

1. Przedmiot: **Matematyka**
2. Dział programowy: **10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka.**
3. Temat: **Prawdopodobieństwo całkowite i wzór Bayesa.**
4. Klasa: **Klasa III**
5. Zgodność z podstawą programową: **Uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:**
  - 1) **oblicza prawdopodobieństwo warunkowe;**
  - 2) **korzysta z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym.**
6. Pomoce (środki) dydaktyczne
  - **stanowiska komputerowe (lub komputer nauczyciela z tablicą interaktywną lub rzutnikiem multimedialnym),**
  - **bezpłatne oprogramowanie GeoGebra wspomagające nauczanie matematyki (<http://www.geogebra.org/cms/pl/download/>)**
7. Cele: Uczeń:
  - stosuje wzór określający prawdopodobieństwo warunkowe,
  - poznaje prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń,
  - ilustruje zadanie za pomocą tzw. drzewka,
  - stosuje tabelkę dla pary zdarzeń losowych,
  - komentuje i uzasadnia otrzymany wynik.
  - posługuje się programem GeoGebra (lub arkuszem kalkulacyjnym).
8. Metody nauczania: **Praca z komputerem, elementy wykładu, prezentacja, ćwiczenia**
9. Formy pracy: **Praca indywidualna i w parach**

### **Plan lekcji**

Rozważmy następującą sytuację: w urnie znajdują się trzy identyczne kule ponumerowane liczbami 1, 2, 3. Z urny losujemy jedną kulę i nie zwracając jej do urny, losujemy drugą kulę (losowanie bez zwrotu).

Niech

$E_1$  – Pierwsza wylosowana liczba jest liczbą nieparzystą;

$E_2$  – Druga wylosowana liczba jest liczbą nieparzystą.

Powyższe zdarzenia są zależne, gdyż prawdopodobieństwo wylosowania liczby nieparzystej za drugim razem, ze względu na zmianę liczby kul, ulega zmianie. Inaczej: dwa zdarzenia  $E_1$  i  $E_2$  nie mają takiej samej przestrzeni zdarzeń elementarnych.

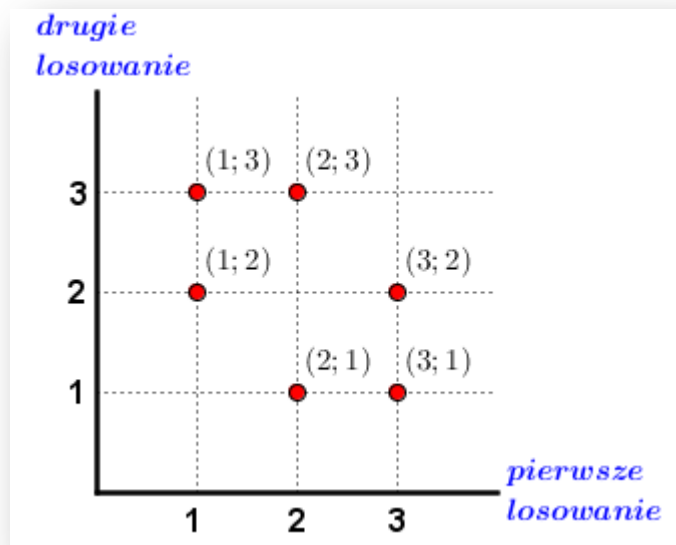
Obliczmy  $P(E_2|E_1)$ , tj. prawdopodobieństwo warunkowe zdarzenia  $E_2$ , gdy zaszło zdarzenie  $E_1$ :

$$P(E_2|E_1) = \frac{1}{2}.$$

Obliczmy teraz prawdopodobieństwo zdarzenia złożonego

$E$  – Obie wylosowane liczby są nieparzyste.

Możliwe wyniki losowań zilustrujemy na diagramie kartezjańskim. Wygląda on następująco:



Mamy tu

$$P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Zauważmy, że

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2},$$

czyli

$$P(E) = P(E_1) \cdot P(E_2|E_1).$$

Wniosek:

Jeżeli dwa zdarzenia  $E_1$  i  $E_2$  są zależne, to prawdopodobieństwo ich iloczynu jest równe iloczynowi prawdopodobieństwa zdarzenia  $E_1$  i prawdopodobieństwa warunkowego zdarzenia  $E_2$ , gdy zaszło zdarzenie  $E_1$ .

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2|E_1)$$

Przejdźmy teraz do następującego problemu<sup>1</sup>:

Dla uzyskania informacji dotyczących rozprzestrzeniania się (rozwoju) choroby, przeprowadza się testy diagnostyczne, nieinwazyjne i niezbyt drogie, w celu otrzymania pierwszej informacji, która – w przypadku pozytywnego wyniku – będzie poddana dalszym, bardziej pogłębionym analizom.

Założmy, iż wiadomo, że prawdopodobieństwo poprawnego zadziałania testu w przypadku osób chorych (czyli z pozytywnym wynikiem testu) wynosi 99%, podczas gdy prawdopodobieństwo poprawnego zadziałania testu w przypadku osób zdrowych (czyli z negatywnym wynikiem testu) wynosi 99,5%. Jeśli również wiadomo, że prawdopodobieństwo zapadalności na tę chorobę (zachorowania) wynosi 0,5%, ile wynosi prawdopodobieństwo, że człowiek z pozytywnym wynikiem testu jest faktycznie chory?

Tekst ten przeczytało dwoje uczniów. Ich wstępny komentarz był następujący:

<sup>1</sup> Zadanie w tej postaci pochodzi z podręcznika:

Bergamini M., Trifone A., Barozzi G.: *Matematica.verde 2*, Zanichelli editore S. p. A., Bologna 2010.

Zadania analogiczne: 1) Dobrowolski M., Karpiński M., Lech J.: *Matematyka III*, Gdańsk 2008, 6/184; 2) Płocki A.: *Rachunek prawdopodobieństwa dla nauczycieli*, PWN, Warszawa 1981, 10.3./208.

Anka: „Jeśli test ma wynik pozytywny, prawdopodobieństwo, że pacjent jest chory wynosi co najmniej 90%!”

Bogdan: „Ale choroba jest mało rozpowszechniona; chcę powiedzieć, że rzadko zdarza się, że osoba poddana testom okazuje się chora, zatem prawdopodobieństwo powinno wynosić znacznie poniżej 99%, powiedziałbym powinno być znacznie niższe od 90%”.

Kto, według ciebie, ma rację?

Skonstruuj odpowiednie drzewo probabilistyczne, tabelkę dla par zdarzeń, a następnie użyj twierdzenia o iloczynie zdarzeń zależnych.

Ustalmy, co oznacza zwrot „pozytywne zadziałanie testu”. Otóż: pozytywne zadziałanie testu w przypadku osoby chorej ( $CH$ ) oznacza wynik pozytywny ( $D$ ), zaś pozytywne zadziałanie testu w przypadku osoby zdrowej ( $Z$ ) oznacza wynik negatywny ( $N$ ).

Losowo wybrana osoba jest osobą chorą:  $P(CH) = 0,005$ ;

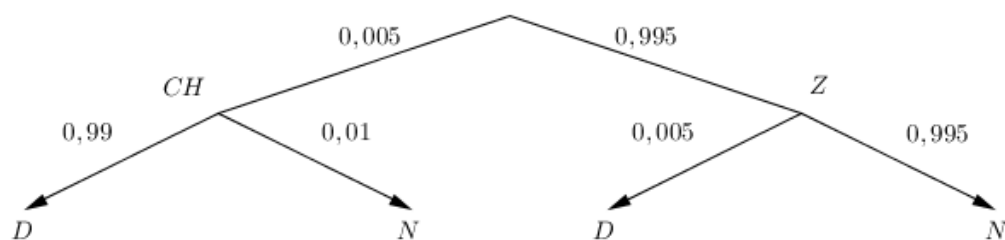
Test daje wynik pozytywny (dodatni,  $D$ ) w przypadku osoby chorej ( $CH$ ):  $P(D|CH) = 0,99$ ;

Test daje wynik negatywny ( $N$ ) w przypadku osoby zdrowej ( $Z$ ):  $P(N|Z) = 0,995$ .

Losowo wybrana osoba jest osobą zdrową:  $P(Z) = 0,995$ ;

Test daje wynik pozytywny ( $D$ ) w przypadku osoby zdrowej ( $Z$ ):  $P(D|Z) = 0,005$ ;

Test daje wynik negatywny ( $N$ ) w przypadku osoby chorej ( $CH$ ):  $P(N|CH) = 0,01$ .



$$P(CH \cap D) = P(CH) \cdot P(D|CH) = 0,005 \times 0,99 = 0,00495$$

$$P(CH \cap N) = P(CH) \cdot P(N|CH) = 0,005 \times 0,01 = 0,00005$$

$$P(Z \cap N) = P(Z) \cdot P(N|Z) = 0,995 \times 0,995 = 0,990025$$

$$P(Z \cap D) = P(Z) \cdot P(D|Z) = 0,995 \times 0,005 = 0,004975$$

TEST \ CHOROBA	$CH$	$Z$	SUMA
$D$	0,00495	0,004975	0,009925
$N$	0,00005	0,990025	0,990075
SUMA	0,005	0,995	1

Zgodnie z poleceniem, musimy obliczyć  $P(CH|D)$ . Korzystając z wyniku z tabelki oraz ze wzoru

$$P(D \cap CH) = P(D) \cdot P(CH|D),$$

mamy:

$$P(CH|D) = \frac{P(D \cap CH)}{P(D)} = \frac{0,00495}{0,009925} \approx 0,498741 (\approx 0,5 = 50\%),$$

zaś korzystając z drzewa mamy:

$$P(CH|D) = \frac{0,005 \cdot 0,99}{0,005 \cdot 0,99 + 0,995 \cdot 0,005} \approx 0,498741.$$

Odpowiedź brzmi zatem:

Prawdopodobieństwo, że człowiek z pozytywnym wynikiem testu jest faktycznie chory wynosi około 50%.

Rację miał więc Bogdan.

Jaka będzie odpowiedź, gdy prawdopodobieństwo zapadalności na daną chorobę wyniesie 0,01% (wykorzystaj arkusz kalkulacyjny)? Co powiesz o zawodności (niezawodności) testu?

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2				TEST			
3	Dane				Zdarzenia przeciwne		
4	P(CH)		0,005		P(Z)		0,995
5	P(D CH)		0,99		P(N CH)		0,01
6	P(N Z)		0,995		P(D Z)		0,005
7							
8					CH	Z	SUMA
9				D	0,00495	0,004975	0,009925
10				N	0,00005	0,990025	0,990075
11				SUMA	0,005	0,995	1
12							
13	P(CH D)		0,498741				
14							

Jakie wnioski wyciągniesz, zmieniając liczbę  $P(CH)$ ?