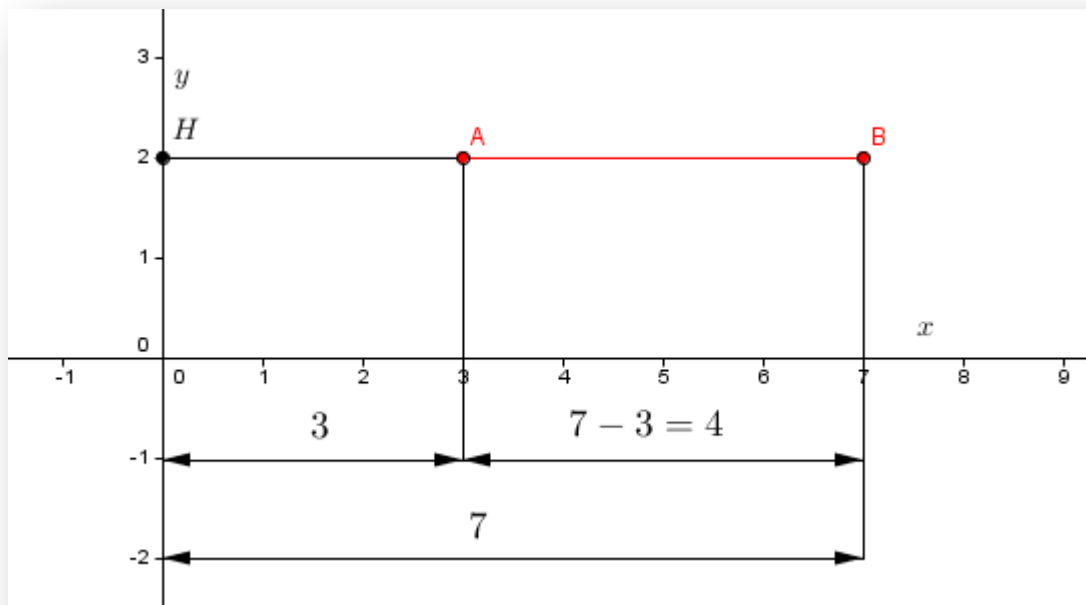


1. Przedmiot: **Matematyka**
 2. Dział programowy: **8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej**
 3. Temat: **Odległość punktów, prostych i punktu od prostej**
 4. Klasa: **Klasa II**
 5. Zgodność z podstawą programową: **Uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:**
 - 2) bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań ogólnych;
 - 3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci ogólnej przez dany punkt;
 - 4) oblicza odległość punktu od prostej;
 6. Pomoce (środki) dydaktyczne
 - stanowiska komputerowe (lub komputer nauczyciela z tablicą interaktywną lub rzutnikiem multimedialnym),
 - bezpłatne oprogramowanie GeoGebra wspomagające nauczanie matematyki (<http://www.geogebra.org/cms/pl/download/>)
 7. Cele: Uczeń:
 - oblicza odległość między punktami o danych współrzędnych,
 - rozwiązuje zadania związane z odległością punktów w układzie współrzędnych,
 - oblicza odległość punktu od prostej danej w postaci kierunkowej oraz w postaci ogólnej,
 - oblicza odległość dwóch prostych równoległych,
 - prowadzi rozumowania pozwalające uzyskiwać ogólne wzory,
 - nabywa umiejętności stosowania metod geometrii analitycznej.
 - posługuje się programem GeoGebra (lub arkuszem kalkulacyjnym).
 8. Metody nauczania: **Praca z komputerem, elementy wykładu, prezentacja, ćwiczenia**
 9. Formy pracy: **Praca indywidualna i w parach**
- Plan lekcji**

Przez odległość dwóch punktów rozumiemy długość łączącego je odcinka.

Obliczmy np. odległość punktów $A = (3, 2)$ i $B = (7, 2)$. Ponieważ punkty te mają taką samą rzędną, więc leżą na prostej równoległej do osi x .



Ponadto punkty te mają obie odcięte dodatnie. Długość odcinka AB otrzymujemy odejmując od długości odcinka HB , którego $x_B = 7$, długość odcinka HA , którego $x_A = 3$; długość odcinka AB wynosi zatem:

$$|AB| = |HB| - |HA|,$$

czyli

$$|AB| = x_B - x_A = 7 - 3 = 4.$$

Odległość dwóch punktów jest zawsze liczbą nieujemną, więc odejmowanie odpowiednich współrzędnych musi być tak wykonane, by taką liczbę otrzymać. Jeżeli np. chcemy obliczyć odległość punktów: $C = (-3, 3)$ i $D = (5, 3)$ (są to również punkty leżące na prostej równoległej do osi x), to mamy:

$$|CD| = x_D - x_C = 5 - (-3) = 8.$$

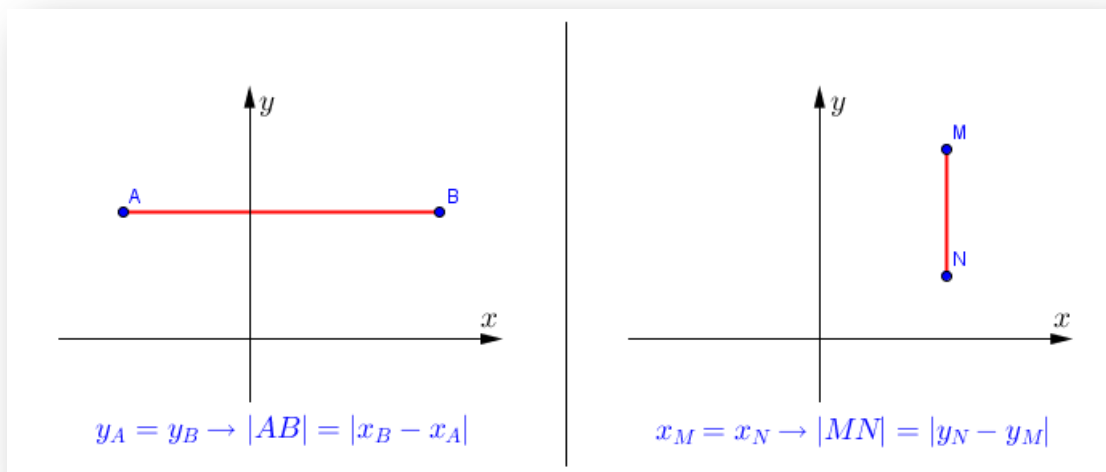
Ogólnie:

$$\text{jeżeli } y_A = y_B, \text{ to } |AB| = |x_B - x_A|.$$

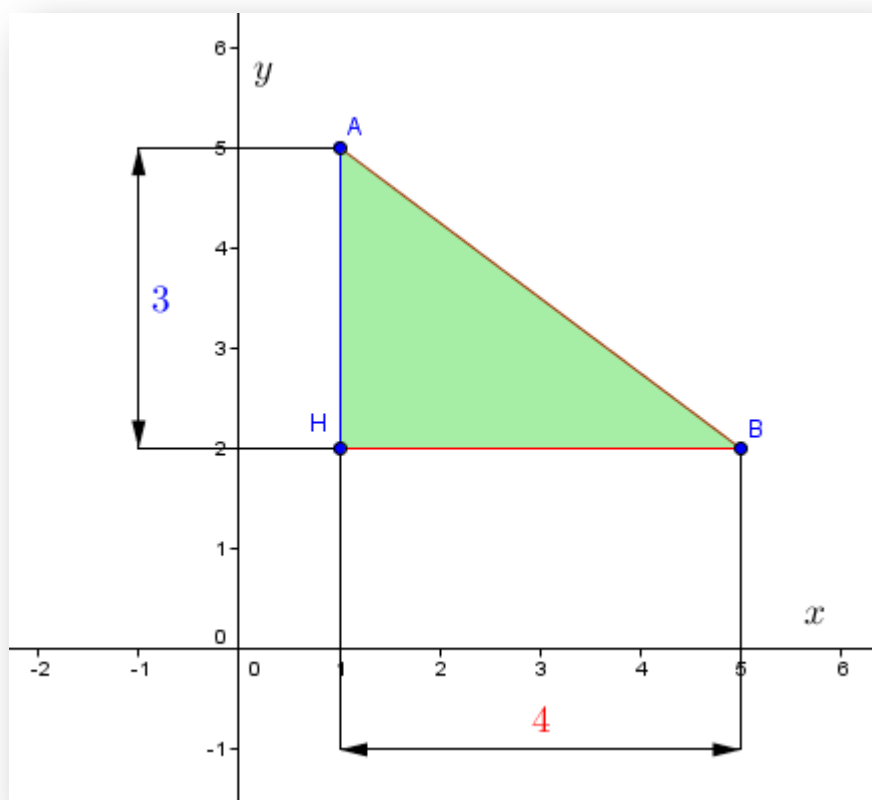
Stosując to samo rozumowanie dla punktów o jednakowej odciętej, możemy zapisać:

$$\text{jeżeli } x_M = x_N, \text{ to } |AB| = |y_N - y_M|.$$

Na rysunkach możemy to przedstawić następująco:



Rozważaliśmy pary szczególnych punktów; były to punkty leżące na prostej równoległej do osi x bądź na prostej równoległej do osi y . Pora przejść do odległości dwóch dowolnych punktów płaszczyzny. Będziemy chcieli uzyskać ogólny wzór, który pozwoli obliczyć odległość punktów niezależnie od ich współrzędnych na płaszczyźnie. Wykonajmy najpierw stosowny rysunek.



Rysunek ten pokazuje, że odległość punktów A i B jest długością przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego AHB. Łatwo obliczymy długości przyprostokątnych: ponieważ $y_H = y_B$, więc

$$|HB| = |x_B - x_H| = |5 - 1| = 4.$$

Analogicznie obliczymy AH , wiedząc, że $x_A = x_H$:

$$|AH| = |y_H - y_A| = |2 - 5| = 3.$$

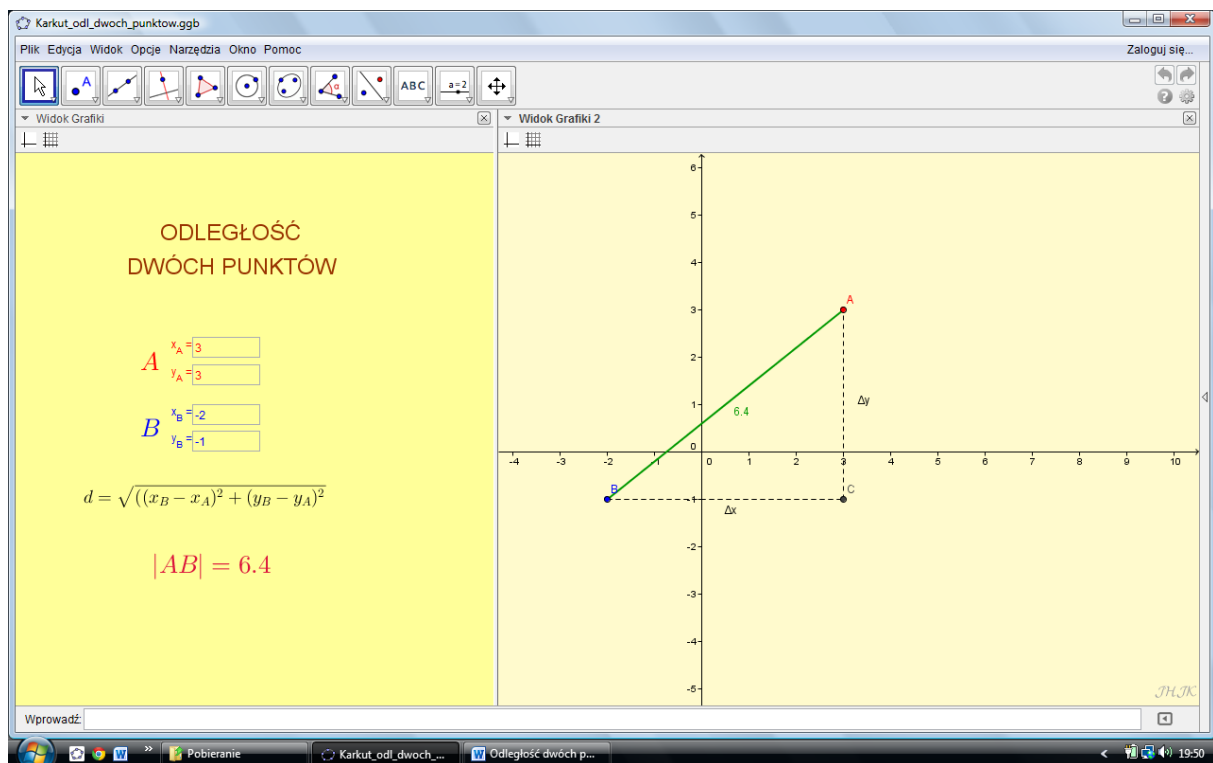
Stosując twierdzenie Pitagorasa otrzymujemy:

$$|AB| = \sqrt{|HB|^2 + |AH|^2}.$$

Ostatecznie szukanym wzorem jest:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Wykorzystując GeoGebra możemy utworzyć plik .ggb, przy pomocy którego będziemy mogli wizualizować odległość dwóch punktów oraz ją obliczać. Może on wyglądać następująco:



Realizując ten temat możemy zająć się jeszcze następującymi zagadnieniami (do każdego z tych zagadnień dołączony jest aplet GG):

1. Odległość punktu od prostej danej w postaci kierunkowej.
2. Odległość punktu od prostej danej w postaci ogólnej.
3. Odległość prostych równoległych.
4. Proste równoległe i proste prostopadłe.

Punktem wyjścia do realizacji 3. niech będzie następujące zadanie:

Znajdź odległość prostych równoległych:

$$Ax + By + C = 0 \text{ i } Ax + By + C' = 0.$$

Rozwiązanie

I sposób:

Równanie prostej l prostopadłej do danych prostych, przechodzącej przez punkt $O = (0,0)$: $Bx - Ay = 0$. Punkty przecięcia prostej l z prostymi danymi:

$$\left(\frac{-AC}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \frac{-BC}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right), \left(\frac{-AC'}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \frac{-BC'}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right).$$

Odległość tych punktów:

$$d = \frac{|C - C'|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

II sposób:

$$1) \ B = 0 \rightarrow d = \frac{|C - C'|}{A};$$

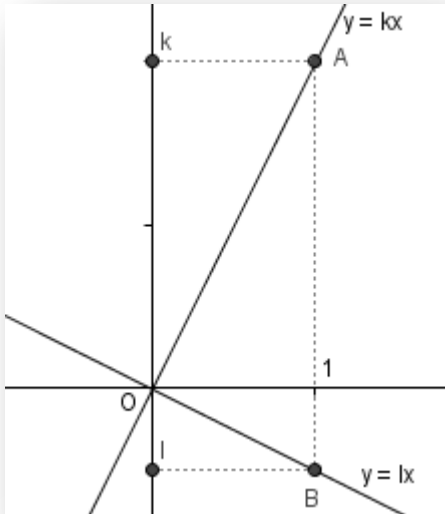
$$2) \ B \neq 0 \rightarrow d = MP \cos \alpha, \quad MP = \frac{|C - C'|}{B}, \quad \cos \alpha = \frac{|B|}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad d = \frac{|C - C'|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

III sposób:

Odległość dwóch prostych $l_1 || l_2$ równa się odległości dowolnego punktu $p \in l_2$ od l_1 . Punkt $P = \left(0, -\frac{C'}{B}\right)$ należy do prostej $Ax + By + C' = 0$,

$$d = \frac{\left| A \cdot 0 + B \cdot \left(-\frac{C'}{B}\right) + C \right|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|C - C'|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Odnośnie do punktu 4. wybierzmy dwie proste o równaniach $y = kx$ i $y = lx$ (rys.) i ustalmy warunek konieczny i wystarczający na to, by te proste były prostopadłe.



Dane proste są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt OAB jest trójkątem prostokątnym, a zatem wtedy i tylko wtedy, gdy $AB^2 = OA^2 + OB^2$. Ponieważ

$$A = (1, k), \quad B = (1, l),$$

więc

$$OA^2 = 1^2 + k^2, \quad OB^2 = 1^2 + l^2, \quad AB^2 = |k - l|^2.$$

Wynika stąd, że

$$|k - l|^2 = 1^2 + k^2 + 1^2 + l^2.$$

Przekształcając tę równość w sposób równoważny, otrzymujemy:

$$kl = -1,$$

co kończy poszukiwania.

Zakończmy zadaniem:

Wykorzystując wyniki uzyskane w punkcie 3. znajdź równania obu prostych równoległych do prostej $Ax + By + C = 0$ i odległych od niej o d .