

Scenariusz lekcji

1. **Przedmiot:** Matematyka
2. **Dział Programowy:** Trygonometria
3. **Temat:** Równania typu $\sin x = a$, $\cos x = a$.
4. **Klasa:** II
5. **Zgodność z podstawą programową:** Uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:
 - 3) Wykorzystuje okresowość funkcji trygonometrycznych
 - 4) Posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych (...)
6. **Pomoce dydaktyczne:**
 - komputer nauczyciela z tablicą interaktywną lub rzutnikiem multimedialnym,
 - bezpłatne oprogramowanie GeoGebra w najnowszej wersji 5.0 wspomagające nauczanie matematyki <http://www.geogebra.org/cms/pl/download/>)
7. **Cele:** Uczeń:
 - Rozwiązuje równania typu $\sin x = a$, $\cos x = a$.
 - Posługuje się wykresami funkcji sinus i cosinus.
 - Potrafi ułożyć równanie, którego interpretacja przedstawiona jest na wykresie.
 - Wykorzystuje okresowość funkcji sinus i cosinus do wyznaczania rozwiązań równania w określonym przedziale.
8. **Metody nauczania:** elementy wykładu, prezentacja, ćwiczenia
9. **Formy pracy:** praca grupowa, indywidualna
10. **Plan lekcji:**

Zajmijmy się równaniem $\sin x = \frac{1}{2}$. Aby rozwiązać to równanie narysujmy wykresy obu funkcji w jednym układzie współrzędnych (nauczyciel włącza aplet sinus_cos.ggb) i wybiera (klika) odpowiednie równanie. Zwróćmy uwagę, że wykresy funkcji $y=0,5$ i $y=\sin x$ przecinają się w nieskończenie wielu punktach zatem nasze równanie w zbiorze \mathbb{R} ma dokładnie tyle samo czyli nieskończenie wiele rozwiązań.

Pytanie do klasy: Czy na podstawie wykresu i faktu, że jednym z rozwiązań jest $x = \frac{\pi}{6}$ można odczytać wartości kątów w pozostałych czerwonych i żółtych punktach leżących na osi X ?
Okazuje się, że tak wystarczy zauważyć, że pierwszy pierwiastek $x = \frac{\pi}{6}$ jest oddalony od

miejsca zerowego $x=0$ dokładnie o $\frac{\pi}{6}$ zatem aby odnaleźć kolejne rozwiązanie wystarczy od π odjąć dokładnie tyle samo (wskazujemy odpowiednie odległości na wykresie). Zatem kolejne rozwiązanie to $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$.

Uczniowie mogą też zauważyć, że aby odczytać kolejne rozwiązanie wystarczy wziąć 5 pionowych pasów o szerokości $\frac{\pi}{6}$ czyli $5 \cdot \frac{\pi}{6}$.

Mamy dwa rozwiązania, aby odczytać pozostałe wystarczy przyjrzeć się wykresowi funkcji sinus. Co ile pionowych „pasów”- jeden pas ma szerokość $\frac{\pi}{6}$ powtarzają się rozwiązania? (nauczyciel pyta o żółte kropki na osi X następnie o czerwone).

Rozwiązania powtarzają się co 2π stąd możemy dodając wielokrotnie 2π do naszych dwóch podstawowych rozwiązań $x = \frac{\pi}{6}$ oraz $x = \frac{5}{6}\pi$ otrzymywać kolejne rozwiązania wyjściowego równania.

Ogólnie możemy zapisać $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$ $k \in \mathbb{C}$.

Wypiszmy rozwiązania dla wybranych k :

- Dla $k=0$ mamy $x = \frac{\pi}{6}$ lub $x = \frac{5}{6}\pi$
- Dla $k=1$ mamy $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13}{6}\pi$ lub $x = \frac{5}{6}\pi + 2\pi = \frac{17}{6}\pi$
- Dla $k=2$ mamy $x = \frac{\pi}{6} + 4\pi = \frac{25}{6}\pi$ lub $x = \frac{5}{6}\pi + 4\pi = \frac{29}{6}\pi$
- Itd...

(W każdym z przypadków nauczyciel przesuwając wykres wykorzystując przycisk Geogebra



i pokazuje odpowiednie rozwiązania)



Nauczyciel wybiera kursor i „łapie” za pomarańczową linię (wciśnięty lewy przycisk myszy) i przesuwa do wartości powyżej 1 np. $y=1.1$.

Czy ktoś z Was mógłby zapisać/podać równanie, którego interpretacja jest na wykresie ?!

Uczniowie podają $\sin x = 1,1$.

Ile rozwiązań ma to równanie ?

Dla jakich a równanie $\sin x = a$ ma rozwiązania?

Podsumowując równanie $\sin x = a$ ma rozwiązania jeśli $a \in \langle -1, 1 \rangle$.

Nauczyciel wybiera w aplecie równanie $\sin x = 0$. Pytanie do uczniów: Co ile tym razem powtarzają się rozwiązania (kropki zaznaczone na żółto na osi OX) ? Co ile tym razem powtarzają się rozwiązania (kropki zaznaczone na czerwono na osi OX) ? Zapisujemy:

$x = 0 + 2k\pi$, $x = \pi + 2k\pi$ $k \in \mathbb{C}$. Zwróćmy uwagę, że wszystkie te punkty możemy zapisać krótko $x = k\pi$, $k \in \mathbb{C}$.

Zadanie dla klasy: Znajdź wszystkie rozwiązania równania: $\sin x = \frac{1}{2}$ w przedziale

$x \in \langle 5\pi, 8\frac{1}{2}\pi \rangle$. (Nauczyciel nadzoruje wykonywanie zadania i udziela stosownych wskazówek zapisuje sposób rozwiązania na tablicy).

Rozwiążmy równanie $2\sin 3x = -\sqrt{3}$

Równanie to możemy rozwiązać korzystając z tego samego wykresu funkcji sinus. Wprowadźmy zmienną $t=3x$, wówczas nasze równanie przybiera postać:

$\sin t = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ (Nauczyciel wybiera odpowiedni przykład w aplecie- klika w równanie $\sin x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$)

Jakie są rozwiązania tego równania w przedziale $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$?

$t = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$, $t = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$ Zatem do każdego rozwiązania podstawowego wystarczy

dopisać $+ 2k\pi, k \in \mathbb{C}$ aby otrzymać rozwiązania ogólne równania $\sin t = \frac{-\sqrt{3}}{2}$. Naszą zmienną

był jednak x zatem musimy wrócić do podstawienia $t=3x$:


$t = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$, $t = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$

$3x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$, $3x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{C}$

$x = \frac{4}{9}\pi + \frac{2}{3}k\pi$, $x = \frac{5}{9}\pi + \frac{2}{3}k\pi$, $k \in \mathbb{C}$

Analogiczne metody stosujemy w przypadku równań $\cos x = a$.

Podsumowując: Aby rozwiązać równania typu $\sin x = a$, $\cos x = a$, należy znaleźć tzw. rozwiązania podstawowe w przedziale długości 2π . Rozwiązania ogólne równania otrzymujemy dopisując do każdego rozwiązania podstawowego $+ 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Nauczyciel pokazuje na aplecie rozwiązania równania $\cos x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$. W tym celu należy zmienić funkcję na $\cos x$ – klikamy w przycisk  Wspólnie z uczniami ustala rozwiązania w przedziale np. $[-\pi, \pi]$ i zapisuje na tablicy rozwiązania ogólne równania.

Praca domowa:

Rozwiąż równania:

a) $\cos x = \frac{1}{2}$

b) $\cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$