

1. Przedmiot: **Matematyka**
2. Dział programowy: **6. Trygonometria**
3. Temat: **Wyznaczanie okresów funkcji trygonometrycznych**
4. Klasa: **Klasa II**
5. Zgodność z podstawą programową: **Uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:**
 - 1) wykorzystuje okresowość funkcji trygonometrycznych;
 - 2) posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych (np. gdy rozwiązuje nierówności typu $\sin x > a$, $\cos x \leq a$, $\operatorname{tg} x > a$);
 - 3) stosuje wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów;
6. Pomoce (środki) dydaktyczne
 - stanowiska komputerowe (lub komputer nauczyciela z tablicą interaktywną lub rzutnikiem multimedialnym),
 - bezpłatne oprogramowanie GeoGebra wspomagające nauczanie matematyki (<http://www.geogebra.org/cms/pl/download/>)
7. Cele: Uczeń:
 - zna definicję funkcji okresowej,
 - podaje przykłady funkcji okresowych,
 - zna okresy zasadnicze podstawowych funkcji trygonometrycznych,
 - wyznacza okresy różnych funkcji trygonometrycznych,
 - prowadzi rozumowania pozwalające uzyskiwać ogólne wzory.
 - posługuje się programem GeoGebra (lub arkuszem kalkulacyjnym).
8. Metody nauczania: **Praca z komputerem, elementy wykładu, prezentacja, ćwiczenia**
9. Formy pracy: **Praca indywidualna i w parach**

Plan lekcji

Na wstępie przypominamy definicję funkcji okresowej i podajemy przykłady funkcji okresowych.

Funkcję nazywamy **okresową** wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $T > 0$ taka, że dla każdego x z dziedziny funkcji $x + T$ i $x - T$ należą do dziedziny funkcji i zachodzi równość

$$f(x + T) = f(x).$$

Liczbę $T > 0$ nazywamy okresem funkcji f . Najmniejszy okres (o ile istnieje) nazywamy **okresem zasadniczym funkcji f** .

Uwaga

Jeśli pewna funkcja f jest okresowa i ma okres T , to jej okresem są również każda z liczb: $2T, 3T, \dots, kT$, gdzie $k \in \mathbb{C}$.

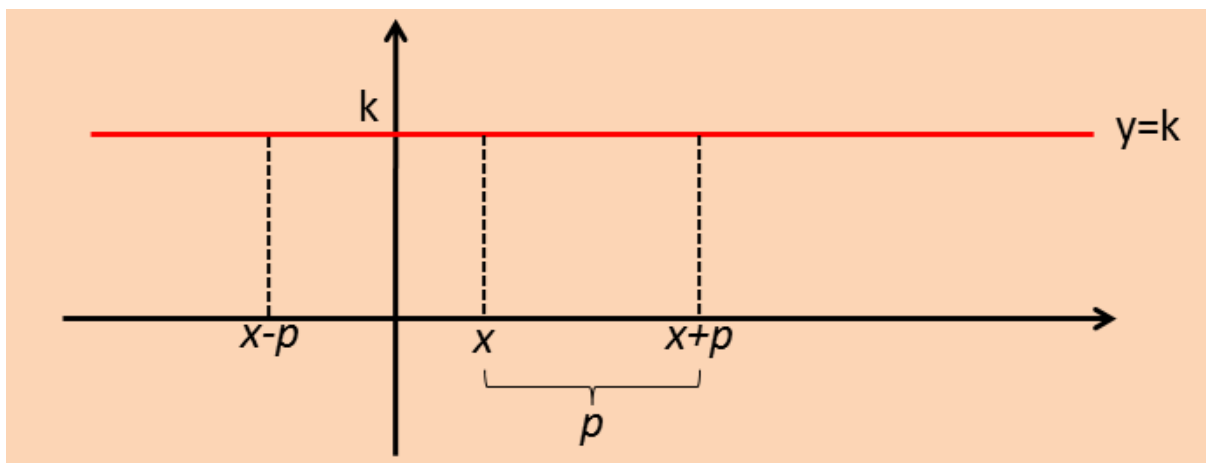
Istotnie, korzystając z definicji, mamy:

$$\begin{aligned} f(x + T) &= f(x), \\ f(x + 2T) &= f(x + T + T) = f[(x + T) + T] = f(x + T) = f(x), \\ f(x + 3T) &= f[(x + 2T) + T] = f(x + 2T) = f(x), \text{ itd.} \end{aligned}$$

Z Uwagi wynika, że dziedzina funkcji okresowej nie może być zbiorem ograniczonym.

Przykłady funkcji okresowych

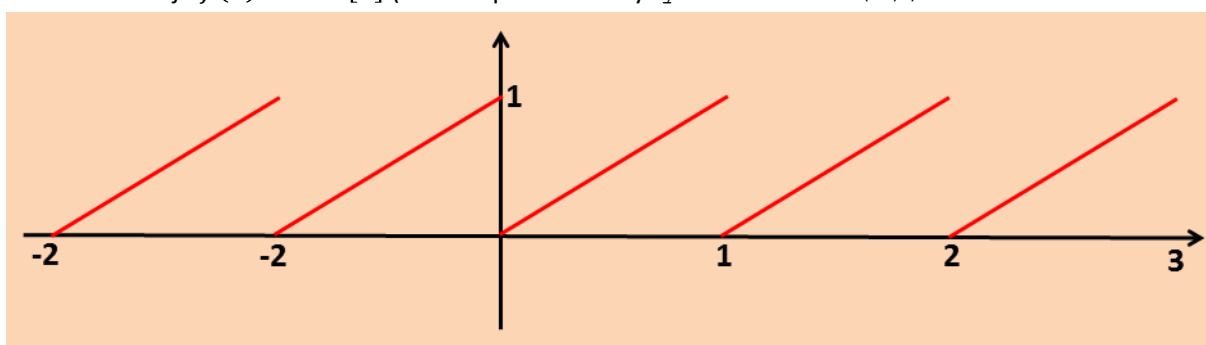
1. Funkcja stała $f(x) = k$.



$$f(x \pm p) = f(x) = k.$$

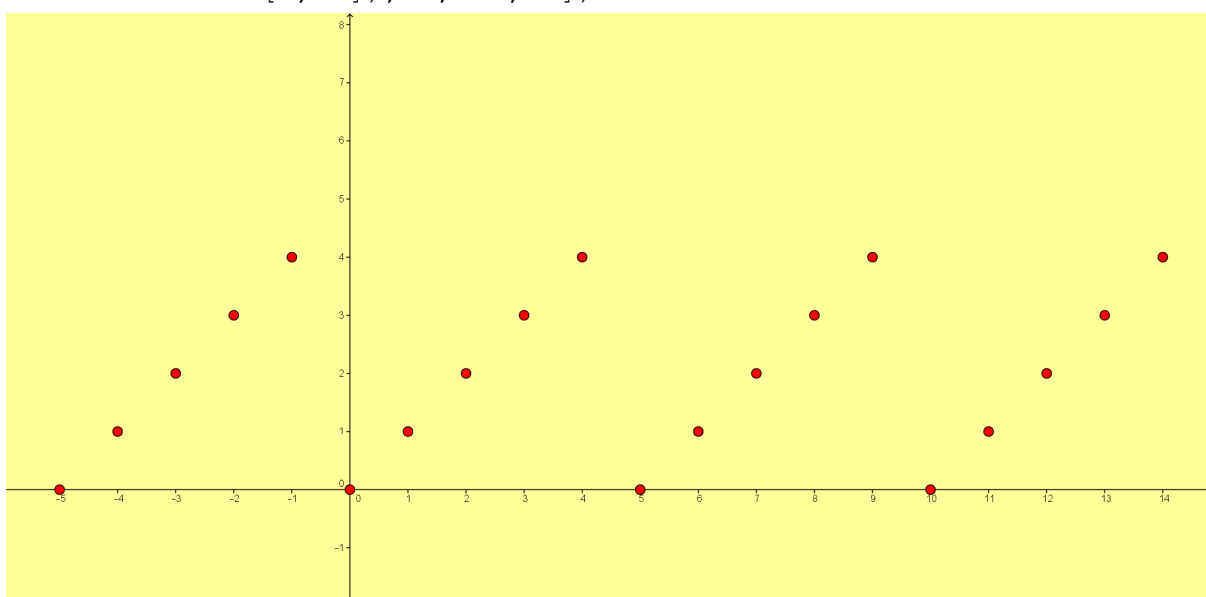
Funkcja ta jednak nie ma okresu zasadniczego, gdyż nie ma najmniejszej dodatniej wartości p , dla której byłby prawdziwy związek zapisany w definicji.

2. Funkcja $f(x) = x - [x]$ (w GG wprowadzamy: $y = x - \text{floor}(x)$).



Jest to funkcja „mantysa”. Jest ona okresowa – każda liczba całkowita dodatnia jest jej okresem. Okresem zasadniczym jest 1.

3. Funkcja okresowa określona na zbiorze \mathbb{C} liczb całkowitych: „ y jest resztą z dzielenia x przez p ”, gdzie p jest liczbą całkowitą (np. $p = 5$) (w GG wprowadzamy: `Ciag[(i, ResztaDzielenia[i, 5]), i, -5, 14]`)



4. Okresowość różnych funkcji trygonometrycznych
Przypominamy, że:

funkcja	okres zasadniczy
$y = \sin x$	2π
$y = \cos x$	2π
$y = \tan x$	π

5. Wyznaczyć okres zasadniczy funkcji $f(x) = \sin(\pi x)$.

Aby rozwiązać zadanie zapytajmy, dla jakich $T \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i dla każdego $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin \pi(x + T) = \sin \pi x$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sin(\pi x + \pi T) = \sin \pi x$$

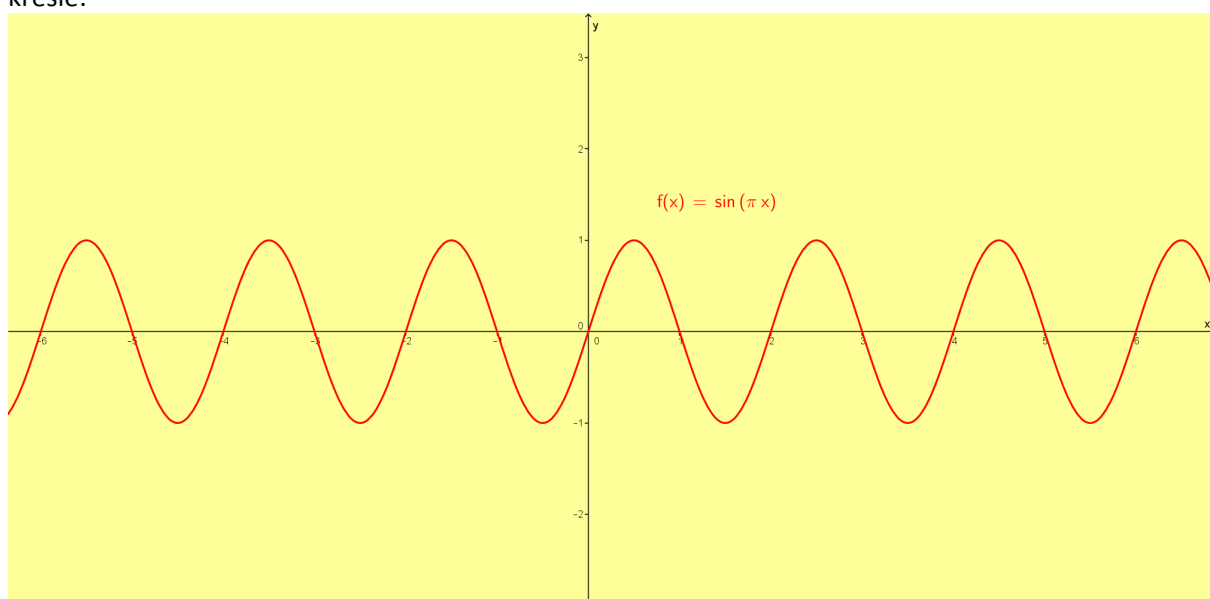
$$\Leftrightarrow$$

$$\pi T = 2\pi$$

$$\Leftrightarrow$$

$$T = 2$$

Pokazaliśmy, że okresem zasadniczym podanej w zadaniu funkcji jest 2. Zobaczmy to jeszcze na wykresie:



6. Wyznaczyć okres zasadniczy funkcji $f(x) = \sin x \cdot \cos x$.

Ponieważ $\sin x \cdot \cos x = \frac{2 \sin x \cos x}{2} = \frac{1}{2} \sin 2x$, więc $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$. Aby rozwiązać zadanie zapytajmy, dla jakich $T \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i dla każdego $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{2} \sin 2(x + T) = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} \sin(2x + 2T) = \frac{1}{2} \sin 2x$$

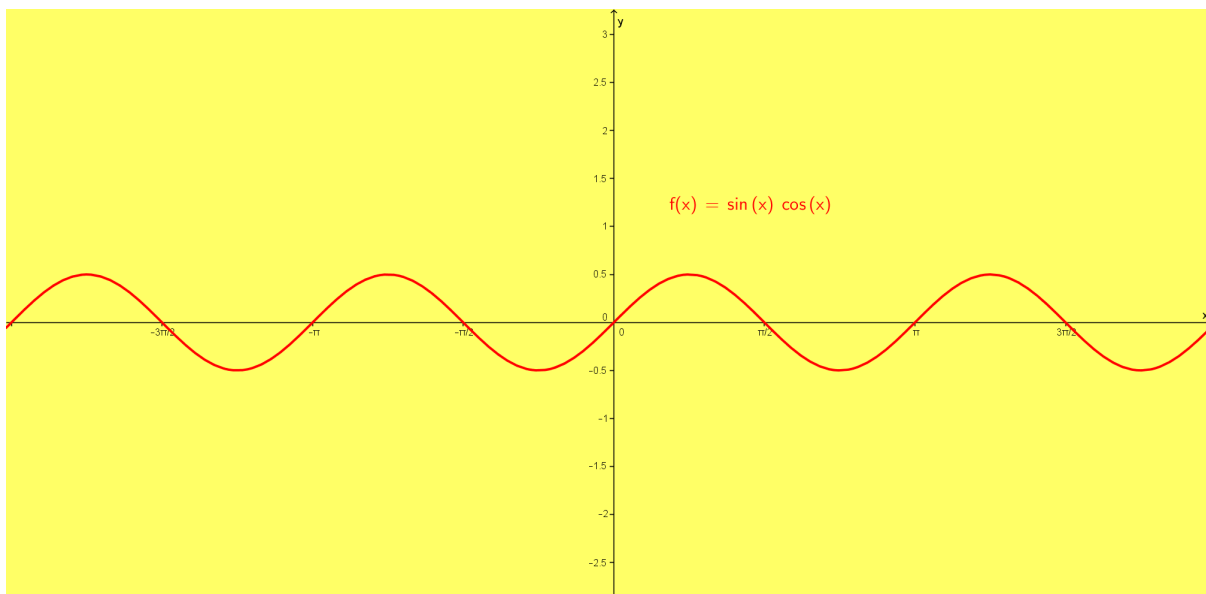
$$\Leftrightarrow$$

$$2T = 2\pi$$

$$\Leftrightarrow$$

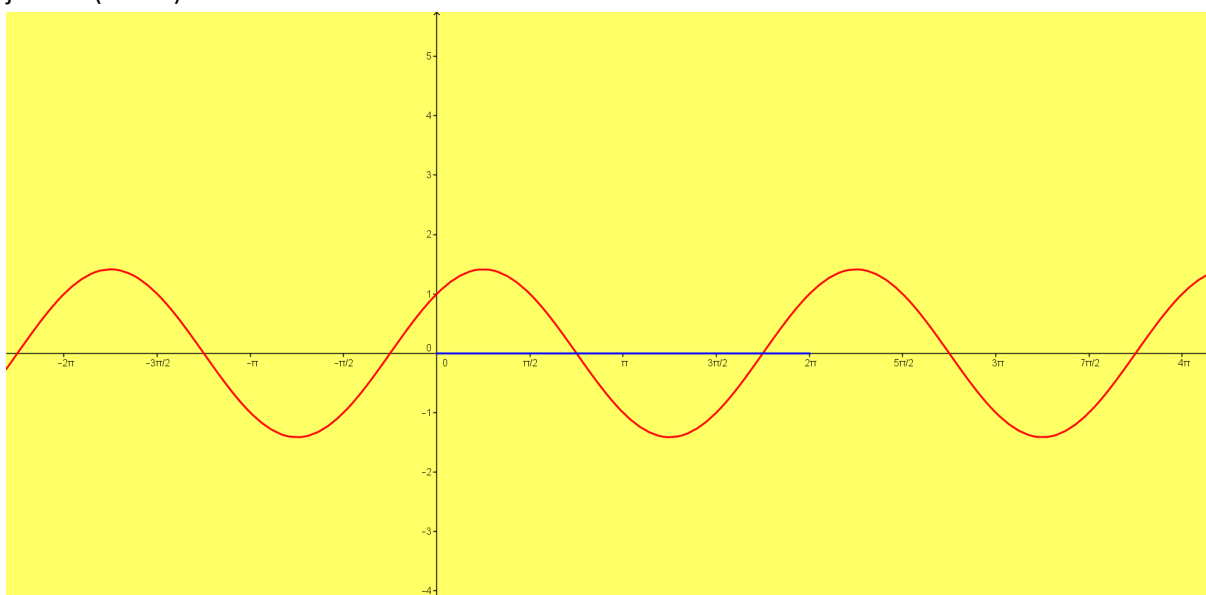
$$T = \pi$$

Pokazaliśmy, że okresem zasadniczym podanej w zadaniu funkcji jest π . Zobaczmy to jeszcze na wykresie:



7. Wyznaczyć okres zasadniczy funkcji $f(x) = \sin x + \cos x$.

Zarówno funkcja sinus jak i cosinus mają okres zasadniczy 2π , a zatem wspólnym okresem funkcji f jest 2π (NWW).



8. Wyznacz okres zasadniczy funkcji $f(x) = \sin 3x$.

Aby rozwiązać zadanie zapytajmy, dla jakich $T \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i dla każdego $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin 3(x + T) = \sin 3x$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sin(3x + 3T) = \sin 3x$$

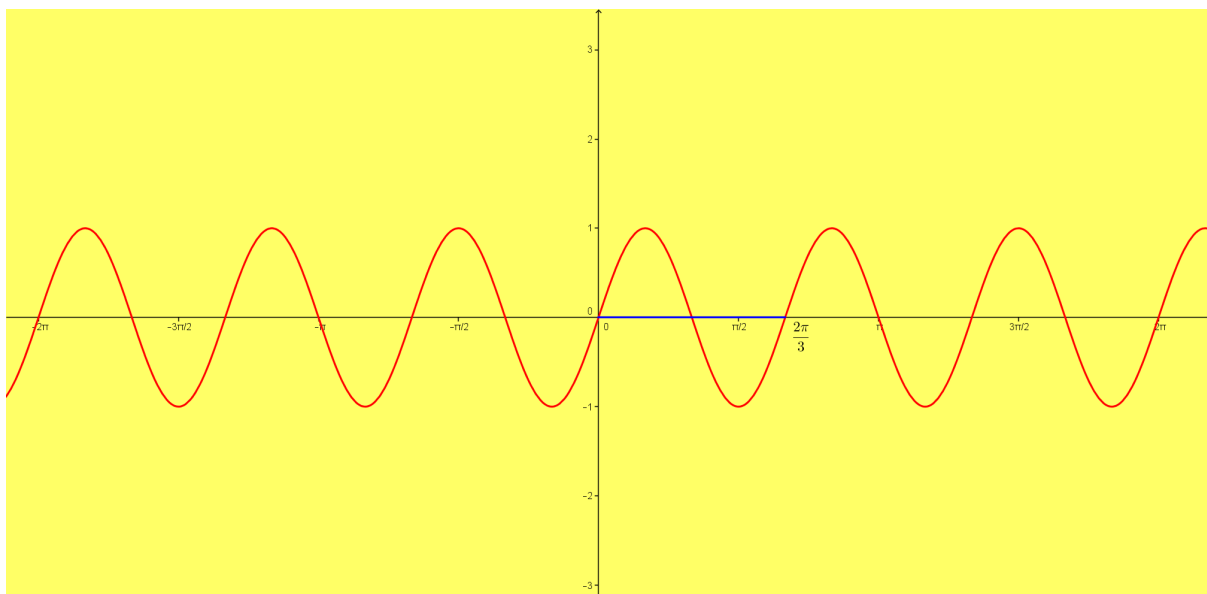
$$\Leftrightarrow$$

$$3T = 2\pi$$

$$\Leftrightarrow$$

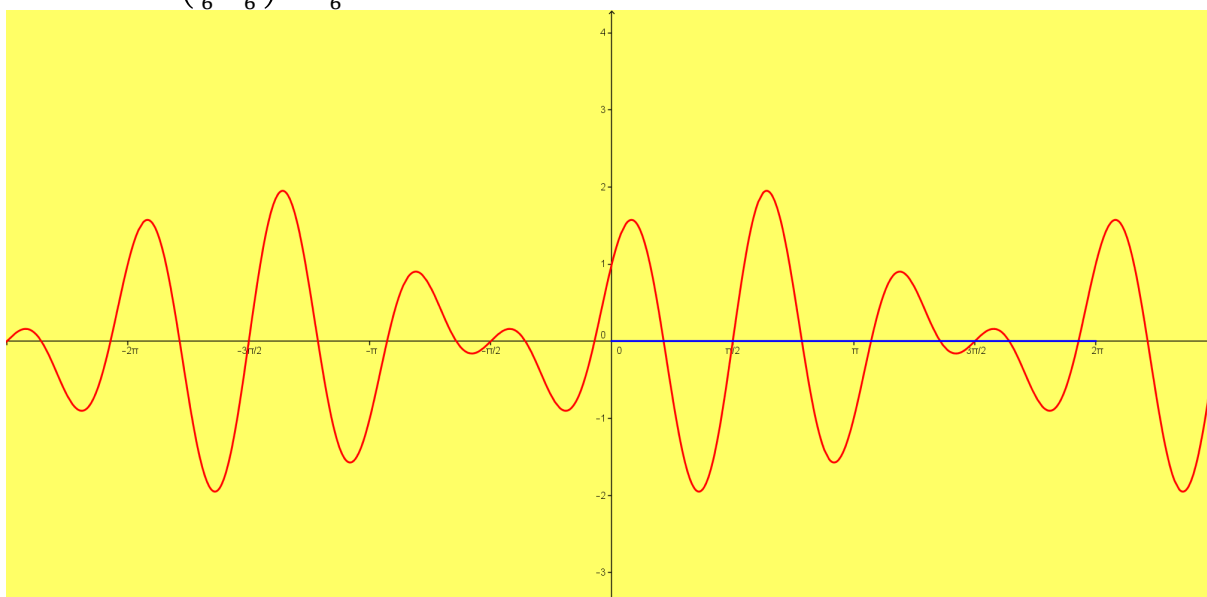
$$T = \frac{2}{3}\pi$$

Okresem zasadniczym danej funkcji jest $T = \frac{2}{3}\pi$.



9. Wyznaczyć okres zasadniczy funkcji $f(x) = \sin 4x + \cos 3x$.

Okresem zasadniczym funkcji $\sin 4x$ jest $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, zaś okresem zasadniczym funkcji $\cos 3x$ jest $\frac{2\pi}{3}$. Ponieważ $NWW\left(\frac{3\pi}{6}, \frac{4\pi}{6}\right) = \frac{12\pi}{6} = 2\pi$, więc okresem zasadniczym danej funkcji jest 2π .



10. Wyznaczyć okres zasadniczy funkcji $f(x) = \cos 5x + \tan 7x$.

Funkcja $\cos 5x$ ma okres zasadniczy $\frac{2\pi}{5}$. Aby wyznaczyć okres zasadniczy funkcji $\tan 7x$ zapytajmy, dla jakich $T \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i dla każdego $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{C}$.

$$\tan 7(x + T) = \tan 7x$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\tan(7x + 7T) = \tan 7x$$

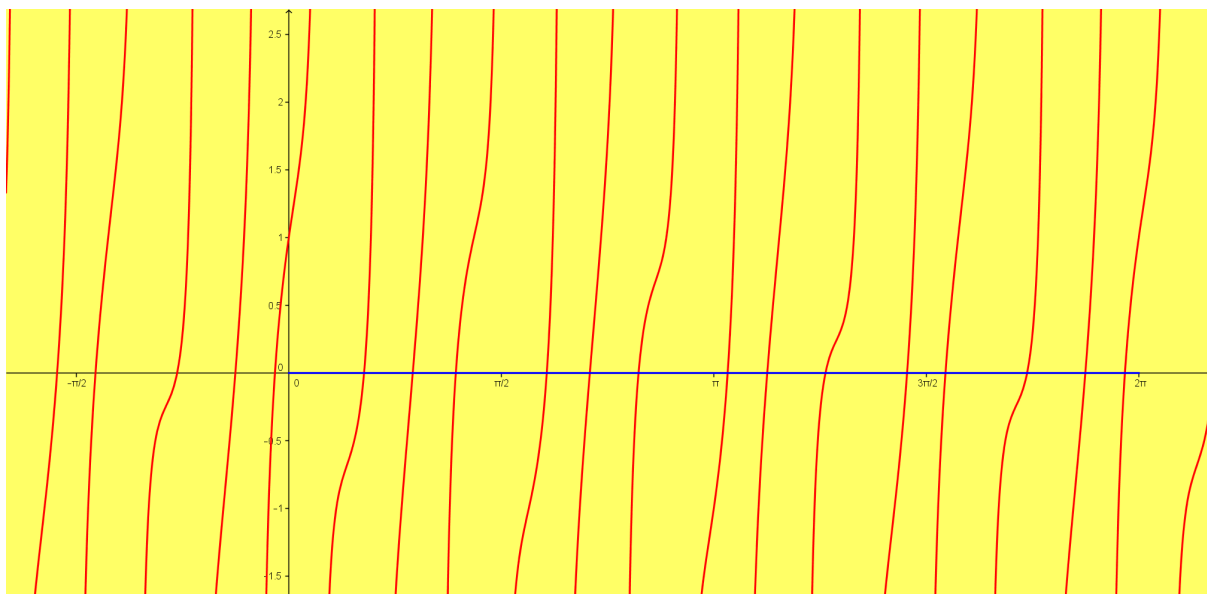
$$\Leftrightarrow$$

$$7T = \pi$$

$$\Leftrightarrow$$

$$T = \frac{\pi}{7}$$

Ponieważ $NWW\left(\frac{14\pi}{35}, \frac{5\pi}{35}\right) = \frac{70\pi}{35} = 2\pi$, więc okresem zasadniczym funkcji f jest 2π .



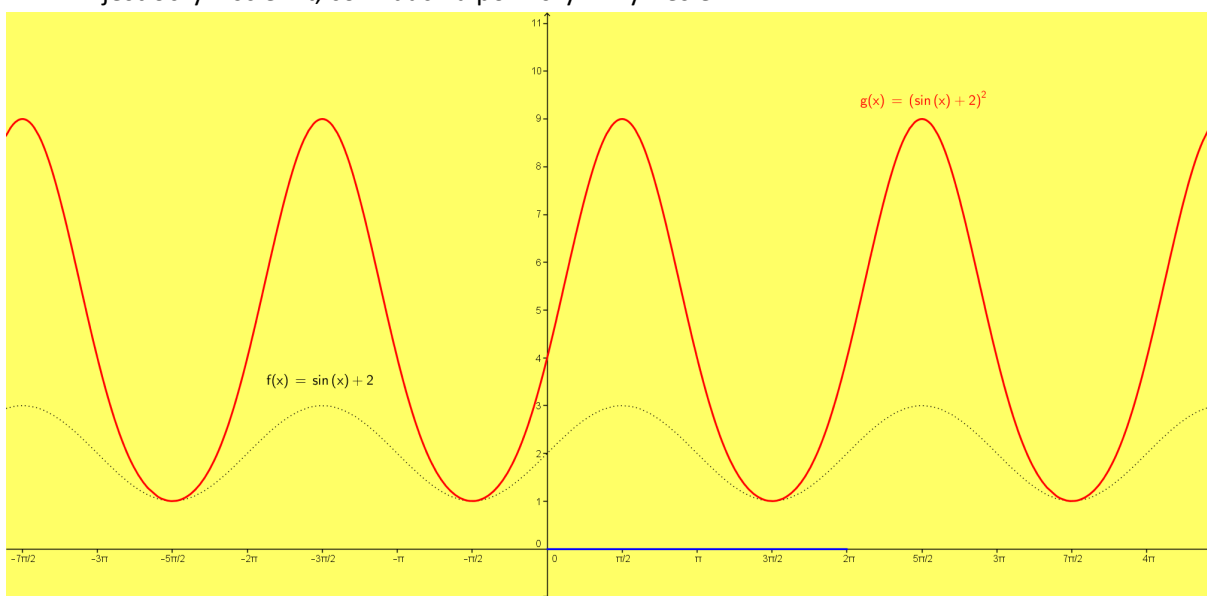
11. Wyznaczyć okres zasadniczy funkcji $h(x) = f(x) + g(x)$, gdzie $f(x) = \sin x$ i $g(x) = 1 - \sin x$.

Funkcje f i g są okresowe o okresie 2π , ale funkcja $f(x) = \sin x + 1 - \sin x = 1$ nie ma okresu zasadniczego (funkcja stała).

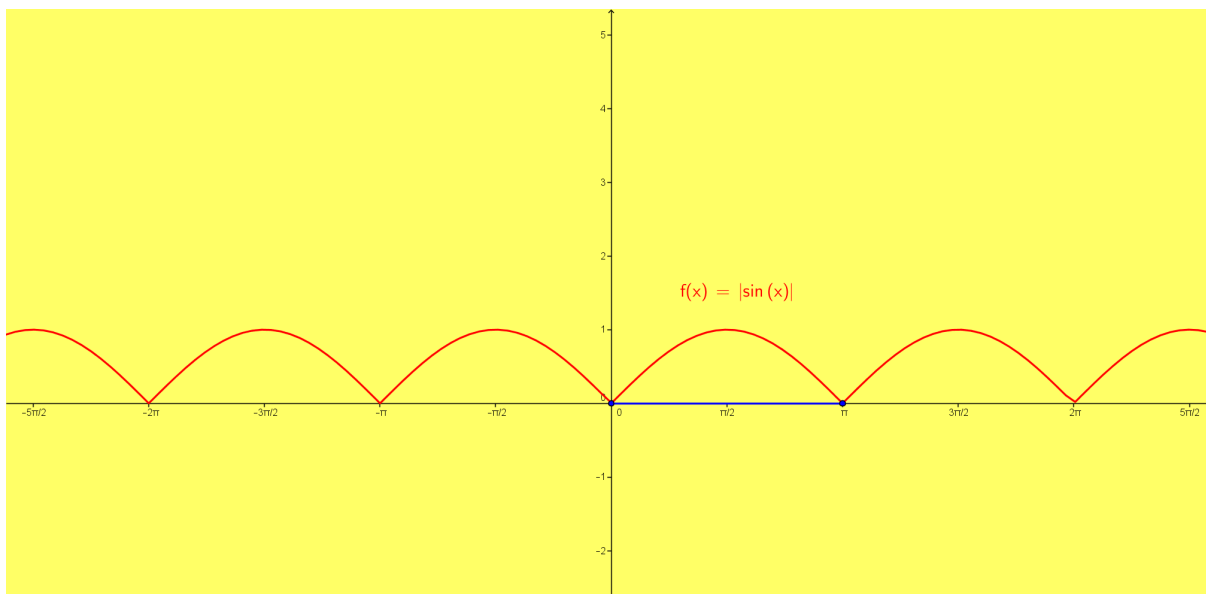
12. Wyznaczyć okres zasadniczy funkcji $f(x) = |\sin x + 2|$.

Funkcja $g(x) = \sin x + 2$ ma okres zasadniczy 2π , a więc i funkcja f ma taki okres zasadniczy ($|\sin x + 2| \geq 2$, więc $|\sin x + 2| = \sin x + 2$).

13. Wyznaczyć okres zasadniczy funkcji $f(x) = (\sin x + 2)^2$. Okresem zasadniczym tej funkcji jest oczywiście 2π , co widać na poniższym wykresie.



14. Okresem zasadniczym funkcji $f(x) = |\sin x|$ jest π , co widać na poniższym wykresie.



Przejdźmy teraz do pewnych uogólnień.

- Dla podstawowych funkcji trygonometrycznych o okresie zasadniczym $T = 2\pi$, mamy:

$f(x)$: $\sin x, \cos x$	okres zasadniczy
$f(kx)$	$\frac{T}{ k }$
$ f(x) $	$\frac{T}{2}$
$[f(x)]^n, n - \text{parzyste}$	$\frac{T}{2}$
$[f(x)]^n, n - \text{nieparzyste}$	T

- Dla podstawowych funkcji trygonometrycznych o okresie zasadniczym $T = \pi$, mamy:

$f(x)$: $\tan x$	okres zasadniczy
$f(kx)$	$\frac{T}{ k }$
$ f(x) $	T
$[f(x)]^n, n - \text{parzyste}$	T
$[f(x)]^n, n - \text{nieparzyste}$	T

Ponadto:

- Jeżeli $f(x)$ jest funkcją o okresie T , to funkcja $g(x) = af(kx + b)$ też jest okresowa i ma okres zasadniczy $\frac{T}{|k|}$.
- Jeżeli $f(x)$ i $g(x)$ są funkcjami okresowymi o okresie T , to funkcje $f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)}$ mogą nie mieć okresu zasadniczego lub mają okres zasadniczy mniejszy lub równy T .
- Jeżeli dwie funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są funkcjami okresowymi o okresach równych odpowiednio T_1 i T_2 i istnieje $NWW(T_1, T_2)$, to okresem każdej z funkcji $f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)}$ jest liczba $NWW(T_1, T_2)$.

Na zakończenie wykażmy jeszcze, że jeśli a jest liczbą rzeczywistą niewymierną, to funkcja $f(x) = \cos(ax) + \cos(x)$ nie jest okresowa.

Założmy, że podana funkcja przy danym założeniu jest okresowa, tzn. przypuśćmy, że dla każdego x rzeczywistego istnieje takie $T \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, że:

$$\cos[a(x + T)] + \cos(x + T) = \cos(ax) + \cos x.$$

Zauważmy, że:

$$\cos[a(x + T)] + \cos(x + T) = \cos(ax) + \cos x.$$

$$\Downarrow$$

$$\cos aT + \cos T = \cos 0 + \cos 0$$

$$\Downarrow$$

$$\cos aT + \cos T = 2$$

$$\Downarrow$$

$$\cos aT = 1 \text{ i } \cos T = 1$$

$$\Downarrow$$

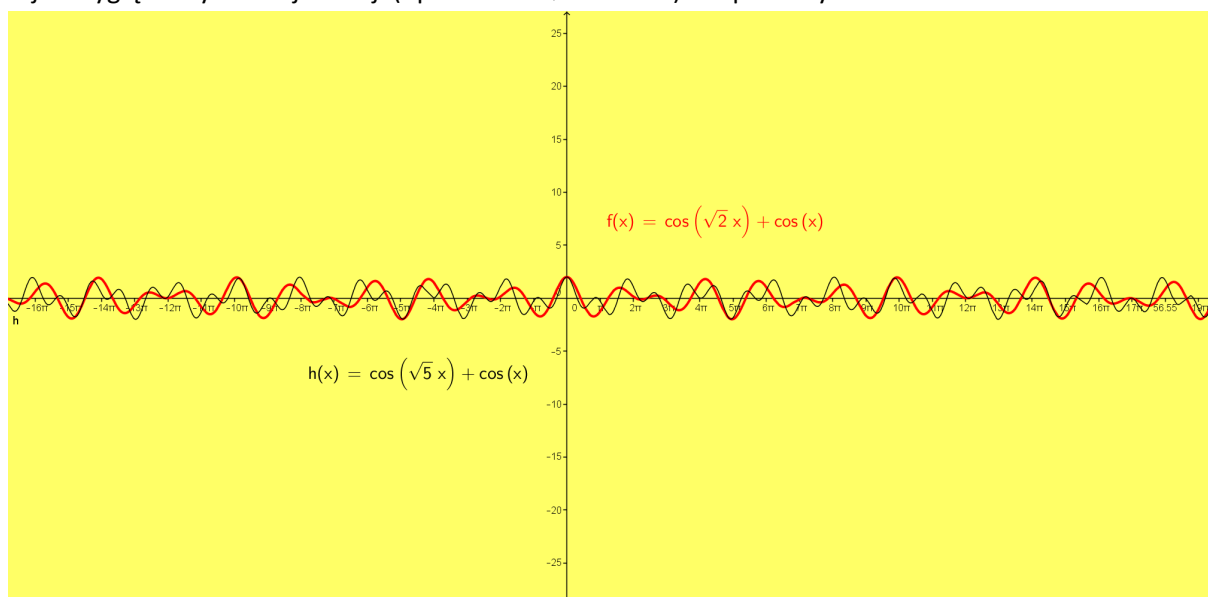
$$\begin{cases} aT = 2k\pi \\ T = 2l\pi \\ k, l \in \mathbb{C} \\ l \neq 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$a = \frac{k}{l}$$

Ostatnia równość jest niemożliwa, gdyż liczby niewymiernej nie można przedstawić w postaci ilorazu dwóch liczb całkowitych.

A jak wygląda wykres tej funkcji (np. dla $a = \sqrt{2}$ i $a = \sqrt{5}$)? Popatrzmy:



Zadanie domowe

Wyznacz okresy zasadnicze następujących funkcji:

1. $f(x) = 3 \sin x + \sin 2x$.
2. $f(x) = 3 \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$.