

1. Przedmiot: **Matematyka**
2. Dział programowy: **10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka.**
3. Temat: **Prawdopodobieństwo całkowite i wzór Bayesa.**
4. Klasa: **Klasa III**
5. Zgodność z podstawą programową: **Uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:**
  - 1) **oblicza prawdopodobieństwo warunkowe;**
  - 2) **korzysta z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym;**
  - 3) **korzysta ze wzoru Bayesa.**
6. Pomoce (środki) dydaktyczne
  - **stanowiska komputerowe (lub komputer nauczyciela z tablicą interaktywną lub rzutnikiem multimedialnym),**
  - **bezpłatne oprogramowanie GeoGebra wspomagające nauczanie matematyki (<http://www.geogebra.org/cms/pl/download/>)**
7. Cele: Uczeń:
  - stosuje wzór określający prawdopodobieństwo warunkowe,
  - oblicza prawdopodobieństwo warunkowe z zastosowaniem wzoru Bayesa,
  - ilustruje zadanie za pomocą tzw. drzewka,
  - stosuje tabelkę dla pary zdarzeń losowych,
  - komentuje i uzasadnia otrzymany wynik,
  - zamienia ułamek okresowy na zwykły,
  - posługuje się programem GeoGebra (lub arkuszem kalkulacyjnym).
8. Metody nauczania: **Praca z komputerem, elementy wykładu, prezentacja, ćwiczenia**
9. Formy pracy: **Praca indywidualna i w parach**

### **Plan lekcji**

#### 1. Sytuacja pierwsza

W dwóch urnach A i B znajdują się kule. W pierwszej urnie jest 10 kul czerwonych, 8 niebieskich i 6 zielonych, a w drugiej są 4 kule czerwone, 6 niebieskich i 10 zielonych. Losujemy jedną kulę z przypadkowo wybranej urny. Okazało się, że jest to kula zielona. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest to kula z urny B?

Rozwiązanie

Opiszmy zdarzenia losowe:

A – Wybrana kula pochodzi z urny A.

B – Wybrana kula pochodzi z urny B.

Z – Wybrana kula jest zielona.

Skorzystamy ze wzoru Bayesa:

$$P(B|Z) = \frac{P(B) \cdot P(Z|B)}{P(A) \cdot P(Z|A) + P(B) \cdot P(Z|B)}$$

Przejdźmy do arkusza kalkulacyjnego.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		WZÓR BAYESA								
2										
3		Urna A					Urna B			
4		C	N	Z	Razem		C	N	Z	Razem
5		10	8	6	24		4	6	10	20
6										

Niech prawdopodobieństwa  $P(A)$  i  $P(B)$  będą różne. Wiadomo jednak, że musi być  $P(A) + P(B) = 1$ . Niech więc  $P(A) = 0,2$ , skąd  $P(B) = 1 - P(A) = 0,8$ .

Wpiszmy wartość  $P(A)$  do komórki B9, a do innych następujące formuły:

C9: =B5/\$E\$5 (prawdopodobieństwo wylosowania kuli czerwonej z urny A)  
 D9: =C5/\$E\$5 (prawdopodobieństwo wylosowania kuli niebieskiej z urny A)  
 E9: =D5/\$E\$5 (prawdopodobieństwo wylosowania kuli zielonej z urny A)  
 G9: =1-B9  
 H9: G5/\$J\$5 (prawdopodobieństwo wylosowania kuli czerwonej z urny B)  
 I9: =H5/\$J\$5 (prawdopodobieństwo wylosowania kuli niebieskiej z urny B)  
 J9: =I5/\$J\$5 (prawdopodobieństwo wylosowania kuli zielonej z urny B)

E12: =C9\*B9/(C9\*B9+H9\*G9) (zwraca wartość  $P(C|A)$ )  
 E13: =1-E12 (zwraca wartość  $P(C|B)$ )

E15: =D9\*B9/(D9\*B9+I9\*G9) (zwraca wartość  $P(N|A)$ )  
 E16: =1-E15 (zwraca wartość  $P(N|B)$ )

E18: =E9\*B9/(E9\*B9+J9\*G9) (zwraca wartość  $P(Z|A)$ )  
 E19: =1-E18 (zwraca wartość  $P(Z|B)$ )

Arkusz kompletny wygląda następująco:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		<b>WZÓR BAYESA</b>								
2										
3		Urna A					Urna B			
4		C	N	Z	Razem		C	N	Z	Razem
5		10	8	6	24		4	6	10	20
6										
7										
8		P(A)	P(C A)	P(N A)	P(Z A)		P(B)	P(C B)	P(N B)	P(Z B)
9		0,2	0,416667	0,333333	0,25		0,8	0,2	0,3	0,5
10										
11		<b>ODPOWIEDZI</b>								
12		Wylosowana		P(C A)	0,342466					
13		kula czerwona		P(C B)	0,657534					
14										
15		Wylosowana		P(N A)	0,217391					
16		kula niebieska		P(N B)	0,782609					
17										
18		Wylosowana		P(Z A)	0,111111					
19		kula zielona		P(Z B)	0,888889					
20										

Z arkusza odczytujemy (z komórki E19), że prawdopodobieństwo, że kula zielona pochodzi z urny B wynosi  $\frac{8}{9}$ .

Zauważmy, że dzięki arkuszowi mamy możliwość zmiany wartości  $P(A)$  (w komórce B9), która spowoduje automatyczną zmianę odpowiedzi. Sprawdź wyniki dla  $P(A) = 0,5$ .

## 2. Sytuacja druga

W każdej z trzech urn A, B, D znajdują się dwa rodzaje kul: w urnie A jest 5 kul czerwonych i 15 niebieskich, w urnie B jest 10 kul czerwonych i 20 niebieskich, zaś w urnie C jest 20 kul czerwonych i 20 niebieskich. Zakładamy ponadto, że wybór każdej urny jest jednakowo prawdopodobny.

Ponieważ mamy trzy urny, to musimy zmodyfikować poprzedni model. Mamy tu:  $P(A) = P(B) = P(D) = \frac{1}{3}$ . Przejdźmy do arkusza kalkulacyjnego.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		<b>WZÓR BAYESA</b>										
2												
3		Urna A				Urna B				Urna D		
4		C	N	Razem		C	N	Razem		C	N	Razem
5		5	15	20		10	20	30		20	20	40
6												

Wpiszmy teraz formuły pozwalające obliczyć prawdopodobieństwa warunkowe w naszym modelu. Wprowadzamy najpierw wartość  $P(A)$  do komórki B9, a do innych następujące formuły:

C9: =B5/D5

D9: =C5/D5

F9: =B9

G9: =F5/H5

H9: G5/H5

J9: =B9

K9: =J5/L5

L9: =K5/L5

Otrzymujemy:

7												
8		P(A)	P(C A)	P(N A)		P(B)	P(C B)	P(N B)		P(D)	P(C D)	P(N D)
9		0,333333	0,25	0,75		0,333333	0,333333	0,666667		0,333333	0,5	0,5
10												

Wprowadzamy w końcu formuły zgodnie ze wzorem Bayesa, dzięki którym rozwiązać możemy różne przypadki naszego problemu:

$$E12: =C9*B9/(C9*B9+G9*F9+K9*J9)$$

$$E13: =G9*F9/(C9*B9+G9*F9+K9*J9)$$

$$E14: =K9*J9/(C9*B9+G9*F9+K9*J9)$$

$$E16: =D9*B9/(D9*B9+H9*F9+L9*J9)$$

$$E17: =H9*F9/(D9*B9+H9*F9+L9*J9)$$

$$E18: =L9*J9/(D9*B9+H9*F9+L9*J9)$$

Otrzymujemy:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		<b>WZÓR BAYESA</b>										
2												
3		Urna A				Urna B				Urna D		
4		C	N	Razem		C	N	Razem		C	N	Razem
5		5	15	20		10	20	30		20	20	40
6												
7												
8		P(A)	P(C A)	P(N A)		P(B)	P(C B)	P(N B)		P(D)	P(C D)	P(N D)
9		0,333333	0,25	0,75		0,333333	0,333333	0,666667		0,333333	0,5	0,5
10												
11		<b>ODPOWIEDZI</b>										
12		Wylosowana		P(C A)	0,230769							
13		kula czerwona		P(C B)	0,307692							
14				P(C D)	0,461538							
15												
16		Wylosowana		P(N A)	0,391304							
17		kula niebieska		P(N B)	0,347826							
18				P(N D)	0,26087							
19												

## Ćwiczenia

Wykorzystując poprzedni model, rozwiąż następujące zadania:

- Urny A, B, D zawierają odpowiednio 10 kul czerwonych i 10 niebieskich, 6 czerwonych i 6 niebieskich, 12 kul czerwonych i 12 niebieskich. Przyjmijmy, że  $P(A) = 0,3$ ,  $P(B) = 0,2$ ,  $P(D) = 1 - P(A) - P(B)$ . Obliczyć prawdopodobieństwo, że wylosowana kula czerwona pochodzi z urny B.
- W wytwórni ozdób choinkowych trzy pracownice malują bombki. Doświadczona pani Karolina maluje 60% wszystkich bombek, nabierająca wprawy pani Ludwika – 30%, a początkująca pani Maria 10% wszystkich bombek przeznaczonych do malowania. Odpowiednio 1%, 5% i 30% ozdabianych przez panie bombek tłucze się przy malowaniu.
  - Oblicz prawdopodobieństwo, że bombka przygotowana do malowania zostanie stłuczona.
  - Bombka została stłuczona podczas malowania. Jakie jest prawdopodobieństwo, że malowała ją pani Karolina, a jakie, że malowała ją pani Maria?