

1. scenariusz (ramanu22jhjk)

1. Przedmiot: **Matematyka**
2. Dział programowy: **11. Rachunek różniczkowy**
3. Temat: **Interpretacja geometryczna pochodnej**
4. Klasa: **Klasa III**
5. Zgodność z podstawą programową: **Uczeń:**
 - 1) oblicza granice funkcji (i granice jednostronne), korzystając z twierdzeń o działaniach na granicach i z własności funkcji ciągłych;
 - 2) oblicza pochodne funkcji wymiernych;
 - 3) korzysta z geometrycznej i fizycznej interpretacji pochodnej.
6. Pomoce (środki) dydaktyczne
 - stanowiska komputerowe (lub komputer nauczyciela z tablicą interaktywną lub rzutnikiem multimedialnym),
 - bezpłatne oprogramowanie GeoGebra wspomagające nauczanie matematyki (<http://www.geogebra.org/cms/pl/download/>)
7. Cele: Uczeń:
 - zdobędzie umiejętności posługiwania się podstawowymi pojęciami rachunku różniczkowego: granicy funkcji i pochodnej,
 - zdobędzie umiejętności stosowania pochodnych do opisu zmieniających się wielkości,
 - pozna pojęcie ilorazu różnicowego funkcji i nauczy się obliczać iloraz różnicowy,
 - pozna definicję pochodnej funkcji w punkcie i jej interpretację geometryczną,
 - pozna pojęcie stycznej do wykresu funkcji,
 - nauczy się wyznaczać styczną do wykresu funkcji w danym punkcie,
 - posługuje się programem GeoGebra (lub arkuszem kalkulacyjnym).
8. Metody nauczania: **Praca z komputerem, elementy wykładu, prezentacja, ćwiczenia**
9. Formy pracy: **Praca indywidualna i w parach**

Plan lekcji

Na wstępie przypominamy pojęcie ilorazu różnicowego funkcji:

Niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu $U(x_0)$ punktu x_0 , natomiast $h \neq 0$ będzie liczbą, dla której $x_0 + h \in U(x_0)$. **Ilorazem różnicowym** tej funkcji w punkcie x_0 , odpowiadającym przyrostowi h argumentu nazywamy liczbę

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} := \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Obliczmy iloraz różnicowy funkcji $f(x) = \frac{1}{6}x^3$ w punkcie x_0 . Zgodnie z definicją, mamy:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{6}(x_0 + h)^3 - \frac{1}{6}x_0^3}{h} = \frac{\frac{1}{6}[(x_0 + h)^3 - x_0^3]}{h},$$

a ponieważ $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$, więc

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\frac{1}{6}[(x_0 + h - x_0)((x_0 + h)^2 + x_0(x_0 + h) + x_0^2)]}{h} = \\ &= \frac{\frac{1}{6}[h((x_0 + h)^2 + x_0(x_0 + h) + x_0^2)]}{h} = \\ &= \frac{1}{6}[(x_0 + h)^2 + x_0(x_0 + h) + x_0^2].\end{aligned}$$

Obliczmy teraz granicę otrzymanego wyrażenia przy $h \rightarrow 0$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{6}[(x_0 + h)^2 + x_0(x_0 + h) + x_0^2] = \frac{1}{6} \cdot 3x_0^2 = \frac{1}{2}x_0^2.$$

Dla $x_0 = 2$ wartość tej granicy wynosi 2!

Pora na kolejną definicję.

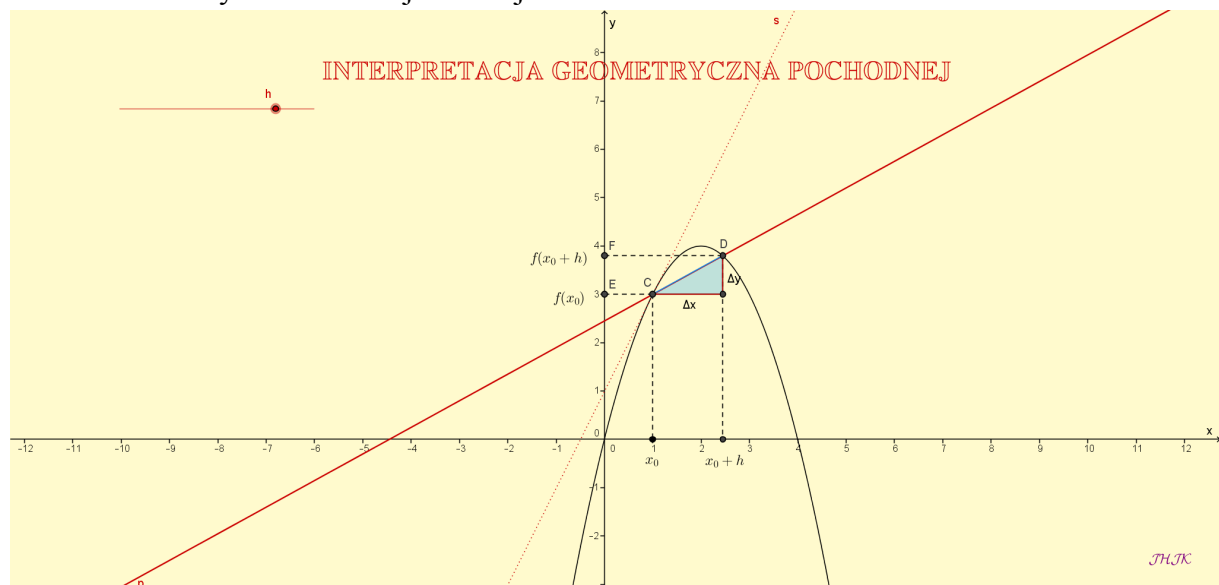
Niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu $U(x_0)$ punktu x_0 , natomiast $h \neq 0$ będzie liczbą, dla której $x_0 + h \in U(x_0)$. Jeśli istnieje (skończona) granica

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

To granicę tę będziemy nazywać **pochodną funkcji f w punkcie x_0** i oznaczać $f'(x_0)$, a o funkcji f powiemy, że jest różniczkowalna w punkcie x_0 . Jeśli zaś ta granica nie istnieje bądź jest niewłaściwa, to powiemy, że funkcja f nie jest różniczkowalna w punkcie x_0 .

W powyższym przykładzie obliczyliśmy więc pochodną funkcji $f(x) = \frac{1}{6}x^3$ w punkcie $x_0 = 2$ i stwierdziliśmy, że $f'(2) = 2$.

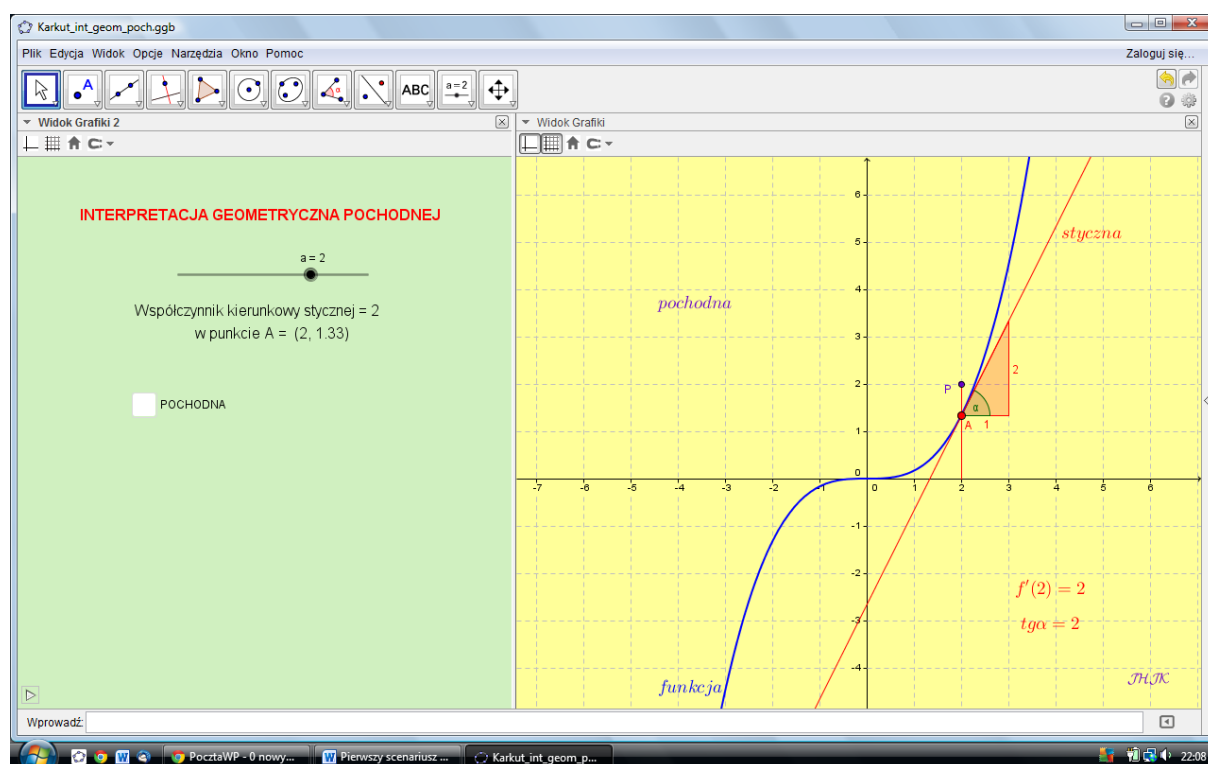
Jaka jest interpretacja geometryczna liczby pochodna funkcji? Utwórzmy odpowiedni aplet GeoGebry. Prosta p jest prostą sieczną, na której leżą dwa punkty C i D wykresu danej funkcji. Gdy punkt D zbliża się po krzywej do punktu C , tzn. gdy $h \rightarrow 0$, to sieczna p zmierza do położenia stycznej s do wykresu funkcji w punkcie o odciętej x_0 . Zauważmy, że prosta sieczna CD jest nachylona do osi x pod kątem, którego tangens jest równy $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, co oznacza, że iloraz różnicowy funkcji f w punkcie x_0 , odpowiadający zmianie argumentu h , jest współczynnikiem kierunkowym rozważanej siecznej.



Jaki jest zatem związek pochodnej z położeniem stycznej? W kolejnym aplecie GG posłużymy się funkcją $f(x) = \frac{1}{6}x^3$. Pozwala on na zmianę położenia punktu A na wykresie danej funkcji. Prowadząc styczną dla $x = 2$, stwierdzamy, że ma ona współczynnik kierunkowy 2, a liczba ta jest pochodną funkcji f w punkcie $x_0 = 2$. Czym jest zatem pochodna funkcji w punkcie x_0 ? Jest to współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu danej funkcji w punkcie $(x_0, f(x_0))$. Prosta styczna ma więc współczynnik kierunkowy $a = f'(x_0) = \tan \alpha$, gdzie α jest kątem nachylenia prostej stycznej do osi x . Spostrzeżenie to pozwala napisać równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$.

Niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu $U(x_0)$ punktu x_0 i różniczkowalna w tym punkcie. **Styczną** do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ nazywamy prostą o równaniu

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$



Zauważmy jeszcze, że jeśli dla punktu $P = (x_0, f'(x_0))$ włączymy ślad, to otrzymamy punkty wykresu funkcji pochodnej funkcji $f(x) = \frac{1}{6}x^3$.

Ćwiczenie

Korzystając z powyższego apletu, odpowiedz na pytania:

1. Dla jakich wartości x pochodna przyjmuje wartości dodatnie?
2. W jakich przedziałach pochodna przyjmuje wartości ujemne?
3. W jakich przedziałach funkcja jest rosnąca, a w jakich malejąca?
4. Rozwiąż równanie $f'(x) = 0$.