

1. Przedmiot: **Matematyka**
2. Dział programowy: **3. Równania i nierówności**
3. Temat: **Budujemy model matematyczny**
4. Klasa: **Klasa III**
5. Zgodność z podstawą programową: **Uczeń:**
 - buduje model matematyczny danej sytuacji, uwzględniając ograniczenia i zastrzeżenia.
 - tworzy strategię rozwiązania problemu.
 - tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność.
6. Pomoce (środki) dydaktyczne
 - **stanowiska komputerowe (lub komputer nauczyciela z tablicą interaktywną lub rzutnikiem multimedialnym),**
 - **bezpłatne oprogramowanie GeoGebra wspomagające nauczanie matematyki (<http://www.geogebra.org/cms/pl/download/>)**
7. Cele: Uczeń:
 - stosuje zdobytą wiedzę i umiejętności do tworzenia modelu matematycznego,
 - sporządza tabelę,
 - sporządza wykres ustalonych zależności,
 - stawia hipotezy,
 - tworzy równania, rozwiązuje je i komentuje uzyskane wyniki,
 - używa proporcjonalności prostej,
 - posługuje się programem GeoGebra (lub arkuszem kalkulacyjnym).
8. Metody nauczania: **Praca z komputerem, elementy wykładu, prezentacja, ćwiczenia**
9. Formy pracy: **Praca indywidualna i w parach**

Plan lekcji

„Wyruszyłem w podróż po królestwie ojca, pokonując każdego dnia 40 mil. Już na początku drugiego dnia podróży zadbałem o to, by móc porozumiewać się z moimi bliskimi. Spośród mej świty wybrałem siedmiu najlepszych rycerzy, żeby służyli mi jako posłańcy i wysłałem pierwszego, Aleksandra, który każdego dnia pokonywał 80 mil. Dziś, po kolejnym powrocie, znów wyruszy do zamku; pomyślałem, że zobaczę go ponownie po przeszło 30 latach.”

(Na podstawie opowiadania *Siedmiu posłańców*,
Dino Buzzati, *Sześćdziesiąt opowiadań*, Świat Literacki, Izabelin 2006)

Ile dni upłynęło od początku wyprawy do chwili, gdy książę wypowiada to zdanie?

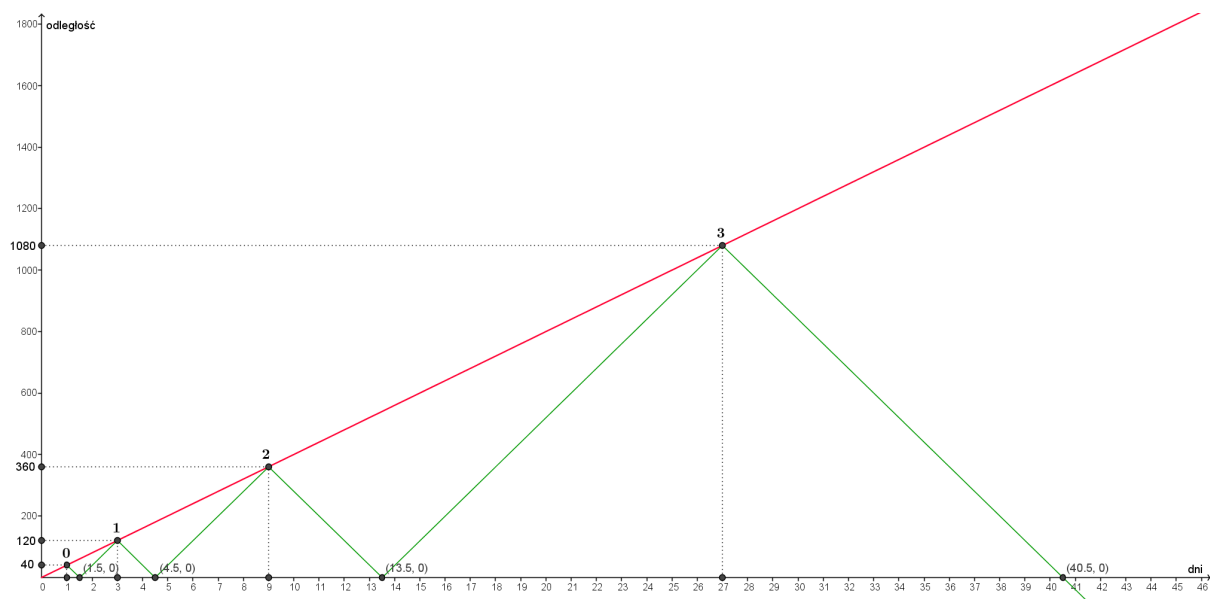
Stworzymy model przedstawionej sytuacji.

Zbudujemy tabelę, w której podamy odległości księcia i posłańca od zamku ojca.

Liczba dni	Odległość księcia	Odległość posłańca	Spotkanie
------------	-------------------	--------------------	-----------

1	40	40	(0)
2	80	40	
3	120	120	(1) Pierwsze spotkanie
4	160	40	
5	200	40	
6	240	120	
7	280	200	
8	320	280	
9	360	360	(2) Drugie spotkanie
10	400	280	
11	440	200	
12	480	120	
13	520	40	
14	560	40	
15	600	120	
16	640	200	
17	680	280	
18	720	360	
19	760	440	
20	800	520	
21	840	600	
22	880	680	
23	920	760	
24	960	840	
25	1000	920	
26	1040	1000	
27	1080	1080	(3) Trzecie spotkanie

Stosowny wykres jest następujący (wykonany przy pomocy programu GeoGebra):



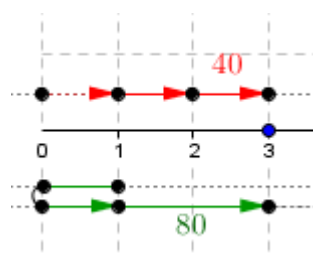
Zauważmy, że spotkania następują w dniach 1., 3., 9., 27., ..., a liczby te są potęgami trójki: $3^0, 3^1, 3^2, 3^3, \dots$

Możemy już odpowiedzieć na pytanie postawione na początku. 30 lat to $365 \cdot 30 = 10\,950$ dni. Biorąc $3^8 = 6561$ i $3^9 = 19\,683$ stwierdzamy, że książę wypowiedział to zdanie podczas ósmego spotkania, czyli po około 18 latach od chwili wyjazdu, zaś kolejne spotkanie z Aleksandrem może nastąpić za około 54 lata od chwili wyjazdu, czyli po około 36 latach od ósmego spotkania. Czy do niego dojdzie, skoro: „Wyruszyłem jako trzydziestolatek, ...”?

Odległość s i liczba d dni związane są zależnością:

$$s = 40d.$$

Spotkanie drugie następuje w 9. dniu, czyli $d_2 = 9$ i $s_2 = 360$ mil od zamku. Znajdźmy d_3 , czyli liczbę dni, po których nastąpi spotkanie trzecie. Zapewne pomocne w tym będą dwa kolejne rysunki.

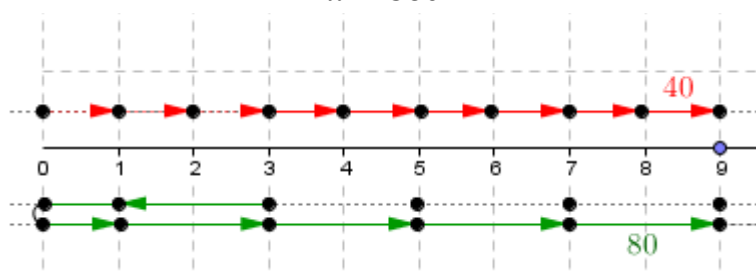


Rozważmy najpierw sposób obliczenia kolejnego miejsca spotkania po spotkaniu pierwszym, tj. odległości nowego miejsca spotkania od zamku. Oznaczmy tę odległość przez x . Gdy posłaniec wyruszy z miejsca pierwszego spotkania do zamku i z powrotem, przebędzie drogę 240 mil, a w tym samym czasie książę przebędzie 120 mil. Zatem droga, którą przebywa książę jest równa $x - 240$, zaś droga, którą musi pokonać posłaniec do nowego miejsca spotkania wynosi $x - 120$. Oznacza to, że książę pokona drogę w czasie $\frac{x-240}{40}$, zaś posłaniec w czasie $\frac{x-120}{80}$. Porównując te czasy, otrzymujemy:

$$\frac{x - 240}{40} = \frac{x - 120}{80},$$

skąd

$$x = 360.$$



Odległość kolejnego miejsca spotkania otrzymamy, rozwiązując równanie:

$$\frac{x - 720}{40} = \frac{x - 360}{80}.$$

Rozwiązaniem tego równania jest $x = 1080$.

Otrzymaliśmy więc:

$$s_1 = 120, \quad s_2 = 360, \quad s_3 = 1080.$$

Oznacza to, że

$$s_3 = 3 \cdot s_2.$$

Obliczmy jeszcze, w którym dniu nastąpi trzecie spotkanie:

$$d_3 = \frac{1080}{40} = 27,$$

skąd

$$d_3 = 3 \cdot d_2.$$

Wykażemy teraz ogólnie, że otrzymane wyniki są poprawne. Niech d_n i s_n oznaczają liczbę dni i odległość od zamku n – tego spotkania. Droga, którą przebędzie książę będzie równa $x - 2s_n$, zaś droga, którą przebędzie książę wyniesie $x - s_n$. Czas posłańca wyniesie zatem $\frac{x-s_n}{80}$, zaś czas księcia - $\frac{x-2s_n}{40}$.

Mamy zatem:

$$\frac{x - s_n}{80} = \frac{x - 2s_n}{40},$$

skąd

$$x = 3s_n$$

oraz

$$s_{n+1} = 3s_n.$$

Podstawiając $s_n = 40d_n$ otrzymujemy:

$$d_{n+1} = \frac{s_{n+1}}{40} = \frac{3s_n}{40} = \frac{3 \cdot 40d_n}{40} = 3d_n.$$

Otrzymane wyniki potwierdzają przyjętą hipotezę.

Zbudowany model ma wiele ograniczeń, o których mówi sam Autor. Zachęcam więc do przeczytania całego opowiadania.