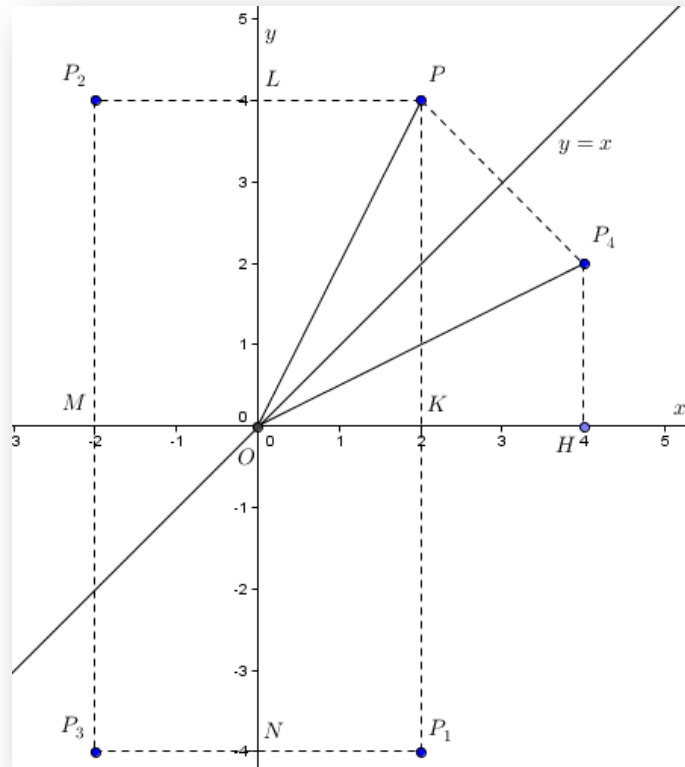


1. Przedmiot: **Matematyka**
2. Dział programowy: **7. Planimetria, 4. Funkcje, 8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej**
3. Temat: **Symetrie i przesunięcia w układzie współrzędnych**
4. Klasa: **Klasa II**
5. Zgodność z podstawą programową: **Uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:**
  - 1) znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych w jednokładności (odcinka, trójkąta, czworokąta, itp.);
  - 2) rozpoznaje figury podobne i jednokładne; wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) ich własności; oblicz odległość punktu od prostej;
  - 3) oblicza współrzędne oraz długość wektora; dodaje i odejmuje wektory oraz mnoży je przez liczbę. Interpretuje geometrycznie działania na wektorach;
  - 4) stosuje wektory do opisu przesunięcia wykresu funkcji;
  - 5) na podstawie wykresu funkcji  $y = f(x)$  szkicuje wykresy funkcji  $y = |f(x)|$ ,  $y = cf(x)$ ,  $y = f(cx)$ ;
  - 6) szkicuje wykres funkcji określonej w różnych przedziałach różnymi wzorami; odczytuje własności takiej funkcji z wykresu.
6. Pomoce (środki) dydaktyczne
  - stanowiska komputerowe (lub komputer nauczyciela z tablicą interaktywną lub rzutnikiem multimedialnym),
  - bezpłatne oprogramowanie GeoGebra wspomagające nauczanie matematyki (<http://www.geogebra.org/cms/pl/download/>)
7. Cele: Uczeń:
  - wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej);
  - bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych;
  - wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt;
  - rozwiązuje, stosując interpretację geometryczną, elementarne równania i nierówności z wartością bezwzględną;
  - stosuje podstawowe własności wartości bezwzględnej;
  - oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych;
  - posługuje się programem GeoGebra (lub arkuszem kalkulacyjnym);
8. Metody nauczania: **Praca z komputerem, elementy wykładu, prezentacja, ćwiczenia**
9. Formy pracy: **Praca indywidualna i w parach**

## **Plan lekcji**

### **1. Symetrie**

Niech punkt  $P = (x, y)$  będzie dowolnym punktem płaszczyzny  $xOy$ ; punkt  $P_1 = (x, -y)$  jest punktem symetrycznym do punktu  $P$  względem osi  $x$ , punkt  $P_2 = (-x, y)$  jest punktem symetrycznym do punktu  $P$  względem osi  $y$ , punkt  $P_3 = (-x, -y)$  jest punktem symetrycznym do punktu  $P$  względem początku układu współrzędnych, zaś punkt  $P_4 = (y, x)$  jest punktem symetrycznym do punktu  $P$  względem prostej o równaniu  $y = x$  (zobacz rysunek).



Co powiesz o trójkątach  $POL$  i  $P_1ON$ ,  $POL$  i  $P_2ON$ ,  $POL$  i  $P_3ON$  oraz  $POL$  i  $P_4OH$ ?

### Przykład 1.1.

Dana jest prosta  $p$  o równaniu  $y = 2x + 2$ . Napisz równanie obrazu prostej  $p$  w symetrii względem osi  $x$ ,  $y$ , początku układu współrzędnych oraz względem prostej o równaniu  $y = x$ .

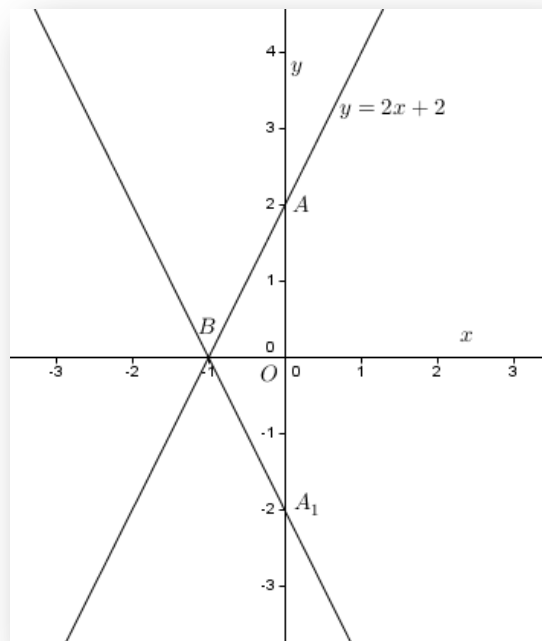
- ❖ Narysujmy najpierw daną prostą i jej obraz symetryczny względem osi  $x$ . W tym celu wyznaczmy dwa różne punkty leżące na prostej  $p$ :

$x$	$y$
0	2
-1	0

Obrazy tych punktów w symetrii względem osi  $x$  są następujące:

$x$	$y$
0	-2
-1	0

Narysujmy te proste i wprowadźmy oznaczenia punktów.



Znajdźmy równanie prostej wyznaczonej przez punkty  $A_1$  i  $B$ :

$$\frac{y - y_{A_1}}{y_B - y_{A_1}} = \frac{x - x_{A_1}}{x_B - x_{A_1}}, \quad \frac{y - (-2)}{0 - (-2)} = \frac{x - 0}{-1 - 0},$$

a stąd

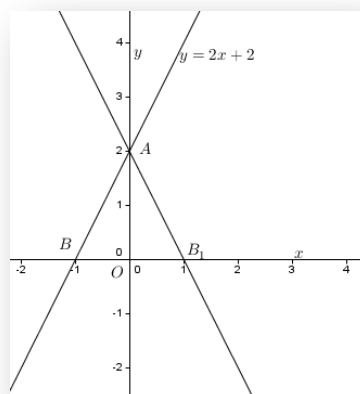
$$y = -2x - 2.$$

### **Obserwacja.**

Przedstawiony przykład pokazuje, że w równaniu prostej  $p$  wystarczyło w miejsce  $y$  wpisać  $(-y)$ , by uzyskać równie prostej symetrycznej do prostej  $p$  względem osi  $x$ .

❖ Narysujemy teraz prostą symetryczną od prostej  $p$  względem osi  $y$ .

$x$	$y$
0	2
1	0



Równanie obrazu prostej  $p$  w symetrii względem osi  $y$  jest następujące:

$$\frac{y - y_A}{y_{B_1} - y_A} = \frac{x - x_A}{x_{B_1} - x_A}, \quad \frac{y - 2}{0 - 2} = \frac{x - 0}{1 - 0},$$

a stąd

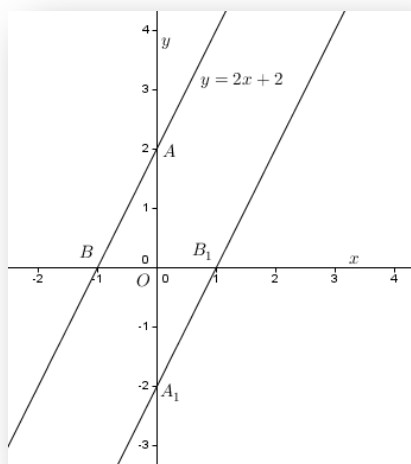
$$y = -2x + 2.$$

### **Obserwacja.**

Przedstawiony przykład pokazuje, że w równaniu prostej  $p$  wystarczyło w miejsce  $x$  wpisać  $(-x)$ , by uzyskać równie prostej symetrycznej do prostej  $p$  względem osi  $y$ .

❖ Rozważmy teraz symetrię prostej  $p$  względem początku układu współrzędnych.

$x$	$y$
0	-2
1	0



Równanie obrazu prostej  $p$  w symetrii względem początku układu współrzędnych jest następujące:

$$\frac{y - y_{A_1}}{y_{B_1} - y_{A_1}} = \frac{x - x_{A_1}}{x_{B_1} - x_{A_1}}, \quad \frac{y - (-2)}{0 - (-2)} = \frac{x - 0}{1 - 0},$$

a stąd

$$y = 2x - 2.$$

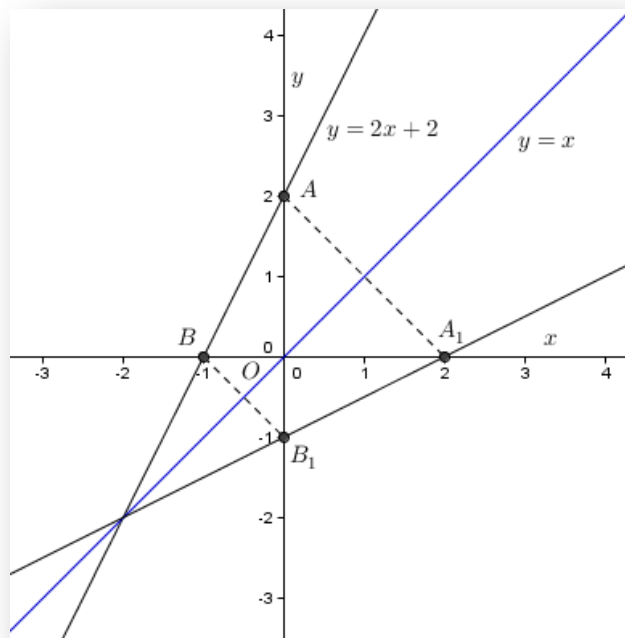
### **Obserwacja.**

Przedstawiony przykład pokazuje, że w równaniu prostej  $p$  wystarczyło w miejsce  $x$  wpisać  $(-x)$ , w miejsce  $y$  wpisać  $(-y)$ , by uzyskać równie prostej symetrycznej do prostej  $p$  względem początku układu współrzędnych.

❖ Pozostało nam jeszcze rozważyć symetrię prostej  $p$  względem prostej o równaniu  $y = x$ .

Wyznamy punkty symetryczne do punktów  $A$  i  $B$  prostej  $p$ .

$x$	$y$
2	0
0	-1



$$\frac{y - y_{A_1}}{y_{B_1} - y_{A_1}} = \frac{x - x_{A_1}}{x_{B_1} - x_{A_1}}, \quad \frac{y - 0}{-1 - 0} = \frac{x - 2}{0 - 2},$$

a stąd

$$y = \frac{1}{2}x - 1.$$

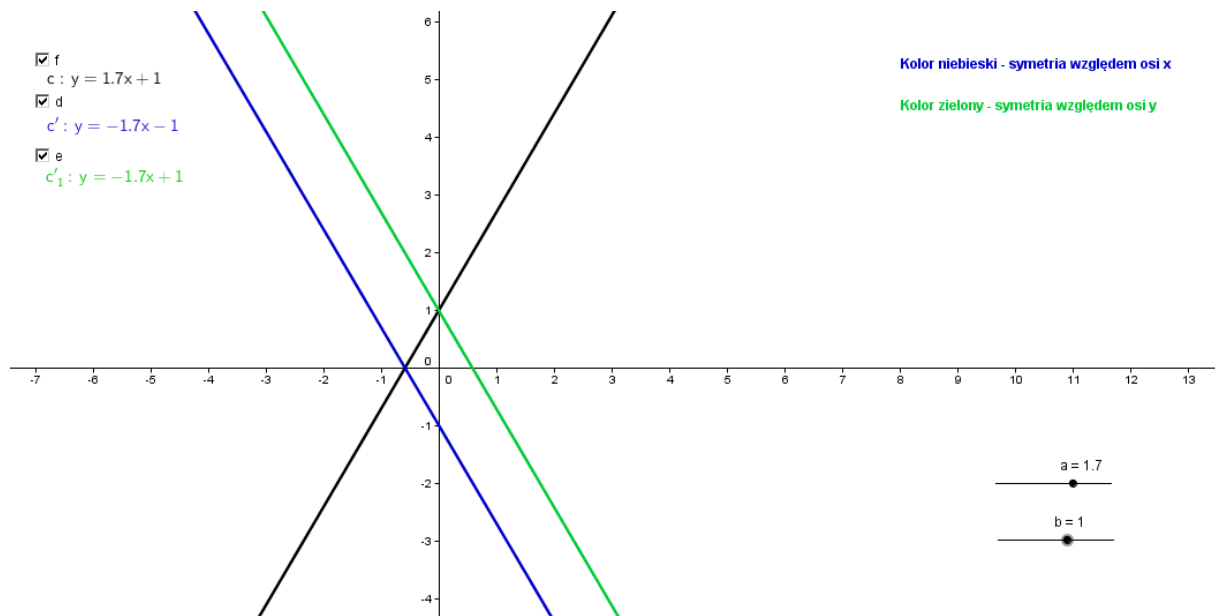
### Obserwacja.

Przedstawiony przykład pokazuje, że w równaniu prostej  $p$  wystarczy w miejsce  $x$  wpisać  $y$ , a w miejsce  $y$  wpisać  $x$ , a następnie wyznaczyć  $y$ , by otrzymać równanie prostej symetrycznej do prostej  $p$  względem prostej o równaniu  $y = x$ .

Możemy teraz skorzystać z GeoGebry i nieco poeksperymentować z symetriasami danej prostej względem osi układu współrzędnych.

Poniżej przedstawiony jest obraz pliku .ggb, dzięki któremu możemy zmieniać współczynniki  $a$  i  $b$  w równaniu prostej  $p$ :  $y = ax + b$  w dowolnie ustalonym zakresie oraz obrazy symetryczne tej prostej względem osi układu współrzędnych (kolorem niebieskim oznaczono obraz prostej  $p$  w symetrii względem osi  $x$ , zaś kolorem zielonym jej obraz względem osi  $y$ ).

Oprócz suwaków dla  $a$  i  $b$  oraz trzy pola wyboru *Pokaż/Ukryj obiekt*, pozwalające na oglądanie równań prostych. Początkowo obiekty te powinny być ukryte, gdyż to uczniowie powinni zauważyć, że proste będące obrazami prostej  $p$  są prostymi równoległymi.



### Przykład 1.2.

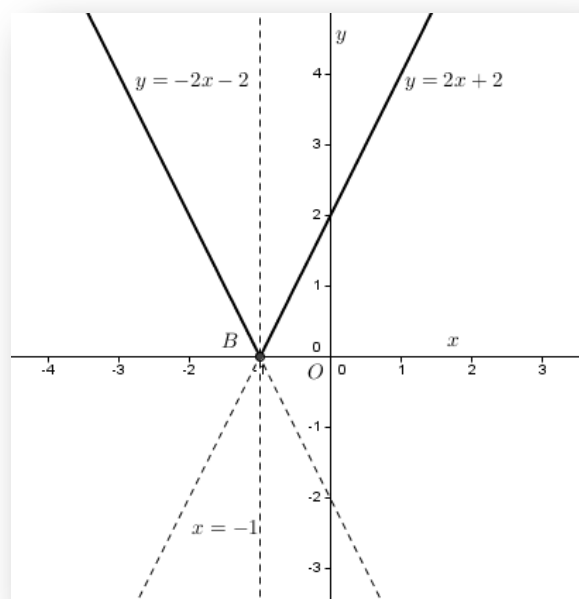
Dana jest prosta  $p$  o równaniu  $y = 2x + 2$ . Na podstawie jej wykresu wykonaj wykresy funkcji  $y = |2x + 2|$  oraz  $y = 2|x| + 2$ .

❖ Korzystając z definicji wartości bezwzględnej mamy:

$$y = |2x + 2| = \begin{cases} 2x + 2, & \text{jeżeli } 2x + 2 \geq 0 \\ -2x - 2, & \text{jeżeli } 2x + 2 < 0 \end{cases}$$

lub też

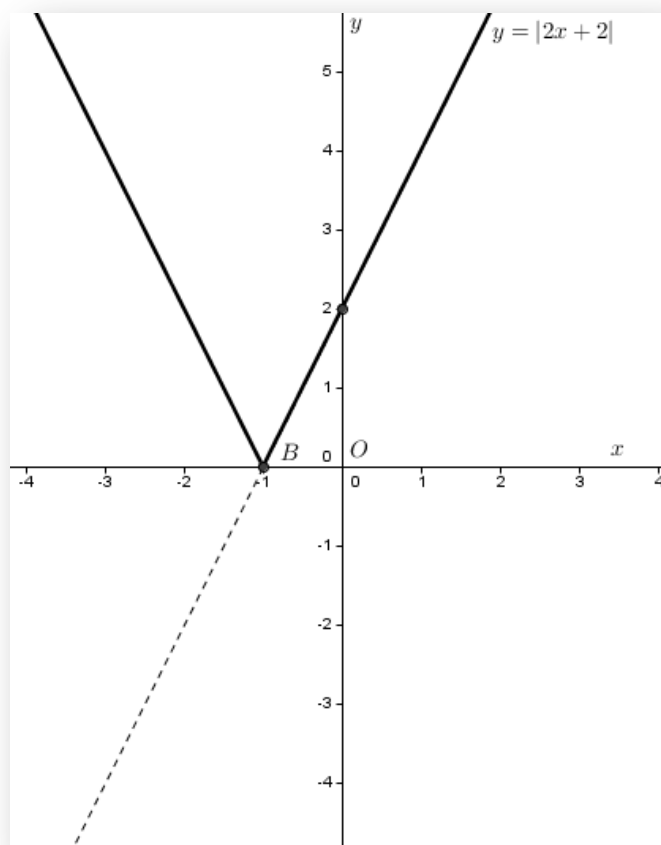
$$y = |2x + 2| = \begin{cases} 2x + 2, & \text{jeżeli } x \geq -1 \\ -2x - 2, & \text{jeżeli } x < -1 \end{cases}$$



Jak widać, wykres funkcji tworzą dwie półproste o wspólnym początku w punkcie  $B$ .

**Obserwacja.**

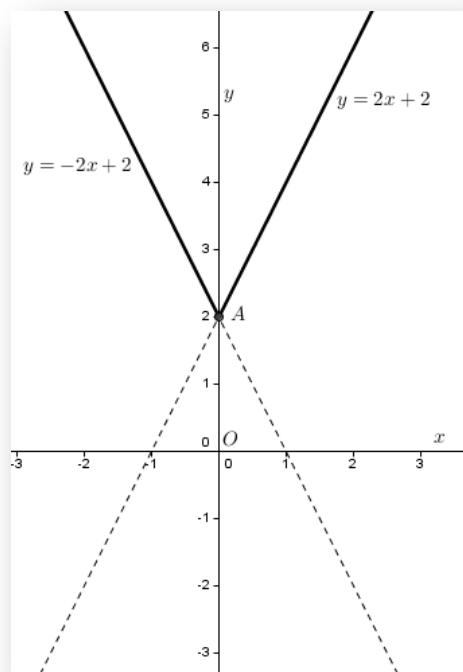
Przedstawiony przykład pokazuje, że wykres danej funkcji możemy otrzymać szybciej: wykonujemy wykres funkcji  $y = 2x + 2$ , a następnie część tego wykresu leżącą pod osią  $x$  odbijamy symetrycznie względem osi  $x$ , a oryginał (półprostą) usuwamy.



❖ Przejdźmy teraz do drugiej części ćwiczenia.

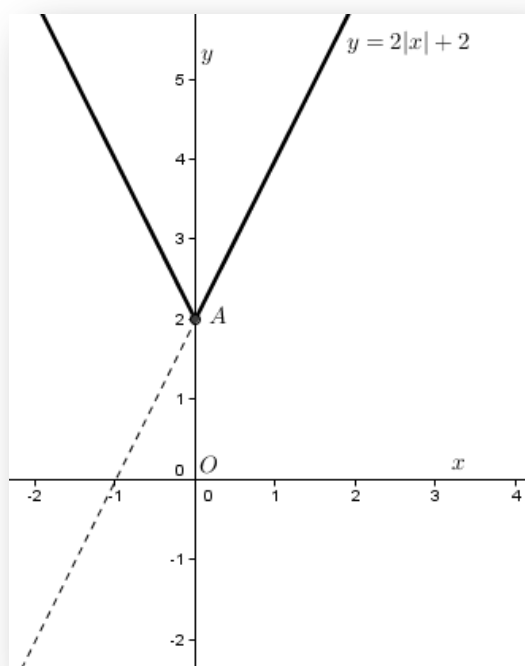
$$y = 2|x| + 2 = \begin{cases} 2x + 2 & \text{dla } x \geq 0 \\ -2x + 2 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Korzystając z poprzednich danych rysujemy proste o równaniach  $y = 2x + 2$  i  $y = -2x + 2$ , a następnie wybieramy do wykresu funkcji dwie półproste o wspólnym początku  $A$ , leżące powyżej punktu  $A$ .



### **Obserwacja.**

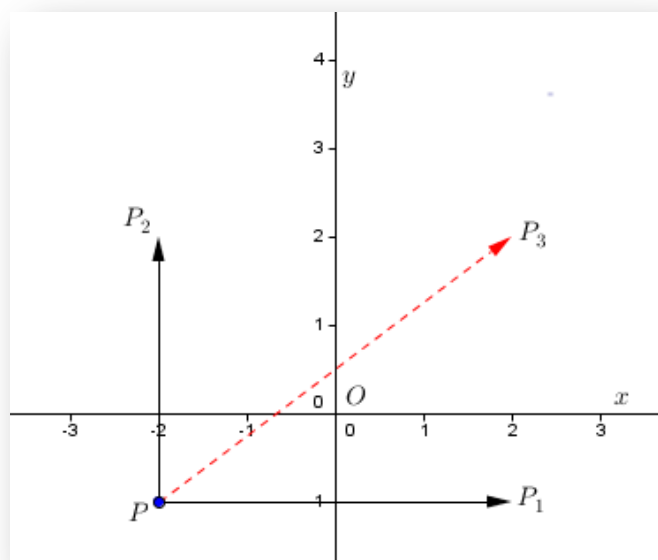
Przedstawiony przykład pokazuje, że wykres danej funkcji możemy otrzymać szybciej: wykonujemy wykres funkcji  $y = 2x + 2$ , a następnie część tego wykresu leżącą po prawej stronie osi  $y$  odbijamy symetrycznie względem osi  $y$ , a część oryginału (półprostą leżącą poniżej punktu  $A$ ) usuwamy.





## 2. Przesunięcia (translacje)

Niech punkt  $P = (x, y)$  będzie dowolnym punktem płaszczyzny; obrazem tego punktu w przesunięciu poziomym jest punkt  $P_1$  o współrzędnych  $(x + a, y)$ , obrazem w przesunięciu pionowym jest punkt  $P_2$  o współrzędnych  $(x, y + b)$ , jeśli zaś wykonamy oba przesunięcia równocześnie, to otrzymamy punkt  $P_3$  o współrzędnych  $(x + a, y + b)$ .



### Obserwacja.

Jeśli  $a > 0$ , to translacja pozioma przesuwą punkt  $P$  o  $a$  jednostek w prawo, jeśli zaś  $a < 0$ , to translacja pozioma przesuwą punkt  $P$  o  $a$  jednostek w lewo; jeśli  $b > 0$ , to translacja pionowa przesuwą punkt  $P$  w górę, jeśli zaś  $b < 0$ , to translacja pionowa przesuwą punkt  $P$  w dół.

### Przykład 2.1.

Dana jest prosta  $p$  o równaniu  $y = 2x + 2$ . Napisz równanie obrazu prostej  $p$  przesuniętej o dwie jednostki w prawo, przesuniętej o dwie jednostki w dół oraz przesuniętej o dwie jednostki w prawo i jedną jednostkę w dół jednocześnie.

❖ Narysujmy najpierw daną prostą i jej obraz po przesunięciu o dwie jednostki w prawo.

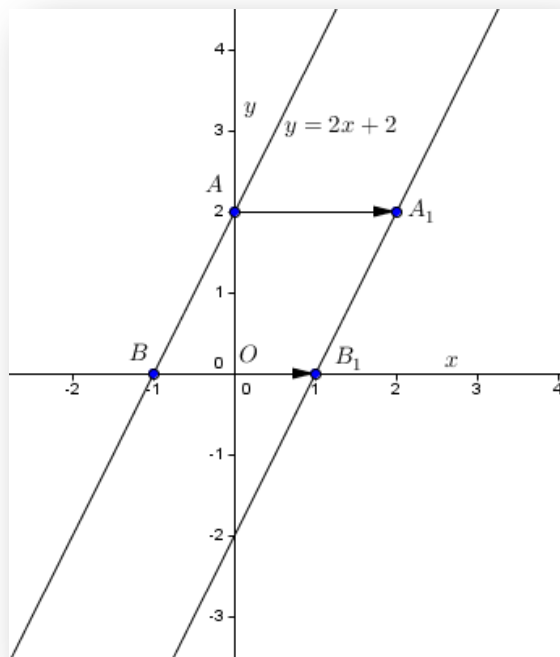
W tym celu wyznaczmy dwa różne punkty leżące na prostej  $p$ :

$x$	$y$
0	2
-1	0

Obrazy tych punktów w tym przesunięciu są następujące:

$x$	$y$
2	2
1	0

Narysujmy te proste i wprowadźmy oznaczenia punktów.



Prosta przechodząca przez punkty  $A_1$  i  $B_1$  ma równanie:

$$\frac{y - y_{A_1}}{y_{B_1} - y_{A_1}} = \frac{x - x_{A_1}}{x_{B_1} - x_{A_1}}, \quad \frac{y - 2}{0 - 2} = \frac{x - 2}{1 - 2},$$

a stąd

$$y = 2x - 2.$$

### **Obserwacja.**

Przedstawiony przykład pokazuje, że w równaniu prostej  $p$  wystarczy w miejsce  $x$  wpisać  $x - 2$ , by otrzymać równanie prostej przesuniętej. Rzeczywiście:  $y = 2(x - 2) + 2 = 2x - 4 + 2 = 2x - 2$ .

❖ Narysujmy teraz daną prostą i jej obraz po przesunięciu o jedną jednostkę w dół.

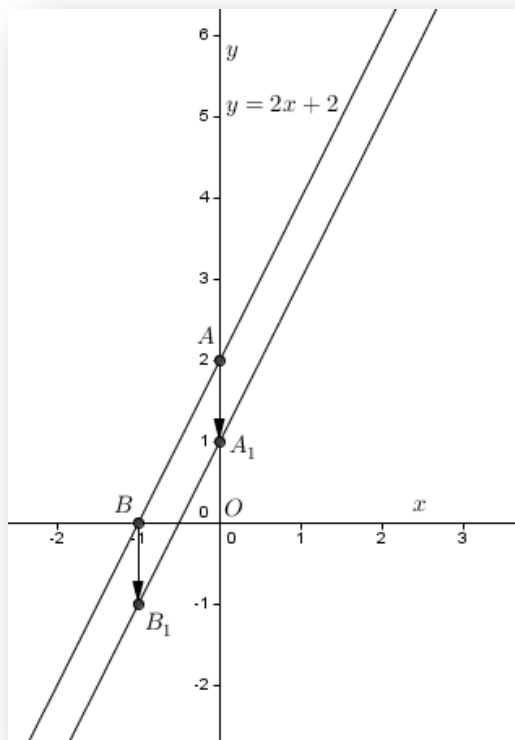
W tym celu wyznaczmy dwa różne punkty leżące na prostej  $p$ :

$x$	$y$
0	2
-1	0

Obrazy tych punktów w tym przesunięciu są następujące:

$x$	$y$
0	1
-1	-1

Narysujmy te proste i wprowadźmy oznaczenia punktów.



Prosta przechodząca przez punkty  $A_1$  i  $B_1$  ma równanie:

$$\frac{y - y_{A_1}}{y_{B_1} - y_{A_1}} = \frac{x - x_{A_1}}{x_{B_1} - x_{A_1}}, \quad \frac{y - 1}{-1 - 1} = \frac{x - 0}{-1 - 0},$$

a stąd

$$y = 2x + 1.$$

### **Obserwacja.**

Przedstawiony przykład pokazuje, że w równaniu prostej  $p$  wystarczy w miejsce  $y$  wpisać  $y + 1$ , by otrzymać równanie prostej przesuniętej. Rzeczywiście:  $y + 1 = 2x + 2$ , skąd  $y = 2x + 2 - 1$ , czyli  $y = 2x + 1$ .

- ❖ Narysujemy teraz prostą  $p$  i jej obraz w przesunięciu o 2 jednostki w prawo i o jedną jednostkę w dół.

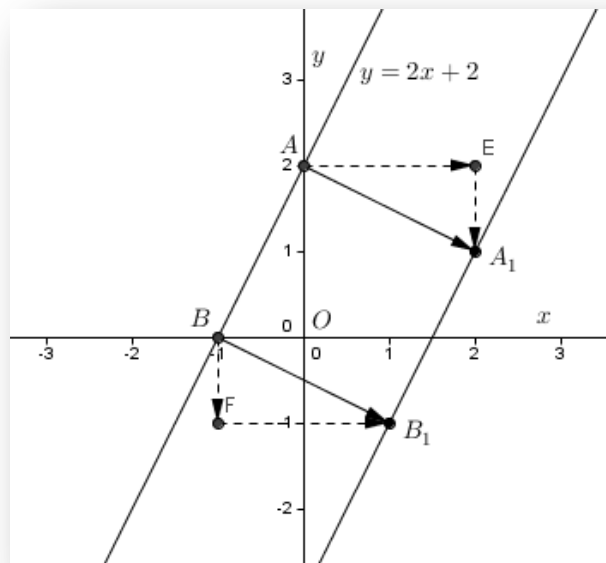
W tym celu wyznaczmy dwa różne punkty leżące na prostej  $p$ :

$x$	$y$
0	2
-1	0

Obrazy tych punktów w tym przesunięciu są następujące:

$x$	$y$
2	1
1	-1

Narysujmy te proste i wprowadźmy oznaczenia punktów.



Prosta przechodząca przez punkty  $A_1$  i  $B_1$  ma równanie:

$$\frac{y - y_{A_1}}{y_{B_1} - y_{A_1}} = \frac{x - x_{A_1}}{x_{B_1} - x_{A_1}}, \quad \frac{y - 1}{-1 - 1} = \frac{x - 2}{1 - 2},$$

a stąd

$$y = 2x - 3.$$

### **Obserwacja.**

Obowiązuje następująca reguła praktyczna: dane są liczby rzeczywiste  $a$  i  $b$

- 1) aby otrzymać przesunięcie poziome o  $a$  wystarczy w miejsce  $x$  wpisać  $x - a$  w równaniu danej krzywej (jeśli  $a > 0$  przesunięcie będzie w prawo, jeśli zaś  $a < 0$ , to przesunięcie będzie w lewo);
- 2) aby otrzymać przesunięcie pionowe o  $b$  wystarczy w miejsce  $y$  wpisać  $y - b$  w równaniu danej krzywej (jeśli  $b > 0$  przesunięcie będzie w górę, jeśli zaś  $b < 0$ , to przesunięcie będzie w dół).