Czy uzyskana wartość  $\varepsilon$ , z uwzględnieniem niepewności pomiarowej  $\Delta\varepsilon$ , jest zgodna z wartością SEM, nastawioną w doświadczeniu? Wniosek:**

- jeśli tak, oznacza to, że uzyskana wartość  $R_V$  [zyskuje na wiarygodności/traci na wiarygodności / ani jedno, ani drugie] (wskaż właściwe), gdyż .....

- jeśli nie, oznacza to, że uzyskana wartość  $R_V$  [zyskuje na wiarygodności/traci na wiarygodności / ani jedno, ani drugie] (wskaż właściwe), gdyż .....

**4.2 Czy uzyskana wartość  $R_V$  jest zgodna z informacją o mierniku podaną przez producenta?**

- jeśli tak, oznacza to, że .....

- jeśli nie, to wśród możliwych przyczyn rozbieżności można wskazać: .....

**5. Inne uwagi do organizacji i przebiegu doświadczenia.**

**5.1 W trakcie doświadczenia najpierw korzystano z dekady „x1 k $\Omega$ ” opornicy; w pewnym momencie rozpoczęto wykorzystywanie dekady „x10 k $\Omega$ ”. Czy zabieg ten jest widoczny w wynikach doświadczenia?**

**5.2 Idealny woltomierz powinien mieć nieskończony opór wewnętrzny; idealny amperomierz powinien mieć opór zerowy. Wskaż i sprecyzuj właściwe dokończenie (dokończenia) zdania: „Na podstawie uzyskanych wyników można stwierdzić, że badany w doświadczeniu woltomierz może być uznany - w przybliżeniu - za idealny w obwodzie, w którym ...**

a) ... nie ma innych woltomierzy, bądź występujące w nim woltomierze mają wszystkie [istotnie mniejszy/porównywalny/istotnie większy] opór wewnętrzny niż  $R_V$ .”

b) ... nie ma amperomierzy, bądź występujące w nim amperomierze mają wszystkie [istotnie mniejszy/porównywalny/istotnie większy] opór wewnętrzny niż  $R_V$ .”

c) ... oporniki połączone z woltomierzem równolegle mają [istotnie mniejszy/ porównywalny/istotnie większy] opór niż  $R_V$ .”

d) ... oporniki połączone z woltomierzem szeregowo mają [istotnie mniejszy/ porównywalny/istotnie większy] opór niż  $R_V$ .”

e) ... [w każdym realnym obwodzie bez względu na parametry użytych w nim innych elementów/w żadnym realnym obwodzie bez względu na parametry użytych w nim innych elementów].



## Rozwiązania, wskazówki, komentarze

Uwaga: Poniższe „rozwiązania, wskazówki, komentarze” odnoszą się do danych pomiarowych przedstawionych w tabeli w części I ćwiczenia. Należy więc pamiętać, że dla wyników pomiaru wykonanego przez Ciebie, w Twojej pracowni, właściwe mogą być nieco inne sformułowania czy odpowiedzi.

### 1. Wstępna (jakościowa) ocena ułożenia punktów pomiarowych na wykresie (1).

#### 1.1 Czy wyniki pomiarów układają się wzdłuż jakiegokolwiek sensownej linii?

Tak, wyniki pomiarów układają się wzdłuż określonej linii malejącej, obserwujemy więc tutaj pewną prawidłowość. Widać zależność wskazywanego napięcia przez woltomierz od oporu połączonego szeregowo z woltomierzem.

Wniosek: napięcie wskazywane przez woltomierz rzeczywiście zależy od wartości oporu szeregowo połączonego z woltomierzem, jak przewiduje teoria.

#### 1.2 Czy którykolwiek pojedynczy pomiar jawnie odstaje od tendencji wskazanej przez pozostałe?

Nie. Żaden pojedynczy pomiar nie odstaje od ogólnej tendencji w sposób zwracający szczególną uwagę.

Wniosek: można przyjąć, że w pomiarach nie popełniono błędu grubego.

#### 1.3 Czy ułożenie punktów przypomina - choćby w przybliżeniu - oczekiwaną linię „teoretyczną” (rys. 2)?

Tak, ułożenie punktów wskazuje, że mogą one pasować do linii pokazanej na rys. 2.

Wniosek: uzyskana zależność jest zatem jakościowo zgodna zarówno ze wzorem (1) jak i z wykresem na rys. 2.

### 2. Wstępna (jakościowa) ocena ułożenia punktów pomiarowych na wykresie (2) - po linearyzacji.

#### 2.1 Czy dane zlinearyzowane układają się wzdłuż jakiegokolwiek sensownej linii?

Tak, dane pomiarowe układają się najprawdopodobniej wzdłuż linii prostej.

Wniosek: napięcie wskazywane przez woltomierz rzeczywiście zależy od oporu szeregowo połączonego z woltomierzem w sposób, jaki przewiduje teoria.

#### 2.2 Czy ułożenie punktów przypomina - choćby w przybliżeniu - linię prostą?

Tak; wspomniano już o tym wcześniej.

Wniosek: warto przeprowadzić ilościową analizę danych zlinearyzowanych.

### 3. Ocena dopasowania funkcji liniowej do danych pomiarowych - wykres (3).

#### 3.1 Czy zlinearyzowane wyniki pomiarów układają się losowo wokół zaproponowanej linii prostej optymalnej, niektóre nad nią a inne pod nią?

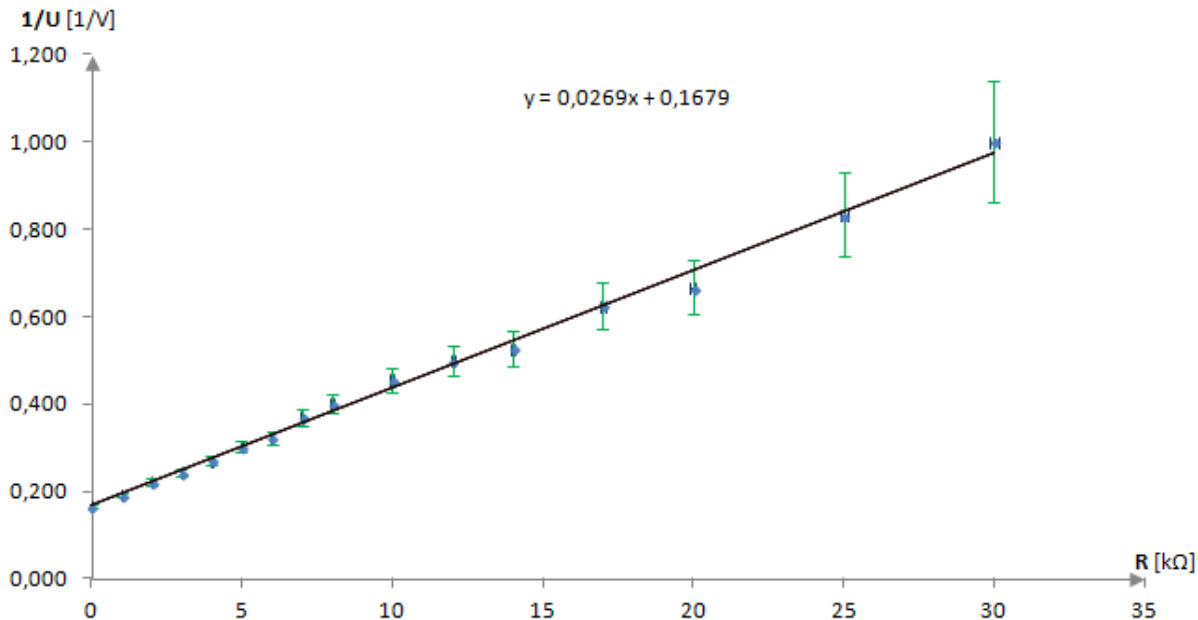
Tak. Punkty nie leżą wprawdzie dokładnie na linii optymalnej, ale jest to zgodne z faktem, że współrzędne tych punktów są wynikiem pomiaru. Odstępstwa punktów od prostej optymalnej mają charakter losowy i nie wskazują żadnego innego trendu niż liniowy.

Wniosek: napięcie wskazywane przez woltomierz jest - zgodnie z teorią - powiązane z oporem R zależnością, o której mowa we wzorze (2) oraz równoważnym wzorze (1). Stwierdzone drobne odstępstwa wynikają z niepewności pomiarowej.

#### 3.2 Czy prosta optymalna przechodzi przez ogromną większość prostokątów niepewności pomiarowej?

Tak, prosta optymalna przechodzi przez wszystkie prostokąty niepewności pomiarowej.

Wniosek: rozrzut punktów wokół prostej optymalnej mieści się w granicach tej niepewności, a równoważne wzory (1) i (2) prawidłowo opisują zależność  $U(R)$ .



**4. Interpretacja i ocena uzyskanych wartości współczynników optymalnej funkcji liniowej. Opis właściwości badanego woltomierza.**

Ocena z punktów 1, 2 i 3 wypadła pozytywnie. Oznacza to, że współczynniki kierunkowy 'a' oraz wolny 'b' optymalnej prostej pozwalają określić - zgodnie ze wzorami (3) i (4) - SEM  $\varepsilon$  źródła oraz opór wewnętrzny  $R_V$  woltomierza. Funkcja REGLINP() pozwoliła wyznaczyć:

$$a = (0,0269 \pm 0,0005) \text{ 1/(V} \cdot \text{k}\Omega) \quad \text{oraz} \quad b = (0,168 \pm 0,006) \text{ 1/V.}$$

Możemy więc uzupełnić wzór (3) i przeprowadzić obliczenia:

$$b = \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{b} = 5,95 \text{ V}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\Delta b}{b} \Rightarrow \Delta\varepsilon = 0,22 \text{ V}$$

Podobnie postępujemy ze wzorem (4):

$$a = \frac{1}{\varepsilon R_V} \Rightarrow R_V = \frac{b}{a} = 6,24 \text{ k}\Omega$$

$$R_V = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{\Delta R_V}{R_V} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} \Rightarrow \Delta R_V = 0,34 \text{ k}\Omega$$

**4.1 Czy uzyskana wartość  $\varepsilon$ , z uwzględnieniem niepewności pomiarowej  $\Delta\varepsilon$ , jest zgodna z wartością SEM, nastawioną w doświadczeniu?**

Tak. Uzyskana wartość  $\varepsilon = (5,95 \pm 0,22) \text{ V}$  jest zgodna z nastawioną w doświadczeniu wartością SEM - 6 V.

Wniosek: Choć odtworzenie wartości SEM nie było celem doświadczenia, to stwierdzona zgodność podnosi wiarygodność wszystkich uzyskanych wyników, w tym wartości  $R_V$ .

**4.2 Czy uzyskana wartość  $R_V$  jest zgodna z informacją o mierniku podaną przez producenta?**

Tak. Uzyskana wartość  $R_V = (6,24 \pm 0,34) \text{ k}\Omega$  jest zgodna z wartością podaną przez producenta - 6 kΩ.

Wniosek: Wskazuje to na pełną zgodność wyniku z oczekiwaniami.

Podsumowując możemy powiedzieć, że wynik przeprowadzonego doświadczenia potwierdza teoretyczne przewidywania, zgodnie z którymi wskazanie woltomierza zależy od połączonego szeregowo z tym woltomierzem oporu. Uzyskany przebieg punktów pomiarowych jest w pełni zgodny z przewidywaniami teoretycznymi (wzory (1) i (2)), zaś wyniki liczbowe uzyskane na bazie parametrów zależności (współczynniki 'a' i 'b' we wzorze (2)) są zgodne z oczekiwaniami.

## 5. Inne uwagi do organizacji i przebiegu doświadczenia.

**5.1** W trakcie doświadczenia najpierw korzystano z dekady „x1 k $\Omega$ ” opornicy; w pewnym momencie rozpoczęto wykorzystywanie dekady „x10 k $\Omega$ ”. Czy zabieg ten jest widoczny w wynikach doświadczenia?

Nie. Zabieg ten nie spowodował żadnych „skoków” w przebiegu zależności, ani innych nieoczekiwanych efektów.

**5.2** Idealny woltomierz powinien mieć nieskończony opór wewnętrzny; idealny amperomierz powinien mieć opór zerowy. Wskaż i sprecyzuj właściwe dokończenie (dokończenia) zdania: „Na podstawie uzyskanych wyników można stwierdzić, że badany w doświadczeniu woltomierz może być uznany - w przybliżeniu - za idealny w obwodzie, w którym ...

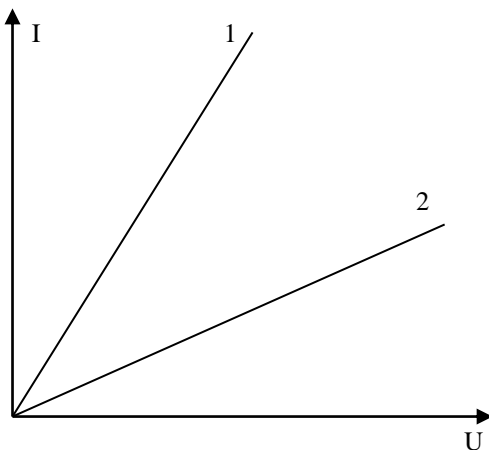
- a) ~~... nie ma innych woltomierzy, bądź występujące w nim woltomierze mają wszystkie [istotnie mniejszy/porównywalny/istotnie większy] opór wewnętrzny niż  $R_v$ .~~
- b) ~~... nie ma amperomierzy, bądź występujące w nim amperomierze mają wszystkie [istotnie mniejszy/porównywalny/istotnie większy] opór wewnętrzny niż  $R_v$ .~~
- c) **... oporniki połączone z woltomierzem równolegle mają [istotnie mniejszy/porównywalny/istotnie większy] opór niż  $R_v$ .**
- d) ~~... oporniki połączone z woltomierzem szeregowo mają [istotnie mniejszy/porównywalny/istotnie większy] opór niż  $R_v$ .~~
- e) ~~... [w każdym realnym obwodzie bez względu na parametry użytych w nim innych elementów/w żadnym realnym obwodzie bez względu na parametry użytych w nim innych elementów].~~

## „Element nieliniowy w obwodzie - cz. I”

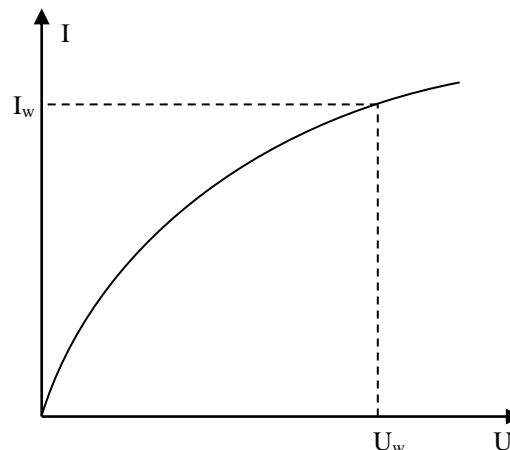
### I. Z pracowni fizycznej.

#### 1. Element nieliniowy obwodu.

W paragrafie 2.4 trzeciego tomu e-podręcznika opisano doświadczenie, w którym badana jest charakterystyka napięciowo-prądowa opornika. Uzyskana tam zależność  $I(U)$  jest liniowa (rys. 1.). Oznacza to, że opór elektryczny  $R$  badanego opornika jest stały - nie zależy ani od napięcia ani od natężenia prądu. Nachylenie (stromizna) linii prostej informują nas o oporze elektrycznym badanego elementu - im nachylenie większe, tym opór ten jest mniejszy.



Rys. 1. Dwie liniowe charakterystyki. Różnice w nachyleniu pokazują, że opór elementu „1” (stromsza linia) jest mniejszy od oporu elementu „2” (mniej stroma linia).



Rys. 2. Charakterystyka elementu nieliniowego. W miarę wzrostu napięcia, nachylenie linii maleje. Pokazuje to, że opór elementu wzrasta w miarę wzrostu napięcia i natężenia prądu. Napięcie  $U_w$  i natężenie  $I_w$  wyznaczają wzorcowy punkt na charakterystyce.

Nieco inny wynik uzyskano by, gdyby badanym elementem obwodu była żarówka. Jej włókno nagrzewa się w miarę zwiększania napięcia i natężenia prądu, co powoduje wzrost oporu elektrycznego włókna. W efekcie natężenie prądu rośnie, owszem, wraz z napięciem, ale wzrost ten jest nieliniowy i coraz słabszy (rys. 2.). Żarówka jest więc przykładem nieliniowego elementu obwodu.

#### 2. Matematyczny opis charakterystyki $I(U)$ żarówki.

Najprostszy model osiągnięcia przez włókno żarówki równowagi termicznej z otoczeniem pozwala stwierdzić, że zależność natężenia prądu płynącego przez włókno od przyłożonego do niego napięcia ma postać funkcji potęgowej:

$$I(U) = I_w \cdot (U/U_w)^\alpha \quad (1)$$

Wielkości  $U_w$  i  $I_w$  to odpowiednio napięcie (dowolnie wybrane z obszaru charakterystyki) i zmierzone natężenie prądu odpowiadające temu napięciu. W praktyce najczęściej przyjmuje się dla  $U_w$  tzw. napięcie znamionowe (nominalne), podawane przez producenta żarówki. Przykładowo, dla żarówki przystosowanej do napięcia sieciowego w Polsce,  $U_w = 230$  V. Wtedy  $I_w$  to tzw. natężenie znamionowe; wynika ono z podawanej przez producenta mocy znamionowej  $P_w$ , zgodnie z równaniem:

$$P_w = I_w \cdot U_w \quad (2)$$

Wykładnik  $\alpha$  w zależności (1) ma wartość 0,6 w sytuacji „włókna idealnego” (włókno jest traktowane jako ciało doskonale czarne, otoczone próżnią o temperaturze 0 K). W realnej sytuacji, zależnie od budowy

żarówki, wartość wykładnika  $\alpha$  może wynosić ok. 0,3-0,4. Wartość tę wyznacza się doświadczalnie - patrz „Problem komputerowy „Element nieliniowy w obwodzie - cz. II”.

Zależność (1) można odwrócić i wyrazić napięcie  $U$  zasilające żarówkę w funkcji natężenia prądu  $I$  przepływającego przez żarówkę; otrzymamy także funkcję potęgową:

$$U(I) = U_w \cdot (I/I_w)^{1/\alpha} \quad (3)$$

### 3. Szeregowe połączenie opornika i żarówki.

Jeśli połączymy szeregowo dwa oporniki (elementy liniowe) o stałych oporach  $R_1$  i  $R_2$  i podłączymy je do źródła napięcia o sile elektromotorycznej  $\varepsilon$  (patrz § 2.1 trzeciego tomu e-podręcznika), to II prawo Kirchhoffa (patrz § 2.8) pozwala w prosty sposób określić natężenie prądu  $I$  w takim obwodzie:

$$\varepsilon - U_1 - U_2 = 0 \Rightarrow I = \varepsilon / (R_1 + R_2) \quad (4)$$

Uwzględniamy przy tym, że napięcia na każdym z oporników są powiązane z ich oporami zależnością liniową:

$$U_1 = R_1 \cdot I \quad \text{oraz} \quad U_2 = R_2 \cdot I$$

Sprawa się nieco komplikuje, gdy łączymy szeregowo opornik z żarówką (rys. 3).

Równanie wynikające z II prawo Kirchhoffa przyjmuje wtedy postać:

$$\varepsilon - U_R - U = 0 \Rightarrow \varepsilon - R \cdot I - U = 0$$

Symbolem  $U$  oznaczono tu napięcie panujące na żarówce. Wyraża się ono poprzez natężenie prądu równaniem (3), co daje:

$$\varepsilon - R \cdot I - U_w \cdot (I/I_w)^{1/\alpha} = 0 \quad (5)$$

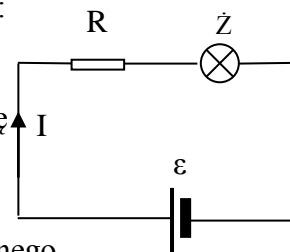
Wyznaczenie natężenia prądu  $I$  z tego równania w postaci algebraicznego wyrażenia jest dla dowolnego  $\alpha$  niemożliwe!

### 4. Komputerowe rozwiązanie równania (5).

Równanie (5) można jednak rozwiązać tabelarycznie, graficznie oraz numerycznie. Można się przy tym posłużyć odpowiednio zaprogramowanym arkuszem kalkulacyjnym. Koncepcja rozwiązania tabelarycznego i graficznego wymaga zauważenia, że równanie to można przedstawić jako równość dwóch funkcji; argumentem obu jest natężenie prądu  $I$ :

$$\varepsilon - R \cdot I = U_w \cdot (I/I_w)^{1/\alpha} \quad (6)$$

Po lewej stronie znaku równości stoi liniowa funkcja  $I$ ; jej wartość dla  $I = 0$  wynosi  $\varepsilon$  i jest ona malejąca. Po prawej stronie widzimy funkcję potęgową, której wartość dla  $I = 0$  wynosi zero; jest ona rosnąca. Musi więc istnieć taka wartość  $I$ , dla której obie funkcje są sobie równe (ich wykresy się wtedy przetną) - ta właśnie wartość jest rozwiązaniem równania (5). Wartość tę znajdziemy - w przybliżeniu - porównując tabele wartości oraz wykresy obu funkcji.



rys. 3. Opornik i żarówka połączone szeregowo ze źródłem napięcia.

## II. W pracowni informatycznej.

### Rozwiązanie tabelaryczne i graficzne równania (5).

1. Ustaw parametry zadania:

- wykładnik  $\alpha$ , domyślnie  $\alpha = 0,6$ ;
- napięcie znamionowe żarówki  $U_w$  (w woltach), domyślnie  $U_w = 230$  V;
- moc znamionowa żarówki  $P_w$  (w watach), domyślnie  $P_w = 100$  W;
- natężenie znamionowe  $I_w$  (w amperach), obliczane przez program zgodnie ze wzorem (2);
- znamionowy opór elektryczny żarówki  $R_w$  (w omach), obliczane przez program zgodnie z prawem Ohma;
- siłę elektromotoryczną źródła napięcia  $\varepsilon$  (w woltach), domyślnie  $\varepsilon = 230$  V;
- wartość oporu  $R$  (w omach), domyślnie  $R = 500$   $\Omega$ .

	A	B
1		
2	$\alpha$	
3	0,6	
4	$U_w$ [V]	
5	230	
6	$P_w$ [W]	
7	100	
8	$I_w$ [A]	
9	0,43	
10	$R_w$ [ $\Omega$ ]	
11	529,0	
12	$\varepsilon$ [V]	
13	230	
14	$R$ [ $\Omega$ ]	
15	500,0	

$$A9: =A7/A5$$

$$B11: =A5/A9$$

2. Przygotuj tabelę:

	A	B	C	D	E	F	G
1			U [V]	I[A]	UR [V]	$\epsilon - UR$ [V]	
2			10,0				
3			20,0				
4			30,0				
5			40,0				
6			50,0				
7			60,0				
8			70,0				
9			80,0				
10			90,0				
11			100,0				
12			110,0				
13			120,0				
14			130,0				
15			140,0				
16			150,0				
17			160,0				
18			170,0				
19			180,0				
20			190,0				
21			200,0				
22			210,0				
23			220,0				
24			230,0				
25							

- Pierwszą kolumnę tabeli wypełnij wartościami napięcia. Zaczynij od wartości rzędu 5%  $U_w$  (około 10V). W kolejnych wierszach zwiększaj ją równomiernie co 10 tak, by uzyskać około 20 wartości, kończących się na  $U_w$ . W kolumnie tej znajdują się wartości funkcji po prawej stronie równości (6).
- W następnej kolumnie (I) przygotuj tabelę z wartościami natężenia prądu, odpowiadającymi napięciom z kolumny „U” zgodnie ze wzorem (1). Ta kolumna będzie zawierała argumenty odkładane na osi odciętych (oś „x”)

$$I[A] \quad D1: =\$A\$9*(C2/\$A\$5)^{\$A\$3}$$

- Kolejne dwie kolumny („UR” i „ $\epsilon - UR$ ”) zawierają: napięcia na oporniku, zgodnie z formułą  $U_R = R \cdot I$  oraz funkcję po lewej stronie równości (6).

$$U_R[V] \quad E1: =D2*\$A\$15$$

$$\epsilon - UR [V] \quad F1: =\$A\$13-E2$$

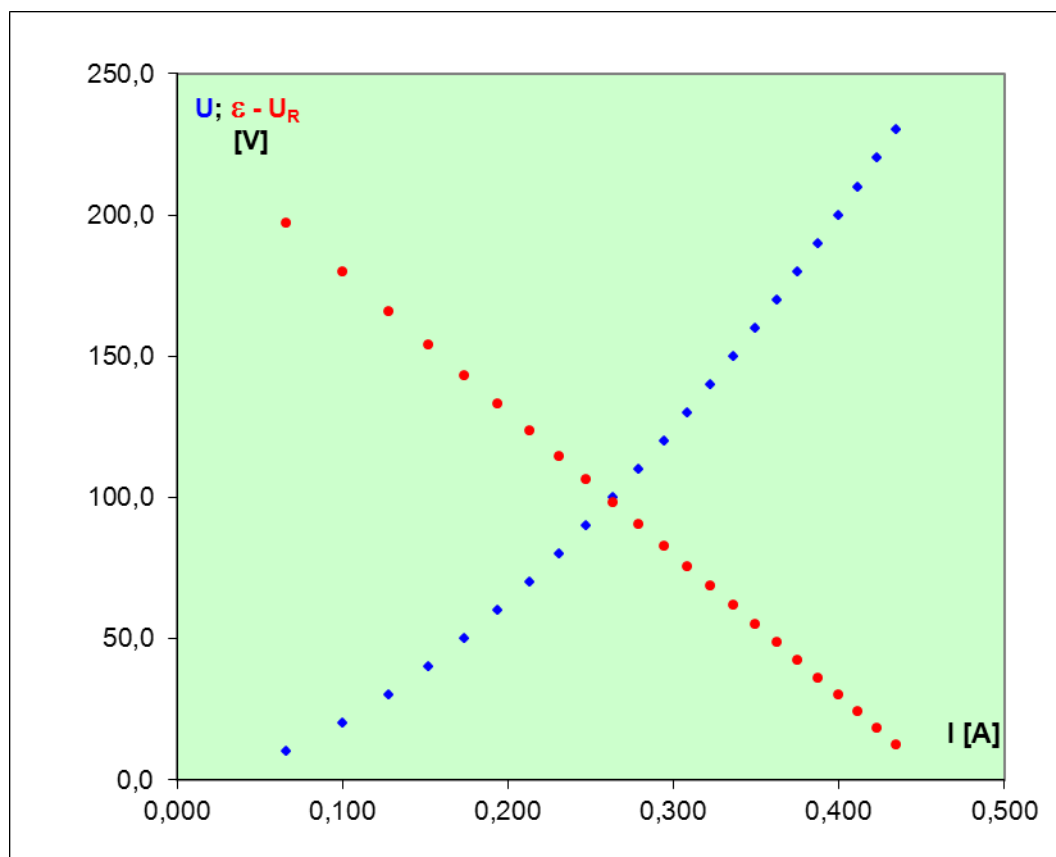
Zablokuj przy tym możliwość zmiany przez użytkownika parametrów obliczanych przez program.

## Wypełniona tabela

	A	B	C	D	E	F	
1			U [V]	I[A]	U <sub>R</sub> [V]	$\varepsilon - U_R$ [V]	
2	$\alpha$		10,0	0,066	33,1	196,9	
3	0,6		20,0	0,100	50,2	179,8	
4	U <sub>w</sub> [V]		30,0	0,128	64,0	166,0	
5	230		40,0	0,152	76,1	153,9	
6	P <sub>w</sub> [W]		50,0	0,174	87,0	143,0	
7	100		60,0	0,194	97,1	132,9	
8	I <sub>w</sub> [A]		70,0	0,213	106,5	123,5	
9	0,43		80,0	0,231	115,4	114,6	
10	R <sub>w</sub> [ $\Omega$ ]		90,0	0,248	123,8	106,2	
11	529,0		100,0	0,264	131,9	98,1	
12	$\varepsilon$ [V]		110,0	0,279	139,7	90,3	
13	230		120,0	0,294	147,1	82,9	
14	R [ $\Omega$ ]		130,0	0,309	154,4	75,6	
15	500,0		140,0	0,323	161,4	68,6	
16			150,0	0,336	168,2	61,8	
17			160,0	0,350	174,9	55,1	
18			170,0	0,363	181,3	48,7	
19			180,0	0,375	187,7	42,3	
20			190,0	0,388	193,8	36,2	
21			200,0	0,400	199,9	30,1	
22			210,0	0,412	205,8	24,2	
23			220,0	0,423	211,7	18,3	
24			230,0	0,435	217,4	12,6	



6. Przedstaw na wspólnym wykresie funkcje  $U(I)$  oraz  $\varepsilon - U_R(I)$ .



7. Znajdź na wykresie punkt przecięcia obu funkcji i odczytaj - orientacyjnie - wartość natężenia prądu  $I$  tego punktu. Wartość ta jest rozwiązaniem równania (5) - określa ona natężenie prądu płynącego w obwodzie z rys. 3 z zadanymi przez Ciebie parametrami. Możesz także znaleźć wiersz, w którym wartości z kolumny „U” i „ $\varepsilon - U_R$ ” są najbardziej do siebie zbliżone. Wartość z kolumny „I” w tym wierszu jest rozwiązaniem równania (5).
8. Zaproponuj i wykonaj modyfikację (uzupełnienie) arkusza, dzięki któremu będzie można odczytać tabelaryczne i graficzne rozwiązanie równania (5) z lepszą dokładnością.

**Rozwiązanie numeryczne równania (5).**

Do dokładnego wyznaczenia dokładnego rozwiązania użyj narzędzia *Solver*

1. Przygotuj tabelę:

	H	I	J	K	L	M	N
1							
21							
22							
23		U [V]	I[A]	UR [V]	$\varepsilon - U_R$ [V]	$\varepsilon - U_R$ [V] - U	
24							
25							
26							

2. Do komórek wprowadź wzory:

J24:  $=\$A\$9*(I24/\$A\$5)^{\$A\$3}$

K24:  $=J24*\$A\$15$

L24:  $=\$A\$13-K24$

M24:  $=L24-I24$

Komórkę I24 pozostaw pustą. Tu zostanie wpisany wynik rozwiązania

3. Z Dane/Analiza uruchom **Solver** i wprowadź parametry:

Parametry dodatku Solver

Ustaw cel:

Na:  Maks  Min  Wartość:

Przez zmienianie komórek zmiennych:

Podlegających ograniczeniom:

Ustaw wartości nieujemne dla zmiennych bez ograniczeń

Wybierz metodę rozwiązywania:

Metoda rozwiązywania

W przypadku gładkich nieliniowych problemów dodatku Solver wybierz aparat nieliniowy GRG. Dla liniowych problemów dodatku Solver wybierz aparat LP simpleks, natomiast w przypadku problemów, które nie są gładkie, wybierz aparat ewolucyjny.



### III. Do pracowni fizycznej.

Wykorzystaj przygotowany arkusz do rozwiązania następujących dwóch problemów.

1. Żarówka ma nominalne parametry  $U_w = 230 \text{ V}$  i  $P_w = 100 \text{ W}$ . Wykładnik zależności  $I(U)$  tej żarówki  $\alpha = 0,6$ . Żarówkę tę włączono do domowej instalacji w Stanach Zjednoczonych, gdzie napięcie sieciowe wynosi  $110 \text{ V}$ .
  - a) Oblicz moc  $P$  z jaką świecić będzie ta żarówka.
  - b) Oblicz opór elektryczny  $R$  żarówki podłączonej do napięcia  $110 \text{ V}$  i porównaj ten opór z jej oporem nominalnym  $R_w$ .
  - c) Porównaj moc  $P$  z mocą  $P'$  obliczoną przy założeniu, że opór żarówki nie zmienia się wraz z napięciem.
2. Żaróweczka do latarki ma nominalne parametry  $U_w = 6 \text{ V}$  i  $P_w = 6 \text{ W}$ . Wykładnik zależności  $I(U)$  tej żarówki  $\alpha = 0,4$ . Żarówkę tę zasilono płaską baterią o SEM  $\varepsilon = 4,5 \text{ V}$  i oporze wewnętrznym  $r = 0,8 \Omega$ .
  - a) Oblicz moc  $P$  z jaką świeci ta żaróweczka.
  - b) Użytkownik, niezadowolony z uzyskanego efektu, połączył szeregowo dwie identyczne płaskie baterie i zasilił nimi żaróweczkę. Zbadaj, czy uzyskał on w ten sposób świecenie z nominalną mocą.

### Rozwiązania i komentarze

#### Zadanie 1

Dane zapisane w tabeli w arkuszu kalkulacyjnym mogą być przydatne do analizy różnych problemów. Spróbujmy obliczyć jaka będzie moc żarówki  $100 \text{ W}$  gdy podłączymy ją do sieci energetycznej w USA. Wykorzystamy znane wzory na moc:

$$P = U^2/R \text{ oraz } P = U \cdot I$$

i zaczerpniemy dane z tabeli.

	A	B	C	D	E	F	G
1			U [V]	I[A]	UR [V]	$\varepsilon - UR$ [V]	P[W]
2	$\alpha$		10,0	0,066	33,1	196,9	0,66258
3	0,6		20,0	0,100	50,2	179,8	2,00855
4	$U_w$ [V]		30,0	0,128	64,0	166,0	3,84264
5	230		40,0	0,152	76,1	153,9	6,0888
6	$P_w$ [W]		50,0	0,174	87,0	143,0	8,70137
7	100		60,0	0,194	97,1	132,9	11,6487
8	$I_w$ [A]		70,0	0,213	106,5	123,5	14,9071
9	0,43		80,0	0,231	115,4	114,6	18,4578
10	$R_w$ [ $\Omega$ ]		90,0	0,248	123,8	106,2	22,2856
11	529,0		100,0	0,264	131,9	98,1	26,3776
12	$\varepsilon$ [V]		110,0	0,279	139,7	90,3	30,723
13	230		120,0	0,294	147,1	82,9	35,3123
14	$R$ [ $\Omega$ ]		130,0	0,309	154,4	75,6	40,137
15	500,0		140,0	0,323	161,4	68,6	45,1898
16			150,0	0,336	168,2	61,8	50,464
17			160,0	0,350	174,9	55,1	55,9535
18			170,0	0,363	181,3	48,7	61,6529
19			180,0	0,375	187,7	42,3	67,5572
20			190,0	0,388	193,8	36,2	73,6616
21			200,0	0,400	199,9	30,1	79,962
22			210,0	0,412	205,8	24,2	86,4542
23			220,0	0,423	211,7	18,3	93,1347
24			230,0	0,435	217,4	12,6	100
25			98,9	0,262	131,1	98,9	25,9346
26							

	A	B	C	D	E	F	G
1			U [V]	I[A]	UR [V]	e - UR [V]	P[W]
2	$\alpha$		10,0	0,066	33,1	196,9	0,66258
3	0,6		20,0	0,100	50,2	179,8	2,00855
4	Uw [V]		30,0	0,128	64,0	166,0	3,84264
5	230		40,0	0,152	76,1	153,9	6,0888
6	Pw [W]		50,0	0,174	87,0	143,0	8,70137
7	100		60,0	0,194	97,1	132,9	11,6487
8	Iw [A]		70,0	0,213	106,5	123,5	14,9071
9	0,43		80,0	0,231	115,4	114,6	18,4578
10	Rw [Ω]		90,0	0,248	123,8	106,2	22,2856
11	529,0		100,0	0,264	131,9	98,1	26,3776
12	e [V]		110,0	0,279	139,7	90,3	30,723
13	230		120,0	0,294	147,1	82,9	35,3123
14	R [Ω]		130,0	0,309	154,4	75,6	40,137
15	500,0		140,0	0,323	161,4	68,6	45,1898
16			150,0	0,336	168,2	61,8	50,464
17			160,0	0,350	174,9	55,1	55,9535
18			170,0	0,363	181,3	48,7	61,6529
19			180,0	0,375	187,7	42,3	67,5572
20			190,0	0,388	193,8	36,2	73,6616
21			200,0	0,400	199,9	30,1	79,962
22			210,0	0,412	205,8	24,2	86,4542
23			220,0	0,423	211,7	18,3	93,1347
24			230,0	0,435	217,4	12,6	100
25			98,9	0,262	131,1	98,9	25,9346
26							

Policzmy teraz opór elektryczny podłączonej żarówki do instalacji o napięciu 110 V:

100,0	0,264	131,9	98,1	26,3776	R[Ω]
110,0	0,279	139,7	90,3	30,723	393,842
120,0	0,294	147,1	82,9	35,3123	
130,0	0,309	154,4	75,6	40,137	
140,0	0,323	161,4	68,6	45,1898	
150,0	0,336	168,2	61,8	50,464	
160,0	0,350	174,9	55,1	55,9535	
170,0	0,363	181,3	48,7	61,6529	
180,0	0,375	187,7	42,3	67,5572	
190,0	0,388	193,8	36,2	73,6616	
200,0	0,400	199,9	30,1	79,962	
210,0	0,412	205,8	24,2	86,4542	
220,0	0,423	211,7	18,3	93,1347	
230,0	0,435	217,4	12,6	100	529
98,9	0,262	131,1	98,9	25,9346	

Widać stąd, że opór żarówki podłączonej do instalacji o napięciu 230 V jest większy niż opór żarówki podłączonej do instalacji 110 V. Jest to zgodne z tym, co napisaliśmy wcześniej: żarówka ma nieliniową charakterystykę prądowo - napięciową. Zwróćmy uwagę, że zwiększając napięcie od 110 V do 230 V czyli 2,09 razy, obserwujemy wzrost natężenia prądu tylko 1,56 razy. Spowodowane jest to tym, że wskutek przepływu prądu elektrycznego przez włókno żarówki wzrasta temperatura włókna, zatem wzrasta opór:

$$528,7 \Omega > 393,8 \Omega$$

c) Gdyby żarówka miała charakterystykę liniową, czyli opór jej włókna nie ulegał zmianie pomimo zmiany napięcia, to moc żarówki powinna zmieniać się kwadratowo wraz z napięciem, zgodnie z równaniem:

$$\frac{P_w}{P'} = \frac{U_w^2 / R_w}{U'^2 / R'} = \left( \frac{U_w}{U'} \right)^2 = 4,37$$

W powyższym równaniu przyjęliśmy  $R' = R_w$ ,  $U_w = 230 \text{ V}$  i  $U = 110 \text{ V}$ . Uzyskany wynik oznacza, że moc  $P'$  wynosiłaby ok. 22,9 W.

Obliczona przy założeniu zadania moc jest więc mniejsza od mocy obliczonej w tabeli, która wynosi ok. 30,7 W. Przy stałej wartości oporu, moc malałaby więc silniej wraz ze spadkiem napięcia zasilającego żarówkę niż ma to miejsce w rzeczywistości, gdy jej opór także maleje wraz ze spadkiem napięcia.

## Zadanie 2

W tym zadaniu rolę opornika szeregowo połączonego z żaróweczką odgrywa wewnętrzny opór  $r$  użytej baterii płaskiej.

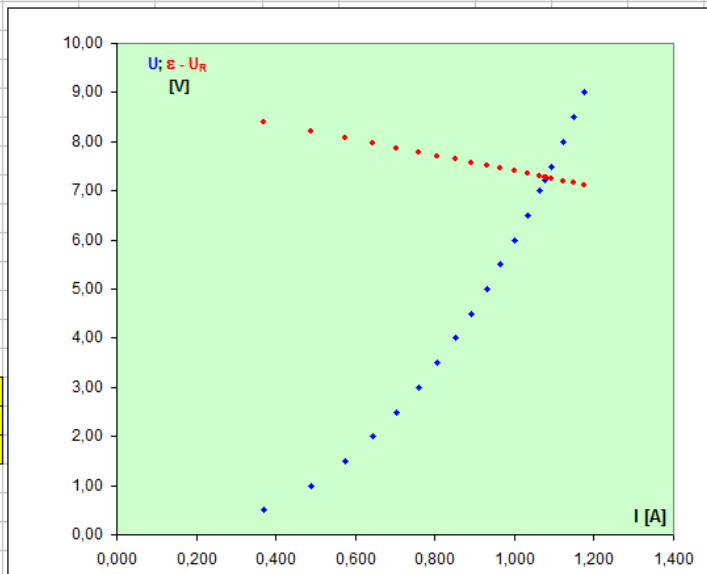
a) Zbudujmy w arkuszu tabelę analogiczną jak poprzednio, ale uwzględnijmy podane wartości wielkości fizycznych.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1			U [V]	I [A]	U <sub>r</sub> [V]	ε - U <sub>r</sub> [V]	P <sub>z</sub> [W]	R <sub>z</sub> [Ω]								
2	α		0,25	0,280	0,22	4,28										
3	0,4		0,50	0,370	0,30	4,20										
4	U <sub>w</sub> [V]		0,75	0,435	0,35	4,15										
5	6		1,00	0,488	0,39	4,11										
6	P <sub>w</sub> [W]		1,25	0,534	0,43	4,07										
7	6		1,50	0,574	0,46	4,04										
8	I <sub>w</sub> [A]		1,75	0,611	0,49	4,01										
9	1,00		2,00	0,644	0,52	3,98										
10	R <sub>w</sub> [Ω]		2,25	0,675	0,54	3,96										
11	6,0		2,50	0,705	0,56	3,94										
12	ε [V]		2,75	0,732	0,59	3,91										
13	4,5		3,00	0,758	0,61	3,89										
14	r [Ω]		3,25	0,783	0,63	3,87										
15	0,8		3,50	0,806	0,64	3,86										
16			3,75	0,829	0,66	3,837										
17			3,80	0,833	0,67	3,834	3,17	4,56								
18			3,85	0,837	0,67	3,830	3,22	4,60								
19			4,00	0,850	0,68	3,82										
20			4,25	0,871	0,70	3,80										
21			4,50	0,891	0,71	3,79										
22																

Jak widać, żaróweczka o parametrach podanych w zadaniu, zasilana płaską baterią, świecić będzie z mocą około 3,2 W, czyli niewiele ponad połowę mocy nominalnej. Jest to zrozumiałe - efektywne napięcie zasilające tę żarówkę wynosi ok. 3,82 V, podczas gdy nominalne jej napięcie wynosi 6 V. Stan ten zachęca do „eksperymentu” polegającego na zasileniu tej żarówki dwiema bateriami płaskimi. Musimy jednak pamiętać, że może się to skończyć przewoltowaniem żarówki (zasilenie jej napięciem większym od nominalnego), co może doprowadzić do jej przepalenia.

b) Aby dowiedzieć się jaka będzie moc żarówki, gdy SEM  $\varepsilon$  zwiększymy do 9 V, należy zmodyfikować tabelę. Pamiętajmy, że druga bateria ma także opór wewnętrzny, więc wypadkowy  $r = 1,6 \Omega$ .

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1			U [V]	I [A]	U <sub>r</sub> [V]	$\varepsilon - U_r$ [V]	P <sub>z</sub> [W]	R <sub>z</sub> [ $\Omega$ ]								
2	$\alpha$		0,50	0,370	0,59	8,41										
3	0,4		1,00	0,488	0,78	8,22										
4	U <sub>w</sub> [V]		1,50	0,574	0,92	8,08										
5	6		2,00	0,644	1,03	7,97										
6	P <sub>w</sub> [W]		2,50	0,705	1,13	7,87										
7	6		3,00	0,758	1,21	7,79										
8	I <sub>w</sub> [A]		3,50	0,806	1,29	7,71										
9	1,00		4,00	0,850	1,36	7,64										
10	R <sub>w</sub> [ $\Omega$ ]		4,50	0,891	1,43	7,57										
11	6,0		5,00	0,930	1,49	7,51										
12	$\varepsilon$ [V]		5,50	0,966	1,55	7,45										
13	9		6,00	1,000	1,60	7,40										
14	r [ $\Omega$ ]		6,50	1,033	1,65	7,35										
15	1,6		7,00	1,064	1,70	7,30										
16			7,22	1,077	1,72	7,277	7,77	6,70								
17			7,25	1,079	1,73	7,274	7,82	6,72								
18			7,28	1,080	1,73	7,271	7,87	6,74								
19			7,50	1,093	1,75	7,25										
20			8,00	1,122	1,80	7,20										
21			8,50	1,149	1,84	7,16										
22			9,00	1,176	1,88	7,12										



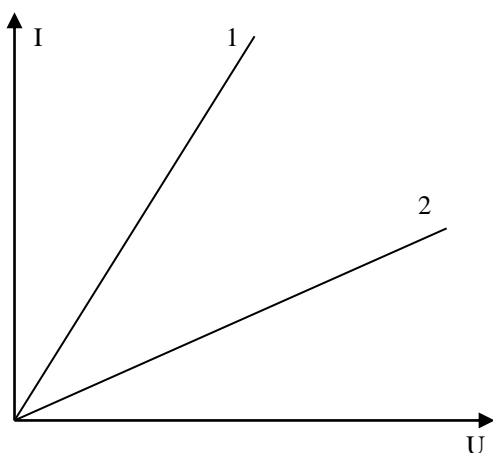
Uzyskana tabela oraz wykres pokazują, że teraz żarówka jest zasilana prądem o natężeniu ok. 1,08 A, przy efektywnym napięciu zasilającym ok. 7,28 V. Świeci więc ona z mocą około 7,87 W, czyli ok. 30% większą od mocy nominalnej. Należy zatem przypuszczać, że „żywot” owej żarówki będzie krótszy, niż przewidział to producent, choć nie powinno dojść do gwałtownego jej przepalenia natychmiast po włączeniu latarki.

## „Element nieliniowy w obwodzie - cz. II”

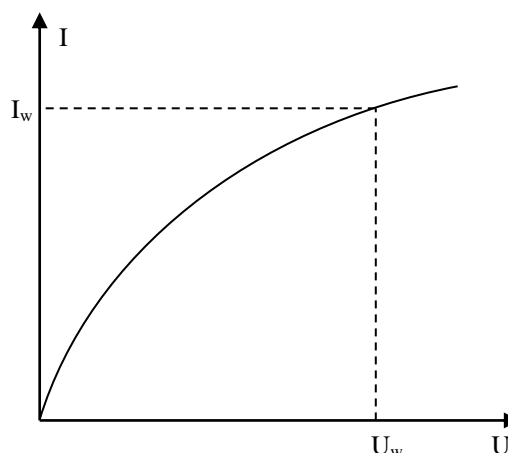
### I. Z pracowni fizycznej.

#### 1. Element nieliniowy obwodu.

W paragrafie 2.4 trzeciego tomu e-podręcznika opisano doświadczenie, w którym badana jest charakterystyka napięciowo-prądowa opornika. Uzyskana tam zależność  $I(U)$  jest liniowa (rys. 1.). Oznacza to, że opór elektryczny  $R$  badanego opornika jest stały - nie zależy ani od napięcia ani od natężenia prądu. Nachylenie (stromizna) linii prostej informują nas o oporze elektrycznym badanego elementu - im nachylenie większe, tym opór ten jest mniejszy.



Rys. 1. Dwie liniowe charakterystyki. Różnice w nachyleniu pokazują, że opór elementu „1” (stroma linia) jest mniejszy od oporu elementu „2” (mniej stroma linia).



Rys. 2. Charakterystyka elementu nieliniowego. W miarę wzrostu napięcia, nachylenie linii maleje. Pokazuje to, że opór elementu wzrasta w miarę wzrostu napięcia i natężenia prądu. Napięcie  $U_w$  i natężenie  $I_w$  wyznaczają wzorcowy punkt na charakterystyce.

Nieco inny wynik uzyskuje się, gdy badanym elementem obwodu jest żarówka. Jej włókno nagrzewa się w miarę zwiększania napięcia i natężenia prądu, co powoduje wzrost oporu elektrycznego włókna. W efekcie natężenie prądu rośnie, owszem, wraz z napięciem, ale wzrost ten jest nieliniowy i coraz słabszy (rys. 2.). Żarówka jest więc przykładem nieliniowego elementu obwodu. W tabeli 1. zamieszczono wynik badania charakterystyki żaróweczki choinkowej.

Tabela 1. Charakterystyka napięciowo-prądowa żaróweczki choinkowej.

U [V]	0,5	1	2	3	4	5	6	7
I [A]	0,096	0,123	0,166	0,202	0,227	0,250	0,273	0,288
8	9	10	11	12	13	14	15	16
0,304	0,320	0,335	0,348	0,362	0,371	0,391	0,402	0,413

#### 2. Matematyczny opis charakterystyki $I(U)$ żarówki.

Najprostszy model osiągnięcia przez włókno żarówki równowagi termicznej z otoczeniem pozwala stwierdzić, że zależność natężenia prądu płynącego przez włókno od przyłożonego do niego napięcia ma postać funkcji potęgowej:

$$I(U) = I_w \cdot (U/U_w)^\alpha \quad (1)$$



Wielkości  $U_w$  i  $I_w$  to odpowiednio napięcie (dowolnie wybrane z obszaru charakterystyki) i zmierzone natężenie prądu odpowiadające temu napięciu. W praktyce najczęściej przyjmuje się dla  $U_w$  tzw. napięcie znamionowe, podawane przez producenta żarówki. Dla żaróweczki choinkowej użytej w doświadczeniu napięcie znamionowe  $U_w = 15$  V. Wtedy  $I_w$  to tzw. natężenie znamionowe (obliczone dla naszej żaróweczki  $I_w = 0,4$  A); wynika ono z podawanej przez producenta mocy znamionowej  $P_w$  (nasza żaróweczka ma  $P_w = 6$  W), zgodnie z równaniem:

$$P_w = I_w \cdot U_w \quad (2)$$

Wykładnik  $\alpha$  w zależności (1) ma wartość 0,6 w sytuacji „włókna idealnego” (włókno jest traktowane jak ciało doskonale czarne, otoczone próżnią o temperaturze 0 K). W realnej sytuacji, zależnie od konstrukcji żarówki, wartość wykładnika  $\alpha$  może wynosić ok. 0,3-0,4. Wartość tę wyznacza się doświadczalnie, co jest jednym z celów wykonanego doświadczenia.

### 3. Linearyzacja funkcji potęgowej.

Pomiar wykonano nie tylko w celu wyznaczenia wykładnika  $\alpha$  - chodziło także o zbadanie, czy uzyskana charakterystyka może być uznana za funkcję wykładniczą. Jedną ze stosowanych w takiej sytuacji metod postępowania jest linearyzacja danych pomiarowych, czyli odpowiednie ich przekształcenie. Efektem tego przekształcenia jest doprowadzenie teoretycznej zależności pomiędzy nowopowstałymi zmiennymi do postaci funkcji liniowej.

W przypadku funkcji potęgowej (1) wykorzystujemy logarytmowanie zmiennych:

$$\frac{I}{I_w} = \left(\frac{U}{U_w}\right)^\alpha \quad (3)$$

Ilorazy  $I/I_w$  oraz  $U/U_w$  oznaczamy symbolem, odpowiednio,  $I'$  oraz  $U'$ ; są to wielkości bezwymiarowe. Po zlogarytmowaniu (typowo wybiera się logarytm naturalny, którego podstawą jest liczba  $e = 2,71828\dots$ ) obu stron równania (3) otrzymamy:

$$\ln(I') = \alpha \cdot \ln(U') \quad (4)$$

Uzyskaliśmy liniową zależność ( $Y = a \cdot X + b$ ) pomiędzy „zlogarytmowanym napięciem” ( $X = \ln(U')$ ) a „zlogarytmowanym natężeniem prądu” ( $Y = \ln(I')$ ). Współczynnik kierunkowy tej zależności ‘a’ to szukany wykładnik  $\alpha$ , zaś jej współczynnik wolny ‘b’ powinien wynosić zero.

## II. W pracowni informatycznej.

### cz. 1. Analiza danych z pomiaru.

1.1. Do komórek arkusza wprowadź parametry żarówki:

- nominalne napięcie  $U_w$ ,

- nominalną moc  $P_w$ ;

	A	B
1		
2	$U_w$ [V]	
3	15	
4	$P_w$ [W]	
5	6	

- oblicz nominalne natężenie prądu  $I_w$  zgodnie ze wzorem (2).

$$I_w[A] \quad A7: \quad =A5/A3$$

	A	B
6	$I_w$ [A]	
7	0,4	
8		
9		

1.2. Przygotuj tabelę na dane z pomiaru.

	A	B	C	D	E
1			$U$ [V]	$I$ [A]	
2	$U_w$ [V]				
3	15				
4	$P_w$ [W]				
5	6				
6	$I_w$ [A]				
7	0,4				
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16					
17					
18					
19					

1.3. Wykonaj pomiary i wpisz otrzymane wyniki do tabeli.

1.4. Sporządź wykres zależności  $I(U)$ .

1.5. Skopiuj wykres i wklej jako nowy w tym samym arkuszu. Na nowym wykresie dodaj linię trendu, zgodnie z przewidywaniami teoretycznymi należy wybrać funkcję potęgową („typ linii trendu - potęgowej”). Wśród opcji wybierz „Wyświetl równanie na wykresie”.

### cz. 2. Analiza danych przekształconych.

2.1. Do nowego arkusza skopiuj tabelę z danymi pomiarowymi. Uzupełnij ją kolumnami

$$U'[] \quad I'[] \quad X=\ln(U') \quad Y=\ln(I')$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1			U [V]	I [A]	U' []	I' []	X = ln(U')	Y = ln(I')	
2	U <sub>w</sub> [V]		0,5	0,096					
3	15		1,0	0,123					
4	P <sub>w</sub> [W]		2,0	0,166					
5	6		3,0	0,202					
6	I <sub>w</sub> [A]		4,0	0,227					
7	0,4		5,0	0,250					
8			6,0	0,273					
9			7,0	0,288					
10			8,0	0,304					
11			9,0	0,320					
12			10,0	0,335					
13			11,0	0,348					
14			12,0	0,362					
15			13,0	0,371					
16			14,0	0,391					
17			15,0	0,402					
18			16,0	0,413					
19									

U' (zawiera zmierzone napięcia podzielone przez U<sub>w</sub>) oraz I' (zawiera zmierzone natężenia prądu podzielone przez I<sub>w</sub>).

$$U' [] \quad E2: C2/A3 \quad I' [] \quad F2: =D2/A7$$

Zwróć uwagę, że uzyskane liczby są niemianowane, w większości mniejsze od jedności. Wynika to z faktu, że niemal wszystkie zmierzone wartości napięcia i natężenia prądu są mniejsze, odpowiednio, od U<sub>w</sub> i I<sub>w</sub>. W kolejnych dwóch kolumnach umieść logarytmy naturalne kolumn U' i I', zgodnie ze wzorem (4).

$$X = \ln(U') \quad G2: \ln(E2) \quad \text{oraz} \quad Y = \ln(I') \quad H2: =\ln(F2)$$

Typowe oznaczenie logarytmu naturalnego w aplikacjach informatycznych to „ln”. Zwróć uwagę, że uzyskane liczby są w większości mniejsze od zera. Wynika to z faktu, że niemal wszystkie logarytmowane liczby są mniejsze od jedności. Skutkiem tego będzie nieco „niecodzienny” wygląd wykresu zależności Y(X).

**2.2.** Sporządź ten wykres tak, by zawierał on same punkty, bez jakiegokolwiek linii łączącej.

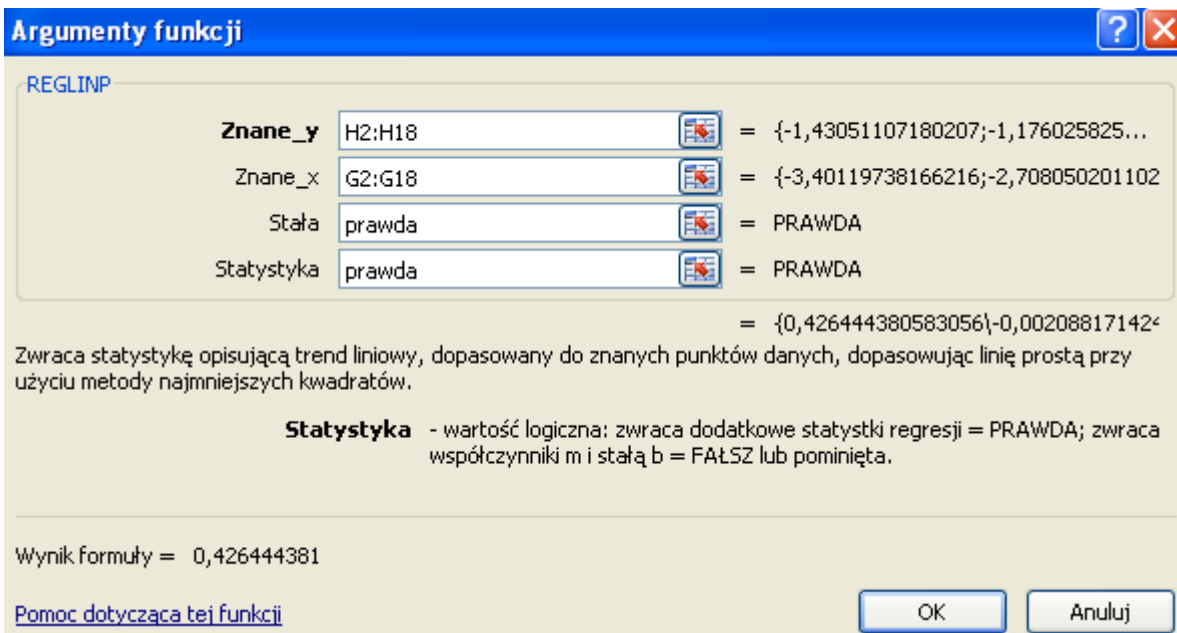
Skopiuj wykres i wklej jako nowy w tym samym arkuszu. Na nowym wykresie dodaj linię trendu. Zgodnie z przewidywaniami teoretycznymi należy wybrać funkcję liniową („typ linii trendu - liniowy”) - spodziewamy się bowiem, że przekształcone (zlinearyzowane) zmienne łączą zależność liniową.

**2.3.** Pod tabelą przygotuj miejsce na wynik funkcji REGLINP().

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
19									
20							a ± Δa	b ± Δb	
21									
22									
23									
24									
25									
26									

Zaznacz obszar G21:H22.

W komórkę G21 wprowadź funkcję REGLINP(). Uzupełnij parametry:



Parametry funkcji:

„znane\_y” kolumn Y arkusza;

„znane\_x” kolumnę X arkusza

Aby wynik funkcji pojawił się we wszystkich komórkach zaznaczonego obszaru zatwierdź wprowadzone dane CTRL+SHIFT+ENTER.

W zaznaczonej tablicy 2x2 pojawią się cztery liczby.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
19									
20							a ± Δa	b ± Δb	
21							0,426	-0,002	
22							0,003	0,004	
23									
24									

Dwie górne, to odpowiednio, wartości współczynnika kierunkowego ‘a’ i wolnego ‘b’ optymalnej prostej, poprowadzonej na wykresie. Dwie dolne to niepewności pomiarowe Δa i Δb tych współczynników; niepewności te są obliczone na podstawie rozrzutu punktów wokół optymalnej prostej.

Funkcja REGLINP oblicza statystykę dla linii, korzystając z metody najmniejszych kwadratów do obliczania linii prostej, która najlepiej pasuje do danych, a następnie zwraca tablicę opisującą tę linię.

Równanie dla linii jest następujące:

$$y = mx + b$$

Parametry funkcji:

**znane\_y** Argument wymagany. Jest to zestaw znanych wartości y spełniających zależność

$$y = mx + b.$$

**znane\_x** Argument opcjonalny. Jest to zestaw znanych wartości x spełniających zależność

$$y = mx + b.$$

Jeśli argument `znane_x` jest pominięty, przyjmuje się, że jest on tablicą {1;2;3;...} o takim samym rozmiarze co `znane_y`.

**stała** Argument opcjonalny. Wartość logiczna określająca, czy stała b ma być wymuszana jako równa 0.

Jeśli stała ma wartość PRAWDA lub jest pominięta, to stała b jest obliczana normalnie.

Jeśli stała ma wartość FAŁSZ, to stała b jest ustawiana jako równa 0, a wartości m są dostosowywane tak, aby wypełnić równanie  $y = mx$ .

**statystyka** Argument opcjonalny. Wartość logiczna określająca, czy mają być zwracane dodatkowe statystyki regresji.

Jeśli argument `statystyka` ma wartość PRAWDA, to funkcja REGLINP zwraca dodatkowe statystyki regresji

Jeśli argument `statystyka` ma wartość FAŁSZ lub jest pominięty, to funkcja REGLINP zwraca tylko współczynniki m i stałą b.

### III. Do pracowni fizycznej.

Kolejnym krokiem wykonanym w programie odpowiadają elementy analizy i interpretacji uzyskanych wyników. Poniżej podano pytania, na które fizyk winien odpowiedzieć i wyciągnąć stosowne wnioski (niektóre przykładowe wnioski zawarto w tekście).

#### 1.2. Wstępna ocena ułożenia punktów pomiarowych.

Czy wyniki pomiarów układają się wzdłuż sensownej linii? [Wniosek: jeśli tak, oznacza to, że natężenie prądu zależy od napięcia; jeśli nie, to .....].

Czy którykolwiek pojedynczy pomiar jawnie odstaje od tendencji wskazanej przez pozostałe? [Wniosek: jeśli tak, oznacza to, że najprawdopodobniej popełniono błąd grubo i wtedy należy.....; jeśli nie, to .....].

Czy ułożenie punktów przypomina oczekiwaną linię „teoretyczną” pokazaną na rys. 2.? [Wniosek: jeśli tak, oznacza to, że .....; jeśli nie, to .....].

#### 1.3. Ocena dopasowania funkcji potęgowej do danych pomiarowych.

Czy wyniki pomiarów układają się losowo wokół zaproponowanej linii optymalnej, niektóre nad nią a inne pod nią? [Wniosek: jeśli tak, oznacza to, że natężenie prądu jest ....., tak jak przewiduje teoria, a stwierdzone drobne odstępstwa wynikają z niepewności pomiarowej; jeśli nie, to .....].

Czy wykładnik funkcji potęgowej ma wartość zbliżoną do przewidzianej w punkcie 2. wstępu teoretycznego? [Wniosek: jeśli tak, oznacza to, że.....; jeśli nie, to .....].

#### 1.4. Podsumowanie pierwszej części analizy. Podaj argumenty świadczące za tym (także argumenty ewentualnie świadczące przeciwko), że charakterystyka $I(U)$ badanej żarówki może być uznana za funkcję wykładniczą. Podaj także argumenty przemawiające za tym, że uzyskana w tej części wartość wykładnika $\alpha$ nie jest jeszcze ostatecznym wynikiem pomiaru.

#### 2.2. Wstępna ocena ułożenia punktów pomiarowych po linearyzacji.

Czy wyniki pomiarów układają się „w sensownym przybliżeniu”, wzdłuż linii prostej? [Wniosek: jeśli tak, oznacza to, że .....; jeśli nie, to .....].

#### 2.3. Ocena dopasowania funkcji liniowej do danych przekształconych.

Czy wyniki pomiarów układają się losowo wokół zaproponowanej prostej optymalnej, niektóre nad nią a inne pod nią? [Wniosek: jeśli tak, oznacza to, że przekształcone natężenie prądu jest ....., tak jak przewiduje teoria, a stwierdzone drobne odstępstwa .....; jeśli nie, to .....].

#### 2.4. Interpretacja i ocena uzyskanych współczynników optymalnej funkcji liniowej.

Jeśli ocena z punktu 2.3 wypadła pozytywnie, to zgodnie ze wzorem (4) współczynnik kierunkowy ‘a’ optymalnej prostej odpowiada wykładnikowi  $\alpha$  zależności  $I(U)$ ; niepewność pomiarowa  $\Delta a = \Delta \alpha$ . Z kolei współczynnik wolny ‘b’ prostej optymalnej powinien wynosić zero.

Czy uzyskana wartość ‘b’, z uwzględnieniem niepewności pomiarowej  $\Delta b$ , pozwala stwierdzić, że  $b = 0$ ? [Wniosek: jeśli tak, oznacza to, że uzyskane wyniki są zgodne - w tej części - z przewidywaniami teorii; jeśli nie, to .....].

Czy uzyskana wartość  $\alpha$ , z uwzględnieniem jej niepewności pomiarowej, jest zgodna z przewidzianą w punkcie 2. wstępu teoretycznego? [Wniosek: jeśli tak, oznacza to, że .....; jeśli nie, to .....].

### 3. Usystematyzuj powyższe wnioski, podsumuj je i wykorzystaj przy sporządzaniu sprawozdania z badania charakterystyki napięciowo-prądowej żarówki.

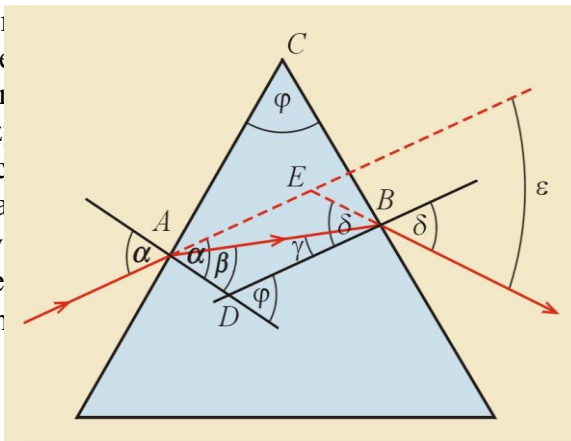
## „Przebieg światła przez pryzmat - cz. I”

### I. Z pracowni fizycznej.

#### 1. Przebieg światła przez pryzmat. Kąt odchylenia.

W paragrafie 8.10 trzeciego tomu e-pod-  
opisano bieg światła monochromatycznego  
pryzmacie. Przeczytaj raz jeszcze o pi-  
doświadczenia pokazowego z pryzmatem. Prz-  
sobie także rysunek, zastosowane tam oznac-  
wyprowadzenie związku pomiędzy kątem padania  
na ściankę pryzmatu  $\alpha$  a kątem odchylenia tej w-  
pierwotnego kierunku  $\varepsilon$ . Związek ten zawiera  
parametry opisujące cechy pryzmatu: jego kąt łam-  
jego współczynnik załamania światła  $n$ .

$$\varepsilon = (\alpha + \delta) - \varphi \quad (1)$$



Rys. 1. Bieg światła przez pryzmat

By zobaczyć zależność od współczynnika załamania światła przy wyjściu z pryzmatu -  $\delta$  - zależy od kąta padania  $\alpha$ , a także od  $\varphi$  i od  $n$ . Okaże się, że wyeliminowanie kąta  $\delta$  ze wzoru (1) znacznie skomplikuje postać zależności  $\varepsilon(\alpha)$ , wprowadzając do niej funkcję odwrotną do funkcji sinus, o której mogło nie być mowy na lekcjach matematyki.

#### 2. Funkcja „arccosinus”.

Jeśli ograniczymy dziedzinę funkcji sinus do kątów z przedziału  $\langle -\pi/2; \pi/2 \rangle$  (inaczej mówiąc:  $\langle -90^\circ; 90^\circ \rangle$ ), to funkcja ta będzie różnowartościowa. Wiadomo więc, że każdemu kątowi z tego przedziału odpowiada jedna wartość funkcji sinus z przedziału  $\langle -1; 1 \rangle$ . Oznacza to również, że zagadnienie odwrotne, czyli „co to za kąt, którego sinus wynosi tyle to a tyle?”, też ma jednoznaczną odpowiedź.

Tak więc istnieje funkcja odwrotna do funkcji sinus (z dziedziną  $\langle -\pi/2; \pi/2 \rangle$ ) - nazywa się „arccosinus”, oznaczana jest symbolem „arcsin” lub „sin<sup>-1</sup>” a w aplikacjach informatycznych często używane jest oznaczenie „asin”. Argumentem funkcji arcsin są liczby z przedziału  $\langle -1; 1 \rangle$  a zbiorem wartości są kąty (wyrażone w radianach!) z przedziału  $\langle -\pi/2; \pi/2 \rangle$ . Obowiązuje równoważność:

$$\alpha = \arcsin(u) \Leftrightarrow u = \sin(\alpha) \quad (2)$$

Oto przykład: wiadomo, że  $\sin(\pi/6) = 0,5$  [ $\sin(30^\circ) = 1/2$ ]. Wobec tego,  $\arcsin(0,5) = \pi/6$ . Wykonując ćwiczenie, zapoznasz się z wykresem funkcji arcsin.

Zwróć też uwagę, że ogromna większość aplikacji informatycznych przewiduje operowanie kątami wyrażonymi w radianach. Przypomnijmy, że miara kąta pełnego to  $2\pi$  radianów. W związku z tym, pomiędzy miarami  $\alpha_{[r]}$  i  $\alpha_{[d]}$  tego samego kąta, wyrażonego, odpowiednio, w radianach i w stopniach, zachodzi proporcjonalny związek:

$$\frac{\alpha_{[r]}}{2\pi} = \frac{\alpha_{[d]}}{360^\circ},$$

z którego wynika, że:

$$\alpha_{[r]} = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha_{[d]}$$

Związek ten należy uwzględniać przy programowaniu arkusza, by umożliwić użytkownikowi podawanie i odczytywanie kątów w wygodnej dla niego mierze (w stopniach).

### 3. Zależność $\varepsilon(\alpha)$ .

Występujący we wzorze (1) kąt  $\delta$  (można wyrazić poprzez kąt  $\gamma$  z wykorzystaniem prawa Snella (§8.1 trzeciego tomu e-podręcznika):

$$\frac{\sin(\gamma)}{\sin(\delta)} = \frac{1}{n} \Rightarrow \sin(\delta) = n \cdot \sin(\gamma) \Rightarrow \delta = \arcsin(n \sin(\gamma)) \quad (3)$$

Zauważmy tu, że istnieje potrzeba sprawdzania, czy argument funkcji arcsin jest nie większy od jedności. W przeciwnym przypadku następuje całkowite wewnętrzne odbicie (§8.1 trzeciego tomu e-podręcznika). Takie sprawdzenie należy przewidzieć w programie.

Kąt  $\gamma$  związany jest z kątem łamiącym  $\varphi$  oraz z kątem  $\beta$  (kąt załamania światła przy wejściu do pryzmatu):

$$\varphi = \beta + \gamma \Rightarrow \gamma = \varphi - \beta$$

Wzór (3) przybiera wtedy postać:

$$\delta = \arcsin(n \cdot \sin(\varphi - \beta)) \quad (4)$$

Wreszcie kąt  $\beta$  można wyrazić przez  $\alpha$  - kąt padania światła na pryzmat:

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = n \Rightarrow \sin(\beta) = \frac{1}{n} \cdot \sin(\alpha) \Rightarrow \beta = \arcsin\left(\frac{1}{n} \cdot \sin(\alpha)\right)$$

Zauważmy, że w tym miejscu nie ma potrzeby sprawdzania, czy argument funkcji arcsin jest mniejszy od jedności - jest to niejako zagwarantowane poprzez fakt, że argument ten jest ilorazem liczby nie większej niż jeden ( $\sin(\alpha)$ ) przez współczynnik załamania  $n$ , czyli liczbę nie mniejszą niż jeden.

Gdy uwzględnimy ten związek we wzorze (4) oraz przypomnimy sobie wzór (1), to ostatecznie uzyskamy jawną zależność kąta odchylenia  $\varepsilon$  od kąta padania  $\alpha$ , z parametrami  $n$  oraz  $\varphi$ :

$$\varepsilon = \alpha - \varphi + \arcsin\left(n \cdot \sin\left(\varphi - \arcsin\left(\frac{1}{n} \cdot \sin(\alpha)\right)\right)\right) \quad (5)$$

Zależność ta będzie przedmiotem komputerowej analizy.



## II. W pracowni informatycznej.

### cz. 1. Wykres funkcji $\alpha(u) = \arcsin(n \cdot u)$

1.1. W pustym arkuszu przygotuj komórkę na wprowadzanie wartości parametru  $n$  oraz czterokolumnową tabelę. Dopuszczaj możliwość zmiany  $n$  w zakresie od  $\frac{1}{2}$  do 2 (domyślnie  $n = 1$ ). W pierwszej kolumnie tabeli wprowadź wartości zmiennej  $u$  w przedziale  $\langle -1; +1 \rangle$ , w krokach co 0,1. W drugiej kolumnie tabeli umieść wartości iloczynu  $n \cdot u$ . W trzeciej umieść wartości funkcji  $\arcsin(n \cdot u)$ , czyli  $\alpha$ , wyrażone w radianach, zaś w ostatniej kolumnie te same wartości wyrażone w stopniach.

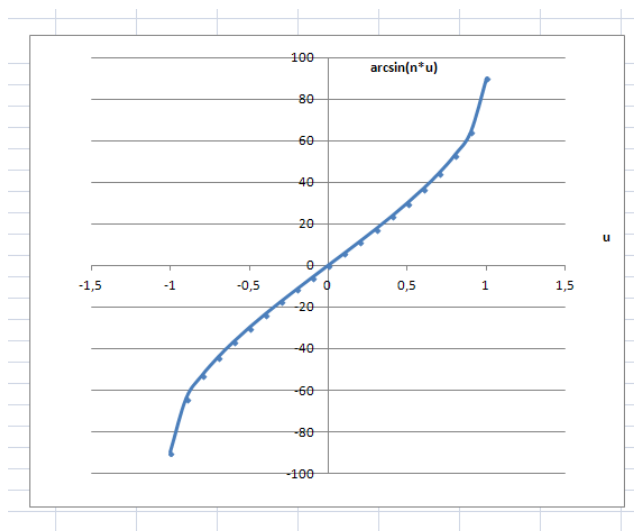
Przygotuj suwak do zmiany wartości zmiennej  $n$ , przy wpisywaniu formuł, pamiętaj o adresowaniu bezwzględnym.

	A	B	C	D	E	F
1						
2	n		u	n*u	arcsin(n*u) (rad)	arcsin(n*u) (deg)
3	1		-1			
4	10		-0,9			
5	<		-0,8			
6			-0,7			
7			-0,6			

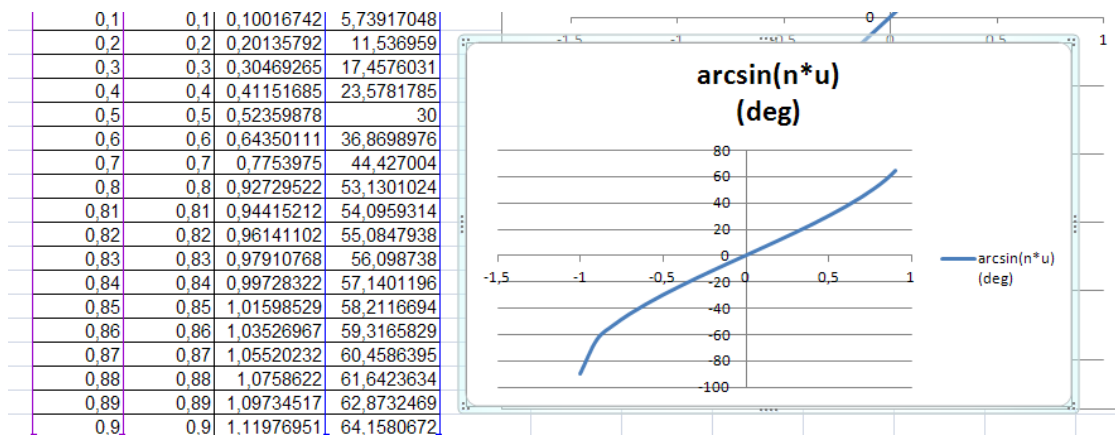
	A	B	C	D	E	F
1						
2	n		u	n*u	arcsin(n*u) (rad)	arcsin(n*u) (deg)
3	1		-1	-1	-1,5707963	-90
4	10		-0,9	-0,9	-1,1197695	-64,1580672
5	<		-0,8	-0,8	-0,9272952	-53,1301024
6			-0,7	-0,7	-0,7753975	-44,427004
7			-0,6	-0,6	-0,6435011	-36,8698976
8			-0,5	-0,5	-0,5235988	-30
9			-0,4	-0,4	-0,4115168	-23,5781785
10			-0,3	-0,3	-0,3046927	-17,4576031
11			-0,2	-0,2	-0,2013579	-11,536959
12			-0,1	-0,1	-0,1001674	-5,73917048
13			0	0	0	0
14			0,1	0,1	0,10016742	5,73917048
15			0,2	0,2	0,20135792	11,536959
16			0,3	0,3	0,30469265	17,4576031
17			0,4	0,4	0,41151685	23,5781785
18			0,5	0,5	0,52359878	30
19			0,6	0,6	0,64350111	36,8698976
20			0,7	0,7	0,7753975	44,427004
21			0,8	0,8	0,92729522	53,1301024
22			0,9	0,9	1,11976951	64,1580672
23			1	1	1,57079633	90

1.2 Zaproponuj i zrealizuj sposób wyróżniania takiego zakresu zmiennej  $u$ , dla którego wartość iloczynu  $n \cdot u$  mieści się będzie w przedziale  $\langle -1; +1 \rangle$ .

1.3 Sporządź wykres zależności  $\alpha = \arcsin(n \cdot u)$  w dopuszczalnej dziedzinie funkcji arcsin. Wykorzystaj opcję wykresu, za pomocą której punkty zostaną połączone możliwie gładką linią.



1.4 Zaproponuj i zrealizuj sposób uzupełnienia tabeli, by zapewnić bardziej gładki przebieg wykresu w okolicach jego największej stromizny.



1.5 Zbadaj wpływ zmiany wartości parametru  $n$  na przebieg wykresu, oddzielnie dla  $n$  z przedziału  $<1; 2>$  i dla  $n$  z przedziału  $<0,5; 1>$ .

## cz. 2. Zależność kąta odchylenia $\varepsilon$ od kąta padania $\alpha$ .

2.1. W innym arkuszu przygotuj trzy komórki na wprowadzanie wartości parametrów  $n$  oraz  $\varphi$  (w stopniach i po przeliczeniu w radianach), opisujących właściwości pryzmatu. Dopuść możliwość zmiany  $n$  w zakresie od 1 do 3 (domyślnie  $n = 1,5$  - jest to typowo podawany współczynnik załamania szkła) oraz  $\varphi$  w zakresie od  $1^{\circ}$  do  $60^{\circ}$  (domyślnie  $\varphi = 30^{\circ}$ ).

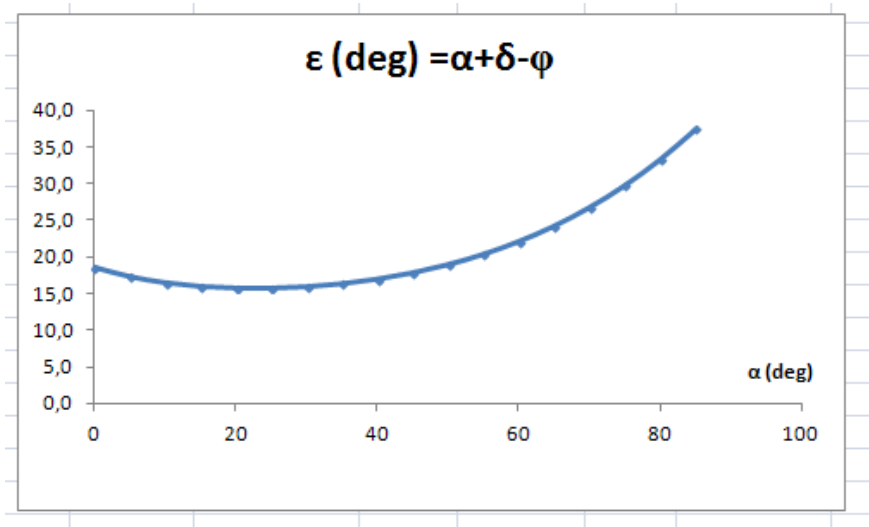
Przygotuj suwak do zmiany wartości  $n$  i  $\varphi$ .

2.2 Przygotuj tabelę, która będzie zawierała wartości liczbowe funkcji (5). W pierwszej kolumnie tabeli wprowadź wartości kąta  $\alpha$  w przedziale  $<0; 85^{\circ}>$ , w krokach co  $5^{\circ}$ . Zdecyduj, czy wartości funkcji  $\varepsilon(\alpha)$  wpiszesz od razu do następnej kolumny zgodnie ze wzorem (5), czy postanowisz zamieścić kolumny pomocnicze, zawierające wartości pozostałych kątów:  $\beta$ ,  $\gamma$  i  $\delta$ , z ewentualnym przeznaczeniem po dwie kolumny na każdy z kątów (dla jego miary w stopniach i w radianach). W każdym przypadku, w ostatniej kolumnie tabeli umieść wartości kąta odchylenia  $\varepsilon$ .

Pamiętaj o odpowiednim adresowaniu komórek.

$n$	$\alpha$ (deg)	$\alpha$ (rad)	$\beta$ (rad) = $\arcsin(\sin(\alpha)/n)$	$\beta$ (deg)	$\gamma$ (deg) = $\varphi - \beta$	$\gamma$ (rad)	$\delta$ (rad) = $\arcsin(n \cdot \sin \gamma)$	$\delta$ (deg)	$\varepsilon$ (deg) = $\alpha + \delta - \varphi$
1,5	0	0,0000	0,0000	0,0	30,0	0,524	0,848	48,6	18,6
15	5	0,0873	0,0581	3,3	26,7	0,465	0,739	42,3	17,3
<   >	10	0,1745	0,1160	6,6	23,4	0,408	0,637	36,5	16,5
	15	0,2618	0,1734	9,9	20,1	0,350	0,541	31,0	16,0
	20	0,3491	0,2300	13,2	16,8	0,294	0,449	25,7	15,7
fi	25	0,4363	0,2856	16,4	13,6	0,238	0,361	20,7	15,7
30	30	0,5236	0,3398	19,5	10,5	0,184	0,278	15,9	15,9
<   >	35	0,6109	0,3924	22,5	7,5	0,131	0,198	11,3	16,3
	40	0,6981	0,4429	25,4	4,6	0,081	0,121	6,9	16,9
	45	0,7854	0,4909	28,1	1,9	0,033	0,049	2,8	17,8
	50	0,8727	0,5360	30,7	-0,7	-0,012	-0,019	-1,1	18,9
	55	0,9599	0,5777	33,1	-3,1	-0,054	-0,081	-4,7	20,3
	60	1,0472	0,6155	35,3	-5,3	-0,092	-0,138	-7,9	22,1
	65	1,1345	0,6488	37,2	-7,2	-0,125	-0,188	-10,8	24,2
	70	1,2217	0,6770	38,8	-8,8	-0,153	-0,231	-13,3	26,7
	75	1,3090	0,6997	40,1	-10,1	-0,176	-0,266	-15,2	29,8
	80	1,3963	0,7162	41,0	-11,0	-0,193	-0,291	-16,7	33,3
	85	1,4835	0,7263	41,6	-11,6	-0,203	-0,307	-17,6	37,4

2.3 Sporządź wykres zależności  $\varepsilon(\alpha)$ . Wykorzystaj opcję wykresu, za pomocą której punkty zostaną połączone możliwie gładką linią.



2.4 Zinterpretuj pojawiające się ujemne wartości kątów  $\gamma$  i  $\delta$  - naszkicuj bieg światła w pryzmacie w takich warunkach. Czym różni się w takiej sytuacji Twój szkic od rys. 1?

2.5 Zbadaj wpływ zmiany wartości parametru  $n$  na przebieg wykresu. Przekonaj się, że istnieją wartości  $n$ , przy których na wyjściu z pryzmatu następuje zjawisko całkowitego wewnętrznego odbicia. Zweryfikuj następujące dwie hipotezy:

„Im większy współczynnik załamania pryzmatu, tym większemu odchyleniu ulega w nim światło”.

„Im większy współczynnik załamania pryzmatu, tym kąt minimalnego odchylenia przypada na coraz to większe kąty padania alfa”.

2.6 Zbadaj wpływ zmiany wartości parametru  $\varphi$  na przebieg wykresu. Przekonaj się, że istnieją wartości  $\varphi$ , przy których na wyjściu z pryzmatu następuje zjawisko całkowitego wewnętrznego odbicia. Zweryfikuj następujące dwie hipotezy:

„Im większy kąt łamiący pryzmatu, tym większemu odchyleniu ulega w nim światło”.

„Im większy kąt łamiący pryzmatu, tym kąt minimalnego odchylenia przypada na coraz to większe kąty padania alfa”.

### III. Do pracowni fizycznej.

1. Wykorzystaj arkusz z części 1. do zademonstrowania znanego przybliżenia  $\sin(x) = x$ . Uzupełnij przy tym odpowiednio tabelę oraz wykres.
2. Wykorzystaj drugi arkusz do rozwiązania następujących problemów.
  - 2.1 Jaki kąt  $\alpha$  zapewnia minimalne odchylenie  $\varepsilon$ ? Zbadaj, czy w tej sytuacji  $\beta = \gamma$  i  $\alpha = \delta$  tak, jak przewiduje to opis doświadczenia pokazowego w §8.10.
  - 2.2 Jaki kąt  $\alpha$  zapewni  $\gamma = 0$ ?
  - 2.3 Jaki zakres kątów  $\alpha$  spowoduje, że kąt  $\gamma$  przekroczy wartość kąta granicznego całkowitego wewnętrznego odbicia?
  - 2.4 Zinterpretuj możliwość nastawienia kąta padania  $\alpha < 0$ . Naskicuj bieg światła w pryzmacie w takich warunkach. Czym różni się w takiej sytuacji Twój szkic od rys. 1? Uzupełnij tabelę oraz wykres tak, by zilustrować taką sytuację. Rozstrzygnij, czy jest możliwe, by światło nie trafiło na przeciwległą ścianę pryzmatu.

### Wskazówki, rozwiązania, komentarze

Zad. 1.

W niektórych problemach fizycznych, dla uproszczenia rozważań, zastępujemy sinus kąta wartością tego kąta wyrażonego w radianach. Wykorzystujemy wtedy fakt, że zachodzi przybliżona równość:

$$\sin(x) \approx x$$

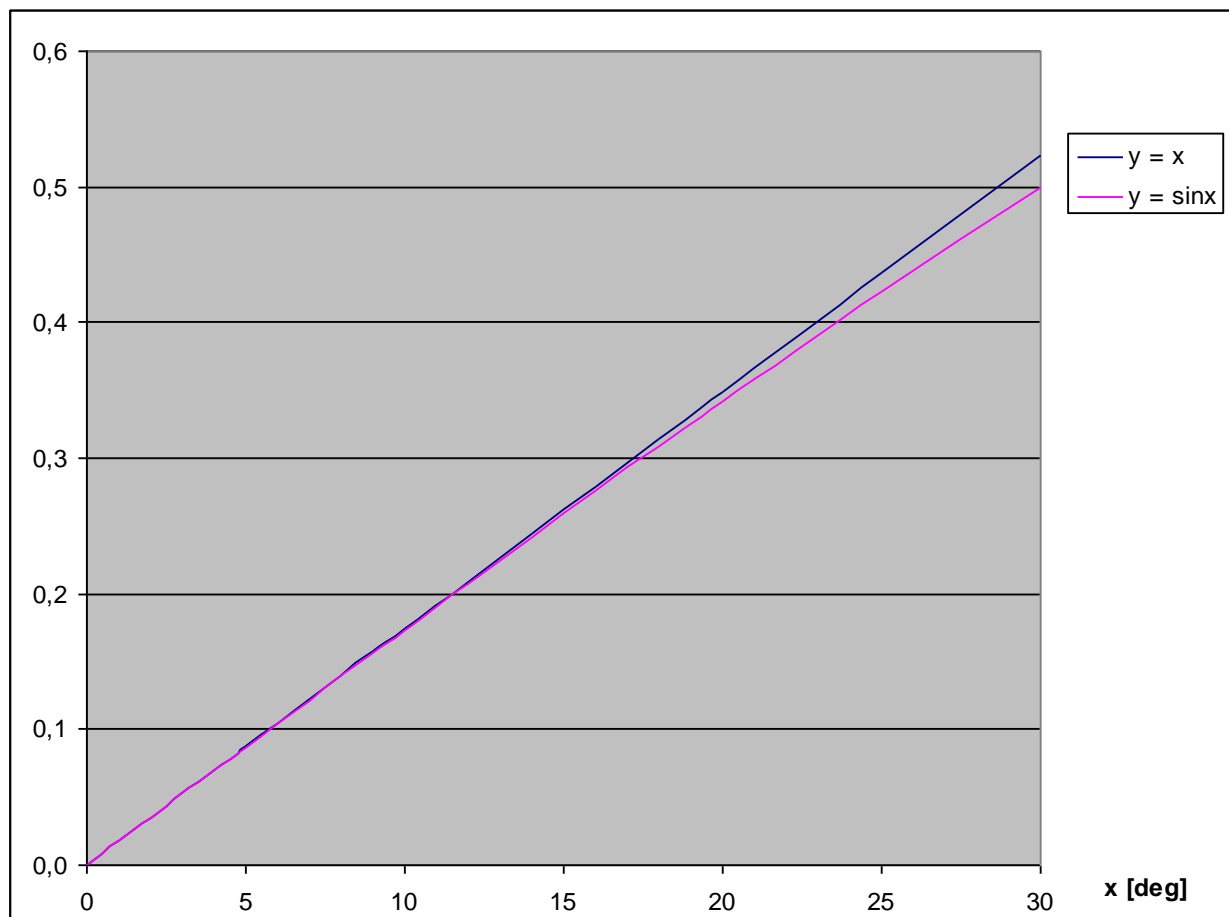
Przybliżenie to jest tym lepsze, im mniejszy jest sam kąt (oznaczony tu symbolem  $x$ ). Wykorzystamy teraz arkusz kalkulacyjny, aby zademonstrować to przybliżenie i określić, na ile jest ono dokładne. Zbudujmy tabelę, w której ograniczymy kąty  $x$  do  $30^\circ$ .

x [deg]	x [rad]	sinx	(x-sinx)/x
0,0	0,000000	0,000000	-
0,5	0,008727	0,008727	0,001%
1,0	0,017453	0,017452	0,005%
1,5	0,026180	0,026177	0,011%
2,0	0,034907	0,034899	0,020%
2,5	0,043633	0,043619	0,032%
3,0	0,052360	0,052336	0,046%
3,5	0,061087	0,061049	0,062%
4,0	0,069813	0,069756	0,081%
4,5	0,078540	0,078459	0,103%
5,0	0,087266	0,087156	0,127%
6,0	0,104720	0,104528	0,183%
7,0	0,122173	0,121869	0,249%
8,0	0,139626	0,139173	0,325%
9,0	0,157080	0,156434	0,411%
10,0	0,174533	0,173648	0,507%
12,0	0,209440	0,207912	0,729%
14,0	0,244346	0,241922	0,992%
16,0	0,279253	0,275637	1,295%
18,0	0,314159	0,309017	1,637%
20,0	0,349066	0,342020	2,018%
25,0	0,436332	0,422618	3,143%
30,0	0,523599	0,500000	4,507%

W ostatniej kolumnie tabeli pokazaliśmy odchylenie pomiędzy wartością kąta  $x$  a wartością jego sinusa, odniesione do wartości kąta i wyrażone w procentach. Pozwoli nam to określić dokładność przybliżenia.

Zauważmy, że dla kątów bardzo małych, rzędu jednego stopnia i mniej, dokładność przybliżenia jest lepsza niż jedna setna procenta, więc aż do piątego miejsca po przecinku. Dokładność lepszą niż jedna dziesiąta procenta utrzymujemy aż do  $x = 4,5^{\circ}$ . Równość z dokładnością do 1% jest spełniona nawet przy kątach rzędu  $14^{\circ}$ .

Poniższy wykres ilustruje graficznie omawiane przybliżenie. Pokazano na nim dwie linie,  $y = x$  oraz  $y = \sin x$ , które z początku są praktycznie nierozróżnialne. W zadanej skali wykresu, dopiero dla  $x > 10^{\circ}$  widać, że linie te przestają się pokrywać.



#### Zad. 2.1.

Gdy rozważamy zagadnienia związane z pryzmatem pojawia się 5 kątów i jeszcze współczynnik załamania. Zagadnienie to zostało omówione wyżej. Co ciekawe zmiana jednego kąta ma wpływ na pozostałe. Zwróćmy uwagę, że możemy tak dobrać kąt padania  $\alpha$ , aby kąt  $\varepsilon$  odchylenia promienia wychodzącego z pryzmatu był możliwie najmniejszy (oczywiście kąt łamiący  $\varphi$  pryzmatu i współczynnik załamania materiału z którego wykonano pryzmat pozostawiamy niezmiennymi).

Zwróćmy uwagę, że w tabeli zapisanej w arkuszu minimalne odchylenie promienia zapewnia kąt  $\alpha = 20^{\circ}$ , a także  $\alpha = 25^{\circ}$ ; odchylenie to wynosi  $\varepsilon = 15,7^{\circ}$ . Natomiast kąty  $\beta$  i  $\gamma$  oraz  $\alpha$  i  $\delta$  wprawdzie mają wartości bliskie, ale jednak wyraźnie się różniące.

$\alpha$ (deg)	$\alpha$ (rad)	$\beta$ (rad) = $\arcsin(\sin(\alpha)/n)$	$\beta$ (deg)	$\gamma$ (deg) = $\varphi - \beta$	$\gamma$ (rad)	$\delta$ (rad) = $\arcsin(n \cdot \sin \gamma)$	$\delta$ (deg)	$\varepsilon$ (deg) = $\alpha + \delta - \varphi$
0	0,0000	0,0000	0,0	30,0	0,524	0,848	48,6	18,6
5	0,0873	0,0581	3,3	26,7	0,465	0,739	42,3	17,3
10	0,1745	0,1160	6,6	23,4	0,408	0,637	36,5	16,5
15	0,2618	0,1734	9,9	20,1	0,350	0,541	31,0	16,0
20	0,3491	0,2300	13,2	16,8	0,294	0,449	25,7	15,7
25	0,4363	0,2856	16,4	13,6	0,238	0,361	20,7	15,7
30	0,5236	0,3398	19,5	10,5	0,184	0,278	15,9	15,9
35	0,6109	0,3924	22,5	7,5	0,131	0,198	11,3	16,3
40	0,6981	0,4429	25,4	4,6	0,081	0,121	6,9	16,9

Oznacza to zapewne, że właściwe minimum odchylenia przypada na kąt pomiędzy  $20^\circ$  a  $25^\circ$ . Zmodyfikujmy więc nieco tabelę i wprowadźmy kąt  $\alpha = 23,2^\circ$ .

$\alpha$ (deg)	$\alpha$ (rad)	$\beta$ (rad) = $\arcsin(\sin(\alpha)/n)$	$\beta$ (deg)	$\gamma$ (deg) = $\varphi - \beta$	$\gamma$ (rad)	$\delta$ (rad) = $\arcsin(n \cdot \sin \gamma)$	$\delta$ (deg)	$\varepsilon$ (deg) = $\alpha + \delta - \varphi$
0	0,0000	0,0000	0,0	30,0	0,524	0,848	48,6	18,6
5	0,0873	0,0581	3,3	26,7	0,465	0,739	42,3	17,3
10	0,1745	0,1160	6,6	23,4	0,408	0,637	36,5	16,5
15	0,2618	0,1734	9,9	20,1	0,350	0,541	31,0	16,0
20	0,3491	0,2300	13,2	16,8	0,294	0,449	25,7	15,7
23,2	0,4049	0,2657	15,2	14,8	0,258	0,393	22,5	15,7
30	0,5236	0,3398	19,5	10,5	0,184	0,278	15,9	15,9
35	0,6109	0,3924	22,5	7,5	0,131	0,198	11,3	16,3

Widzimy nadal różnice, ale są one już niewielkie. Tak postępując możemy szukać metodą prób i błędów takiego kąta  $\alpha$ , przy którym wartości  $\alpha$  i  $\delta$  oraz  $\beta$  i  $\gamma$  osiągną wartości dowolnie bliskie.

Zad. 2.2.

Czy można znaleźć taką wartość kąta  $\alpha$  aby kąt  $\gamma = 0$ ? Tak; spójrzmy na tabelę i wprowadźmy drobniejszy podział kątów padania.

$\alpha$ (deg)	$\alpha$ (rad)	$\beta$ (rad) = $\arcsin(\sin(\alpha)/n)$	$\beta$ (deg)	$\gamma$ (deg) = $\varphi - \beta$	$\gamma$ (rad)	$\delta$ (rad) = $\arcsin(n \cdot \sin \gamma)$	$\delta$ (deg)	$\varepsilon$ (deg) = $\alpha + \delta - \varphi$
0	0,0000	0,0000	0,0	30,0	0,524	0,848	48,6	18,6
5	0,0873	0,0581	3,3	26,7	0,465	0,739	42,3	17,3
10	0,1745	0,1160	6,6	23,4	0,408	0,637	36,5	16,5
15	0,2618	0,1734	9,9	20,1	0,350	0,541	31,0	16,0
20	0,3491	0,2300	13,2	16,8	0,294	0,449	25,7	15,7
23,2	0,4049	0,2657	15,2	14,8	0,258	0,393	22,5	15,7
30	0,5236	0,3398	19,5	10,5	0,184	0,278	15,9	15,9
35	0,6109	0,3924	22,5	7,5	0,131	0,198	11,3	16,3
40	0,6981	0,4429	25,4	4,6	0,081	0,121	6,9	16,9
48,55	0,8474	0,5232	30,0	0,0	0,000	0,001	0,0	18,6
50	0,8727	0,5360	30,7	-0,7	-0,012	-0,019	-1,1	18,9

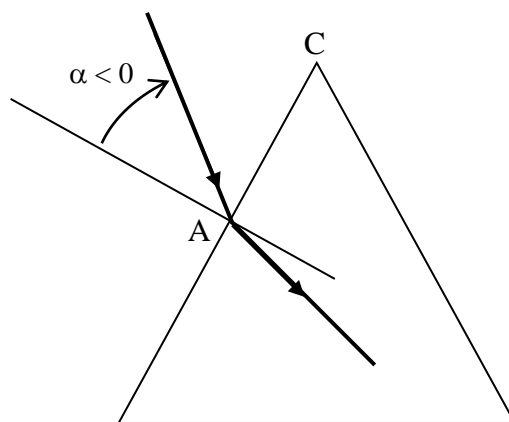
Dla kąta  $\alpha = 48,55^\circ$  kąt  $\gamma = 0^\circ$ . A co oznacza taka sytuacja? Otóż w takim przypadku promień światła wewnątrz pryzmatu będzie bieć wzdłuż prostej prostopadłej do płaszczyzny na którą pada.

Zad. 2.3.

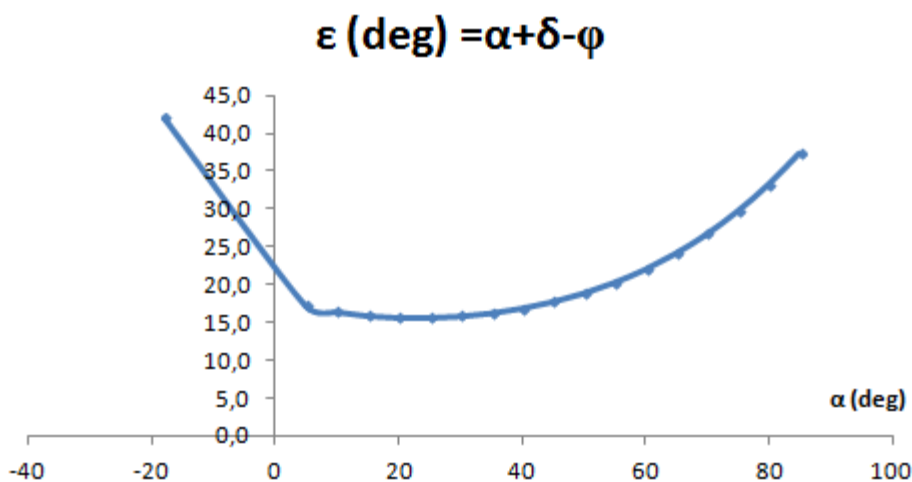
Ciekawym zjawiskiem jest zjawisko całkowitego wewnętrznego odbicia. Interesuje nas przypadek takiego odbicia wewnątrz pryzmatu, przy przechodzeniu przez ściankę CB (rys. 1.). Zadajmy pytanie pod jakim kątem  $\beta$  powinien padać promień aby to zjawisko zaszło to znaczy aby promień wychodzący załamywał się pod kątem  $\delta = 90^\circ$ . Oczywiście na wartość kąta  $\beta$  ma wpływ wartość kąta  $\alpha$ . Wykorzystajmy arkusz kalkulacyjny aby przeanalizować tę sytuację.

$\alpha$ (deg)	$\alpha$ (rad)	$\beta$ (rad) = $\arcsin(\sin(\alpha)/n)$	$\beta$ (deg)	$\gamma$ (deg) = $\varphi - \beta$	$\gamma$ (rad)	$\delta$ (rad) = $\arcsin(n \cdot \sin \gamma)$	$\delta$ (deg)	$\varepsilon$ (deg) = $\alpha + \delta - \varphi$
-17,879	-0,3120	-0,2061	-11,8	41,8	0,730	1,570	89,9	42,1
5	0,0873	0,0581	3,3	26,7	0,465	0,739	42,3	17,3
10	0,1745	0,1160	6,6	23,4	0,408	0,637	36,5	16,5

Okazuje się, że kąt  $\beta$  powinien być ujemny, zatem kąt  $\alpha$  także powinien być ujemny i mniejszy od ok.  $-17,9^\circ$ . Co to oznacza? Kąt padania  $\alpha = 0$  oznaczałby promień padający wzdłuż normalnej do ścianki AC (rys. 1.), czyli wzdłuż linii AD. Kąty  $\alpha < 0$  oznaczają padanie promienia jak na schemacie poniżej:

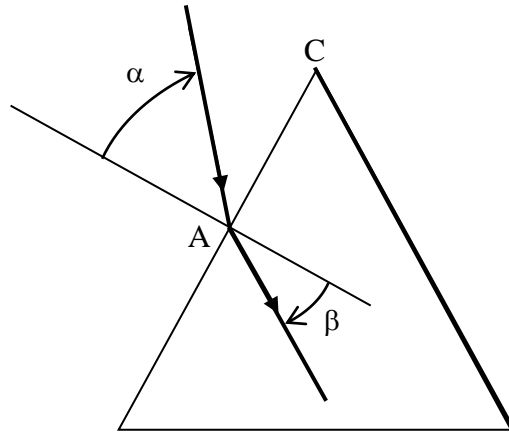


W takim przypadku wykres zależności  $\varepsilon(\alpha)$  tak będzie wyglądać.



Zad. 2.4.

Na powyższym schemacie przedstawiono interpretację kątów padania  $\alpha < 0$ . Widać, że w takiej sytuacji można uzyskać kąt załamania  $\beta$  na tyle duży (co do wartości bezwzględnej!), że promień załamany będzie biegł równoległe do przeciwległej ścianki pryzmatu, zaznaczonej pogrubioną linią. Oznacza to, że kąt  $\gamma$  jest równy  $90^\circ$ . Przedstawiono to na kolejnym schemacie.



Kąty padania większe co do wartości bezwzględnej od kąta  $\alpha$  przedstawionego na schemacie spowodują, że załamany promień nie trafi na przeciwległą ściankę.

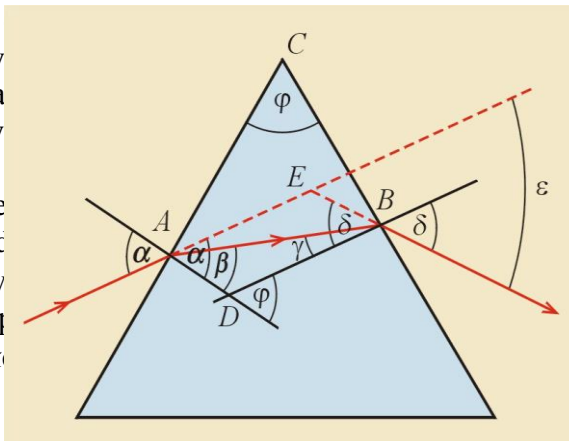


## „Przejście światła przez pryzmat - cz. II”

### I. Z pracowni fizycznej.

#### 1. Przejście światła przez pryzmat. Kąt odchylenia.

W paragrafie 8.10 trzeciego tomu e-podręcznika bieg światła monochromatycznego w pryzmie. Przeczytaj raz jeszcze o przebiegu doświadczenia pokazowego z pryzmatem. Przypomnij sobie rysunek i zastosowane tam oznaczenia. Zapoznaj się także z zawartym w pierwszej części problemu komputerowego „Przejście światła przez pryzmat” i z wyprowadzeniem zależności kąta odchylenia  $\varepsilon$  od kąta padania  $\alpha$  światła przez pryzmat. Związek ten zawiera dwa parametry opisujące cechy pryzmatu: jego kąt łamiący  $\varphi$  i jego współczynnik załamania światła  $n$ .



$$\varepsilon = \alpha - \varphi + \arcsin(n \cdot \sin(\varphi - \arcsin(\frac{\sin \alpha}{n})))$$

Rys. 1. Bieg światła przez pryzmat

Związek ten posłuży nam do doświadczalnego wyznaczenia współczynnika załamania  $n$  pryzmatu.

#### 2. Pomiar.

W doświadczeniu analogicznym do opisanego w §8.10 zmierzono kąt padania wiązki monochromatycznego światła na pryzmat; uzyskano  $\alpha = 26,5^{\circ} \pm 0,5^{\circ}$ . Zmierzono następnie kąt odchylenia tej wiązki od pierwotnego kierunku; uzyskano  $\varepsilon = 24,5^{\circ} \pm 0,5^{\circ}$ . Zmierzono wreszcie kąt łamiący pryzmatu; uzyskano  $\varphi = 45,0^{\circ} \pm 0,5^{\circ}$ . Celem pomiaru jest wyznaczenie współczynnika załamania materiału, z którego wykonano pryzmat.

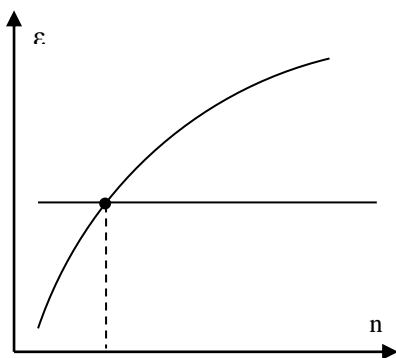
Gdy przyjrzymy się wzorowi (1), to stwierdzimy, że przy znanych wartościach  $\alpha$ ,  $\varepsilon$  i  $\varphi$ , zawiera on tylko jedną niewiadomą -  $n$ . Jednak algebraiczne rozwiązanie tego równania ze względu na  $n$  (czyli tzw. wyliczenie  $n$  z tego wzoru) jest niemożliwe - równanie jest zbyt skomplikowane. Dlatego też należy zastosować inną procedurę, która pozwoli w przybliżeniu wyznaczyć wartość  $n$ , spełniającą to równanie.

Odpowiednie zaprogramowanie arkusza kalkulacyjnego pozwoli wyznaczyć wartość  $n$  w sposób tabelaryczny, graficzny oraz z zastosowaniem narzędzia „Solver”.

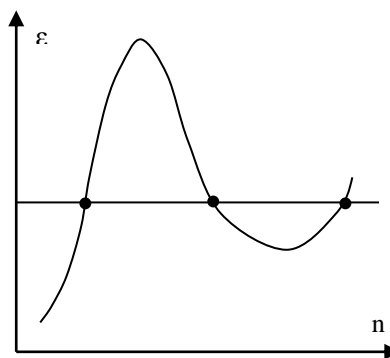
#### 3. Rozwiązanie tabelaryczne i graficzne - badanie zależności $\varepsilon(n)$ .

Wzór (1) można potraktować jako zależność kąta odchylenia  $\varepsilon$  od współczynnika załamania  $n$ ; kąt padania  $\alpha$  i kąt łamiący  $\varphi$  pełnią wtedy rolę parametrów tej zależności. Możemy więc, przy zmierzonych (a więc ustalonych) wartościach  $\alpha$  i  $\varphi$ , stabelaryzować wartości funkcji  $\varepsilon(n)$  i rozpoznać, dla jakiej wartości  $n$  funkcja przyjmuje zmierzoną w doświadczeniu wartość  $\varepsilon$ . Ta metoda pozwala wyznaczyć  $n$  z dowolną dokładnością - wystarczy tabelaryzować funkcję z coraz drobniejszym krokiem.

Możemy także wykreślić funkcję  $\varepsilon(n)$  i sprawdzić, w jakim punkcie przecina się ona ze stałą funkcją o wartości  $\varepsilon$  zmierzonej w doświadczeniu (rys. 2a); odcięta tego punktu jest rozwiązaniem zagadnienia. Choć metoda ta nie pozwala, na ogół, na osiągnięcie dowolnie dużej dokładności, to dzięki niej łatwo rozstrzygniemy inną kwestię: sprawdzimy, czy zależność  $\varepsilon(n)$  jest monotoniczna w interesującym nas przedziale zmienności  $n$  (tzn. czy jest to funkcja rosnąca czy malejąca). Jest to o tyle istotne, że w przypadku funkcji niemonotonicznej (czyli takiej, która raz jest rosnąca, raz malejąca), punktów przecięcia z funkcją stałą może być kilka (rys. 2b). Wtedy konieczne będzie rozstrzygnięcie, które spośród punktów przecięcia są właściwymi rozwiązaniami zagadnienia.



rys. 2a. Przecięcie funkcji stałej z monotoniczną funkcją  $\epsilon(n)$



rys. 2b. Przecięcia funkcji stałej z niemonotoniczną funkcją  $\epsilon(n)$

Dodatkową korzyścią zastosowania metody graficznej jest możliwość wskazania procedurze numerycznej, takiej jak „Solver”, odpowiedniego punktu do rozpoczęcia poszukiwań rozwiązania zagadnienia.

#### 4. Rozwiązanie numeryczne - narzędzie „Solver”.

Narzędziem do analizy warunkowej jest dodatek Solver, opisany w zajęciach **Temat 5: Solver**. Jest on podobny do funkcji Szukaj wyniku, ale może uwzględnić więcej zmiennych. Aby mieć możliwość używania Solvera należy najpierw zainstalować ten dodatek Excela.

Plik/‘Opcje /Dodatki’. Narzędzie Solver znajduje się w grupie *Dane/Analiza*

## II. W pracowni informatycznej.

### cz. 1. Rozwiązanie tabelaryczne i graficzne.

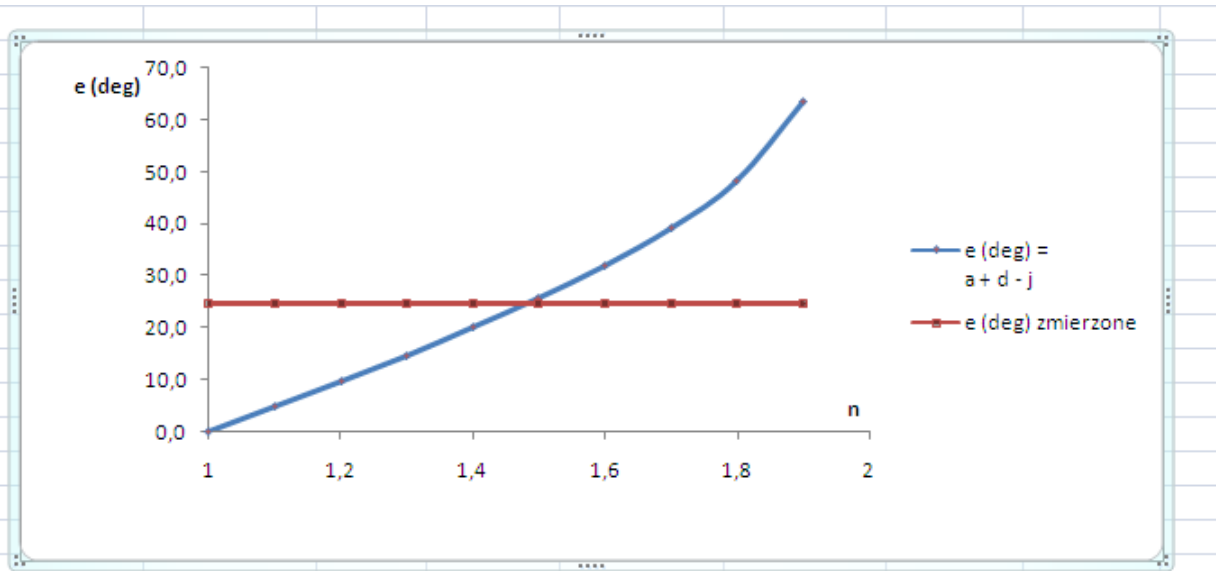
1.1 W pustym arkuszu (możesz też wykorzystać drugi arkusz z pierwszej części ćwiczenia, odpowiednio go modyfikując) przygotuj sześć komórek na wprowadzanie wartości kątów  $\alpha = 26,5^{\circ}$ ,  $\varepsilon = 24,5^{\circ}$  i  $\varphi = 45^{\circ}$ , zmierzonych w doświadczeniu (użytkownik wprowadza kąt w stopniach, program przelicza na radiany).

1	
2	
3	$\varphi$ (deg)
4	45
5	$\varphi$ (rad)
6	0,785
7	$\alpha$ (deg)
8	26,5
9	$\alpha$ (rad)
10	0,463
11	$\varepsilon$ (deg)
12	24,5
13	$\varepsilon$ (rad)
14	0,428

1.2 Przygotuj tabelę, która będzie zawierała wartości liczbowe funkcji (1). W pierwszej kolumnie tabeli wprowadź wartości współczynnika załamania  $n$  w przedziale  $\langle 1; 3 \rangle$ , w krokach co 0,1. Jest to przedział, w którym zawierają się współczynniki załamania większości znanych substancji. Zdecyduj, czy wartości funkcji  $\varepsilon(n)$  wpiszesz od razu do następnej kolumny zgodnie ze wzorem (1), czy postanowisz zamieścić kolumny pomocnicze, zawierające wartości pozostałych kątów  $\beta$ ,  $\gamma$  i  $\delta$ , z ewentualnym przeznaczeniem po dwie kolumny na każdy z kątów (dla jego miary w stopniach i w radianach). W każdym przypadku, w przedostatniej kolumnie tabeli umieść wartości kąta odchylenia  $\varepsilon$ , obliczonego dla zadanej wartości współczynnika załamania. W ostatniej kolumnie umieść wartość kąta odchylenia  $\varepsilon$  zmierzonego w doświadczeniu. Kolumna ta posłuży do wykreślenia funkcji stałej. Pamiętaj o adresowaniu bezwzględnym przy kopiowaniu komórek.

$n$	$\beta$ (rad) = $\arcsin(\sin(\alpha)/n)$	$\beta$ (deg)	$\gamma$ (deg) = $\varphi - \beta$	$\gamma$ (rad)	$\delta$ (rad) = $\arcsin(n \cdot \sin \gamma)$	$\delta$ (deg)	$\varepsilon$ (deg) = $\alpha + \delta - \varphi$	$\varepsilon$ (deg) zmierzone
1	0,463	26,5	18,5	0,323	0,323	18,5	0,0	24,5
1,1	0,418	23,9	21,1	0,368	0,407	23,3	4,8	24,5

1.3 Sporządź wykres zależności  $\varepsilon(n)$ . Ogranicz dziedzinę wykresu do takich wartości  $n$ , dla których możliwe jest wyliczenie kąta  $\varepsilon$  (nie zachodzi całkowite wewnętrzne odbicie - §8.1 - przy wyjściu światła z pryzmatu). Wykorzystaj opcję wykresu, za pomocą której punkty zostaną połączone możliwie gładką linią. Przekonaj się, że zależność  $\varepsilon(n)$  jest monotonicznie rosnąca. Na tym samym wykresie umieść linię, odpowiadającą funkcji stałej o wartości  $\varepsilon$  zmierzonej w doświadczeniu.

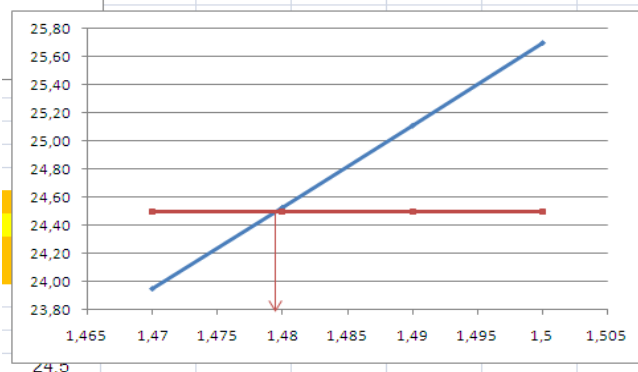
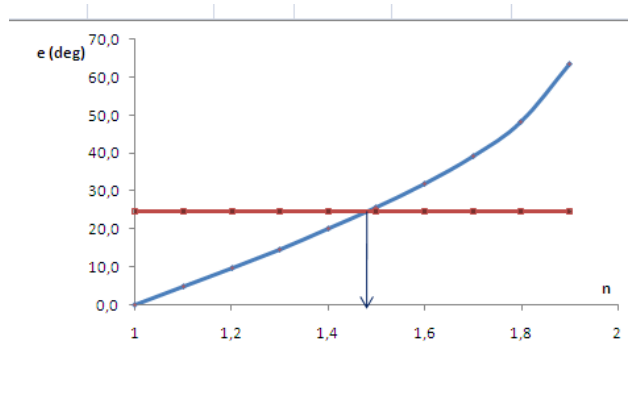


1.4 Wyszukaj w tabeli wiersz, w którym obliczona wartość  $\varepsilon$  jest najbliższa wartości zmierzonej. Współczynnik załamania w tym wierszu jest przybliżonym wynikiem doświadczenia. Zaproponuj i wykonaj takie uzupełnienie tabeli, by móc odczytać wynik doświadczenia z większą precyzją. Oszacuj niepewność pomiarową  $n$  na podstawie zaproponowanej przez siebie procedury.

Np. (w przykładowym arkuszu kalkulacyjnym jest to zestaw wierszy zaznaczonych, pod wykresem - pozwalają one stwierdzić bezpośrednio (tzn. bez interpolacji), że  $n = 1,480 \pm 0,005$ ).

1,4	0,324	18,6	26,4	0,461	0,672	38,5	20,02	24,5
1,45	0,313	17,9	27,1	0,473	0,721	41,3	22,80	24,5
1,46	0,311	17,8	27,2	0,475	0,731	41,9	23,37	24,5
1,47	0,308	17,7	27,3	0,477	0,741	42,4	23,95	24,5
1,48	0,306	17,5	27,5	0,479	0,751	43,0	24,52	24,5
1,49	0,304	17,4	27,6	0,481	0,761	43,6	25,11	24,5
1,5	0,302	17,3	27,7	0,483	0,771	44,2	25,70	24,5
1,5	0,302	17,3	27,7	0,483	0,771	44,2	25,70	24,5
1,55	0,292	16,7	28,3	0,493	0,824	47,2	28,73	24,5
1,6	0,283	16,2	28,8	0,503	0,880	50,4	31,94	24,5
1,65	0,274	15,7	29,3	0,512	0,940	53,9	35,38	24,5
1,7	0,266	15,2	29,8	0,520	1,005	57,6	39,11	24,5

1.5 Odczytaj z wykresu rzędną punktu przecięcia funkcji  $\varepsilon(n)$  z wartością zmierzoną. Zaproponuj i wykonaj takie uzupełnienie wykresu, by móc odczytać wynik doświadczenia z większą precyzją. Oszacuj niepewność pomiarową  $n$  na podstawie zaproponowanej przez siebie procedury (w przykładowym arkuszu jest to czerwona lub niebieska linia. Wykres z 'n' na skali co 0,005 - pozwala to stwierdzić, że  $n = 1,48 \pm 0,005$ ).



## cz. 2. Rozwiązanie numeryczne .

Korzystając z wiadomości opisanych w temacie 5, wykorzystaj solvera do rozwiązania numerycznego tego zadania.

W tym celu w nowym arkuszu lub poniżej (jak w arkuszu przykładowym) skopiuj nagłówek tabeli i formuły pierwszego wiersza. Pierwszą komórkę dla wartości  $n$  pozostaw pustą.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
55			Rozwiązanie numeryczne								
56											
57			$n$	$\beta$ (rad) = $\arcsin(\sin(\alpha)/n)$	$\beta$ (deg)	$\gamma$ (deg) = $\varphi - \beta$	$\gamma$ (rad)	$\delta$ (rad) = $\arcsin(n \cdot \sin \gamma)$	$\delta$ (deg)	$\varepsilon$ (deg) = $\alpha + \delta - \varphi$	
58				=ASIN(SIN(A\$10)/C60)	#ARG!	#ARG!	#ARG!	#ARG!	#ARG!	#ARG!	
59											
60											

Nasze zadanie polega na dobraniu takiej wartości  $n$  aby wartość  $\varepsilon$  (deg) wynosiła 24,5.

Zastosujemy solver

- Wskaźnik ustawiamy na komórce celu J58 i wywołujemy solvera.
- Ustawiamy parametry solvera.
  - Ustaw cel J58,
  - na: wartość 24,5,
  - zmieniając komórki C58.

Następnie klikamy rozwiąż

Po zainstalowaniu dodatku Solver, wybieramy w arkuszu kalkulacyjnym z menu Dane->Solver oraz uzupełniamy okno dialogowe jak poniżej:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
55			Rozwiązanie numeryczne								
56											
57			$n$	$\beta$ (rad) = $\arcsin(\sin(\alpha)/n)$	$\beta$ (deg)	$\gamma$ (deg) = $\varphi - \beta$	$\gamma$ (rad)	$\delta$ (rad) = $\arcsin(n \cdot \sin \gamma)$	$\delta$ (deg)	$\varepsilon$ (deg) = $\alpha + \delta - \varphi$	
58				=ASIN(SIN(A\$10)/C58)	#ARG!	#ARG!	#ARG!	#ARG!	#ARG!	#ARG!	
59											
60											
61											
62											
63											
64											
65											
66											
67											
68											
69											
70											
71											
72											
73											

**Solver - Parametry**

Komórka celu:

Równa:  Maks  Min  Wartość:

Komórki zmieniane:

Warunki ograniczające:

Poszczególne komórki zostały uaktualnione oraz wskazana szukana wartość  $n$ .

$n$	$\beta$ (rad) = $\arcsin(\sin(\alpha)/n)$	$\beta$ (deg)	$\gamma$ (deg) = $\varphi - \beta$	$\gamma$ (rad)	$\delta$ (rad) = $\arcsin(n \cdot \sin \gamma)$	$\delta$ (deg)	$\varepsilon$ (deg) = $\alpha + \delta - \varphi$
1,479573	0,306	17,6	27,4	0,479	0,750	43,0	24,5

Rozwiązanie numeryczne daje nam dokładniejszy wynik ale zgodny z odczytanym z wykresu.

### III. Do pracowni fizycznej.

1. Wykorzystaj oba arkusze do bardziej wiarygodnego (niż w punktach 1.4 i 1.5 części „W pracowni informatycznej”) oszacowania niepewności pomiarowej  $\Delta n$  wyznaczonego współczynnika załamania. Chodzi o to, by w oszacowaniu uwzględnić nie tylko „arytmetyczną” precyzję wyznaczenia wartości  $n$ . Należy także uwzględnić niepewność pomiarową, z jaką zmierzony został każdy z trzech kątów  $\alpha$ ,  $\varphi$  oraz  $\varepsilon$ . Przyjmijmy, że niepewności te wynikają z podziałki przyrządu pomiarowego oraz że przy pomiarze nie popełniono pomyłki (błędu grubego).

1.1 Wszystkie trzy niepewności -  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\varepsilon$  i  $\Delta\varphi$  - składają się na ostateczną niepewność  $\Delta n$ . Przyjmijmy, że niepewność  $\Delta n$  jest sumą trzech przyczynków:

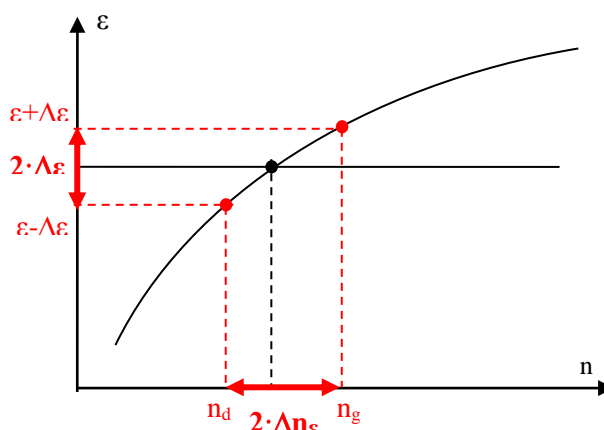
$$\Delta n = \Delta n_\alpha + \Delta n_\varepsilon + \Delta n_\varphi,$$

gdzie  $\Delta n_\alpha$  jest przyczynkiem do  $\Delta n$  pochodzącym od niepewności  $\Delta\alpha$ , a przyczynki  $\Delta n_\varepsilon$  i  $\Delta n_\varphi$  pochodzą, analogicznie, od  $\Delta\varepsilon$  i  $\Delta\varphi$ . Mimo że wartości  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\varepsilon$  i  $\Delta\varphi$  są w naszym doświadczeniu jednakowe, ich przyczynki mogą być różne. Trzeba więc oszacować każdy z tych przyczynków. Sposób postępowania pokażemy szczegółowo na przykładzie kąta  $\varepsilon$ .

Czarny punkt na wykresie (rys. 3) oznacza wartość ‘ $n$ ’ uzyskaną dla kąta odchylenia  $\varepsilon = 24,5^\circ$ . Znajdujemy wartość  $n_d$  („ $n$  dolne”), która odpowiadałaby kątowi odchylenia  $\varepsilon - \Delta\varepsilon = 24,0^\circ$  oraz wartość  $n_g$  („ $n$  górne”), która odpowiadałaby kątowi odchylenia  $\varepsilon + \Delta\varepsilon = 25,0^\circ$ . W ten sposób znajdujemy przedział  $2 \cdot \Delta n_\varepsilon$ , odpowiadający przedziałowi  $2 \cdot \Delta\varepsilon$ . Ostatecznie, znajdujemy przyczynkę do niepewności pomiarowej  $n$ , wynikający z niepewności pomiarowej  $\varepsilon$ :

$$\Delta n_\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot (n_g - n_d). \quad (2)$$

Rys. 3. Wyznaczenie wartości  $n_d$  i  $n_g$  ograniczających przedział niepewności ‘ $n$ ’ na podstawie przedziału niepewności ‘ $\varepsilon$ ’.



Analogiczne postępowanie pozwala wyznaczyć przyczynki  $\Delta n_\alpha$  i  $\Delta n_\varphi$ . Pomocna w tym może być następująca tabela. Wypełnij jej komórki wartościami  $n_g$  i  $n_d$  dla poszczególnych kątów; obliczysz je korzystając z zaprogramowanego arkusza. Przyjmij przy tym zasadę, że przy poszukiwaniu wartości  $n_g$  i  $n_d$  dla jednej ze zmiennych (np. dla  $\varphi$ ) pozostałe dwie zmienne (czyli  $\varepsilon$  i  $\alpha$ ) zachowują swoje wartości zmierzone.

	kąt odchylenia $\varepsilon$	kąt padania $\alpha$	kąt łamiący $\varphi$
wartość maksymalna i odpowiadające jej $n_g$	$25,0^\circ$	$27,0^\circ$	$45,5^\circ$
wartość minimalna i odpowiadające jej $n_d$	$24,0^\circ$	$26,0^\circ$	$44,5^\circ$
Przyczynek do niepewności pomiarowej	$\Delta n_\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot (n_g - n_d)$	$\Delta n_\alpha = \frac{1}{2} \cdot (n_g - n_d)$	$\Delta n_\varphi = \frac{1}{2} \cdot (n_g - n_d)$
Całkowita niepewność pomiarowa $n$	$\Delta n = \Delta n_\varepsilon + \Delta n_\alpha + \Delta n_\varphi$		

- 1.2 Rozstrzygnij, czy tak uzyskana niepewność jest większa czy mniejsza od niepewności oszacowanej z precyzji odczytu wyniku z tabeli czy od precyzji działania narzędzia „Solver”. Gdyby okazało się, że ta ostatnia niepewność jest większa, to należy polepszyć precyzję rozwiązania tabelarycznego czy narzędzia „Solver”.
  - 1.3 Rozstrzygnij, czy którakolwiek z niepewności przyczynkowych  $\Delta n_\varepsilon$ ,  $\Delta n_\alpha$ ,  $\Delta n_\varphi$  jest istotnie większa od dwóch pozostałych (np. o rząd wielkości). Gdyby tak było, należałoby rozważyć powtórzenie doświadczenia i zwrócenie szczególnej uwagi na precyzję pomiaru tej wielkości, która daje największy przyczynek do niepewności  $\Delta n$ .
  - 1.4 Wyszukaj w tablicach fizycznych wartość współczynnika załamania materiału, z którego zrobiony jest pryzmat użyty w doświadczeniu. Rozstrzygnij, czy uzyskana przez Ciebie wartość  $n$  jest zgodna z wartością tablicową.
2. W porozumieniu z nauczycielem fizyki przeprowadź ponownie opisane doświadczenie. Tym razem jednak nastaw i zmierz co najmniej 8-10 różnych kątów padania  $\alpha$  oraz odpowiadające im kąty odchylenia  $\varepsilon$ .
- 2.1 Dla każdego z nich wyznacz  $n$  oraz  $\Delta n$ , stosując powyższą metodę.
  - 2.2 Oceń rozrzut zmierzonych wartości  $n$  - wyznacz średnią wartość oraz odchylenie standardowe serii.
  - 2.3 Porównaj uzyskany rozrzut (odchylenie standardowe) z wartościami  $\Delta n$ , uzyskanymi dla pojedynczego pomiaru.
  - 2.4 Sformułuj wniosek z tego porównania, uzupełniając odpowiednio zdania: „W tym doświadczeniu błędy przypadkowe popełniane przy ustalaniu biegu światła przez pryzmat [są pomijalne / są porównywalne / są dominujące] wobec błędów związanych z samym pomiarem kątów. W przypadku planowania podobnego doświadczenia w przyszłości, należy więc zwrócić szczególną uwagę na ..... [jak również na / a nie na] .....

## Wskazówki, rozwiązania, komentarze

### Zad. 1.

Celem tego doświadczenia było wyznaczenie współczynnika załamania materiału z którego wykonano pryzmat. W wyniku analizy teoretycznej wyprowadziliśmy wzór (1)

$$\varepsilon = \alpha - \varphi + \arcsin\left(n \cdot \sin\left(\varphi - \arcsin\left(\frac{1}{n} \cdot \sin(\alpha)\right)\right)\right)$$

W równaniu powyższym mamy trzy kąty, które możemy mierzyć oraz współczynnik załamania. Jak powiedziano wcześniej nie potrafimy tego równania rozwiązać analitycznie dlatego rozwiązaliśmy je w sposób przybliżony. Wyznaczyliśmy wartość współczynnika załamania metodą tabelaryczną i graficzną. Tak wyznaczona wartość to:

$$n = 1,48, \text{ z precyzją odczytu rzędu } 0,005.$$

Następnie wyznaczyliśmy tę wartość wykorzystując narzędzie Excela, Solver. Tym razem otrzymaliśmy wartość:

$$n = 1,479573$$

Jak widać wartości współczynnika załamania uzyskane dwiema metodami są bardzo zbliżone.

1.1 Zastanówmy się teraz, która metoda była dokładniejsza. Na wartość współczynnika załamania wpływ ma pomiar wartości trzech kątów:  $\alpha$ ,  $\varepsilon$  i  $\varphi$ . Na początek oszacujmy wpływ każdego z pomiarów. W tym celu wypełnijmy tabelę:

	kąt odchylenia $\varepsilon$	kąt padania $\alpha$	kąt łamiący $\varphi$
--	------------------------------	----------------------	-----------------------

wartość maksymalna i odpowiadające jej $n_g$	25,0 <sup>0</sup>	27,0 <sup>0</sup>	45,5 <sup>0</sup>
	1,49	1,49	1,48
wartość minimalna i odpowiadające jej $n_d$	23,95 <sup>0</sup>	26,0 <sup>0</sup>	44,5 <sup>0</sup>
	1,47	1,46	1,48
Przyczynek do niepewności pomiarowej	$\Delta n_\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot (n_g - n_d)$ = 0,01	$\Delta n_\alpha = \frac{1}{2} \cdot (n_g - n_d)$ = 0,015	$\Delta n_\varphi = \frac{1}{2} \cdot (n_g - n_d)$ = 0
Całkowita niepewność pomiarowa $n$	$\Delta n = \Delta n_\varepsilon + \Delta n_\alpha + \Delta n_\varphi = \mathbf{0,025}$		

Wartość współczynnika załamania wynosi więc:

$$n = 1,480 \pm 0,025$$

1.2 Uzyskana niepewność  $\Delta n = 0,025$  jest pięciokrotnie większa od precyzji odczytu wyniku z punktów 1.4 i 1.5 części „W pracowni informatycznej” (tam uzyskaliśmy  $n = 1,480 \pm 0,005$ ). Co to znaczy? Otóż uwzględnienie niepewności  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\varepsilon$  i  $\Delta\varphi$  oraz ich wpływu na  $\Delta n$  pokazało, że dokonany odczyt wartości  $n$  z dokładnością sięgającą trzech cyfr po przecinku ( $\pm 0,005$ ) był wystarczająco dokładny, skoro naturalna niepewność wyniku w tym doświadczeniu powoduje, że niepewna jest już druga cyfra po przecinku ( $\pm 0,025$ ).

Możemy też stwierdzić, że wartość współczynnika załamania uzyskana przy pomocy narzędzia Solver jest wręcz „nadmiernie dokładna”. Precyzja sięgająca szóstej cyfry po przecinku ( $n = 1,479573$ ) jest w tym doświadczeniu zupełnie zbędna, zważywszy opisaną powyżej naturalną niepewność pomiarową, występującą w tym doświadczeniu.

1.3 Przyczynki  $\Delta n_\alpha$  i  $\Delta n_\varepsilon$  są tego samego rzędu. Ciekawe jest, że przyczynek  $\Delta n_\varphi$  wyszedł równy zero (w tej skali) - oznacza to, że wynik doświadczenia (wartość  $n$ ) jest znacznie mniej „czuły” na niepewność pomiaru kąta  $\varphi$  niż na niepewność pomiaru pozostałych dwóch kątów. Tak więc gdybyśmy chcieli powtórzyć pomiar i uzyskać wynik dokładniejszy, należałoby zwrócić uwagę przede wszystkim na pomiar kątów  $\alpha$  i  $\varepsilon$  i szukać sposobu dokładniejszego ich wyznaczenia, np. z dokładnością do 0,1<sup>0</sup>.

1.4 Użyty w doświadczeniu pryzmat wykonany był z przezroczystego tworzywa sztucznego (tzw. pleksiglasu). Tablicowa wartość współczynnika załamania tego tworzywa wynosi od 1,48 do 1,49, co doskonale zgadza się z uzyskanym wynikiem.