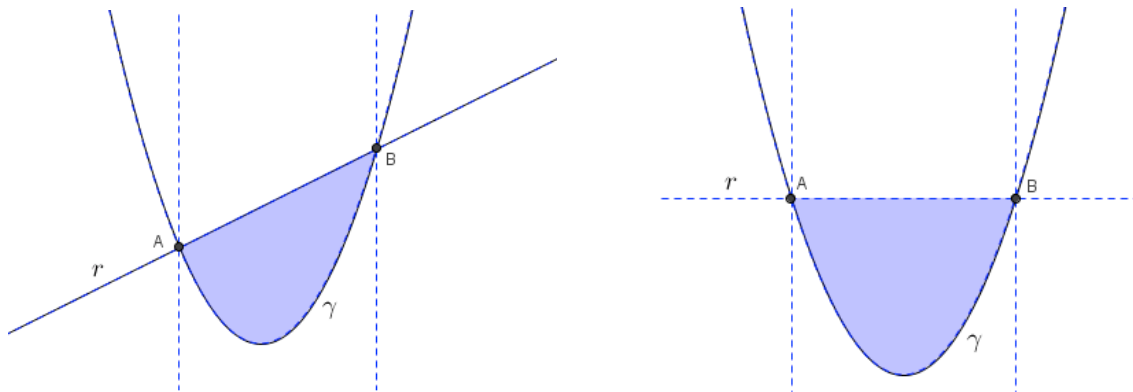


1. Przedmiot: **Matematyka**
2. Dział programowy: **4. Funkcje, 5. Ciągi**
3. Temat: **Pole odcinka paraboli**
4. Klasa: **Klasa III**
5. Zgodność z podstawą programową: **Uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:**
 - 1) szkicuje wykres funkcji kwadratowej, korzystając z jej wzoru;
 - 2) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie;
 - 3) oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}$ oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów.
6. Pomoce (środki) dydaktyczne
 - stanowiska komputerowe (lub komputer nauczyciela z tablicą interaktywną lub rzutnikiem multimedialnym),
 - bezpłatne oprogramowanie GeoGebra wspomagające nauczanie matematyki (<http://www.geogebra.org/cms/pl/download/>)
7. Cele: Uczeń:
 - poznaje określenie odcinka paraboli,
 - utrwala pojęcie funkcji kwadratowej i jej wykresu,
 - poznaje notację sigmową,
 - poznaje wzór na sumę kwadratów kolejnych liczb naturalnych,
 - prowadzi rozumowanie pozwalające uzyskiwać wzór ogólny,
 - wykorzystuje własność wartości bezwzględnej.
 - posługuje się programem GeoGebra (lub arkuszem kalkulacyjnym).
8. Metody nauczania: **Praca z komputerem, elementy wykładu, prezentacja, ćwiczenia**
9. Formy pracy: **Praca indywidualna i w parach**

Plan lekcji

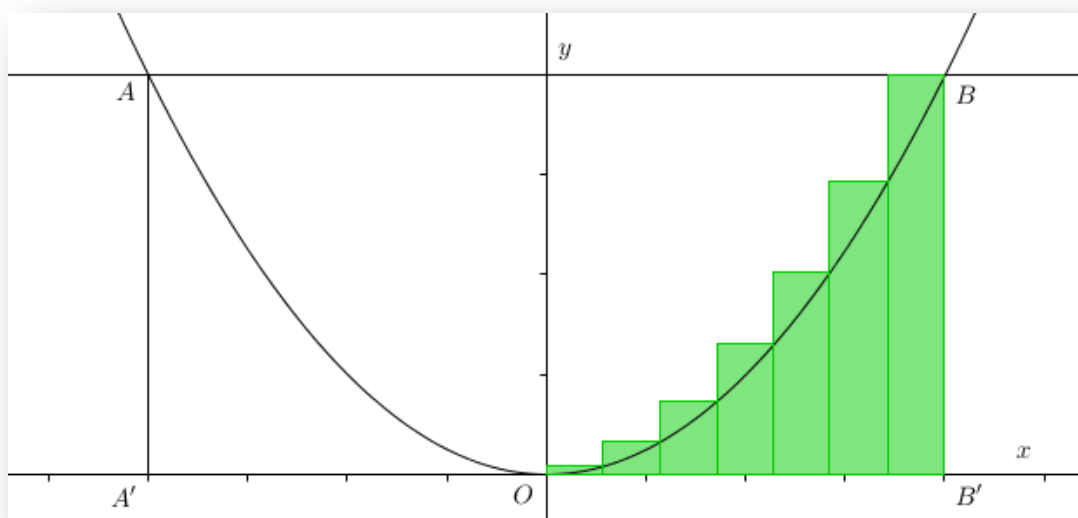
Na płaszczyźnie dana jest parabola γ i prosta r , która przecina parabolę w dwóch różnych punktach A i B . Część płaszczyzny ograniczona parabolą i prostą jest **odcinkiem paraboli**.



Jak widać, mamy dwie możliwości:

1° prosta r **nie jest** prostopadła do osi symetrii paraboli;

2° prosta r jest prostopadła do osi symetrii paraboli (prosty odcinek paraboli).



Obliczmy najpierw pole prostego odcinka paraboli. Wybierzmy tak układ współrzędnych, aby oś y pokrywała się z osią symetrii paraboli. Parabola taka ma równanie

$$y = ax^2.$$

Niech B' będzie rzutem prostokątnym punktu B na oś x , zaś l niech będzie długością odcinka OB' , który podzielimy na n równych części. Odcięte punktów podziału są zatem równe:

$$\frac{l}{n}, 2 \cdot \frac{l}{n}, 3 \cdot \frac{l}{n}, 4 \cdot \frac{l}{n}, \dots, l.$$

Utwórzmy teraz prostokąty o wysokościach odpowiadających kolejnym odciętym punktów podziału odcinka OB' , tzn. o wysokościach:

$$a \cdot \left(\frac{l}{n}\right)^2, a \cdot \left(2 \frac{l}{n}\right)^2, a \cdot \left(3 \frac{l}{n}\right)^2, a \cdot \left(4 \frac{l}{n}\right)^2, \dots, a \cdot \left(n \frac{l}{n}\right)^2.$$

Prostokąt o numerze i ma więc pole:

$$p_i = \frac{l}{n} \cdot a \cdot \left(i \frac{l}{n}\right)^2 = a \cdot \frac{l^3}{n^3} \cdot i^2.$$

Suma pól P wszystkich tych prostokątów jest równa:

$$P = \sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n a \frac{l^3}{n^3} i^2 = a \frac{l^3}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2.$$

Uwaga.

Powyższą sumę możemy zapisać za pomocą mało wygodnego wyrażenia z kropkami:

$$a \frac{l^3}{n^3} \cdot 1^2 + a \frac{l^3}{n^3} \cdot 2^2 + a \frac{l^3}{n^3} \cdot 3^2 + a \frac{l^3}{n^3} \cdot 4^2 + \dots + a \frac{l^3}{n^3} \cdot n^2.$$

Czy nie warto więc zastosować notacji sigmowej?

Widać, że różnica pomiędzy polem P sumy prostokątów a polem S figury ograniczonej odcinkami OB' , $B'B$ oraz łukiem OB paraboli γ jest zawsze dodatnia, ale jest tym mniejsza, im większe jest n . Zatem pole S uzyskamy, gdy $n \rightarrow \infty$:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} P = a \frac{l^3}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2.$$

W poniższej tabeli umieszczamy kolejne liczby naturalne i oraz sumę kwadratów i i sumę kwadratów pomnożoną przez 6.

i	i^2	$\sum i^2$	$6 \sum i^2$	$6 \sum i^2$
1	1	1	6	$1 \cdot 2 \cdot 3$
2	4	5	30	$2 \cdot 3 \cdot 5$
3	9	14	84	$3 \cdot 4 \cdot 7$
4	16	30	180	$4 \cdot 5 \cdot 9$
5	25	55	330	$5 \cdot 6 \cdot 11$
6	36	91	546	$6 \cdot 7 \cdot 13$
7	49	140	840	$7 \cdot 8 \cdot 15$

Obserwując ostatnią kolumnę można zauważyć (indukcja), że

$$6 \sum i^2 = n(n+1)(2n+1),$$

czyli

$$\sum i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Uwzględniając powyższe, mamy

$$P = a \cdot n \frac{l^3}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{al^3}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right).$$

Zatem

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} P = \frac{1}{3} l \cdot al^2 = \frac{1}{3} |OB'| \cdot |B'B|.$$

Pole, które nas interesuje, jest zatem równe

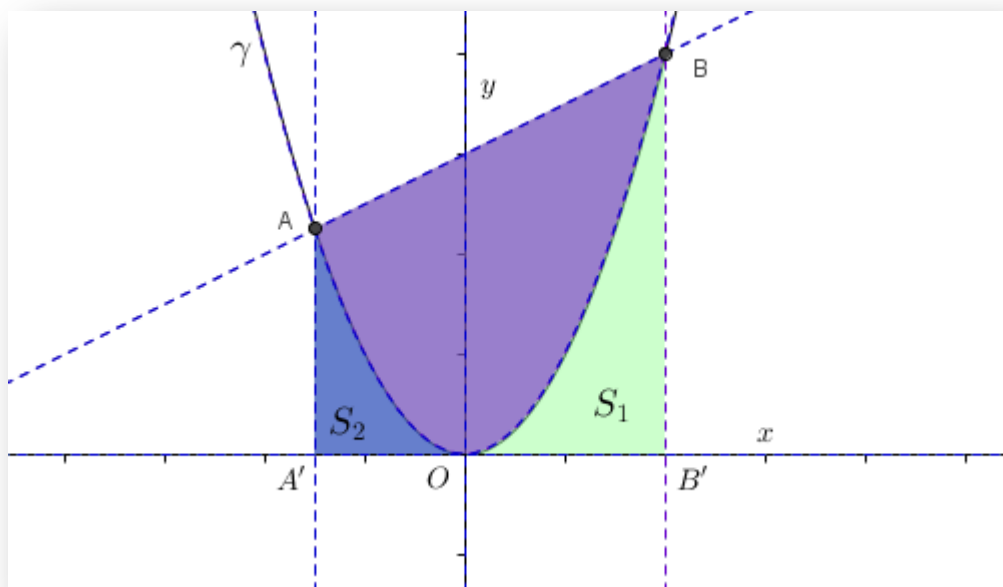
$$\frac{2}{3} |OB'| \cdot |B'B|,$$

czyli pole prostego odcinka paraboli jest równe

$$\frac{4}{3} |OB'| \cdot |B'B|.$$

Wynik ten oznacza, że pole odcinka paraboli stanowi cztery trzecie pola prostokąta o podstawie OB' i wysokości $B'B$. Stwierdzenie to nazywane jest twierdzeniem Archimedesza.

Pozostało nam rozważyć przypadek, gdy prosta nie jest prostopadła do osi symetrii paraboli. Wykonajmy stosowny rysunek.



Niech x_A i x_B ($x_A < 0 < x_B$) oznaczają odpowiednio odcięte punktów A i B. Odcinek $A'B'$ ma długość $(x_B - x_A)$, $|AA'| = ax_A^2$, $|BB'| = ax_B^2$.

Pole trapezu $ABB'A'$ jest więc równe $\frac{1}{2}(ax_A^2 + ax_B^2)(x_B - x_A) = \frac{1}{2}a(x_A^2 + x_B^2)(x_B - x_A)$.

Pole trójkąta krzywoliniowego S_1 jest równe $\frac{1}{3}$ pola prostokąta o bokach OA' i $A'A$, czyli wynosi

$$S_1 = \frac{1}{3}x_B(ax_B^2).$$

Pole trójkąta krzywoliniowego S_2 jest równe $\frac{1}{3}$ pola prostokąta o bokach OB' i $B'B$, czyli wynosi

$$S_2 = -\frac{1}{3}x_A(ax_A^2).$$

Pole odcinka AOB paraboli wynosi zatem:

$$\frac{1}{2}a(x_A^2 + x_B^2)(x_B - x_A) - \frac{1}{3}x_B(ax_B^2) + -\frac{1}{3}x_A(ax_A^2) = \frac{a}{6}(x_B^3 - 3x_Ax_B^2 + 3x_A^2x_B - x_A^3).$$

Każdą parabolę możemy przesunąć tak, aby jej wierzchołek znajdował się w początku układu współrzędnych, czyli pole odcinka paraboli można zawsze wyrazić wzorem

$$\frac{a}{6}(x_B - x_A)^3.$$

W przypadku a ujemnego powyższy wzór zapiszemy w postaci

$$\frac{|a|}{6}(x_B - x_A)^3.$$

Używając GeoGebry, możemy utworzyć plik, dzięki któremu będziemy mogli obserwować, jak zmienia się suma pól prostokątów w zależności od liczby n punktów podziału odcinka OB' , obliczać pole prostokąta $OB'BC$, porównywać sumę pól prostokątów z trzecią częścią pola prostokąta $OB'BC$ oraz obliczać pole odcinka paraboli.

Efekt końcowy może być następujący:

