


Scenariusz lekcji

1. **Przedmiot:** Matematyka
2. **Dział Programowy:** Trygonometria
3. **Temat:** Rozwiązywanie nierówności trygonometrycznych cz1.
4. **Klasa:** II
5. **Zgodność z podstawą programową:** Uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:
 - 3) Wykorzystuje okresowość funkcji trygonometrycznych
 - 4) Posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych (...)
 - 6) Rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne typu $\cos 2x < \frac{1}{2}$.
6. **Pomoce dydaktyczne:**
 - komputer nauczyciela z tablicą interaktywną lub rzutnikiem multimedialnym,
 - bezpłatne oprogramowanie GeoGebra w najnowszej wersji 5.0 wspomagające nauczanie matematyki <http://www.geogebra.org/cms/pl/download/>)
7. **Cele:** Uczeń:
 - Rozwiązuje nierówności typu $\sin x \geq a$, $\sin x > a$, $\cos x \leq a$, $\cos x < a$.
 - Rozwiązuje nierówności typu $\cos 2x < \frac{1}{2}$.
 - Posługuje się wykresami funkcji sinus i cosinus.
 - Potrafi ułożyć nierówność, której interpretacja przedstawiona jest na wykresie.
 - Wykorzystuje okresowość funkcji sinus i cosinus do wyznaczania rozwiązań nierówności w określonym przedziale.
8. **Metody nauczania:** elementy wykładu, prezentacja, ćwiczenia
9. **Formy pracy:** praca grupowa, indywidualna
10. **Plan lekcji:**

(Zakładam, że uczniowie umieją rozwiązywać proste równania trygonometryczne, i znajdować rozwiązania tych równań w określonym przedziale).

Zajmijmy się nierównością typu $\sin x \leq \frac{1}{2}$ w przedziale $\left\langle -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Nauczyciel włącza aplet

Geogebry (rownania_nierownosci_trygonometryczne.ggb) i wybiera kursor programu: 

następnie przycisk  oraz ustawia suwakiem wartość 0,5 tak aby wzór pod suwakiem wskazywał nierówność $\sin(x) \leq 0.5$. Zwraca uwagę uczniom, że aby rozwiązać podaną

nierówność należy narysować wykresy dwóch funkcji $y = \sin x$ oraz $y = \frac{1}{2}$. (Jeżeli nie widać

podanego w treści przedziału nauczyciel wybiera narzędzie  i przesuwa obszar roboczy aby

widoczny był przedział $\left\langle -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, kręcąc kółkiem myszy można przybliżać i oddalać wykres).

Ważna jest umiejętność znajdowania miejsc przecięcia się podanych wykresów. Nauczyciel wskazuje na wykresie punkty przecięcia się podanych wykresów oraz argumenty


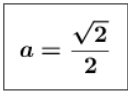
$x = \frac{\pi}{6}, x = -1\frac{1}{6}\pi$ w podanym przedziale. Uczniowie mogą samodzielnie przy pomocy siatki

odczytać punkty przecięcia. Zielona część wykresu ilustruje zbiór rozwiązań nierówności

$\sin(x) \leq 0.5$. Odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności $\sin x \leq \frac{1}{2}$ w przedziale $\left\langle -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$:

$$\left\langle -1\frac{1}{6}\pi, \frac{\pi}{6} \right\rangle.$$

Nauczyciel zapisuje na tablicy nierówność: $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ i pokazuje uczniom odpowiedni wykres

funkcji klikając  oraz klikając w przycisk  aby ustawić dokładną wartość.

Poleca uczniom odczytanie rozwiązań z wykresu, oczywiście tym razem rozwiązaniem jest

nieskończenie wiele przedziałów w których wykres funkcji $\cos x$ jest „nad” prostą $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (na

wykresie niebieska część wykresu).

Jeden z uczniów zapisuje rozwiązanie na tablicy np. $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ nauczyciel w razie potrzeby

uzupełnia rozwiązanie o literkę k: $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{C}$.

Rozwiążmy nierówność $\cos 2x > \frac{1}{2}$, gdy $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle$.

Dla podanej nierówności wprowadzamy pomocniczą niewiadomą $t=2x$, skoro $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle$

zatem $t = 2x \in \langle -\pi, 2\pi \rangle$. Nasza nierówność przybiera postać: $\cos t > \frac{1}{2}$

Nauczyciel włącza odpowiedni wykres i ustawia odpowiednią nierówność. Z wykresu(traktujemy tym razem argumenty funkcji jako zmienną t) odczytujemy, że nierówność

jest spełniona w przedziale dla $t \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(1\frac{2}{3}\pi, 2\pi\right)$. Wracając do podstawienia $t=2x$

mamy: $2x \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(1\frac{2}{3}\pi, 2\pi\right)$, stąd $x \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5}{6}\pi, \pi\right)$.

Nierówności trygonometryczne rozwiązujemy tymi samymi metodami co równania trygonometryczne, z tym, że odpowiedź prawie zawsze odczytujemy z wykresu odpowiedniej funkcji.

Można zmodyfikować podane rozwiązanie nierówności podstawiając nową zmienną $t=2x$ i nie narzucać warunku $t \in \langle -\pi, 2\pi \rangle$. Wówczas rozwiązujemy ogólnie nierówność $\cos t > \frac{1}{2}$.

Zbiorem rozwiązań jest wówczas przedział $t \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{C}$. Wracając do

podstawienia mamy $2x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{C}$ czyli $x \in \left(-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{C}$.

Wypiszmy przedziały najbliższe $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right)$:

$$k = -1 \quad x \in \left(-1\frac{1}{6}\pi, -\frac{5}{6}\pi\right),$$

$$k = 0 \quad x \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right),$$

$$k = 1 \quad x \in \left(\frac{5}{6}\pi, 1\frac{1}{6}\pi\right),$$

Ostatecznie w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ mieszczą się rozwiązania $x \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5}{6}\pi, \pi\right)$.

Praca domowa:

Rozwiąż nierówności:

$$\text{a) } \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{b) } \cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{c) } \sin \frac{1}{2}x \geq \frac{1}{2}$$