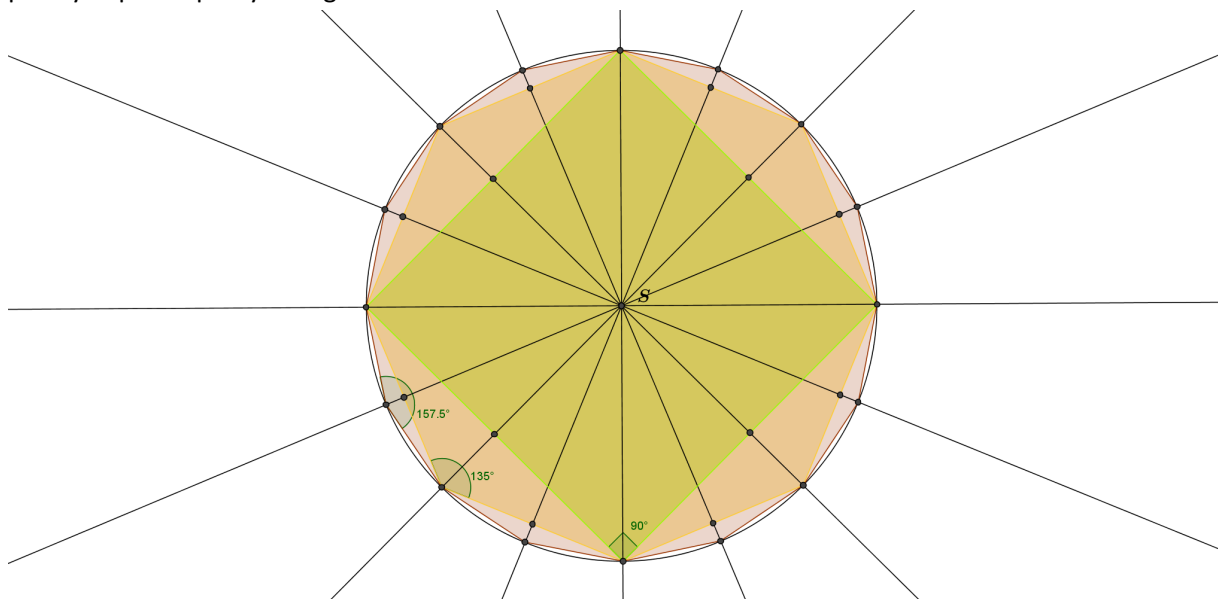


1. Przedmiot: **Matematyka**
2. Dział programowy: **1. Liczby rzeczywiste, 7. Planimetria**
3. Temat: **Cyfra za cyfrą – wyznaczamy  $\pi$**
4. Klasa: **Klasa II**
5. Zgodność z podstawą programową: **Uczeń: spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:**
  - 1) **tworzy strategię rozwiązania problemu;**
  - 2) **tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność.**
6. Pomoce (środki) dydaktyczne
  - **stanowiska komputerowe (lub komputer nauczyciela z tablicą interaktywną lub rzutnikiem multimedialnym),**
  - **bezpłatne oprogramowanie GeoGebra wspomagające nauczanie matematyki (<http://www.geogebra.org/cms/pl/download/>)**
7. Cele: Uczeń:
  - konstruuje wielokąt foremny poprzez podwajanie boków;
  - stosuje metodę iteracyjną do uzyskania przybliżenia;
  - stosuje metodę rekursji w arkuszu kalkulacyjnym;
  - stosuje twierdzenie Pitagorasa i Euklidesa;
  - posługuje się programem GeoGebra (lub arkuszem kalkulacyjnym).
8. Metody nauczania: **Praca z komputerem, elementy wykładu, prezentacja, ćwiczenia**
9. Formy pracy: **Praca indywidualna i w parach**

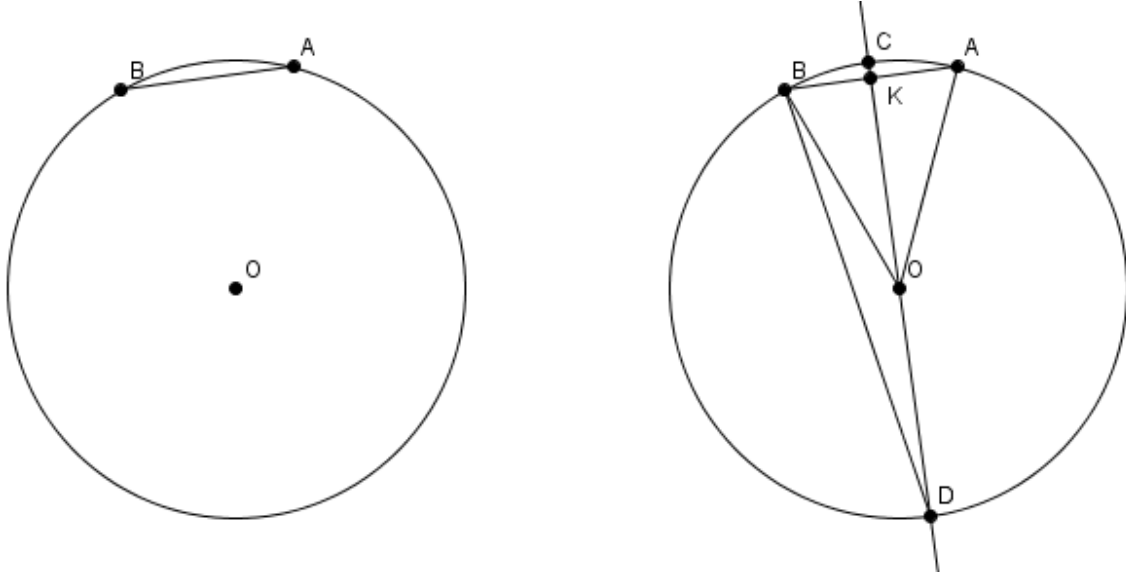
### Plan lekcji

Na początek zapytajmy, jak konstruujemy wielokąty foremne za pomocą cyrkla i linijki? Zaczynamy od prostych prostopadłych? Zgoda.



Mamy tu kolejno kwadrat, ośmiokąt foremny, szesnastokąt foremny, itd., które otrzymujemy łącząc punkty, na jakie dzieli okrąg prosta poprowadzona przez środki przeciwległych boków poprzedniego wielokąta.

Powyższa konstrukcja podpowiada, jak otrzymać z wielokąta o  $n$  bokach wielokąt o  $2n$  bokach. Konstruujemy okrąg o środku  $O$  i promieniu  $r$  oraz sieczną  $AB$ , która jest jednym z boków  $n$ -kąta foremnego wpisanego w okrąg. Niech  $|AB| = l_n$ . By otrzymać bok  $2n$ -kąta foremnego wpisanego w ten okrąg należy poprowadzić symetralną boku  $AB$ , która wyznaczy dwa punkty  $C$  i  $D$  na okręgu. Odcinek  $BC$  jest bokiem wielokąta foremnego o  $2n$  bokach wpisanego w okrąg. Niech  $|BC| = l_{2n}$  (rys.).



Wyznamy teraz związek, jaki zachodzi między odcinkami  $BC$  i  $AB$ , tzn. między  $l_{2n}$  i  $l_n$ . Rozważymy najpierw trójkąt  $DBC$ , który jest prostokątny, gdyż jest oparty na półokręgu. Wysokość tego trójkąta jest poprowadzona z wierzchołka kąta prostego, a zatem jej długość jest średnią geometryczną długości odcinków  $CK$  i  $DK$  (drugie twierdzenie Euklidesa). Stąd:

$$|BK|^2 = |CK| \cdot |DK|.$$

Zgodnie z przyjętymi oznaczeniami, mamy:

$$|DC| = 2r, \quad |DK| = |DC| - |CK| \quad \text{i} \quad |BK| = \frac{l_n}{2}.$$

Uwzględniając powyższe, otrzymujemy:

$$|BK|^2 = |CK| \cdot (2r - |CK|) \rightarrow |CK|^2 - 2r \cdot |CK| + \frac{l_n^2}{4} = 0 \rightarrow |CK| = \frac{2r - \sqrt{4r^2 - l_n^2}}{2}.$$

Rozwiązanie  $\frac{2r + \sqrt{4r^2 - l_n^2}}{2}$  odrzucamy, gdyż  $CK$  musi być mniejsze od  $r$ .

Podobnie, trójkąt  $BCK$  jest prostokątny, zatem po zastosowaniu twierdzenia Pitagorasa, otrzymujemy:

$$|BC|^2 = |BK|^2 + |CK|^2,$$

czyli

$$|BC|^2 = \frac{l_n^2}{4} + \left( \frac{2r - \sqrt{4r^2 - l_n^2}}{2} \right)^2 = \frac{l_n^2}{4} + \frac{4r^2 - l_n^2 - 4r\sqrt{4r^2 - l_n^2}}{4} = 2r^2 - r\sqrt{4r^2 - l_n^2},$$

skąd

$$|BC| = l_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - l_n^2}}.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób wzór na długość boku  $2n$ -kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu  $r$ , która zależy od  $r$  i długości boku  $l_n$   $n$ -kąta foremnego wpisanego w ten sam okrąg.

Obwód takiego  $2n$ -kąta foremnego wynosi

$$2n \cdot l_{2n} = 2n \sqrt{2r^2 - r \sqrt{4r^2 - l_n^2}}.$$

Zauważmy, że bok kwadratu wpisanego w okrąg o promieniu  $r$  ma długość  $r \cdot \sqrt{2}$ . Zaczynając zatem od tej wartości możemy obliczyć obwody następujących wielokątów foremnych wpisanych w okrąg o promieniu  $r$ : 8, 16, 32, 64, 128, ... . Stosunki obwodów wielokątów do długości promienia okręgu będą w miarę wzrostu liczby boków coraz lepszym przybliżeniem liczby  $\pi$ !

Wykorzystamy to, prowadząc obliczenia w arkuszu kalkulacyjnym. Dla ułatwienia obliczeń przyjmujemy  $r=1$ .

- W komórce A2 wpisujemy 4, zaś w komórce A3 formułę  $=2*A2$  i kopiujemy ją aż do A12.
- W komórce B2 wpisujemy formułę  $=\text{Pierwiastek}(2)$ , zaś w komórce B3 wpisujemy formułę  $=\text{Pierwiastek}(2-\text{Pierwiastek}(4-B2^2))$  i kopiujemy ją aż do komórki B12.
- W komórce C2 wpisujemy formułę  $=A2*B2$  i kopiujemy ją aż do komórki C12.
- W komórce D2 wpisujemy formułę  $=C2/2$  i kopiujemy ją aż do komórki D12.

Efekt tych działań jest następujący:

	A	B	C	D
1	liczba boków	długość boku	obwód	przybliżenie liczby pi
2	4	1,414213562	5,656854	2,828427125
3	8	0,765366865	6,122935	3,061467459
4	16	0,390180644	6,24289	3,121445152
5	32	0,196034281	6,273097	3,136548491
6	64	0,098135349	6,280662	3,140331157
7	128	0,049082457	6,282555	3,141277251
8	256	0,024543077	6,283028	3,141513801
9	512	0,012271769	6,283146	3,14157294
10	1024	0,006135914	6,283175	3,141587725
11	2048	0,00306796	6,283183	3,141591422
12	4096	0,001533981	6,283185	3,141592346
13				

Zauważmy, że zarówno w przypadku obwodu jak i liczby  $\pi$ , otrzymaliśmy zgodność z rzeczywistą wartością tych liczb do szóstego miejsca po przecinku.