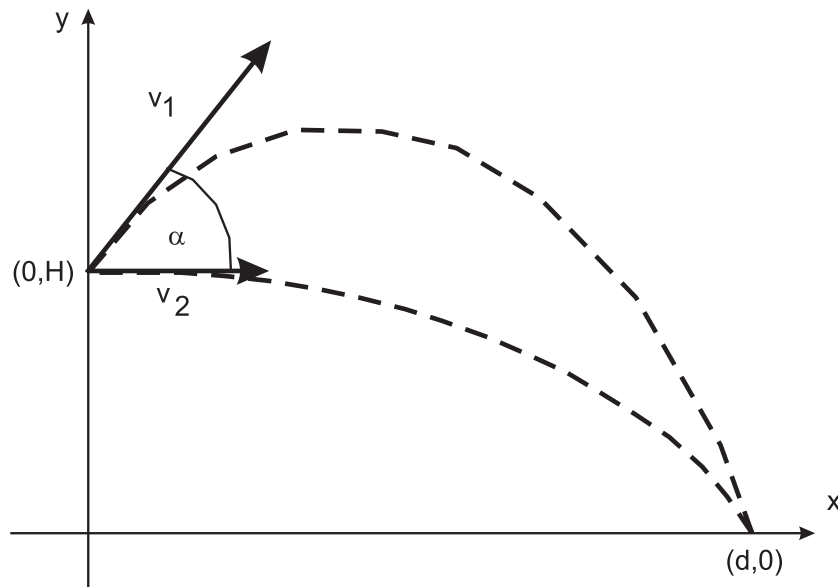


**Wprowadzenie:** Krzyś bawi się w ogrodzie strzelając z procy do celu. Siedząc na drzewie strzelał do tarczy opartej o pobliskie drzewo. Strzelał wielokrotnie wypuszczając kamienie pod różnymi kątami, a mimo to wielokrotnie trafił do celu. W pewnej chwili wystrzelił dwa kamienie jeden po drugim (pod różnymi kątami) i ze zdumieniem zauważył, że trafiły w cel niemal jednocześnie. Szybko zszedł z drzewa i pobiegł do rodziców mając w głowie dwa pytania: czy można tak wystrzelić z procy, by oba kamienie trafiły w cel jednocześnie, a może da się zestrzelić pierwszy kamień za pomocą drugiego?

**Założenia:**

- Zaniedbujemy siłę oporu powietrza, ruch rozpatrujemy w polu grawitacyjnym ziemi.
- Krzyś siedzi nad ziemią na wysokości  $H > 0$ , każdy strzał z procy oddaje dokładnie z tego samego punktu.
- Pierwszy strzał Krzyś oddaje, w chwili  $t = 0$ , celując procą pod kątem  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$  względem poziomu z prędkością początkową  $\vec{v}_1$ , natomiast drugi strzał oddaje poziomo po czasie  $t_0 > 0$  z prędkością początkową  $\vec{v}_2$ , w obu przypadkach masa kamieni jest jednakowa i równa 1, a przyspieszenie początkowe kamieni jest równe 0.
- Odległość Krzysia od tarczy wynosi  $d > 0$ .
- Stała grawitacji wynosi  $G$ .

**Etap 1.** (Modelowanie matematyczne doświadczenia.) Zakładamy, że poziom gruntu pokrywa się z osią  $OX$  kartezjańskiego układu współrzędnych. Krzyś w omawianym układzie współrzędnych oddaje strzały z procy z punktu o współrzędnych  $(0, H)$ , a tarcza znajduje się w punkcie o współrzędnych  $(d, 0)$ . Sytuację obrazuje rysunek: Wobec przyjętych założeń początkowe wektory prędkości możemy,



Rysunek 1: Kamienie

kartezjańskim układzie współrzędnych, zapisać w postaci:

$$\vec{v}_1 = v_1 \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}; \quad \vec{v}_2 = v_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

gdzie:  $v_1$  i  $v_2$  oznaczają długości wektorów początkowych. Wprowadźmy oznaczenia: niech  $P_1(t)$  dla  $t \geq 0$  oznacza trajektorię pierwszego kamienia, a  $P_2(t)$  dla  $t \geq t_0$  oznacza trajektorię drugiego kamienia. Równania trajektorii obu kamieni w polu grawitacyjnym można przedstawić w postaci parametrycznej (wzgl. czasu  $t$ ) następująco:

$$P_1(t) = \begin{cases} x_1(t) = v_1 t \cos \alpha \\ y_1(t) = v_1 t \sin \alpha - G \frac{t^2}{2} + H \end{cases} ; \quad t \geq 0 \quad (2)$$

$$P_2(t) = \begin{cases} x_2(t) = v_2(t - t_0) \\ y_2(t) = -\frac{G}{2}(t - t_0)^2 + H \end{cases} ; \quad t \geq t_0 > 0. \quad (3)$$

**Etap 2.** (Rozwiązanie problemu.) W pierwszym kroku wyznaczamy jakie warunki muszą być spełnione, aby kamienie trafiły w cel. Niech  $t'$  oznacza czas, po którym zderzą się kamienie, wówczas  $P_1(t') = P_2(t') = (d, 0)$ . Na podstawie wzoru (3) mamy

$$\begin{cases} v_2(t' - t_0) = d \\ -\frac{G}{2}(t' - t_0)^2 + H = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} (t' - t_0) = \frac{d}{v_2} \\ (t' - t_0) = \sqrt{\frac{2H}{G}} \end{cases} \implies v_2 = \frac{\sqrt{G}d}{\sqrt{2H}} \quad (4)$$

Z drugiej strony na podstawie wzorów (2) i (4) mamy  $t' = \sqrt{\frac{2H}{G}} + t_0$

$$\begin{cases} v_1 t' \cos \alpha = d \\ -\frac{G}{2}(t')^2 + v_1 t' \sin \alpha + H = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} v_1 \left( \sqrt{\frac{2H}{G}} + t_0 \right) \cos \alpha = d \\ -\frac{G}{2} \left( \sqrt{\frac{2H}{G}} + t_0 \right)^2 + v_1 \left( \sqrt{\frac{2H}{G}} + t_0 \right) \sin \alpha + H = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Mnożąc pierwsze równanie przez  $\sin \alpha$ , drugie równanie przez  $\cos \alpha$ , a następnie odejmując stronami od drugiego pierwsze równanie, otrzymujemy

$$t_0 = \sqrt{\frac{2}{G}(d \cdot \tan \alpha + H)} - \sqrt{\frac{2H}{G}} \quad (6)$$

A w konsekwencji

$$t' = \sqrt{\frac{2}{G}(d \cdot \tan \alpha + H)}, \quad (7)$$

ponadto prędkość początkowa pierwszego strzału, na mocy pierwszego równania wzoru (5) wynosi:

$$v_1 = \frac{d}{\sqrt{\frac{2}{G}(d \cdot \tan \alpha + H) \cos \alpha}} \quad (8)$$

Zapiszemy ostatecznie równania trajektorii obu kamieni. I tak dla pierwszego kamienia równanie trajektorii, na mocy wzorów (2), (7) i (8) ma postać

$$P_1(t) = \begin{cases} x_1(t) = \frac{d \cdot t}{\sqrt{\frac{2}{G}(d \cdot \tan \alpha + H)}} \\ y_1(t) = \frac{d \cdot t \cdot \tan \alpha}{\sqrt{\frac{2}{G}(d \cdot \tan \alpha + H)}} - G \frac{t^2}{2} + H \end{cases} ; \quad 0 \leq t \leq \sqrt{\frac{2}{G}(d \cdot \tan \alpha + H)} \quad (9)$$

Podobnie równanie trajektorii drugiego kamienia ma na mocy wzorów (4), (6), (7), postać

$$P_2(t) = \begin{cases} x_2(t) = \frac{\sqrt{G}dt}{\sqrt{2H}} - \frac{d\sqrt{2(dtg\alpha+H)}}{\sqrt{2H}} + d \\ y_2(t) = -\frac{G}{2} \left( t - \sqrt{\frac{2}{G}(d \cdot tg\alpha + H)} + \sqrt{\frac{2H}{G}} \right)^2 + H \end{cases} ; \quad t' \geq t \geq t_0. \quad (10)$$

Obecnie udzielimy odpowiedzi na drugie z pytań Krzysia. Przyjmijmy, że Krzyś wystrzelił pierwszy kamień z prędkością początkową  $v_1$  pod kątem  $\alpha$  względem poziomu. Jaka powinna być prędkość  $v_2$  drugiego kamienia i jakie powinno być opóźnienie  $t_0$ , by drugi kamień zestrzelił pierwszy? Zakładamy, że drugi strzał Krzyś oddał równoległe do poziomu. Wyznaczamy punkt przecięcia trajektorii obu kamieni, zatem musi istnieć  $t'$  dla, którego  $P_1(t') = P_2(t')$ , ponadto punkt przecięcia trajektorii musi nastąpić dla  $y_1, y_2 \geq 0$ . Zatem porównując stronami wzory (2) i (3) otrzymujemy dla pierwszej współrzędnej relację:

$$x_1(t') = x_2(t') \implies t'(v_1 \cos \alpha - v_2) = -v_2 t_0 \implies t' = \frac{v_2 t_0}{v_2 - v_1 \cos \alpha} \quad (11)$$

Ponieważ  $t' \geq t_0$ , to  $\frac{v_2}{v_2 - v_1 \cos \alpha} \geq 1$ , a stąd

$$v_2 > v_1 \cos \alpha \quad (12)$$

Z drugiej strony mamy relację:

$$y_1(t') = y_2(t') \implies t' = \frac{\frac{G}{2} t_0^2}{G t_0 - v_1 \sin \alpha} > 0 \text{ i } t' \geq t_0. \quad (13)$$

Konsekwencją wzoru (13) jest następująca nierówność:

$$\frac{v_1 \sin \alpha}{G} < t_0 \leq \frac{2v_1 \sin \alpha}{G}. \quad (14)$$

Porównując stronami wzory (11) i (13) otrzymujemy

$$v_2(Gt_0 - v_1 \sin \alpha) = \frac{Gt_0}{2}(v_2 - v_1 \cos \alpha) \implies t_0 = \frac{2v_1 v_2 \sin \alpha}{G(v_2 + v_1 \cos \alpha)}. \quad (15)$$

Zauważmy, że na mocy warunku (12)  $t_0$  dane wzorem (15) spełnia nierówność (14) (sprawdzić bezpośrednim rachunkiem). Wstawiając  $t_0$  dane wzorem (15) do równania (11) otrzymujemy czas zderzenia kamieni.

$$t' = \frac{2v_1 v_2^2 \sin \alpha}{G(v_2^2 - v_1^2 \cos^2 \alpha)} \quad (16)$$

W dalszych rozważaniach musimy dla czasu  $t'$  zagwarantować spełnienie następującego warunku  $y_1(t') = y_2(t') \geq 0$ , co oznacza zderzenie kamieni w powietrzu, względnie na powierzchni gruntu. W tym celu na mocy wzoru (3) otrzymujemy warunek

$$-\frac{G}{2}(t' - t_0)^2 + H \geq 0 \implies t' - t_0 \leq \sqrt{\frac{2H}{G}}. \quad (17)$$

Następnie korzystając z równań (15) i (16) dostajemy nierówność:

$$t' - t_0 = \frac{v_1^2 v_2 \sin(2\alpha)}{G(v_2^2 - v_1^2 \cos^2(\alpha))} \leq \sqrt{\frac{2H}{G}} \quad (18)$$

Mnożąc stronami nierówność (18) przez  $G(v_2^2 - v_1^2 \cos^2(\alpha))$  (mianownik jest większy od 0 na mocy nierówności (12)) otrzymujemy nierówność kwadratową w funkcji  $v_2$  o dodatnim współczynniku przy najwyższej potęgze  $v_2$  w postaci:

$$\sqrt{2GH}v_2^2 - v_2v_1^2\sin(2\alpha) - \sqrt{2GH}v_1^2\cos^2(\alpha) \geq 0 \quad (19)$$

Wyznamy miejsca zerowe lewej strony nierówności. I tak

$$\Delta = 4v_1^2\sin(2\alpha)(v_1^2\sin^2(\alpha) + 2GH) > 0 \quad (20)$$

W konsekwencji pierwiastki równania (19) przyjmują postać:

$$\begin{aligned} (v_2)_1 &= \frac{v_1\cos(\alpha)}{\sqrt{2GH}} \left( v_1\sin(\alpha) - \sqrt{v_1^2\sin^2(\alpha) + 2GH} \right) \\ (v_2)_2 &= \frac{v_1\cos(\alpha)}{\sqrt{2GH}} \left( v_1\sin(\alpha) + \sqrt{v_1^2\sin^2(\alpha) + 2GH} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

Pierwszy z pierwiastków  $(v_2)_1 < 0$ , a drugi  $(v_2)_2 > 0$ . Wobec tego prędkość  $v_2$  musi spełniać warunek

$$v_2 \geq \frac{v_1\cos(\alpha)}{\sqrt{2GH}} \left( v_1\sin(\alpha) + \sqrt{v_1^2\sin^2(\alpha) + 2GH} \right) \quad (22)$$

W przypadku równości kamienie zderzą się na poziomie gruntu.

**Etap 3.** (Analiza problemu.) Na początek zauważmy, że warunek (22) jest mocniejszy niż warunek dany wzorem (12), rzeczywiście

$$\begin{aligned} v_2 &\geq \frac{v_1\cos(\alpha)}{\sqrt{2GH}} \left( v_1\sin(\alpha) + \sqrt{v_1^2\sin^2(\alpha) + 2GH} \right) > \\ &\frac{v_1\cos(\alpha)}{\sqrt{2GH}} \sqrt{v_1^2\sin^2(\alpha) + 2GH} > v_1\cos(\alpha) \end{aligned} \quad (23)$$

Rozważmy następujące przypadki dla prędkości  $v_2$  drugiego kamienia:

- $v_2 \geq \frac{v_1\cos(\alpha)}{\sqrt{2GH}} \left( v_1\sin(\alpha) + \sqrt{v_1^2\sin^2(\alpha) + 2GH} \right)$ ,
- $\frac{v_1\cos(\alpha)}{\sqrt{2GH}} \left( v_1\sin(\alpha) + \sqrt{v_1^2\sin^2(\alpha) + 2GH} \right) > v_2 > v_1\cos(\alpha)$ ,
- $v_2 < v_1\cos(\alpha)$

Rozpatrzmy następujące przykłady ilustrujące powyższe trzy przypadki:

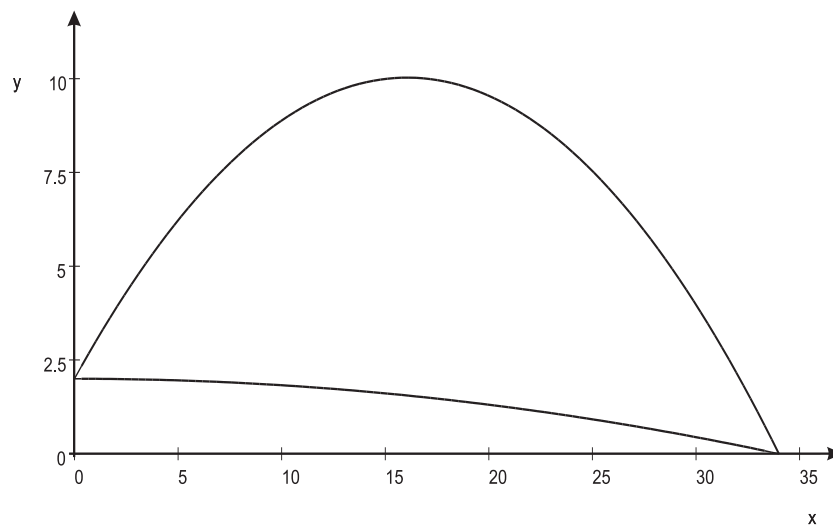
**Przykład 0.1.** Zakładamy, że Krzys wystrzelił pierwszy kamień w chwili  $t = 0$  z prędkością początkową  $v_1$  pod kątem  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ , a następnie w chwili  $t_0 > 0$  wystrzelił poziomo drugi kamień z prędkością  $v_2$ . Wiedząc, że Krzys strzela z procy na wysokości  $H = 2m$ , a cel znajduje się w odległości  $34m$  od drzewa (na którym siedzi Krzys) oraz  $G = 9\frac{m}{s^2}$ , wyznaczyć parametry obu strzałów, tak by kamienie trafiły w cel jednocześnie.

**Rozwiązanie:** Na podstawie wzorów (4) i (8) otrzymujemy wartości prędkości początkowych obu kamieni  $v_1 = 17\frac{m}{s}$  oraz  $v_2 = 54\frac{m}{s}$ . Opóźnienie drugiego strzału  $t_0 = 2\sqrt{2} - \frac{2}{3}$  wyznaczamy na podstawie wzoru (6), a czas zderzenia obu kamieni, wyznaczony na podstawie wzoru (7), wynosi  $t' \approx 2,162$ . Równania trajektorii obu kamieni możemy zapisać w postaci:

$$\begin{cases} x_1(t) = 17\frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y_1(t) = -\frac{9}{2}t^2 + 17\frac{\sqrt{2}}{2}t + 2 \end{cases} \quad t \geq 0.$$

$$\begin{cases} x_2(t) = 51(t - 2\sqrt{2} + \frac{2}{3}) \\ y_2(t) = -\frac{9}{2}(t - 2\sqrt{2} + \frac{2}{3})^2 + 2 \end{cases} \quad t \geq 2\sqrt{2} - \frac{2}{3}.$$

Wykresy obu trajektorii przedstawia poniższy rysunek:



Rysunek 2: Kamienie

Wyznaczyć równania trajektorii obu kamieni w postaci uwikłanej, tzn.  $y_1 = f(x_1)$ ,  $y_2 = g(x_2)$ . Zauważmy, że w tym przypadku nierówność (22) staje się równaniem.

□

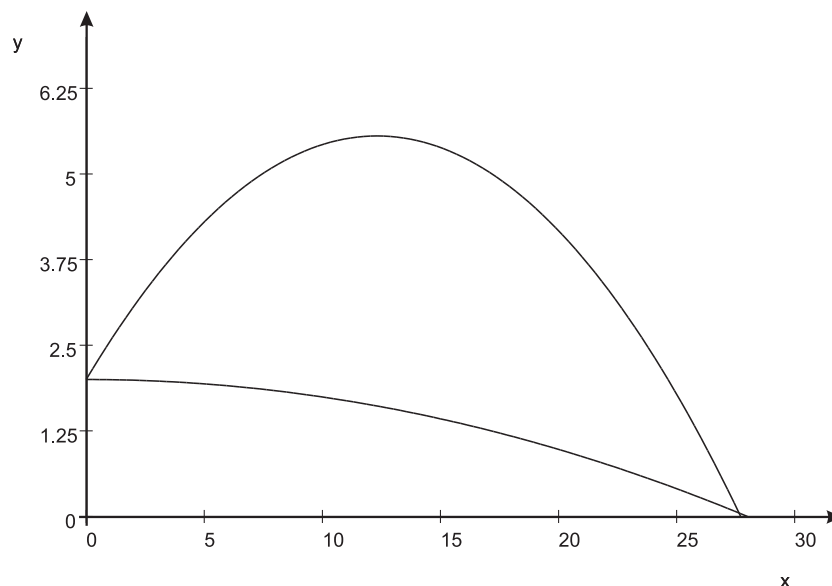
Rozważmy kolejny przykład

**Przykład 0.2.** Krzys strzela z procy pierwszym kamieniem z prędkością początkową  $v_1 = 16\frac{m}{s}$  pod kątem  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ . Z jaką prędkością początkową  $v_2$  musi wystrzelić poziomo Krzys, aby zestrzelić pierwszy kamień nad ziemią?

**Rozwiązanie:** Na mocy nierówności (22) otrzymujemy  $v_2 \geq 24\sqrt{3} \approx 41,57$ . Przyjmijmy zatem prędkość początkową drugiego kamienia  $v_2 = 42\frac{m}{s}$ , wówczas  $t_0 \approx 1,34$ . Równania trajektorii obu kamieni mają postać:

$$\begin{cases} x_1(t) = 8\sqrt{3}t \\ y_1(t) = -\frac{9}{2}t^2 + 8t + 2 \end{cases} \quad t \geq 0.$$

$$\begin{cases} x_2(t) = 42(t - 1,34) \\ y_2(t) = -\frac{9}{2}(t - 1,34)^2 + 2 \end{cases} \quad t \geq 1,34.$$



Rysunek 3: Kamienie

Wykresy obu trajektorii przedstawia powyższy rysunek:

Czas zderzenia kamieni wynosi  $t' \approx 1,99s$ . Wyznaczyć równania trajektorii obu kamieni w postaci uwikłanej, tzn.  $y_1 = f(x_1)$ ,  $y_2 = g(x_2)$ .

□

W kolejnym przykładzie rozpatrzmy przypadek, gdy Krzys wystrzelił drugi kamień z prędkością początkową nie spełniającą nierówności (22), ale spełniającą warunek (12).

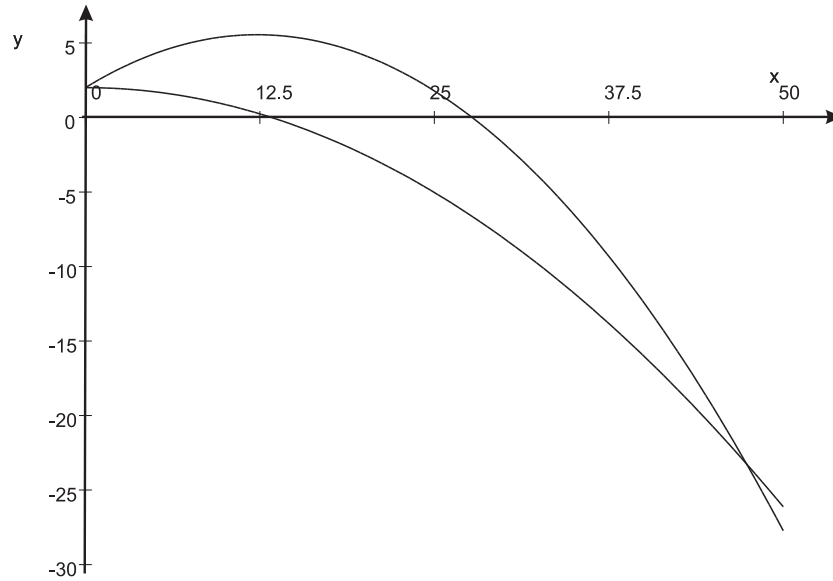
**Przykład 0.3.** *Przyjmujemy, że Krzys wystrzelił pierwszy kamień zgodnie z założeniami poprzedniego przykładu, ale drugi kamień wystrzelił z prędkością początkową  $v_2 = 20 \frac{m}{s}$ .*

**Rozwiązanie:** Zauważmy, że prędkość początkowa drugiego kamienia spełnia warunek (12), rzeczywiście  $v_2 > 16\frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3} \approx 13,86$ . Czas opóźnienia drugiego kamienia wynosi  $t_0 \approx 1,05$ . Równania trajektorii mają postać:

$$\begin{cases} x_1(t) = 8\sqrt{3}t \\ y_1(t) = -\frac{9}{2}t^2 + 8t + 2 \end{cases} \quad t \geq 0.$$

$$\begin{cases} x_2(t) = 20(t - 1,05) \\ y_2(t) = -\frac{9}{2}(t - 1,05)^2 + 2 \end{cases} \quad t \geq 1,34.$$

Wykresy obu trajektorii przedstawia poniższy rysunek:



Rysunek 4: Kamienie

Jak można zauważyć na powyższym rysunku trajektorie obu kamieni przecinają się dla czasu  $t' \approx 21s$ , jednakże punkt przecięcia trajektorii znajduje się poniżej poziomu gruntu. Wobec tego zderzenie kamieni nie jest możliwe. Wyznaczyć współrzędne “teoretycznego” punktu zderzenia kamieni.

□

W ostatnim przykładzie rozpatrzmy sytuację, gdy prędkość drugiego kamienia  $v_2$  nie spełnia warunku (12).

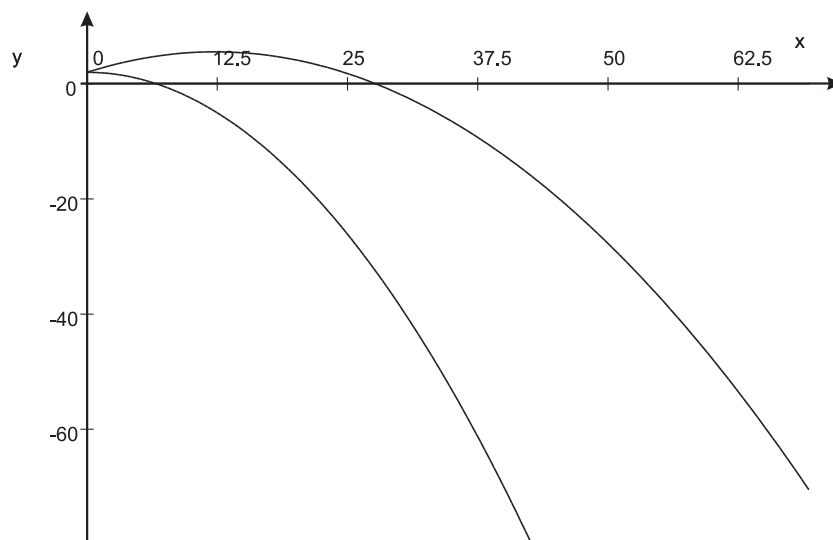
**Przykład 0.4.** Korzystając z założeń przykładu 0.2 rozważmy przypadek, gdy Krzys strzela drugim kamieniem z prędkością  $v_2 = 10 \frac{m}{s}$  z opóźnieniem  $t_0 = 0,75s$ .

**Rozwiązanie:** Prędkość początkowa drugiego kamienia nie spełnia warunku (12), gdyż  $v_2 < 8\sqrt{3} \frac{m}{s}$ . W tym przypadku równania trajektorii kamieni mają postać

$$\begin{cases} x_1(t) = 8\sqrt{3}t \\ y_1(t) = -\frac{9}{2}t^2 + 8t + 2 \end{cases} \quad t \geq 0.$$

$$\begin{cases} x_2(t) = 10(t - 0,75) \\ y_2(t) = -\frac{9}{2}(t - 0,75)^2 + 2 \end{cases} \quad t \geq 1,34.$$

Wykresy obu trajektorii przedstawia poniższy rysunek:



Rysunek 5: Kamienie

W tym przypadku trajektorie kamieni nie przecinają się.

□

**Etap 4.** (Rozbudowa modelu) Przeprowadzić dyskusję i odpowiedzieć na następujące pytania:

- Z jaką energią działają kamienie z przykładu 0.1 na cel zakładając, że cel w każdym przypadku jest ustawiony prostopadle do wektora prędkości każdego z kamieni.
- Czy można wystrzelić trzy kamienie, aby trafiły w cel jednocześnie?
- Czy można wystrzelić dwa kamienie (pod różnymi kątami), aby trafiły w cel jednocześnie przy założeniu, że prędkość początkowa (w sensie długości wektorów) obu kamieni jest jednakowa. Jakie mogą być zastosowania praktyczne takiego rozwiązania?