

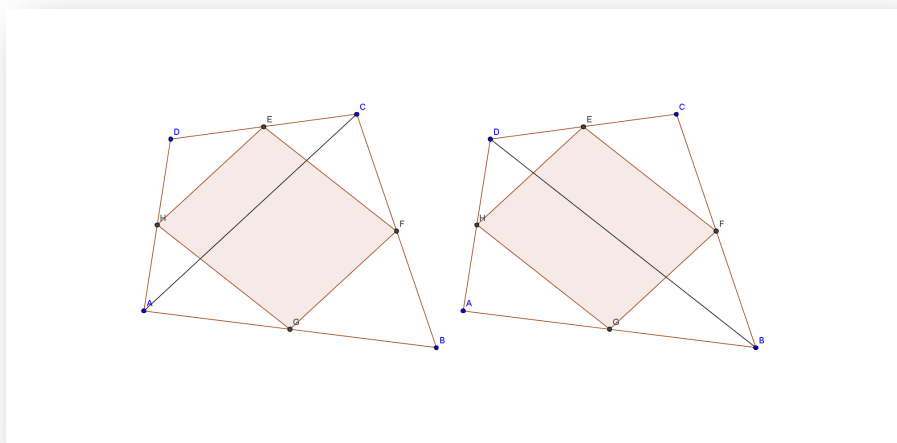
1. Przedmiot: **Matematyka**
2. Dział programowy: **8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej**
3. Temat: **Stosowanie metod geometrii analitycznej w dowodzeniu twierdzeń**
4. Klasa: **Klasa II**
5. Zgodność z podstawą programową: **Uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:**
 - 1) bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań;
 - 2) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do innej prostej;
 - 3) oblicza odległość punktu od prostej;
 - 4) tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność.
6. Pomoce (środki) dydaktyczne
 - stanowiska komputerowe (lub komputer nauczyciela z tablicą interaktywną lub rzutnikiem multimedialnym),
 - bezpłatne oprogramowanie GeoGebra wspomagające nauczanie matematyki (<http://www.geogebra.org/cms/pl/download/>)
7. Cele: Uczeń:
 - oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych;
 - stosuje wzór na odległość punktów do rozwiązywania zadań;
 - wyznacza współrzędne środka odcinka w układzie współrzędnych;
 - zna pojęcie symetralnej odcinka;
 - stosuje wzór na współrzędne środka odcinka do rozwiązywania zadań;
 - posługuje się programem GeoGebra (lub arkuszem kalkulacyjnym);
 - stosuje twierdzenie Pitagorasa do rozwiązywania zadań.
8. Metody nauczania: **Praca z komputerem, elementy wykładu, prezentacja, ćwiczenia**
9. Formy pracy: **Praca indywidualna i w parach**

Plan lekcji

Twierdzenie 1

Dany jest czworokąt $ABCD$. Wykaż, że czworokąt, którego wierzchołkami są środki boków czworokąta $ABCD$, jest równoległobokiem.

Wykonajmy rysunek pomocniczy.



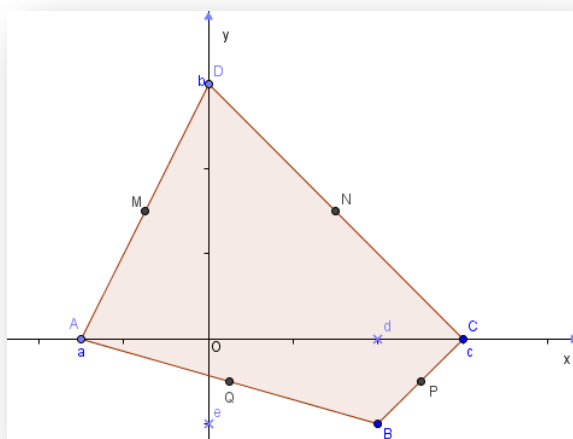
Rys. 1

Wykażmy, że HE i GF są równoległe. Poprowadźmy w tym celu przekątną AC . Wykorzystując twierdzenie:

Jeżeli w dowolnym trójkącie połączymy środki dwóch boków, to powstały odcinek jest równoległy do trzeciego boku i jego długość jest równa połowie długości trzeciego boku, stwierdzamy, że odcinek HE jest równoległy do AC i jego długość jest równa połowie długości przekątnej AC . Analogicznie wykazujemy, że odcinek GF jest równoległy do AC i ma długość równą połowie długości AC . Oznacza to, że Boki HE i GF są równoległe i mają taką samą długość.

Korzystając z drugiego rysunku wykazujemy analogicznie, że boki HG i EF są równe i równoległe. Zatem czworokąt $ABCE$ jest równoległobokiem, c.n.w.

Przejdźmy do geometrii analitycznej. Wybierzmy cztery punkty tak, by punkty A i C leżały na osi x , zaś punkt B na osi y . w ten sposób otrzymujemy czworokąt o wierzchołkach $A = (a,0)$, $B = (0,b)$, $C = (c,0)$ i $D = (d, e)$.



Rys.2

Środki boków mają współrzędne:

$$M = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right), N = \left(\frac{c}{2}, \frac{b}{2}\right), P = \left(\frac{c+d}{2}, \frac{e}{2}\right), Q = \left(\frac{a+d}{2}, \frac{e}{2}\right).$$

Obliczmy teraz współczynniki kierunkowe prostych MN , NP , PQ i MQ .

$$\text{pr. } MQ: \frac{\frac{e}{2} - \frac{b}{2}}{\frac{a+d}{2} - \frac{a}{2}} = \frac{\frac{e-b}{2}}{\frac{d}{2}} = \frac{e-b}{d}, d \neq 0$$

$$\text{pr. } NP: \frac{\frac{e}{2} - \frac{b}{2}}{\frac{c+d}{2} - \frac{c}{2}} = \frac{\frac{e-b}{2}}{\frac{d}{2}} = \frac{e-b}{d}, d \neq 0$$

Boki MQ i NP są równoległe.

$$\text{pr. } MN: \frac{\frac{b}{2} - \frac{b}{2}}{\frac{c}{2} - \frac{a}{2}} = 0, a \neq c$$

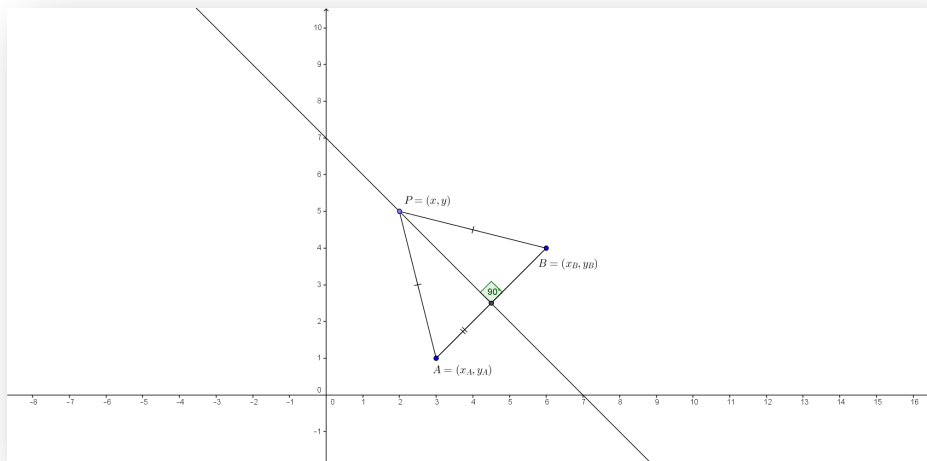
$$\text{pr. } QP: \frac{\frac{e}{2} - \frac{e}{2}}{\frac{c+d}{2} - \frac{a+d}{2}} = 0, a \neq c$$

Boki MN i QP są równoległe (co widać na rysunku!). czworokąt $MNPQ$ jest więc równoległobokiem.

Konfrontując dowód syntetyczny mamy możliwość refleksji, jaki sposób dowodzenia wybierać, syntetyczny czy analityczny? Od czego taki wybór może zależeć?

Twierdzenie 2

Dwie proste prostopadłe mają takie współczynniki kierunkowe, że jeden z nich jest odwrotnością drugiego z przeciwnym znakiem.



Rys.3

Udowodnimy ten fakt stosując metody geometrii analitycznej. W tym celu wybierzmy dwa punkty $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ takie, że prosta AB nie jest równoległa do osi x oraz dowolny punkt $P = (x, y)$ na osi leżącej na osi symetrii odcinka AB (rys. powyżej). Wobec tego

$$|AP| = |BP|,$$

skąd

$$\sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2} = \sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2}.$$

Ponieważ obie liczby są nieujemne, więc

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2$$

$$x^2 - 2xx_A + x_A^2 + y^2 - 2yy_A + y_A^2 = x^2 - 2xx_B + x_B^2 + y^2 + y^2 - 2yy_B + y_B^2$$

$$-2xx_A + x_A^2 - 2yy_A + y_A^2 + 2xx_B - x_B^2 + 2yy_B - y_B^2 = 0$$

$$y = -\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x_B^2 - x_A^2 + y_B^2 - y_A^2}{y_B - y_A}.$$

(Mamy przy okazji gotowe równanie symetralnej odcinka o końcach A, B !)

Współczynnik kierunkowy osi symetrii odcinka AB wynosi zatem

$$m = -\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A},$$

Zaś współczynnik kierunkowy prostej AB wynosi

$$m' = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Mnożąc otrzymane współczynniki, mamy:

$$m \cdot m' = -\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} \cdot \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -1,$$

a po przekształceniu

$$m' = -\frac{1}{m}.$$

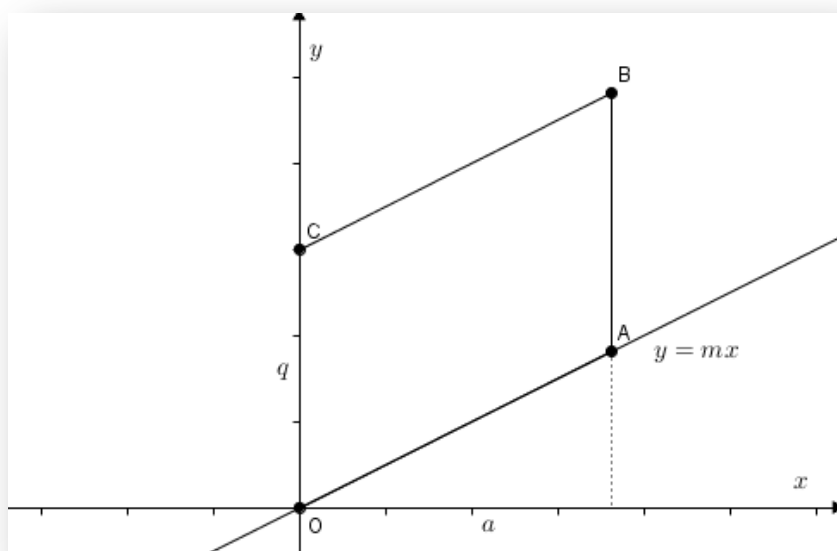
Komentarz może być następujący: jeśli proste są prostopadłe, to współczynnik kierunkowy jednej prostej jest odwrotnością współczynnika kierunkowego drugiej prostej z przeciwnym znakiem, cnw.

Rozważmy jeszcze

Twierdzenie 3

Przekątne równoległoboku dzielą się na połowy.

Wykonajmy najpierw stosowny rysunek.



Rys.4

Na powyższym rysunku dany jest równoległobok, którego wierzchołek A w układzie xOy ma odciętą a , zaś wierzchołek C ma rzędną q . Niech $y = mx$ będzie równaniem prostej OA . Wobec tego punkt $A = (a, ma)$, zaś punkt $C = (0, q)$. Ponadto

- odcięta punktu B jest równa a , gdyż prosta AB jest równoległa do osi y ;
- prosta CB jest równoległa do OA , zatem jej współczynnik kierunkowy wynosi m .

Prosta CB ma więc równanie $y = mx + q$, co oznacza, że $B = (a, ma + q)$.

Współrzędnymi środka przekątnej OB są liczby:

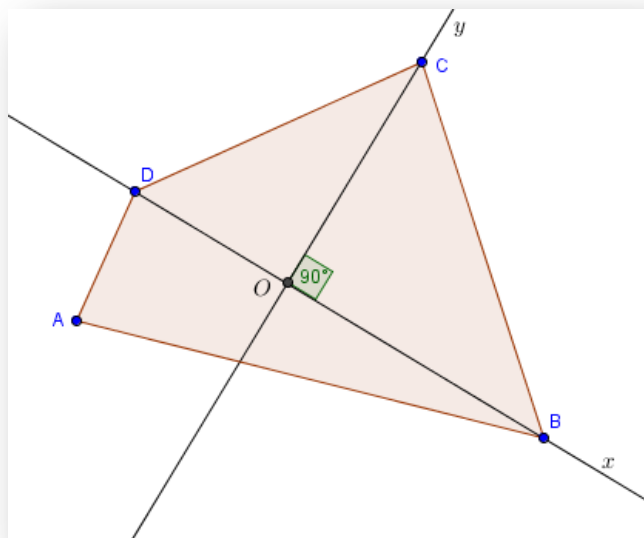
$$x = \frac{x_B + x_O}{2} = \frac{a + 0}{2} = \frac{a}{2}; \quad y = \frac{y_B + y_O}{2} = \frac{(ma + q) + 0}{2} = \frac{ma + q}{2}.$$

Współrzędnymi środka przekątnej AC są liczby:

$$x = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{a + 0}{2} = \frac{a}{2}; \quad y = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{ma + q}{2}.$$

Współrzędne są takie same, zatem przekątne dzielą się na połowy, c.n.w.

Zwróćmy uwagę, że w dowodach z zastosowaniem metod geometrii analitycznej dużą rolę odgrywa dobrze dobrana interpretacja geometryczna, np. wybór położenia punktów w układzie xOy . W zasadzie jest on dowolny, gdyż zawsze można dobrać odpowiednio układ. Wybór punktów na rysunku2. może sugerować, że jest to jakiś przypadek szczególny. Nic podobnego! Narysujmy najpierw dowolny czworokąt, a potem układ współrzędnych. Wygląda to tak:



Wykonując taki rysunek, umieściliśmy 3 punkty na osiach układu współrzędnych, co bardzo upraszcza rachunki, które są nieodłącznym elementem dowodu z zastosowaniem metod geometrii analitycznej.