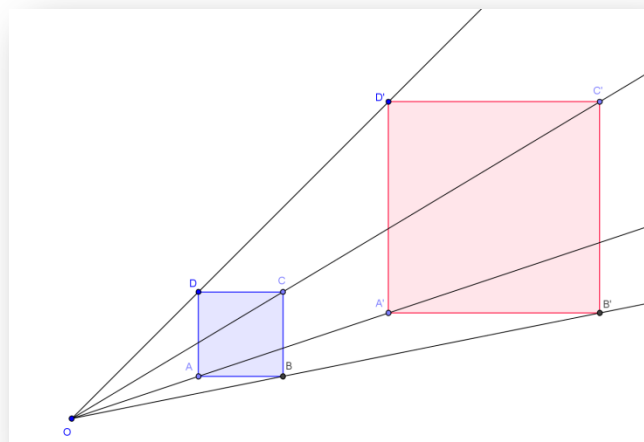


1. Przedmiot: **Matematyka**
2. Dział programowy: **7. Planimetria**
3. Temat: **Jednokładność i niektóre jej własności**
4. Klasa: **Klasa II**
5. Zgodność z podstawą programową: **Uczeń:**
 - 1) stosuje twierdzenie Talesa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa do obliczania długości odcinków i ustalania równoległości prostych;
 - 2) znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych w jednokładności (odcinka, trójkąta, czworokąta, itp.);
 - 3) rozpoznaje figury podobne; wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) ich własności.
6. Pomoce (środki) dydaktyczne
 - stanowiska komputerowe (lub komputer nauczyciela z tablicą interaktywną lub rzutnikiem multimedialnym),
 - bezpłatne oprogramowanie GeoGebra wspomagające nauczanie matematyki (<http://www.geogebra.org/cms/pl/download/>)
7. Cele: Uczeń:
 - operuje różnymi definicjami jednokładności,
 - posługuje się pojęciem „złożenie przekształcenia”; składa jednokładności,
 - ustala równania jednokładności,
 - stosuje własności jednokładności,
 - oblicza pola figur jednokładnych,
 - posługuje się programem GeoGebra (lub arkuszem kalkulacyjnym).
8. Metody nauczania: **Praca z komputerem, elementy wykładu, prezentacja, ćwiczenia**
9. Formy pracy: **Praca indywidualna i w parach**

Plan lekcji

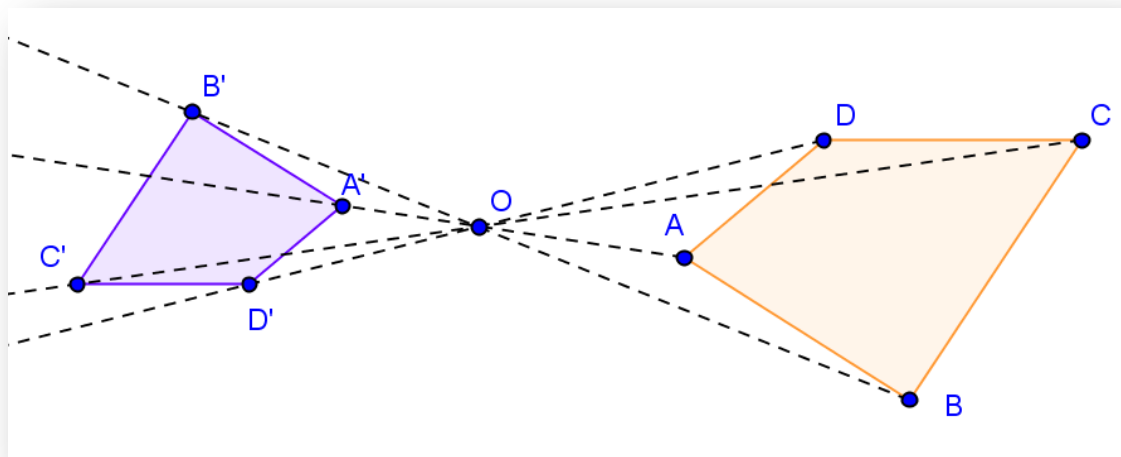
Wyobraźmy sobie, że z punktu O „oświetlamy” kwadrat $ABCD$, który np. na ścianie daje obraz $A'B'C'D'$.



Mówimy, że powstały w ten sposób kwadrat $A'B'C'D'$ jest **jednokładny** do kwadratu $ABCD$ w skali k . Punkt O nazywamy **środkiem jednokładności**, a liczbę k nazywamy **skalą jednokładności**.

O kwadracie $ABCD$ mówimy, że został przekształcony przez jednokładność o środku O i skali k . Kwadrat $A'B'C'D'$ jest obrazem kwadratu $ABCD$ w tej jednokładności.

Powyższa konstrukcja została wykonana tak, że obraz i oryginał leżą po samej stronie punktu O . Można jednak zrobić to inaczej. Popatrz na poniższy rysunek.



Teraz pomniejszony obraz czworokąta $ABCD$ leży po przeciwnej stronie punktu O w stosunku do oryginału. Rysunek powyższy został wykonany tak, że np. $|OA'| = \frac{2}{3}|OA|$. O narysowanym czworokącie $A'B'C'D'$ będziemy mówić, że jest jednokładny do czworokąta $ABCD$ w skali $-\frac{2}{3}$.

Pokazaliśmy, że przekształcając daną figurę w pokazany wyżej sposób, otrzymujemy obraz tej figury powiększony lub pomniejszony (można to zrobić na dwa sposoby!), ale o niezmiennym kształcie. Inaczej: jednokładność jest przekształceniem, które skaluje daną figurę względem ustalonego środka.

Powyższe uwagi pozwalają sformułować definicję jednokładności.

Jednokładnością o środku O i skali $k \neq 0$ nazywamy przekształcenie płaszczyzny, w którym obrazem dowolnego punktu $P \neq O$ jest taki punkt P' , że:

- 1) P' jest punktem prostej OP ;
- 2) iloraz $\frac{|OP'|}{|OP|} = |k|$, tzn. $|OP'| = |k| \cdot |OP|$;
- 3) P' należy do półprostej OP , gdy $k > 0$, zaś do półprostej dopełniającej półprostą OP , gdy $k < 0$.

Jednokładność o środku O i skali k oznaczamy symbolem: J_O^k .

Stosując pojęcie wektora, możemy powyższą definicję zapisać następująco:

Jednokładnością o środku O i skali $k \neq 0$ nazywamy przekształcenie płaszczyzny, w którym obrazem dowolnego punktu P jest taki punkt P' , że

$$\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}.$$

Jednokładność o środku O i skali k oznaczamy symbolem: J_O^k .

Rozważmy teraz następujące zadanie:

Wykaż, że $J_O^{k_2} \cdot J_O^{k_1} = J_O^{k_1 k_2}$.

Jednokładność $J_O^{k_1}$ przekształca dowolny punkt $P \neq O$ płaszczyzny na taki punkt $P' \neq O$, że

$$\overrightarrow{OP'} = k_1 \cdot \overrightarrow{OP}.$$

Jednokładność $J_O^{k_2}$ przekształca punkt $P' \neq O$ na taki punkt $P'' \neq O$, że

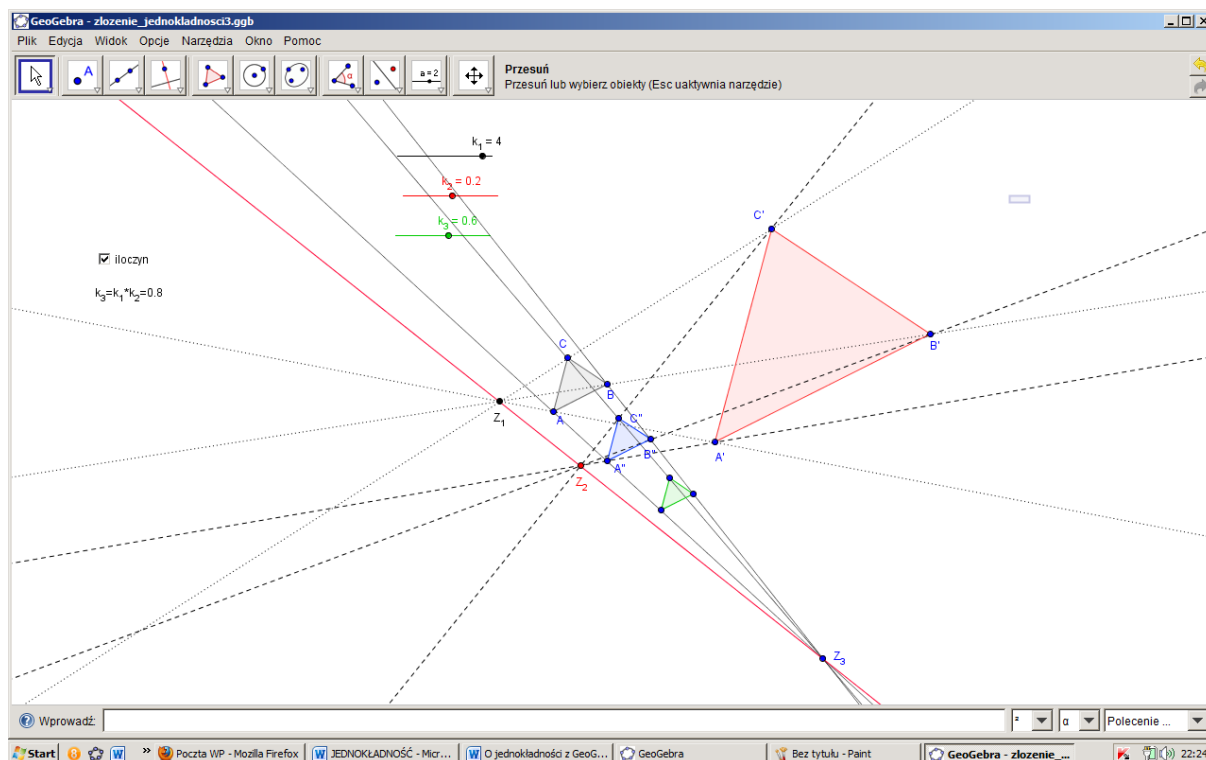
$$\overrightarrow{OP''} = k_2 \cdot \overrightarrow{OP'}.$$

Punkty P' i P'' leżą na prostej wyznaczonej przez punkty P i O . Łącząc powyższe warunki możemy napisać:

$$\overrightarrow{OP''} = k_2 \cdot \overrightarrow{OP'} = k_2 \cdot k_1 \cdot \overrightarrow{OP},$$

co oznacza, że punkt P'' jest obrazem punktu P w jednokładności o środku O i skali $k_1 \cdot k_2$.

Sformułowanie tego twierdzenia możemy poprzedzić ćwiczeniami z zastosowaniem programu GeoGebra.



Obrazem trójkąta ABC w jednokładności o środku Z_1 i skali k_1 jest trójkąt $A'B'C'$, zaś obrazem trójkąta $A'B'C'$ w jednokładności o środku Z_2 i skali k_2 jest trójkąt $A''B''C''$. Rysując proste: AA'' , BB'' , CC'' uzyskamy środek Z_3 jednokładności, która przekształca trójkąt ABC na trójkąt $A''B''C''$ i której skala jest równa $k_1 \cdot k_2$. (Trójkąt „zielony” pokrywa się z trójkątem $A''B''C''$ wówczas, gdy $k_3 = k_1 \cdot k_2$!)

Skale k_1 i k_2 możemy wybierać dowolnie (tu w zakresie od -5 do 5), ale nie zawsze uzyskamy efekt pokrycia się trójkątów: $A''B''C''$ i „zielonego”, gdyż nie zawsze pozwala na to przyjęta dokładność (Opcje → Zaokrąglanie). Dobry efekt uzyskamy, przyjmując np.:

$$\begin{aligned} k_1 &= 4 \\ k_2 &= -0,2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= 2 \\ k_2 &= -1,2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= -2,5 \\ k_2 &= 0,6 \end{aligned}$$

Analizując powyższą konstrukcję możemy zauważyć, że środki jednokładności: Z_1, Z_2, Z_3 leżą na jednej prostej! Czy tak jest rzeczywiście?

Wykonajmy następujące ćwiczenie (równania jednokładności):

Dany jest trójkąt ABC o wierzchołkach $A = (1, 2)$, $B = (2, 1)$ i $C = (3, 2)$.

- Oblicz współrzędne wierzchołków trójkąta $A'B'C'$, który jest obrazem trójkąta ABC w jednokładności o środku w punkcie $O_1 = (0, 0)$ i skali $k_1 = 2$.
- Oblicz współrzędne wierzchołków trójkąta $A''B''C''$, który jest obrazem trójkąta $A'B'C'$ w jednokładności o środku w punkcie $O_2 = (6, -2)$ i skali $k_2 = -\frac{1}{2}$.
- Oblicz współrzędne punktu wspólnego O_3 prostych AA'' i CC'' oraz współrzędne wierzchołków trójkąta $A_1B_1C_1$, który jest obrazem trójkąta ABC w jednokładności o środku w O_3 i skali $k_3 = -1$. Co zauważyłeś?
- Sprawdź, czy punkt O_3 należy do prostej O_1O_2 .

Definicja „wektorowa” jednokładności pozwala uzyskać równania jednokładności J_O^k , gdzie $O = (a, b)$ i $k \neq 0$.

Niech $P = (x, y)$ jest dowolnym punktem płaszczyzny oraz $P' = J_O^k(P)$, $P' = (x', y')$. Zgodnie z definicją jednokładności obrazem dowolnego punktu P jest taki punkt P' , że $\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}$.

Ponieważ

$$\overrightarrow{OP'} = [x' - a, y' - b], \overrightarrow{OP} = [x - a, y - b], k \cdot \overrightarrow{OP} = [k(x - a), k(y - b)],$$

więc

$$\begin{cases} x' - a = k(x - a) \\ y' - b = k(y - b) \end{cases}$$

i ostatecznie

$$\begin{cases} x' = kx + a(1 - k) \\ y' = ky + b(1 - k) \end{cases}$$

Rozwiązanie może wyglądać następująco:

Korzystając z wzorów, które wcześniej uzyskaliśmy, mamy:

$$A' = (2 \cdot 1 + 0 \cdot (1 - 2), 2 \cdot 2 + 0 \cdot (1 - 2)) = (2, 4)$$

$$B' = (2 \cdot 2 + 0 \cdot (1 - 2), 2 \cdot 1 + 0 \cdot (1 - 2)) = (4, 2)$$

$$C' = (2 \cdot 3 + 0 \cdot (1 - 2), 2 \cdot 2 + 0 \cdot (1 - 2)) = (6, 4)$$

$$A'' = \left(-\frac{1}{2} \cdot 2 + 6 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right), -\frac{1}{2} \cdot 4 - 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \right) = (8, -5)$$

$$B'' = \left(-\frac{1}{2} \cdot 4 + 6 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right), -\frac{1}{2} \cdot 2 - 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \right) = (7, -4)$$

$$C'' = \left(-\frac{1}{2} \cdot 6 + 6 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right), -\frac{1}{2} \cdot 4 - 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \right) = (6, -5)$$

Ponieważ $A = (1, 2)$, $A'' = (8, -5)$, więc

$$y - 2 = \frac{-5-2}{8-1}(x - 1),$$

czyli

$$y = -x + 3.$$

Ponieważ $C = (3, 2)$, $C'' = (6, -5)$, więc

$$y - 2 = \frac{-5-2}{6-3}(x - 3),$$

czyli

$$y = -\frac{7}{3}x + 9.$$

Punkt przecięcia się tych prostych $O_3 = (4,5; -1,5)$.

Zatem

$$A_1 = (-1 \cdot 1 + 4,5 \cdot (1 + 1), -1 \cdot 2 - 1,5 \cdot (1 + 1)) = (8, -5)$$

$$B_1 = (-1 \cdot 2 + 4,5 \cdot (1 + 1), -1 \cdot 1 - 1,5 \cdot (1 + 1)) = (7, -4)$$

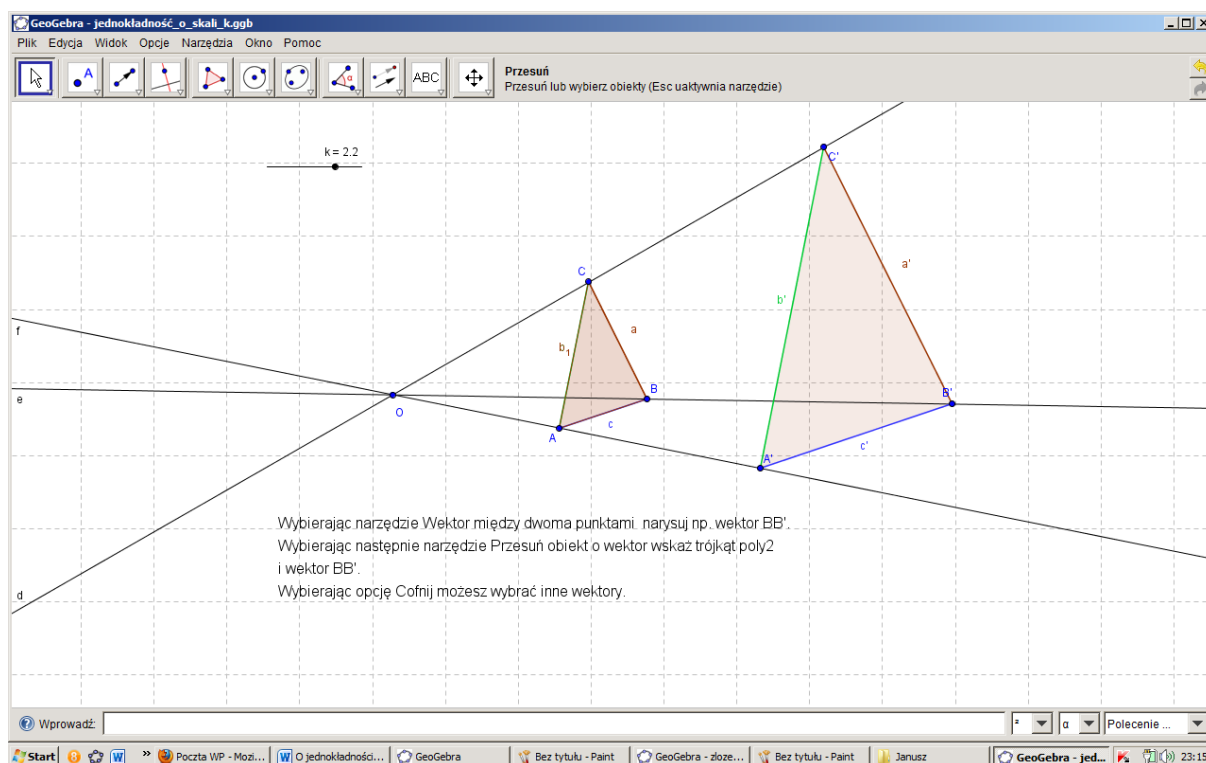
$$C_1 = (-1 \cdot 3 + 4,5 \cdot (1 + 1), -1 \cdot 2 - 1,5 \cdot (1 + 1)) = (6, -5)$$

Widać, że $A_1 = A'', B_1 = B'', C_1 = C''$. Oznacza to, że jednokładność $J_{O_3}^{-1}$ działa tak samo, jak jednokładność $J_{O_1}^2$ i $J_{O_2}^{-\frac{1}{2}}$, przy czym $k_3 = -1 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = k_1 \cdot k_2$.

Punkty O_1 i O_2 wyznaczają prostą p o równaniu $y = -\frac{1}{3}x$. Punkt $O_3 \in p$.

Przy pomocy GeoGebry możemy też pokazać inne własności jednokładności, np.:

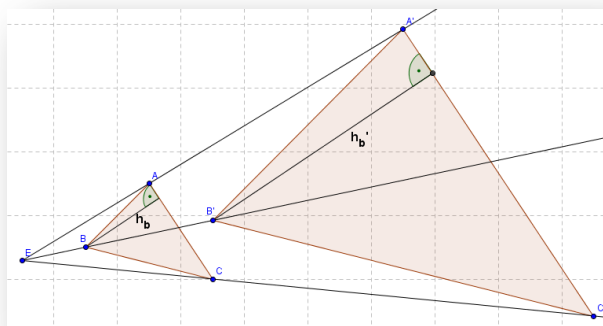
- 1) W jednokładności obrazem odcinka jest odcinek do niego równoległy.
- 2) W jednokładności odpowiadające sobie kąty są przystające.



Przesuwając o wektor trójkąt $A'B'C'$ (Trójkąt poly2), który nałożony jest na trójkąt ABC (Trójkąt poly1) pokażemy, że pewne kąty są przystające, a odcinki równoległe.

Przejdźmy jeszcze do pól figur jednokładnych.

Rozważmy dowolny trójkąt ABC i przekształćmy go przez jednokładność o skali k .



Pole trójkąta ABC jest równe $P_1 = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot h_b$, zaś pole trójkąta $A'B'C'$, który jest obrazem trójkąta ABC , jest równe $P_2 = \frac{1}{2} \cdot |A'C'| \cdot h_{b'} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot |AC| \cdot k \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot h_b \cdot k^2$.

Zatem

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot h_b \cdot k^2}{\frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot h_b} = k^2.$$

Stwierdziliśmy więc, że stosunek pól trójkątów jednokładnych jest równy kwadratowi skali jednokładności. Wniosek ten dotyczy również pól dowolnych wielokątów, tzn. jeśli P_2 jest polem obrazu w jednokładności o skali k pewnego n -kąta o polu P_1 , to $P_2 = k^2 \cdot P_1$.

Zadania

- Narysuj kwadrat $ABCD$ o wierzchołkach: $A = (-6, -6)$, $B = (-3, -6)$, $C = (-3, -3)$, $D = (-6, -3)$.
 - Skonstruuj kwadrat $A'B'C'D'$, który jest obrazem kwadratu $ABCD$ w jednokładności o środku $O_1 = (0,0)$ i skali $k_1 = -\frac{4}{3}$ oraz kwadrat $A''B''C''D''$, który jest obrazem kwadratu $A'B'C'D'$ w jednokładności o skali $k_2 = -1,5$ i środku $O_2 = (5, -2)$.
 - Poprowadź proste AA' , BB' , CC' , DD' . W jakim punkcie te proste się przecinają?
 - Poprowadź proste $A'A''$, BB'' , $C'C''$, $D'D''$. W jakim punkcie te proste się przecinają?
 - Poprowadź proste AA'' , BB'' , CC'' , DD'' . Czym jest punkt G przecięcia się tych prostych? Jaka jest skala jednokładności przekształcającej kwadrat $ABCD$ na kwadrat $A''B''C''D''$? Sprawdź swoją odpowiedź odpowiednim rachunkiem. Podaj pole kwadratu $A''B''C''D''$.
- Dany jest prostokąt o polu 16 cm^2 . Jego obraz w pewnej jednokładności o środku O i skali k ma pole równe 80 cm^2 . Oblicz skalę tej jednokładności.
- Oblicz powierzchnię prostokątnego pokoju, który na planie w skali $1 : 200$ ma wymiary 2 i 3 cm .
- Trójkąty ABC i $A'B'C'$ są jednokładne. Oblicz $|A'B'|$, $|B'C'|$, $|A'C'|$ jeżeli wiadomo, że $|AB'| : |AC'| : |BC'| = 6 : 4 : 3$ i $|A'B'| + |B'C'| + |A'C'| = 26$.
- Stosunek obwodów jednokładnych trójkątów ABC i $A'B'C'$ jest równy $\frac{7}{5}$. Różnica $|AB| - |A'B'| = 4$. Oblicz $|AB|$ i $|A'B'|$.
- Wyznacz współrzędne środka jednokładności, w której obrazem okręgu o równaniu $(x - 16)^2 + y^2 = 4$ jest okrąg o równaniu $(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 16$, a skala jednokładności jest liczbą ujemną (arkusz maturalny (pr)/2008)
- Odcinki AB i CD są równoległe. Wykaż, że istnieją dwa środki jednokładności tych odcinków, gdy $|AB| \neq |CD|$ oraz jeden, gdy $|AB| = |CD|$. Znajdź te środki. Jak są one położone względem danych odcinków?

8. Z równań jednokładności wyznacz x i y . Jaką skalę ma jednokładność odwrotna?
9. Rozważ równania jednokładności dla $k = 0, 1$ i -1 . Jakim przekształceniem jest wtedy jednokładność?