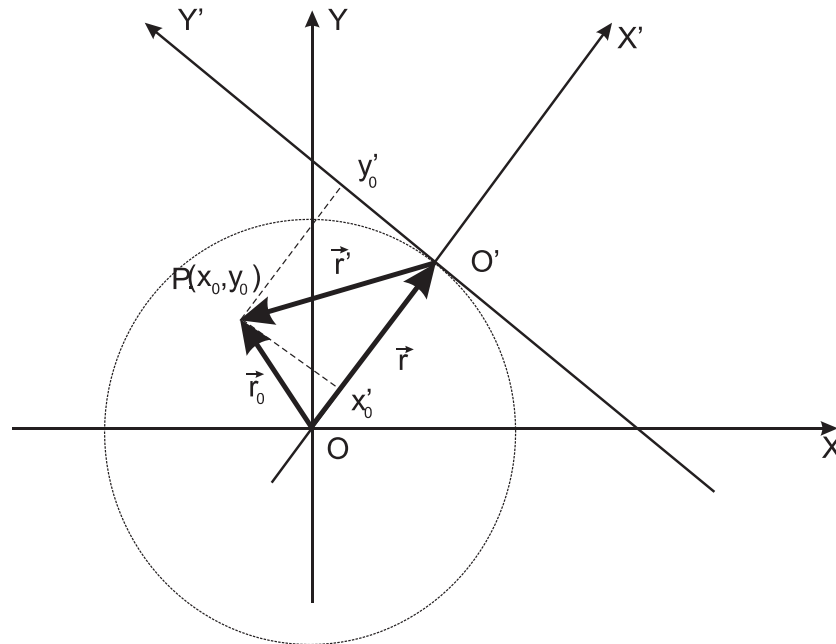


Wprowadzenie: Jaś i Małgosia kręcą się na karuzeli symetrycznej dwuramiennej. Siedzą na karuzeli zwrócenii do siebie twarzami, symetrycznie względem osi obrotu karuzeli. Jaś ma dropa, którego chce dać Małgosi, ponieważ nie może zatrzymać karuzeli, postanowił rzucić dropa Małgosi. Zawsze rzucał bardzo celnie, ale wyrzucony cukierek nie dotarł do Małgosi, ponadto jego tor lotu wyglądał bardzo dziwnie.

Założenia:

- Karuzela obraca się ze stałą prędkością kątową ω przeciwnie do ruchu wskazówek zegara,
- Jaś rzuca dropa w kierunku Małgosi w taki sposób, że wypadkowy wektor prędkości dropa jest równoległy do ramienia karuzeli i wynosi $v_0 = \text{const} > 0$,
- zaniedbujemy siłę grawitacji i oporu powietrza,
- ramię karuzeli wynosi r .

Etap 1. Wyznaczamy zależności między współrzędnymi w dwóch różnych płaskich kartezjańskich układach odniesienia. Układ OXY jest układem nieruchomym, którego środek O pokrywa się z osią obrotu karuzeli. Układ $O'X'Y'$ jest układem związanym z Jasiem, którego środek pokrywa się z siodełkiem Jasia, a oś $O'X'$ pokrywa się z ramieniem karuzeli. Środek układu porusza się po okręgu o środku w punkcie O i promieniu r przeciwnie do ruchu wskazówek zegara z prędkością kątową ω . Twarz Jasia jest stale skierowana równoległe do osi $O'X'$ w jej ujemnym kierunku. Sytuację obrazuje rysunek:



Rysunek 1: Układy odniesienia

Kąt obrotu φ mierzymy między osią OX , a promieniem wodzącym \vec{r} . Interesuje nas postać przekształcenia $(x', y') = f(x, y)$, a więc sposób przeliczania współrzędnych punktu z jednego układu do drugiego. Wobec rysunku 1 zachodzi relacja

$$\vec{r}_0 = \vec{r} + \vec{r}' \implies \vec{r}' = \vec{r}_0 - \vec{r} \quad (1)$$

Ponieważ wektory \vec{r}_0 i \vec{r} w układzie kartezjańskim OXY można zapisać w postaci:

$$\vec{r}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}; \quad \vec{r} = \begin{bmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

gdzie: $r = \|\vec{r}\|$ jest długością wektora, to wstawiając relacje wzoru (2) do wzoru (1) otrzymujemy przedstawienie

$$\vec{r}' = \begin{bmatrix} x_0 - r \cos(\varphi) \\ y_0 - r \sin(\varphi) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Pozostaje przedstawić składowe wektora \vec{r}' w układzie $O'X'Y'$. To zadanie możemy zrealizować np. na dwa następujące sposoby:

- Sposób I. (Wymaga znajomości iloczynu skalarnego i pojęcia rzutu prostopadłego w ujęciu analitycznym.) Wersory osi (reper) układu współrzędnych $O'X'Y'$ wyrażają się wzorami

$$\vec{e}'_1 = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{bmatrix}; \quad \vec{e}'_2 = \begin{bmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{bmatrix}; \quad \|\vec{e}'_1\| = 1; \quad \|\vec{e}'_2\| = 1. \quad (4)$$

Wówczas składowe wektora \vec{r}' (punktu P) w układzie współrzędnych $O'X'Y'$ wyrażają się wzorami:

$$\begin{aligned} x'_0 &= (\vec{e}'_1 | \vec{r}') = (x_0 - r \cos \varphi) \cos \varphi + (y_0 - r \sin \varphi) \sin \varphi = x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi - r \\ y'_0 &= - (x_0 - r \cos \varphi) \sin \varphi + (y_0 - r \sin \varphi) \cos \varphi = -x_0 \sin \varphi + y_0 \cos \varphi. \end{aligned} \quad (5)$$

- Sposób II. (Wymaga znajomości twierdzenia sinusów.) Rozpatrzmy trójkąt $\triangle OPO'$, przy czym kąt w wierzchołku O oznaczmy przez $\varphi_0 - \varphi$, gdzie φ_0 jest kątem jaki tworzy wektor \vec{r}_0 z osią OX . Kąt w wierzchołku O' oznaczmy przez α , wówczas z tw. sinusów dla $\triangle OPO'$ mamy

$$\frac{r'}{\sin(\varphi_0 - \varphi)} = \frac{r_0}{\sin \alpha} \implies \sin \alpha = \frac{r_0}{r'} \sin(\varphi_0 - \varphi) \quad (6)$$

Zatem wysokość trójkąta $\triangle OPO'$ jest równa (dodatnia część osi OY)

$$y'_0 = r' \sin \alpha = r_0 \sin(\varphi_0 - \varphi) = r_0 (\sin \varphi_0 \cos \varphi - \sin \varphi \cos \varphi_0) \quad (7)$$

Wobec określenia kąta φ_0 możemy zapisać $x_0 = r_0 \cos \varphi_0$ i $y_0 = r_0 \sin \varphi_0$, co uwzględniając we wzorze (7) otrzymujemy

$$y'_0 = -x_0 \sin \varphi + y_0 \cos \varphi \quad (8)$$

W następnym kroku wyznaczmy składową $x'_0 = -r + d$, gdzie d jest odcinkiem łączącym wierzchołek O z punktem przecięcia wysokości opuszczonej z wierzchołka P na bok OO' ($-r$ wynika z położenia punktu P po ujemnej stronie osi OX'). Wówczas $\frac{d}{r_0} = \cos(\varphi_0 - \varphi)$, a stąd uwzględniając relacje na x_0 i y_0 otrzymujemy:

$$x'_0 = -r + d = -r + r_0 \cos(\varphi_0 - \varphi) = -r + x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi \quad (9)$$

Ostatecznie na mocy powyższych rozważań otrzymaliśmy wzory na transformacje współrzędnych między układami OXY i $O'X'Y'$ w postaci:

$$\begin{aligned}x'_0 &= x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi - r \\y'_0 &= -x_0 \sin \varphi + y_0 \cos \varphi\end{aligned}\quad (10)$$

Transformacje odwrotne mają postać

$$\begin{aligned}x_0 &= (x'_0 + r) \cos \varphi - y'_0 \sin \varphi \\y_0 &= (x'_0 + r) \sin \varphi + y'_0 \cos \varphi\end{aligned}\quad (11)$$

Etap II. (Modelowanie doświadczenia.) Jaś i Małgosia kręcą się na karuzeli z prędkością kątową ω , zatem $\varphi = \omega t$, t – czas. Jaś rzuca cukierek do Małgosi (p. założenia) tak, że wektor prędkości \vec{v}_0 jest równoległy do ramienia karuzeli, zatem

$$\vec{v}_0 = \begin{bmatrix} -v_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Przy czym przyjmujemy, że Jaś rzucił cukierek w chwili $t_0 = 0$, co odpowiada następującej sytuacji na rysunku 1:

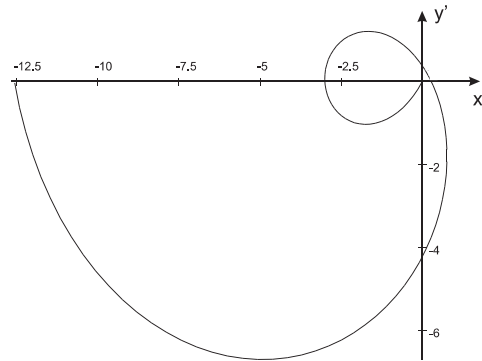
- Ramię karuzeli pokrywa się z osią OX w układzie OXY , siodełko Jasia znajduje się w punkcie $(r, 0)$ w tym układzie, oraz Jaś siedzi skierowany twarzą w kierunku środka układu OXY .
- W układzie OXY cukierek porusza się po osi z prędkością v_0 , zatem w każdej chwili czasu $t > 0$ cukierek znajduje się w punkcie $P(r - v_0 t, 0)$.

W konsekwencji trajektoria cukierka (w czasie jednego obrotu karuzeli $t \in [0, \frac{2\pi}{\omega}]$) w układzie OXY jest odcinkiem $\overline{P_0 P}$ o początku w punkcie $P_0(r, 0)$ i końcu w punkcie $P(r - \frac{2\pi v_0}{\omega}, 0)$. Pytanie, jak wygląda trajektoria cukierka w układzie $O'X'Y'$ dla czasu $t \in [0, \frac{2\pi}{\omega}]$? Korzystając z powyższych rozważań i wzoru (10) otrzymujemy równanie trajektorii cukierka w układzie $O'X'Y'$ w następującej postaci:

$$\begin{aligned}x'(t) &= (r - v_0 t) \cos(\omega t) - r \\y'(t) &= (v_0 t - r) \sin(\omega t)\end{aligned}\quad (13)$$

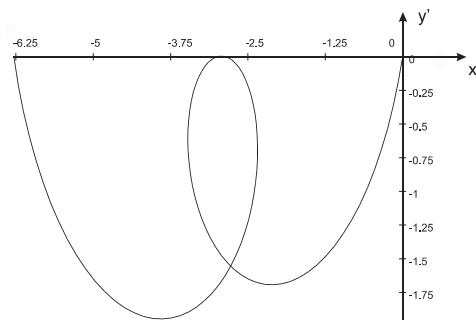
Wykonujemy przykładowe wykresy trajektorii za pomocą komputera. Wykresy możemy wykonać za pomocą programu umożliwiającego kreślenie krzywych zadanych parametrycznie lub za pomocą arkusza kalkulacyjnego, tablicując funkcje $x'(t)$ i $y'(t)$ z małym krokiem dla $t \in [0, \frac{2\pi}{\omega}]$, a następnie wykonując wykres. Przykładowe wykresy trajektorii prezentujemy poniżej:

1⁰ Trajektoria dla $r = 3$, $\omega = 1$, $v_0 = 2$ i $t \in [0, 2\pi]$.



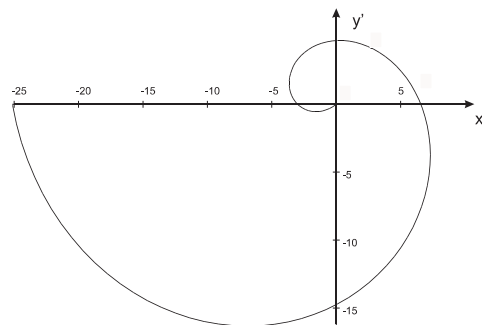
Rysunek 2: Trajektoria 1

2⁰ Trajektoria dla $r = 3$, $\omega = 1$, $v_0 = 1$ i $t \in [0, 2\pi]$.



Rysunek 3: Trajektoria 2

3⁰ Trajektoria dla $r = 3$, $\omega = 1$, $v_0 = 4$ i $t \in [0, 2\pi]$.



Rysunek 4: Trajektoria 3

Pytanie, co widział Jaś w każdym z trzech wykreślonych przypadków?
 Pamiętajmy, że Jaś siedzi nieruchomo na karuzeli z twarzą skierowaną w kierunku ujemnej części osi $O'X'$. Zakładamy, że pole widzenia Jasia wynosi 180° .

Przykładowe omówienie trajektorii.

Ad 1^o Cukierek zatoczył pełny łuk nie dolatując do Małgosi (Małgosia w układzie Jasia ma stałe współrzędne $(-2r, 0)$), po czym przeleciał Jasiowi koło prawego ucha i zniknął z pola widzenia. Cukierek po chwili pojawił się po lewej stronie Jasia, zataczając szeroki łuk oddalał się.

Ad 2^o Cukierek cały czas pozostawał w polu widzenia Jasia. Na początku drops szybko oddalał się w lewo od Jasia, po czym oddalając się coraz wolniej przemieszczał się w prawo aż do ramienia karuzeli. Następnie cukierek przemieszczał się w lewo zbliżając się do Jasia, dalej przemieszczając się w lewo zaczął się oddalać. Po czym ponownie zmienił kierunek i oddalając się przeleciał za Małgosią blisko jej prawego ucha,

Ad 3^o Cukierek zatoczył pełny łuk przelatując Jasiowi przed nosem i zniknął z pola widzenia. Cukierek po chwili pojawił się dalek po lewej stronie Jasia, zataczając szeroki łuk szybko się oddalał.

Etap III. (Analiza modelu.) Zakładając, że jedynym parametrem modelu jest v_0 , odpowiedzieć na następujące pytania:

- 1) Czy Jaś mógł rzucić cukierek tak by sam go złapał? Podaj warunki kiedy jest to możliwe.
- 2) Czy Jaś mógł rzucić cukierek tak by złapała go Małgosia? Podaj warunki kiedy jest to możliwe.

Przykładowe rozwiązanie:

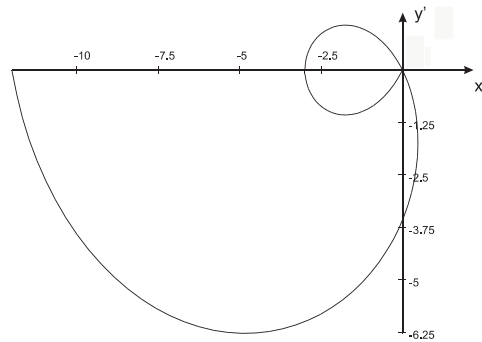
Ad 1) Rozważamy sytuację w układzie OXY . Ponieważ drops porusza się ruchem jednostajnym wzdłuż osi OX , to złapanie dropsa przez Jasia jest możliwe tylko wówczas, gdy cukierek znajdzie się punkcie $P(-r, 0)$ w tej samej chwili co Jaś. Jaś znajdzie się w punkcie P , gdy kąt obrotu karuzeli wyniesie $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. W konsekwencji

$$\omega t = \pi + 2k\pi \implies t = \frac{\pi + 2k\pi}{\omega} \quad (14)$$

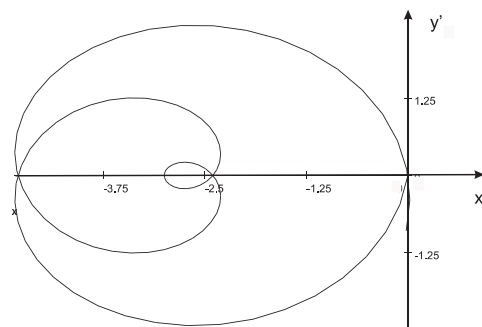
Z drugiej strony cukierek znajdzie się w punkcie P , gdy $r - v_0 t = r$. Zatem na mocy wzoru (14) mamy

$$r - v_0 t = r \implies v_0 = \frac{2r}{t} = \frac{2r\omega}{\pi + 2k\pi} \quad (15)$$

Należy podkreślić, że na wykresie trajektorii sytuacja, gdy Jaś łapie cukierek oznacza, że trajektoria przechodzi przez środek układu współrzędnych dwa razy. Poniżej prezentujemy wykresy trajektorii dla $\omega = 1$, $r = 3$ i $k = 1, 2$.



Rysunek 5: Trajektoria k=1

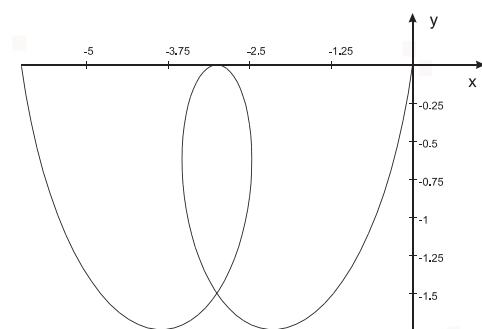


Rysunek 6: Trajektoria k=2

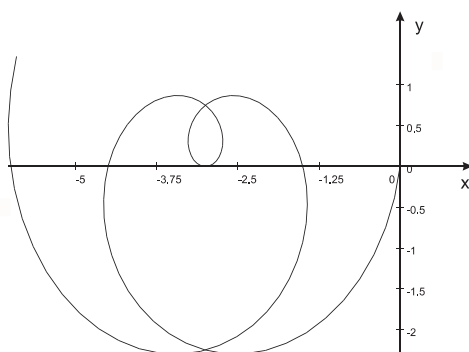
Ad 2) Sytuację rozpatrujemy ponownie w układzie OXY . Korzystając z rozważań z poprzedniego punktu, wiemy że Małgosia musi znaleźć się w punkcie P , aby złapać droszka musi zatem wykonać pełny obrót. W konsekwencji

$$\omega t = 2k\pi \implies t = \frac{2k\pi}{\omega}; \quad k \in \mathbb{N}_+. \quad (16)$$

Biorąc pod uwagę wzór (15) mamy $v_0 = \frac{r\omega}{k\pi}$. Poniżej prezentujemy wykresy trajektorii dla $\omega = 1$, $r = 3$ i $k = 1, 2$.



Rysunek 7: Trajektoria k=1

Rysunek 8: Trajektoria $k=2$

Etap IV (Rozbudowa modelu) Przeprowadzić dyskusję i odpowiedzieć na następujące pytania:

- Z jaką prędkością musi Jaś rzucić dropsa (podać postać wektora), aby drops poruszał się ruchem jednostajnym wzdłuż osi OX w układzie OXY ? W rozważaniach uwzględnić fakt, że Jaś obraca się na karuzeli.
- Z jaką siłą musi Jaś działać na cukierek, aby drops poruszał się ruchem jednostajnym wzdłuż osi OX w układzie OXY ? W rozważaniach uwzględnić fakt, że Jaś obraca się na karuzeli.