

1. Przedmiot: **Matematyka**
2. Dział programowy: **1. Liczby rzeczywiste, 11. Rachunek różniczkowy**
3. Temat: **Obliczamy podatek. Progi podatkowe**
4. Klasa: **Klasa III**
5. Zgodność z podstawą programową: **Uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:**
 - 1) **oblicza granice funkcji (i granice jednostronne), korzystając z twierdzeń o działaniach na granicach i z własności funkcji ciągłych;**
6. Pomoce (środki) dydaktyczne
 - **stanowiska komputerowe (lub komputer nauczyciela z tablicą interaktywną lub rzutnikiem multimedialnym),**
 - **bezpłatne oprogramowanie GeoGebra wspomagające nauczanie matematyki (<http://www.geogebra.org/cms/pl/download/>)**
7. Cele: Uczeń:
 - **zdobędzie umiejętności posługiwania się pojęciem granicy funkcji (jednostronnej),**
 - **tworzy funkcję liniową wielonormową,**
 - **sporządza wykres funkcji określonej wielonormowo,**
 - **oblicza podatek średni,**
 - **zna pojęcie średniej ważonej,**
 - **posługuje się programem GeoGebra (lub arkuszem kalkulacyjnym).**
8. Metody nauczania: **Praca z komputerem, elementy wykładu, prezentacja, ćwiczenia**
9. Formy pracy: **Praca indywidualna i w parach**

Plan lekcji

Progi podatkowe wyznaczają podatek progresywny, jaki musi wpłacić do budżetu każdy obywatel. Załóżmy, że w pewnym kraju skala i progi podatkowe są następujące: jeśli dochód nie przekracza 15 000€, to stawka wynosi 23%; powyżej 15 000 do 29 000€ stawka wynosi 29%; powyżej 29 000 do 32 600€ stawka wynosi 31%; powyżej 32 600 do 70 000€ stawka wynosi 39%; dla wyższego dochodu stawka wynosi 45%. Jaki podatek zapłaci obywatel od rocznego dochodu wynoszącego 40 000€? Jaka jest średnia stawka podatku od tej kwoty?

Wydaje się, że odpowiedź na pierwsze pytanie jest bardzo prosta. Należny podatek wynosi:

$$40000 \cdot 0,39 = 15600\text{€}.$$

Jeśli obywatel zarobił 32 600€, to zapłaci podatek: $32600 \cdot 0,31 = 10106\text{€}$. Czy tak? To w jakim celu postawiono pytanie drugie? Rozważmy ten aspekt. Przyrost dochodu o 7 400€ powoduje wzrost kwoty podatku o 5 494€, co oznacza, że ponad 74% dochodu powyżej 32 600 euro trzeba przeznaczyć na podatek! A jaki podatek zapłaci obywatel, który osiągnął dochód 32 601€? Będzie to: $32601 \cdot 0,39 = 12714\text{€}$, co z kolei oznacza, że przyrost dochodu o 1€ powoduje wzrost podatku o 2608€. Taki sposób obliczania wysokości podatku jest nie do przyjęcia!

Przyjmijmy zatem następujące zasady podatku dochodowego:

Dochód	Stawka	Podatek
do 15.000,00€	23%	23% od całej kwoty
powyżej 15.000,00€ do 29.000,00€	29%	3.450,00 + 29% nadwyżki ponad 15.000€
powyżej 29.000,00€ do 32.600,00€	31%	7.510,00 + 31% nadwyżki ponad 29.000€
powyżej 32.600,00€ do 70.000,00€	39%	8.626,00 + 39% nadwyżki ponad 32.600€
powyżej 70.000,00€	45%	23.212,00 + 45% nadwyżki ponad 70.000€

i ustalmy podatek od kwoty 40 000€ w następujący sposób:

Obliczenia	Dochód (x)	Stawka (a)	Podatek (p)
	15 000	23%	3450
29 000 – 15 000	14 000	29%	4060
32 600 – 29 000	3 600	31%	1 116
40 000 – 32 600	7 400	39%	2 886
	Suma		11 512

Podsumowując, mamy:

$$p = 0,23 \cdot 15\,000 + 0,29 \cdot 14\,000 + 0,31 \cdot 3\,600 + 0,39 \cdot 7\,400 = 11\,512.$$

Należny podatek od kwoty 40 000€ wynosi więc 11 512€.

Ustalmy teraz zależność podatku (p) od dochodu (x). Mamy następującą funkcję p :

$$p(x) = \begin{cases} 0,23 \cdot x, & \text{jeżeli } 0 \leq x \leq 15\,000 \\ 3450 + 0,29 \cdot (x - 15\,000), & \text{jeżeli } 15\,000 < x \leq 29\,000 \\ 7510 + 0,31 \cdot (x - 29\,000), & \text{jeżeli } 29\,000 < x \leq 32\,600 \\ 8626 + 0,39 \cdot (x - 32\,600), & \text{jeżeli } 32\,600 < x \leq 70\,000 \\ 23\,212 + 0,45 \cdot (x - 70\,000), & \text{jeżeli } 70\,000 < x \end{cases}$$

Czy ta funkcja jest ciągła? Zbadajmy to.

Dziedziną funkcji p jest przedział $[0, +\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow 15000^-} 0,23x = \lim_{x \rightarrow 15000^+} [3450 + 0,29(x - 15000)] = 3450$$

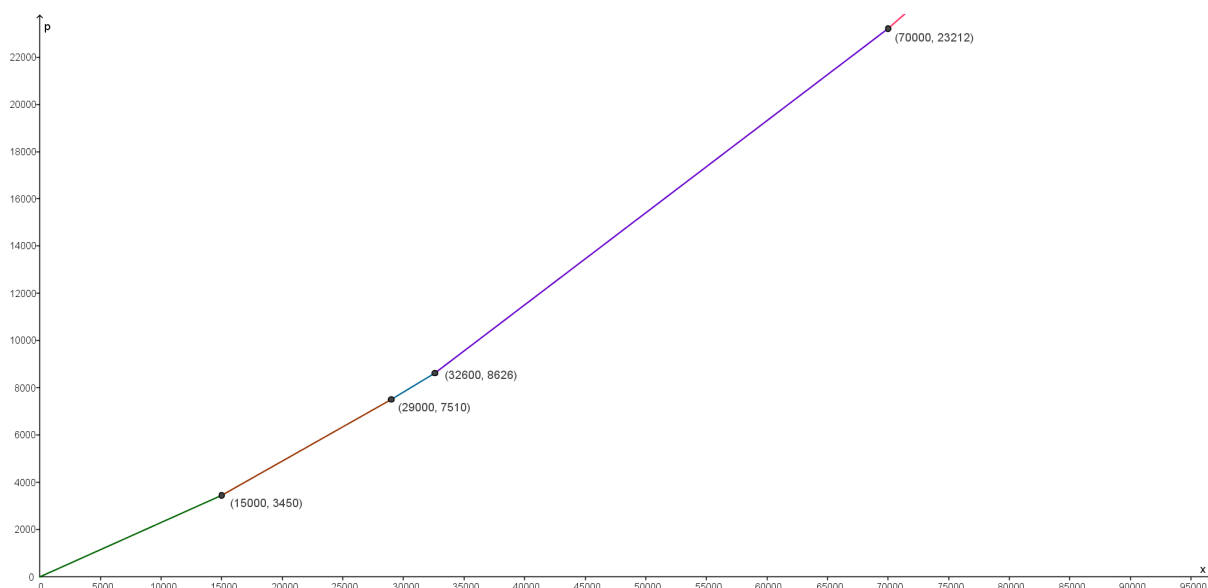
$$\lim_{x \rightarrow 29000^-} [3450 + 0,29(x - 15000)] = \lim_{x \rightarrow 29000^+} [7510 + 0,31(x - 29000)] = 7510$$

$$\lim_{x \rightarrow 32600^-} [7510 + 0,31(x - 29000)] = \lim_{x \rightarrow 32600^+} [8626 + 0,39(x - 32600)] = 8626$$

$$\lim_{x \rightarrow 70000^-} [8626 + 0,39(x - 32600)] = \lim_{x \rightarrow 70000^+} [23212 + 0,45(x - 70000)] = 23212$$

Funkcja p jest funkcją ciągłą na przedziale $[0, +\infty)$.

Wykres funkcji p jest następujący:



Wykorzystajmy teraz funkcję p do obliczenia podatku od dochodu wynoszącego 40 000€. Zastosujemy w tym celu czwarty wzór, którym opisana jest funkcja p :

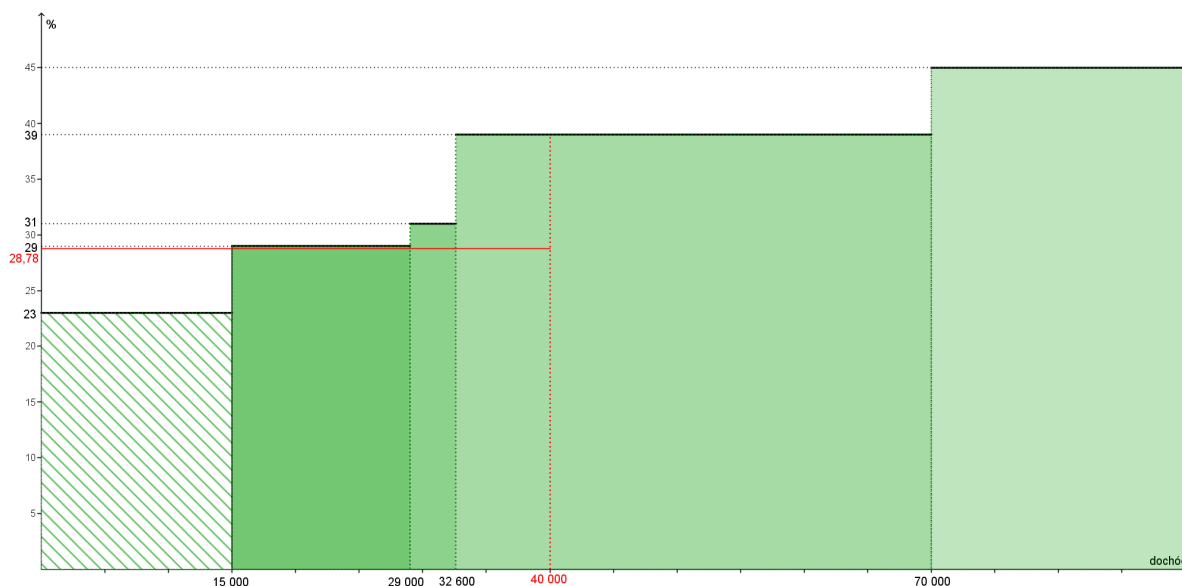
$$p(40\,000) = 8\,626 + 0,39 \cdot (40\,000 - 32\,600) = 8\,626 + 0,39 \cdot 7\,400 = 11\,512,$$

co potwierdza wcześniej przeprowadzony rachunek.

Jeśli dochód wynosi 85 000€, to należny podatek wynosi:

$$p(85\,000) = 23\,212 + 0,45 \cdot (85\,000 - 70\,000) = 23\,212 + 6\,750 = 29\,962$$

Wykonajmy jeszcze wykres progów podatkowych, na którym zaznaczmy dochód wynoszący 40 000€ oraz średni podatek od tego dochodu.



Łatwo zauważyć, że pole zakreskowanego prostokąta wynosi $0,23 \times 15\,000 = 3450$.

Obliczmy teraz, jakie jest średni podatek od dochodu wynoszącego 40 000€. Ponieważ podatek obliczamy wg wzoru $p = a \cdot x$, więc $a = \frac{p}{x}$, co w naszym przypadku daje:

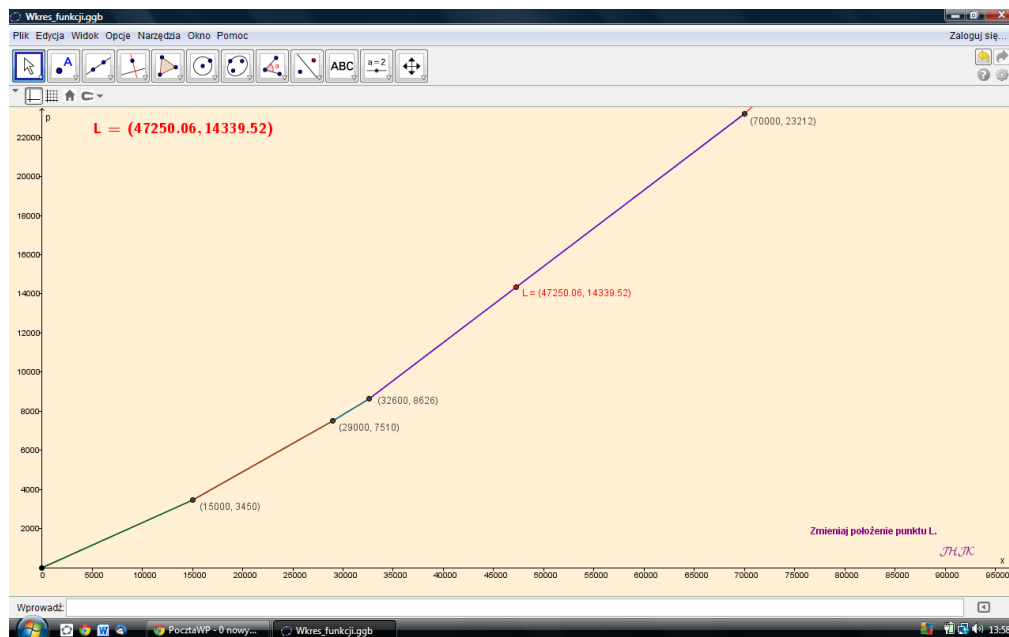
$$a = \frac{11\,512}{40\,000} = 0,2878 \approx 0,29.$$

Zauważmy, że średni podatek

$$a = \frac{0,23 \cdot 15\,000 + 0,29 \cdot 14\,000 + 0,31 \cdot 3\,600 + 0,39 \cdot 7\,400}{15\,000 + 14\,000 + 3\,600 + 7\,400}$$

jest średnią ważoną wykorzystanych progów podatkowych.

Sporządźmy jeszcze wykres funkcji w GG,



dzięki któremu uzyskamy automatycznie wysokość należnego podatku poprzez zmianę położenia punktu L .