

## Scenariusz lekcji

1. **Przedmiot:** Matematyka
2. **Dział Programowy:** Liczby rzeczywiste
3. **Temat:** Równania liniowe z wartością bezwzględną
4. **Klasa:** I
5. **Zgodność z podstawą programową:** Uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:
  - 1) Wykorzystuje pojęcie wartości bezwzględnej i jej interpretację geometryczną, zaznacza na osi liczbowej zbiory opisane za pomocą równań typu:  $|x - a| = b$ ;
6. **Pomoce dydaktyczne:**
  - komputer nauczyciela z tablicą interaktywną lub rzutnikiem multimedialnym,
  - bezpłatne oprogramowanie GeoGebra wspomagające nauczanie matematyki <http://www.geogebra.org/cms/pl/download/>)
7. **Cele:** Uczeń:
  - Rozwiązuje stosując różne algorytmy równania typu  $|x - a| = b$ .
  - Zaznacza na osi liczbowej zbiory opisane równaniami typu  $|x - a| = b$ .
  - Potrafi ułożyć równanie z wartością bezwzględną którego rozwiązaniem są zadane liczby.
  - Umiejętnie korzysta z definicji wartości bezwzględnej w bardziej skomplikowanych przypadkach.
8. **Metody nauczania:** elementy wykładu, prezentacja, ćwiczenia
9. **Formy pracy:** praca grupowa, indywidualna
10. **Plan lekcji:**

Przypomnienie definicji wartości bezwzględnej:

Dla dowolnej liczby rzeczywistej  $a$  jej wartość bezwzględną definiujemy jako:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{dla } a \geq 0 \\ -a & \text{dla } a < 0 \end{cases}$$

Nauczyciel zapisuje na tablicy równanie:  $|x + 3| = 6$  .

**(I sposób rozumowania)**

Są dwie liczby których wartość bezwzględna wynosi 6 te liczby to 6 lub -6. Zatem wyrażenie stojące pod wartością bezwzględną ( $x+3$ ) powinno spełniać warunki:

$$x + 3 = -6 \vee x + 3 = 6$$

Rozwiązując oba równania otrzymujemy wynik:  $x = -9$  lub  $x = 3$ . Sprawdzamy rozwiązania podstawiając je do wyjściowego równania.

Zwracamy się do uczniów z prośbą o podanie (bez obliczeń) rozwiązania równań:

- a)  $|x - 5| = 8$  (pytania pomocnicze: Wartość bezwzględna jakich liczb daje 8? od jakiej liczby odjąć 5 aby otrzymać 8, od jakiej liczby odjąć 5 aby otrzymać -8, analogicznie w równaniu b) ).
- b)  $|x + 2| = 3$
- c)  $|x - 4| = -8$
- d)  $|x| = 8$

W przypadku gdy uczniowie podadzą rozwiązania w podpunkcie c) podstawiamy ich rozwiązania do równania (Wartość bezwzględna nie może być liczbą ujemną. Równanie nie ma rozwiązania.)

**(II sposób rozumowania-interpretacja geometryczna )** Rozwiązania równania typu:  $|x - 5| = 8$  można też uzyskać rozumując w taki sposób: Szukamy wszystkich liczb rzeczywistych których odległość od liczby 5 wynosi dokładnie 8. Otwieramy aplet Geogebra o nazwie: **rownania wartosc bezwzgledna.ggb** i ustawiając suwaki a i b w różne pozycje pokazujemy wspomnianą zależność na osi liczbowej.

Nauczyciel prosi jednego z uczniów o zaznaczenie rozwiązania równania  $|x + 1| = 6$  na osi liczbowej.

Wyobraźmy sobie sytuację odwrotną mamy podane rozwiązania pewnego równania z wartością bezwzględną np.  $x = 4$ ,  $x = 8$  i mamy ułożyć równanie, którego rozwiązaniem będą wspomniane liczby. Zauważmy że w równaniu potrzebna będzie liczba  $s$ , która leży w tej

samej odległości od 4 i od 8, łatwo ją obliczymy  $s = \frac{4 + 8}{2} = 6$ . Odległość na osi naszych liczb

od 6 wynosi 2. Zatem nasze równanie to:  $|x - 6| = 2$ .

Nauczyciel zapisuje rozwiązania tablicy i zleca uczniom ułożenie odpowiednich równań:

- a)  $x = 4$ ,  $x = 8$
- b)  $x = 2$ ,  $x = -6$
- c)  $x = 8$
- d)  $x = -4$ ,  $x = 0$

Prosimy wybranego ucznia o zapisanie na tablicy rozwiązań.

### (III sposób rozumowania)

Przy rozwiązywaniu równania  $|x-5|=8$  możemy też bezpośrednio skorzystać z definicji i zapisać:

$$|x-5| = \begin{cases} x-5 & \text{dla } x-5 \geq 0 \\ -(x-5) & \text{dla } x-5 < 0 \end{cases}$$

Zatem nasze równanie przyjmie postać:

$$1) \quad x-5=8 \quad \text{dla } x-5 \geq 0 \quad \text{lub} \quad -(x-5)=8 \quad \text{dla } x-5 < 0$$

Rozwiązując powyższe równania mamy:  $x=13$  dla  $x \geq 5$  oraz  $x=3$  dla  $x < 5$ . Zwracamy uwagę, że poszczególne rozwiązania muszą należeć do odpowiednich przedziałów.

### (IV sposób rozumowania)

Możemy również równania typu  $|x \pm a| = b$  gdzie  $b \geq 0$  rozwiązywać schematycznie rozpisując:

$$x \pm a = b \vee x \pm a = -b$$

Przykład  $|x+2|=8$

$$x+2=8 \vee x+2=-8$$

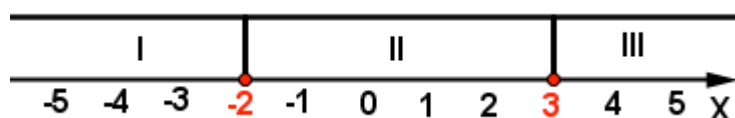
Co po rozwiązaniu daje odpowiedź: 6, -10.

Spróbujmy rozwiązać trudniejsze równanie:

$$|x+2| + |x-3| = 8$$

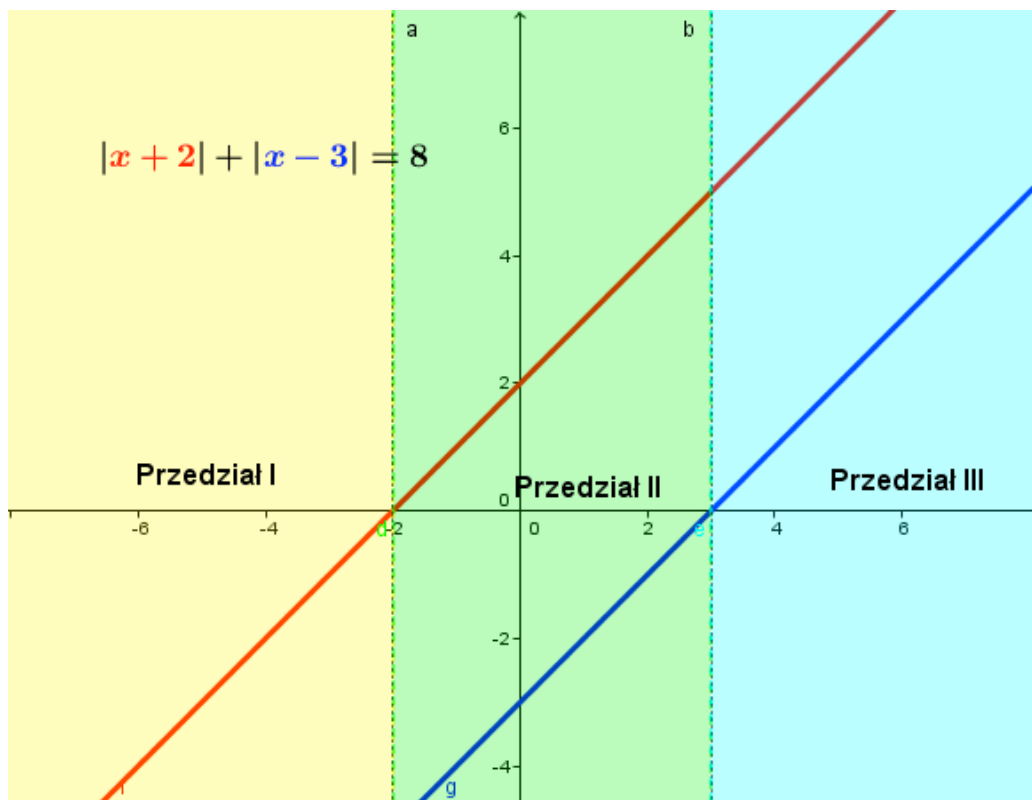
W równaniu występują dwie wartości bezwzględne. Chcąc pozbyć się znaków wartości bezwzględnej musimy mieć pewność odnośnie znaków funkcji:  $x+2$  oraz  $x-3$ . Zgodnie z definicją wartości bezwzględnej, jeśli wyrażenie pod wartością bezwzględną jest większe lub równe zero, możemy opuścić wartość bezwzględną, jeśli wyrażenie jest ujemne, opuszczamy wartość bezwzględną zapisując wartość całego wyrażenia ze znakiem minus.

Nasze dwie funkcje:  $x+2$ ,  $x-3$  zmieniają znak w punktach odpowiednio: -2 oraz 3. Zaznaczamy te liczby na osi liczbowej:



Mamy trzy przedziały w których będziemy szukali rozwiązania:  $(-\infty, -2)$ ,  $(-2, 3)$ ,  $(3, +\infty)$

Spójrzmy na rysunek na którym zaznaczono przedziały i narysowano funkcje liniowe:  $x+2$ ,  $x-3$ :



W I przedziale  $x \in (-\infty, -2)$  nasze równanie przyjmie postać  $-x - 2 - x + 3 = 8$  (nauczyciel w każdym przypadku uzasadnia zmianę znaków posługując się rysunkiem), którego rozwiązaniem jest  $x = -\frac{7}{2} \in (-\infty, -2)$ .

W II przedziale  $x \in (-2, 3)$  równanie ma postać , które jest sprzeczne.

W III przedziale  $x \in (3, +\infty)$  równanie ma postać  $x + 2 + x - 3 = 8$ , którego rozwiązaniem jest  $x = \frac{9}{2} \in (3, +\infty)$ . Zatem rozwiązaniami są liczby: -3,5 oraz 4,5.

Praca w domu:

Rozwiąż:

a)  $|2x - 3| + |x - 7| = 8$  (ODP:  $\frac{2}{3}, 4$ )

b)  $9 - |x - 3| = |3x + 2| + 1$  (ODP:  $-\frac{7}{4}, \frac{3}{2}$ )