

1. Przedmiot: **Matematyka**
2. Dział programowy: **10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka**
3. Temat: **Tabelki dla par zdarzeń losowych**
4. Klasa: **Klasa III**
5. Zgodność z podstawą programową: **Uczeń: spełnia wymagania określone dla poziomu podstawowego, a ponadto:**
 - 1) **oblicza prawdopodobieństwo warunkowe;**
 - 2) **korzysta z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym.**
6. Pomoce (środki) dydaktyczne
 - **stanowiska komputerowe (lub komputer nauczyciela z tablicą interaktywną lub rzutnikiem multimedialnym),**
 - **bezpłatne oprogramowanie GeoGebra wspomagające nauczanie matematyki (<http://www.geogebra.org/cms/pl/download/>)**
7. Cele: Uczeń:
 - Zapisuje zbiór zdarzeń elementarnych dla doświadczenia losowego polegającego na rzucie dwiema rozróżnialnymi, sześciennymi kostkami,
 - Rozważ różne zdarzenia losowe dla tego doświadczenia,
 - Tworzy tabelkę dla pary zdarzeń losowych,
 - Konstruuje drzewko stochastyczne dla danego doświadczenia losowego.
 - posługuje się programem GeoGebra (lub arkuszem kalkulacyjnym).
8. Metody nauczania: **Praca z komputerem, elementy wykładu, prezentacja, ćwiczenia**
9. Formy pracy: **Praca indywidualna i w parach**

Plan lekcji

Zapiszmy zbiór zdarzeń elementarnych dla zdarzenia losowego polegającego na rzucie dwiema rozróżnialnymi, sześciennymi kostkami do gry:

	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Rozważmy teraz następujące zdarzenia losowe:

A – Suma wyników na obu kostkach jest liczbą podzielną przez 3.

A' – Suma wyników na obu kostkach nie jest liczbą podzielną przez 3.

B – Suma oczek na obu kostkach wynosi 8 lub więcej.

B' – Suma oczek na obu kostkach wynosi mniej niż 8 oczek.

Ustalmy teraz liczby zdarzeń sprzyjających zdarzeniom losowym $A \cap B, A \cap B', A' \cap B$ i $A' \cap B'$.

$A = \{(1, 2), (1, 5), (2, 1), (2, 4), (3, 3), (3, 6), (4, 2), (4, 5), (5, 1), (5, 4), (6, 3), (6, 6)\}$

$B = \{(2, 6), (3, 5), (3, 6), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

Utwórzmy dla nich tabelki częstości.

	A	A'	
B	$n_{A \cap B}$	$n_{A' \cap B}$	n_B
B'	$n_{A \cap B'}$	$n_{A' \cap B'}$	$n_{B'}$
	n_A	$n_{A'}$	36

	A	A'	
B	5	10	15
B'	7	14	21
	12	24	36

Utwórzmy też tabelki prawdopodobieństw dla tych zdarzeń.

	A	A'	
B	$P(A \cap B)$	$P(A' \cap B)$	$P(B)$
B'	$P(A \cap B')$	$P(A' \cap B')$	$P(B')$
	$P(A)$	$P(A')$	1

	A	A'	
B	$\frac{5}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$
B'	$\frac{7}{36}$	$\frac{14}{36}$	$\frac{21}{36}$
	$\frac{12}{36}$	$\frac{24}{36}$	1

Rozważmy teraz kilka przykładów.

Przykład 1.

Czy na podstawie następujących danych : $P(A') = 0,5$; $P(B') = 0,4$; $P(A \cup B) = 0,7$ można uzupełnić tabelkę prawdopodobieństwa?

Wpiszmy dane do tabelki.

	A	A'	
B	0,4	0,2	0,6
B'	0,1	0,3	0,4
	0,5	0,5	1

Mając $P(A')$ i $P(B')$ możemy oczywiście wpisać $P(A)$ i $P(B)$, które wynoszą odpowiednio 0,5 i 0,6. Jak widać, dla wypełnienia tabelki brakuje tylko jednego z czterech wyników:

$$P(A \cap B), P(A' \cap B), P(A \cap B') \text{ lub } P(A' \cap B').$$

Wiemy, że $P(A \cup B) = 0,7$, a stąd $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$, czyli $P(A \cap B) = 0,4$. Teraz uzupełnienie jest już możliwe, co przedstawia powyższa tabelka.

Przykład 2¹.

W kolekcji znaczków Darka aż 80% stanowią znaczki polskie. Znaczki nieostemplowane stanowią 75% wszystkich znaczków, a znaczki polskie lub nieostemplowane to 90% kolekcji. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany znaczek jest:

- polSKI i nieostemplowany,
- zagraniczny i nieostemplowany,
- polSKI lub ostemplowany,
- zagraniczny lub nieostemplowany?

Opiszmy zdarzenia.

A – Wylosowany znaczek jest polski.

A' – Wylosowany znaczek jest zagraniczny.

B – Wylosowany znaczek jest nieostemplowany.

B' – Wylosowany znaczek jest ostemplowany.

	A	A'	
B	0,65	0,10	0,75
B'	0,15	0,10	0,25
	0,80	0,20	1

Wiadomo, że $P(A \cup B) = 0,9$. Zatem $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$, czyli $0,8 + 0,75 - 0,9 = 0,65$. Po tych rachunkach uzupełnimy tabelkę i odczytujemy odpowiedzi:

Ad. a) $P(A \cap B) = 0,65$.

Ad. b) $P(A' \cap B) = 0,10$.

Ad. c) $P(A \cup B') = 0,8 + 0,25 - 0,15 = 0,90$.

Ad. d) $P(A' \cup B) = 0,2 + 0,75 - 0,10 = 0,85$.

Warto sprawdzić, jak to zadanie rozwiązuje się bez stosowania tabelki!

W zakresie rozszerzonym uczeń także:

- oblicza prawdopodobieństwo warunkowe;
- korzysta z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym.

Prawdopodobieństwem warunkowym zdarzenia A , przy założeniu, że zaszło zdarzenie B , nazywamy iloraz $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ (dla zdarzeń losowych A i B w pewnym doświadczeniu losowym, w którym $P(B) > 0$). Liczbę tę oznaczamy symbolem $P(A|B)$. Zatem

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

¹ Dobrowolska M., Karpiński M., Lech J.: *Matematyka III*. Podręcznik dla liceum i technikum. Zakres podstawowy z rozszerzeniem, GWO, Gdańsk 2004, str. 171, zadanie 13.

Przykład 3

Nową maść na pewną chorobę skóry przetestowano na 20% pacjentów mających tę chorobę. Pacjenci ci zostali wybrani w sposób losowy. Wyniki były następujące:

21 pacjentów leczonych nową maścią wyleczono w ciągu jednego tygodnia, zaś 3 nie wyleczono w ciągu jednego tygodnia; 59 pacjentów leczonych dawnym sposobem leczenia wyleczono w ciągu jednego tygodnia, zaś 37 nie wyleczono.

Rozważmy następujące zdarzenia losowe:

A – Wyleczono pacjenta w ciągu jednego tygodnia.

A' – Nie wyleczono pacjenta w ciągu jednego tygodnia.

B – Leczono pacjenta nową maścią.

B' – Leczono pacjenta dawnym sposobem leczenia.

Zapiszmy wyniki w tabeli częstości.

	A	A'	
B	21	3	24
B'	59	37	96
	80	40	120

Odpowiadająca tej tabeli tabela prawdopodobieństw jest następująca:

	A	A'	
B	$\frac{21}{120}$	$\frac{3}{120}$	$\frac{24}{120}$
B'	$\frac{59}{120}$	$\frac{37}{120}$	$\frac{96}{120}$
	$\frac{80}{120}$	$\frac{40}{120}$	1

Mając tę tabelę, obliczmy kilka prawdopodobieństw warunkowych.

$$P(A|B) = \frac{21}{120} \cdot \frac{120}{24} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8},$$

$$P(A|B') = \frac{59}{120} \cdot \frac{120}{96} = \frac{59}{96}.$$

Czy nowa maść jest skuteczniejsza niż poprzednie metody leczenia?

Przykład 4

Rozważmy ponownie rzut dwiema rozróżnialnymi, sześciennymi kostkami do gry i rozważmy następujące zdarzenia losowe:

A – Suma wyników jest równa 8.

B – Wyniki różnią się o 2 oczka.

Mamy wówczas:

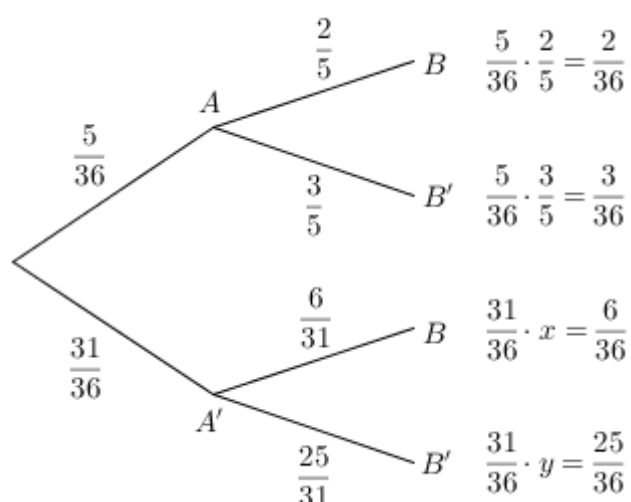
$A = \{(6, 2), (5, 3), (4, 4), (3, 5), (2, 6)\},$

$B = \{(3, 1), (4, 2), (1, 3), (5, 3), (2, 4), (6, 4), (3, 5), (4, 6)\}.$

Tabelka dla tej pary zdarzeń jest następująca:

	A	A'	
B	$\frac{2}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{8}{36}$
B'	$\frac{3}{36}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{28}{36}$
	$\frac{5}{36}$	$\frac{31}{36}$	1

Fragment drzewka dla tej pary zdarzeń jest następujący:



Mamy tu dla gałęzi AB :

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{2}{5} = \frac{2}{36} \cdot \frac{36}{5} = \frac{2}{5},$$

zaś wynik po prawej stronie to $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$.

Uwaga ta pozwala na obliczenie w nieco inny sposób prawdopodobieństwa warunkowego, np. dla gałęzi $A'B$:

$$\frac{31}{36} \cdot x = \frac{6}{36}, \text{ skąd } x = \frac{6}{31}.$$

Podane przykłady nie wyczerpują wszystkich możliwości zastosowań tabelk dla par zdarzeń losowych. Z wieloma innymi zastosowaniami tabelk spotkamy się podczas rozwiązywania zadań z rachunku prawdopodobieństwa (o ile będziemy pamiętać o ich istnieniu).