

1. Przedmiot: **Matematyka**
2. Dział programowy: **4. Funkcje, 8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej**
3. Temat: **Odległość punktów, prostych i punktu od prostej**
4. Klasa: **Klasa II**
5. Zgodność z podstawą programową: **Uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:**
 - 2) szkicuje wykres funkcji określonej w różnych przedziałach różnymi wzorami; odczytuje własności takich funkcji z wykresu;
 - 3) stosuje wektory do opisu przesunięcia wykresu funkcji;
 - 4) oblicza odległość punktu od prostej;
6. Pomoce (środki) dydaktyczne
 - stanowiska komputerowe (lub komputer nauczyciela z tablicą interaktywną lub rzutnikiem multimedialnym),
 - bezpłatne oprogramowanie GeoGebra wspomagające nauczanie matematyki (<http://www.geogebra.org/cms/pl/download/>)
7. Cele: Uczeń:
 - stosuje warunek równoległości wektorów;
 - sprawdza przynależność punktu do prostej;
 - zapisuje równania liniowe w postaci ogólnej i kierunkowej;
 - rozwiązuje układy równań pierwszego stopnia metodą wyznacznikową;
 - rozwiązuje zadania związane z odległością punktów w układzie współrzędnych,
 - potrafi przewidywać zmiany związane ze zmianami wartości parametru w równaniu krzywej;
 - nabywa umiejętności stosowania metod geometrii analitycznej.
 - posługuje się programem GeoGebra (lub arkuszem kalkulacyjnym).
8. Metody nauczania: **Praca z komputerem, elementy wykładu, prezentacja, ćwiczenia**
9. Formy pracy: **Praca indywidualna i w parach**

Plan lekcji

Przypomnijmy kilka faktów:

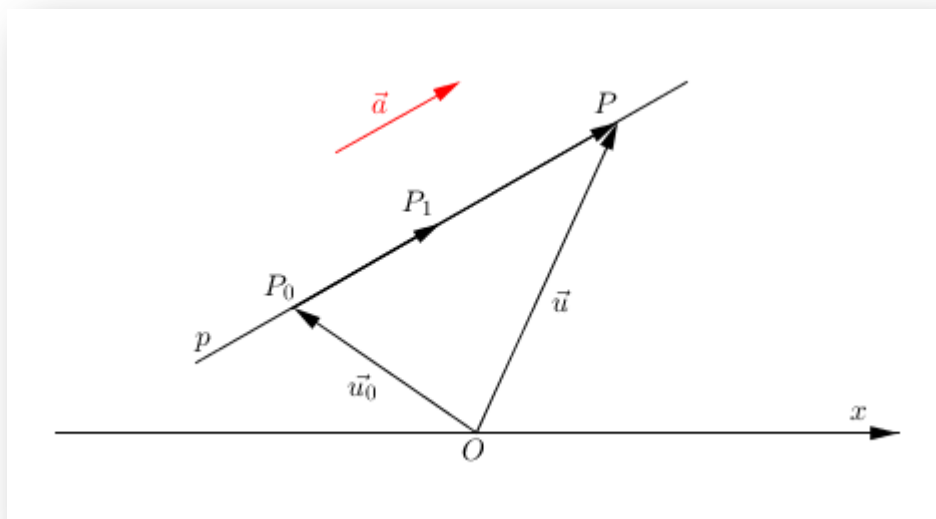
1. Dwa wektory $\vec{u} = [a_1, a_2]$ i $\vec{v} = [b_1, b_2]$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$(*) \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0.$$

Warunek ten jest równoważny warunkowi, że jeden z wektorów \vec{u} i \vec{v} jest iloczynem drugiego przez pewną liczbę k .

2. Niech będą dane w układzie współrzędnych xOy dwa różne punkty $M = (x_1, y_1)$ i $N = (x_2, y_2)$. Punkt $P = (x, y)$ leży na prostej MN wtedy i tylko wtedy, gdy wektory \overrightarrow{MP} i \overrightarrow{MN} są równoległe, co zachodzi, gdy ich współrzędne spełniają warunek równoległości (*).

Wykonajmy teraz rysunek.



Niech p będzie prostą przechodzącą przez dany punkt P_0 i równoległą do danego niezerowego wektora \vec{a} (rys.). Punkt P płaszczyzny leży wtedy i tylko wtedy na prostej p , gdy wektor $\overrightarrow{P_0P}$ jest równoległy do wektora \vec{a} . To zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wektor $\overrightarrow{P_0P}$ jest iloczynem wektora \vec{a} przez pewną liczbę t , tj. gdy $\overrightarrow{P_0P} = t \cdot \vec{a}$.

Ponieważ $\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}$, więc powyższą równość możemy zastąpić równością $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\vec{a}$.

Wprowadzając oznaczenia $\overrightarrow{OP_0} = \vec{u}_0$, $\overrightarrow{OP} = \vec{u}$, otrzymujemy

$$(**) \quad \vec{u} = \vec{u}_0 + t\vec{a}.$$

Równanie (**) nazywamy równaniem parametrycznym prostej p w postaci wektorowej.

Niech teraz $P_0 = (x_0, y_0)$, $P = (x, y)$, $\vec{a} = [m, n]$. Wówczas $\vec{u}_0 = [x_0, y_0]$, $\vec{u} = [x, y]$. Ponieważ dwa wektory są równe wtedy i tylko wtedy, gdy równe są odpowiednie ich współrzędne, więc równanie wektorowe (**) jest równoważne układowi równań

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot m \\ y = y_0 + t \cdot n \end{cases}$$

Powyższy zapis jest przedstawieniem parametrycznym prostej w postaci skalarnej. Krótko: jest to układ równań parametrycznych prostej.

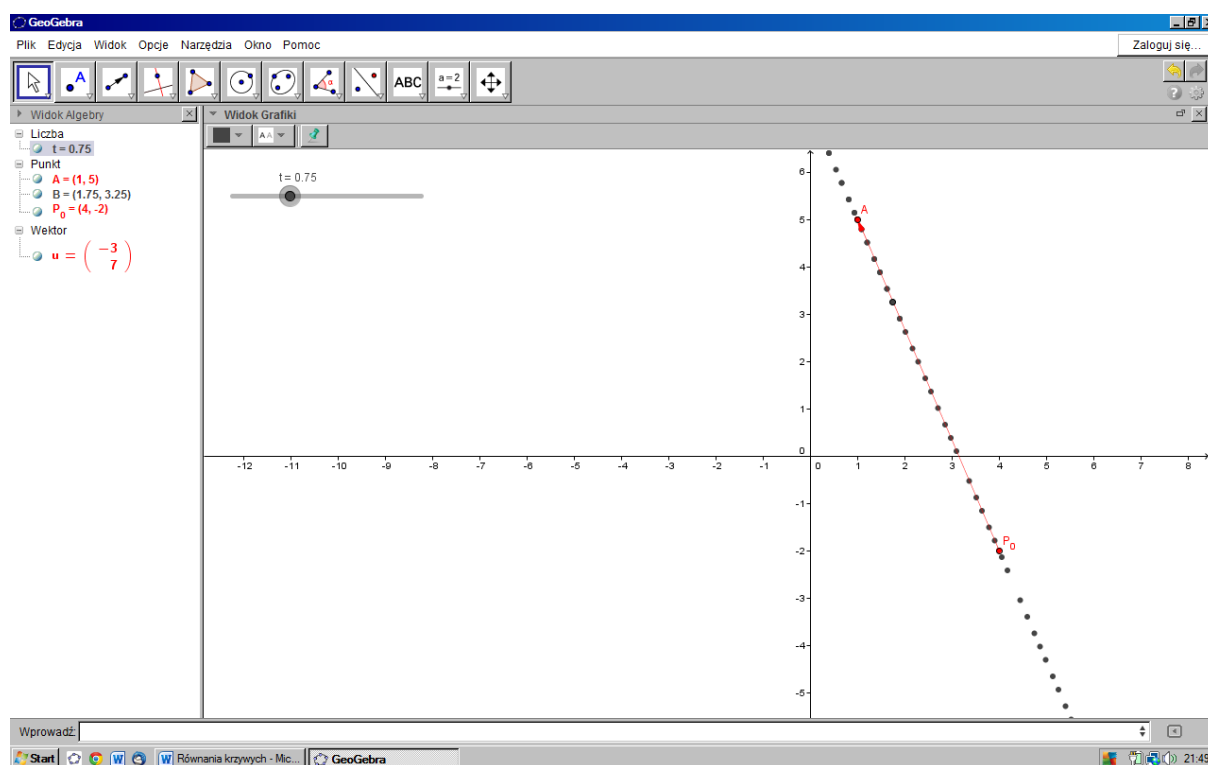
Na przykład układ równań

$$\begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = -2 + 7t \end{cases}$$

jest układem równań parametrycznych prostej przechodzącej przez punkt $P_0 = (4, -2)$ i równoległej do wektora $\vec{a} = [-3, 7]$. Rugując parametr t z powyższych równań, otrzymujemy równanie stopnia pierwszego względem x i y :

$$7x + 3y - 22 = 0.$$

Aby uzyskać wykres prostej danej w postaci parametrycznej, wystarczy w polu wprowadzania wpisać `c=Krzywa[4-3t, -2+7t, t, -5, 5]` (wg schematu Krzywa[<Wyrażenie>, <Wyrażenie>, <Zmienna - Parametr>, <Wartość Początkowa>, <Wartość Końcowa>]). Możemy też uzyskać ten wykres metodą „punkt po punkcie”, co pozwoli pokazać punkty dla $t = 0$ i $t = 1$. W tym celu w polu wprowadzania wpisujemy t i klikamy enter, co powoduje wprowadzenie suwaka dla t . Następnie w polu wprowadzania wpisujemy $(4-3t, -2+7t)$. Otrzymujemy w ten sposób punkt A dla $t = 1$, czyli punkt $A = (1, 5)$; dla $t = 0$ otrzymujemy punkt $P_0 = (4, -2)$. Zauważmy, że $\overrightarrow{P_0A} = \vec{a}$. Może to wyglądać to następująco:



Po tym wstępie możemy zaproponować poszukiwanie równań innych krzywych, różnych od znanej paraboli i hiperboli, np. podery czy krzywej Agnesi¹.

Według *Małego słownika matematycznego*²:

podera (krzywa spodkowa) danej krzywej K względem punktu A – miejsce geometryczne punktów przecięcia stycznych do krzywej i prostych prostopadłych do nich, opuszczonych z punktu A .

W tym samym słowniku na stronie 169. znajdujemy określenie miejsca geometrycznego :

miejsce geometryczne – zbiór wszystkich punktów posiadających określoną własność, np. okrąg jest m. g. punktów płaszczyzny jednakowo oddalonych od ustalonego punktu. Ażeby dowieść, że figura jest m. g. punktów o pewnej własności, należy pokazać, że:

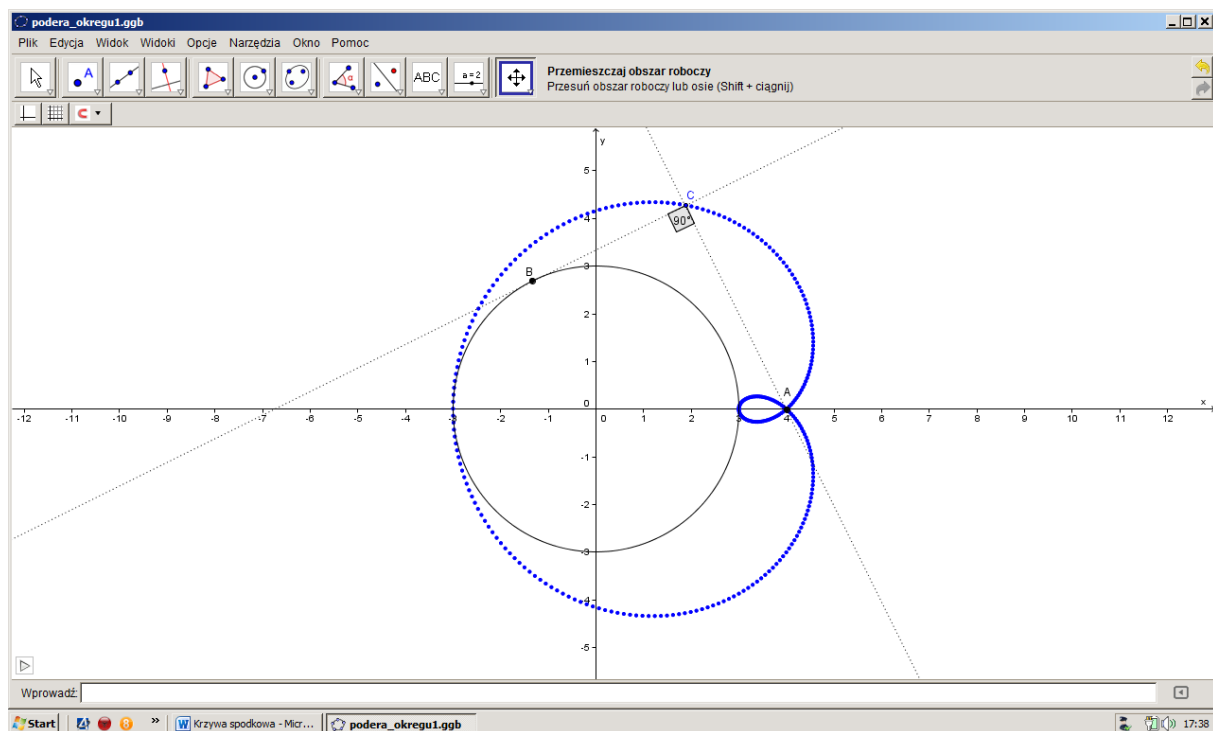
1. każdy punkt tej figury ma tę własność i
2. każdy punkt o tej własności należy do tej figury.

Używając **GeoGebry** możemy łatwo utworzyć poderę np. okręgu $K: x^2 + y^2 = 9$ względem punktu $A = (4, 0)$. Rysujemy okrąg K oraz zaznaczamy punkt A . Następnie na okręgu wybieramy punkt B i prowadzimy styczną do tego okręgu przez ten punkt. Dalej prowadzimy prostą prostopadłą do tej stycznej przez punkt A . Proste te przecinają się w punkcie C . Dla punktu C włączamy *Ślad włączony*, a dla punktu B – *Animacja włączona*. W ten sposób punkt C zakresli krzywą spodkową (punkt C jest spodkiem wysokości trójkąta prostokątnego ACB) okręgu K .

Efekt powinien być następujący:

¹ http://pl.wikipedia.org/wiki/Lok_Agnesi

² A. B. Empacher, Z. Sęp, A. Żakowska, W. Żakowski, *Mały słownik matematyczny*, Wiedza Powszechna, Warszawa 1970, str. 206



Zastanówmy się teraz, jakim równaniem opisana jest uzyskana krzywa spodkowa?

Niech punkt styczności B ma współrzędne (h, k) . Ponieważ punkt B jest punktem leżącym na okręgu, więc $h^2 + k^2 = 9$. Prosta OB ma równanie $y = \frac{k}{h}x$. Prosta styczna w punkcie B do okręgu jest do niej prostopadła, ma więc równanie $y - k = -\frac{h}{k}(x - h)$, czyli (a) $xh + yk = 9$. Ustalmy jeszcze równanie prostej przechodzącej przez punkt A i prostopadłej do wyznaczonej stycznej. Jest ona równoległa do prostej OB , ma więc równanie: $y = \frac{k}{h}(x - 4)$, a po przekształceniach: (b) $yh + (4 - x)k = 0$. Punkt C jest punktem przecięcia prostych (a) i (b). Możemy więc napisać:

$$\begin{cases} xh + yk = 9 \\ yh + (4 - x)k = 0 \end{cases}$$

Układ ten pozwala obliczyć h i k .

$$W = \begin{vmatrix} x & y \\ y & 4 - x \end{vmatrix} = 4x - x^2 - y^2,$$

$$W_h = \begin{vmatrix} 9 & y \\ 0 & 4 - x \end{vmatrix} = 9(4 - x),$$

$$W_k = \begin{vmatrix} x & 9 \\ y & 0 \end{vmatrix} = -9y.$$

$$h = \frac{W_h}{W} = \frac{9(4 - x)}{4x - x^2 - y^2},$$

$$k = \frac{W_k}{W} = \frac{-9y}{4x - x^2 - y^2}.$$

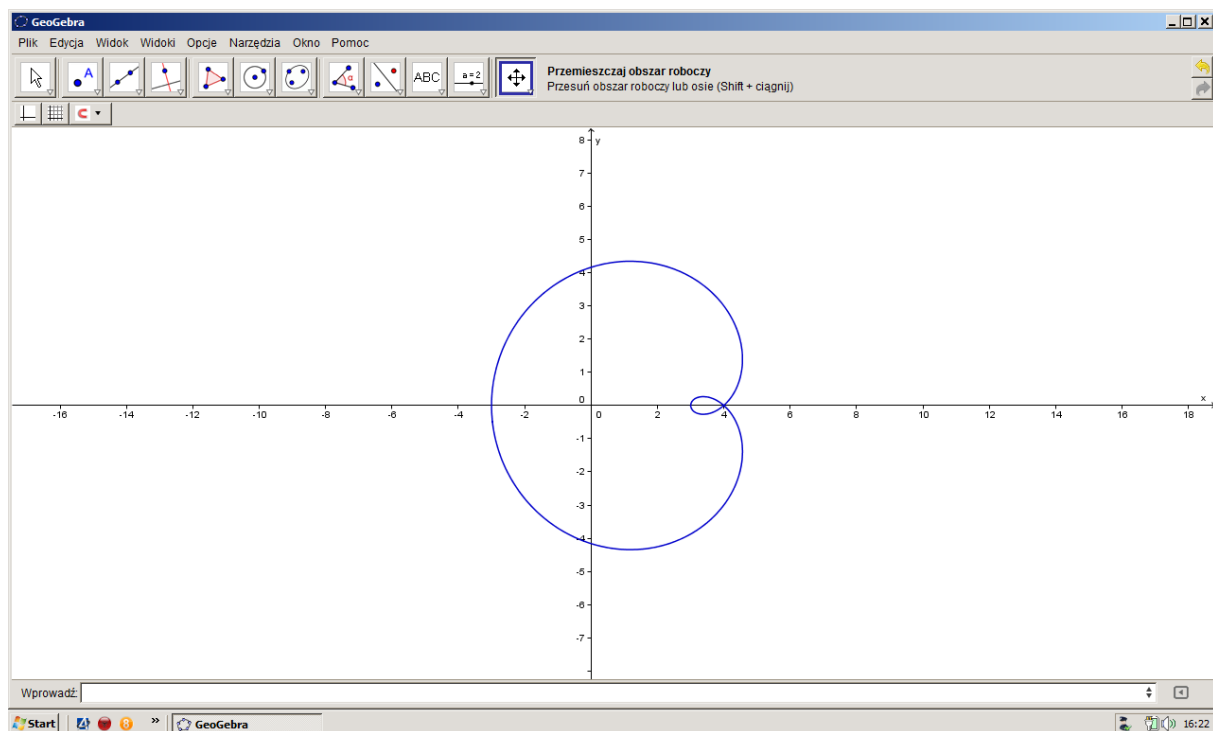
Podstawiając te wartości do równania $h^2 + k^2 = 9$, otrzymujemy:

$$\left(\frac{9(4 - x)}{4x - x^2 - y^2} \right)^2 + \left(\frac{-9y}{4x - x^2 - y^2} \right)^2 = 9,$$

a po przekształceniach, mamy:

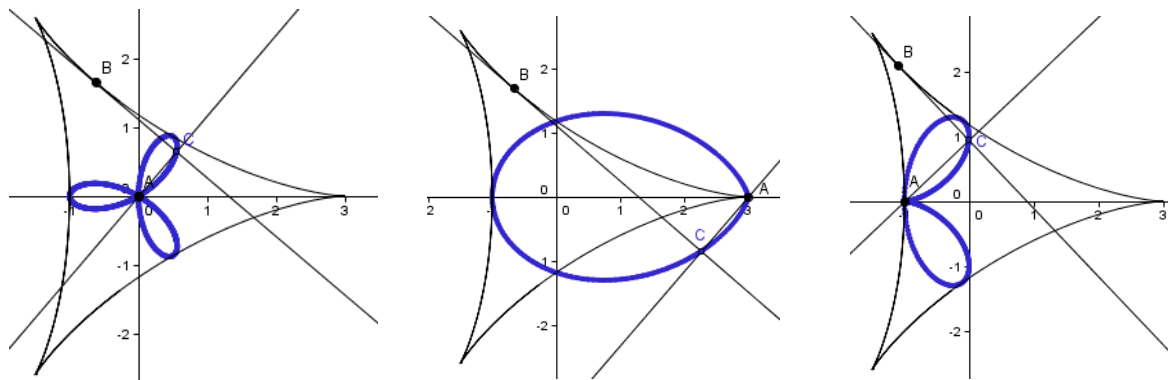
$$(*) \quad 9(4 - x)^2 + 9y^2 - (4x - x^2 - y^2)^2 = 0.$$

Pozostaje już tylko skorzystać z GeoGebra. Wpiszmy więc to równanie w *Polu wprowadzania* i zobaczmy wykres. Jest tak, jak być powinno! Podera naszego okręgu jest więc miejscem geometrycznym punktów przecięcia stycznych do okręgu i prostych prostopadłych do nich, opuszczonych z punktu A . Współrzędne tych punktów spełniają równanie (*).



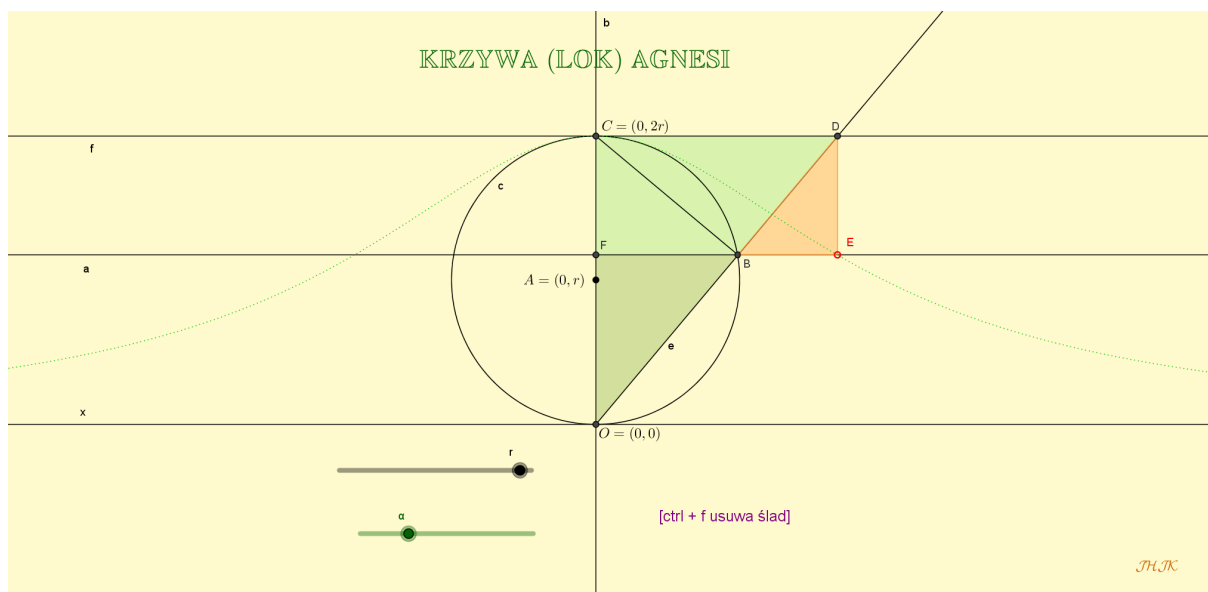
Zmieniając położenie punktu A otrzymujemy oczywiście inną krzywą spdkową dla tego samego okręgu.

Popatrzmy jeszcze na krzywe spdkowe deltoidy, czyli hipocykloidy o trzech ostrzach.



ładne, „matematyczne kwiatki”.

Przejdźmy teraz do równania krzywej Agnesi. Odpowiedni plik GG może wyglądać następująco:



Żadaną krzywą kreśli ślad punktu E , poruszany przy pomocy suwaka α . Aby znaleźć jego współrzędne, znajdziemy najpierw współrzędne punktów B i D . Zauważmy, że okrąg c o średnicy $2r$ ($r > 0$) ma równanie $x^2 + (y - r)^2 = r^2$, prosta f ma równanie $y = 2r$, a prosta e ma równanie $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$. Zatem:

$$B: \begin{cases} y = mx \\ x^2 + (y - r)^2 = r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = mx \\ x = \frac{2rm}{1 + m^2} \end{cases} \Rightarrow B = \left(\frac{2rm}{1 + m^2}, \frac{2rm^2}{1 + m^2} \right).$$

$$D: \begin{cases} y = 2r \\ y = mx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2r \\ x = \frac{2r}{m} \end{cases} \Rightarrow D = \left(\frac{2r}{m}, 2r \right).$$

Punkt E ma więc współrzędne $x = \frac{2r}{m}$ i $y = \frac{2rm^2}{1 + m^2}$, skąd

$$y = \frac{\left(\frac{2r}{x} \right)^2 \cdot 2r}{1 + \left(\frac{2r}{x} \right)^2} = \frac{8r^3}{x^2 + 4r^2}.$$

Wynik ten możemy też otrzymać, korzystając z podobieństwa trójkątów i twierdzenia Euklidesa. A tak może wyglądać ta krzywa, gdy otrzymane równanie wpisemy do pola wprowadzania (uprzednio tworząc suwak a) i wykorzystamy kolory dynamiczne (HSL) dla śladu krzywej.

