

Problem komputerowy Nr 3.06.01  
„Wykres w skali logarytmicznej. Krzywa rezonansowa obwodu RLC.”

### I. Z pracowni fizycznej.

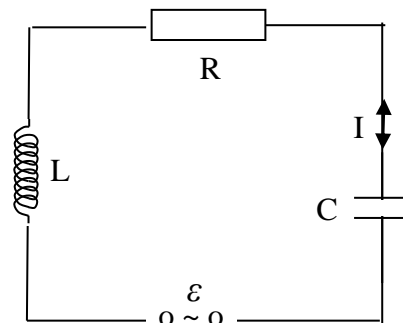
W wielu zagadnieniach, nie tylko z zakresu fizyki, mamy do czynienia z zależnościami (funkcjami), których dziedziny (bądź zbiory wartości) są bardzo rozległe. By prawidłowo opisać badane zjawisko, konieczne jest prześledzenie jego zachowania w zakresie kilku rzędów wielkości zmiennej niezależnej. Przykładem może tu być opis głośności słyszalnych przez człowieka dźwięków (zagadnienie krzywych izofonicznych, opisane w §5.13 3. tomu e-podręcznika). Zakres słyszalnych częstotliwości obejmuje trzy rzędy wielkości (od kilkunastu herców do kilkunastu tysięcy herców). W takich sytuacjach zastosowanie w wykresach typowej **skali liniowej** bywa nieefektywne, gdyż skala taka nie pozwala przedstawić na wykresie wszystkich istotnych aspektów problemu. Stosuje się wtedy **skalę logarytmiczną**, która pozwala wyeksponować interesujący fragment zależności, bez utraty „ogólnego spojrzenia na całość”.

Wykonując proponowane ćwiczenie przekonasz się o użyteczności skali logarytmicznej. Nauczysz się takiego organizowania tabeli i wykresu, by uzyskać czytelny obraz badanego zjawiska. Przedstawimy to na przykładzie tzw. krzywej rezonansowej obwodu RLC. Zagadnienie to nie jest wprawdzie ujęte jako obowiązkowe w programie nauczania fizyki na poziomie rozszerzonym, ale jest ciekawe i pouczające. Warto się z nim zapoznać, gdyż jest ono podstawą wielu zjawisk z zakresu elektrotechniki, radiotechniki i elektroniki.

1. W rozdziale 3.6 e-podręcznika opisano podstawowe właściwości obwodów prądu przemiennego. Ograniczono się tam do omówienia obwodów zawierających źródło napięcia sinusoidalnie zmiennego o amplitudzie  $\varepsilon_0$  i częstotliwości  $\omega$  oraz tzw. oporu czynnego, czyli opornika o oporze  $R$  (paragrafy 3.6.1 i 3.6.2 e-podręcznika). Zależność  $\varepsilon(t)$  dana jest równaniem:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cdot \sin(\omega t) \quad (1)$$

2. W obwód z napięciem przemiennym można także włączyć tzw. elementy bierny, czyli kondensator o pojemności  $C$  (§1.7 e-podręcznika) oraz zwojnicę (cewkę indukcyjną) o współczynniku samoindukcji  $L$  (§4.4 e-podręcznika). Uzyskuje się w ten sposób obwód RLC (w dalszym ciągu rozpatrujemy jedynie szeregowe połączenie opisanych elementów, jak na rysunku obok).



W obwodzie RLC płynie prąd sinusoidalnie zmienny w czasie, o natężeniu danym równaniem:

$$I(t) = I_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad (2)$$

gdzie:

- $I_0$  to amplituda płynącego prądu,
  - $\omega$  to częstość zmian prądu (równa zawsze częstości zmian napięcia),
  - $\varphi$  to przesunięcie fazowe pomiędzy prądem a napięciem, opisujące fakt, iż przebieg zmian tych wielkości nie jest synchroniczny. Brak synchronizacji prądu z napięciem wynika właśnie z obecności w obwodzie elementów biernych  $L$  i  $C$ .
3. Odpowiednikiem oporu elektrycznego jest cecha elementu biernego zwana jego zawadą i oznaczana symbolem  $Z_C$  (zawada pojemnościowa) oraz  $Z_L$  (zawada indukcyjna); zawada wyrażana jest, podobnie

jak opór, w omach. Podstawowa różnica pomiędzy zawadą a oporem polega na tym, że zawada zależy nie tylko od właściwości elementu (jego pojemności lub indukcyjności) ale także od częstości zmian przyłożonego napięcia:

$$Z_C = 1/(C \cdot \omega) \quad \text{oraz} \quad Z_L = L \cdot \omega \quad (3)$$

Nieco nietypowe jest także wyrażenie podające wypadkową zawadę elementów połączonych szeregowo - nie jest ona zwykłą sumą zawad elementów składowych, lecz wyraża się wzorem:

$$Z_{RLC} = \sqrt{R^2 + (Z_C - Z_L)^2} \quad (4)$$

4. Z tego wyrażenia wynika związek amplitudy natężenia prądu  $I_0$  z amplitudą napięcia  $\epsilon_0$ . Ma on postać zbliżoną do prawa Ohma:

$$I_0 = \frac{\epsilon_0}{Z_{RLC}} = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{R^2 + (Z_C - Z_L)^2}} \quad (5)$$

5. Przesunięcie fazowe  $\varphi$  wyraża się najprościej poprzez swoje funkcje trygonometryczne:

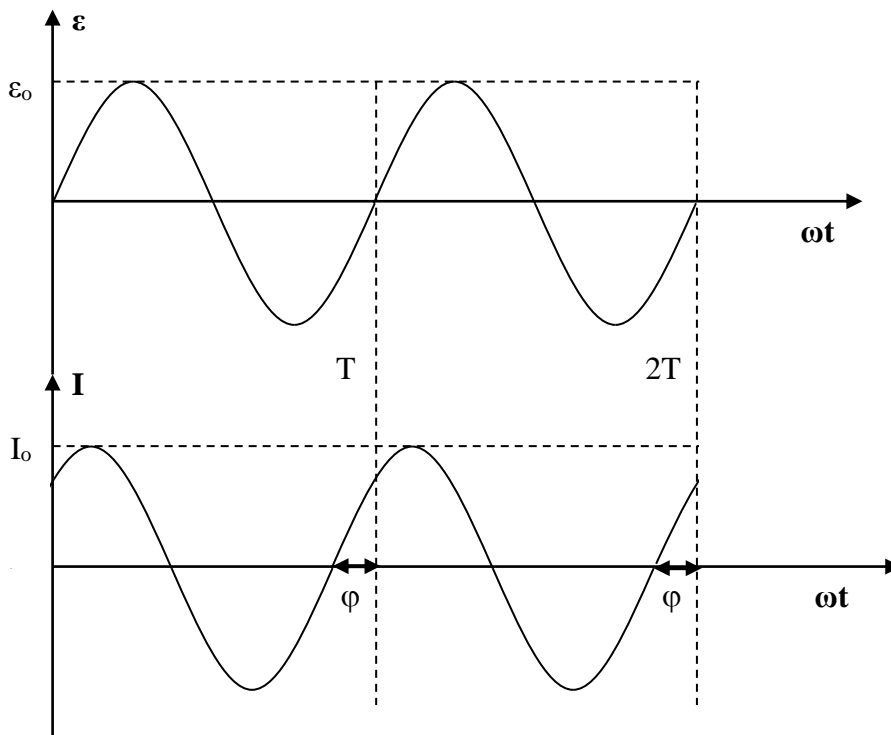
$$\cos\varphi = \frac{R}{Z_{RLC}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (Z_C - Z_L)^2}} \quad (6)$$

oraz

$$\text{tg}\varphi = \frac{Z_C - Z_L}{R} \quad (7)$$

Ostatni wzór pokazuje, że przesunięcie fazowe  $\varphi$  może być dodatnie (dla obwodów „pojemnościowych”, w których  $Z_C > Z_L$ ) lub ujemne (dla obwodów „indukcyjnych”, w których  $Z_C < Z_L$ ). Wartości  $\varphi$  są ograniczone do przedziału  $<-\pi/2; +\pi/2>$ , czyli od  $-90^\circ$  do  $+90^\circ$ .

Na wykresie pokazano sinusoidalny przebieg  $\epsilon(t)$  oraz przesunięty w fazie o  $\varphi = +\pi/4$  ( $+45^\circ$ ) przebieg  $I(t)$  w obwodzie „pojemnościowym”.



6. Specyficzną cechą obwodu RLC jest możliwość uzyskania w nim stanu rezonansowego. Polega to na takim doborze parametrów  $L$ ,  $C$  i  $\omega$ , by zminimalizować zawadę  $Z_{RLC}$ . Jeśli spojrzymy uważnie na wzór (3), to zauważymy, że gdy  $Z_C = Z_L$  to  $Z_{RLC} = R$ . Każda inna relacja pomiędzy  $Z_C$  i  $Z_L$  prowadzi do wzrostu  $Z_{RLC}$ . Równość  $Z_C = Z_L$  oznacza zaś, po uwzględnieniu wzoru (2), że:

$$\omega^2 = \frac{1}{L \cdot C} \quad (8)$$

Przy takim doborze parametrów, nie tylko zawada całkowita obwodu jest minimalna, ale natężenie prądu w nim płynące jest maksymalne, zaś przesunięcie fazowe  $\varphi = 0$ . Taki obwód „wyróżnia” częstotliwość daną wzorem (8) - jest on szczególnie podatny na zasilanie napięciem zmiennym z tą częstotliwością. Częstość tę nazywa się częstością rezonansową obwodu i oznaczana jest symbolem  $\omega_0$ :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad (9)$$

Ta właściwość obwodu jest wykorzystywana np. w nadajnikach i odbiornikach fal radiowych.

7. Odpowiednio programując arkusz kalkulacyjny zbadasz funkcję  $I_0(\omega)$ , czyli krzywą rezonansową obwodu. Jest to zależność amplitudy natężenia prądu w obwodzie RLC od częstości napięcia zasilającego ten obwód. Jest ona wyrażona wzorem (5) z uwzględnieniem wzorów (3):

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{Z_{RLC}} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2}} \quad (10)$$

Szczególnie ciekawym aspektem krzywej rezonansowej jest osiągnięcie przez natężenie prądu maksymalnej wartości przy  $\omega = \omega_0$ .

## II. W pracowni informatycznej.

### Wstęp.

Przygotuj arkusz kalkulacyjny zgodnie z następującymi wskazówkami. Arkusz ten będzie następnie kopiowany i odpowiednio modyfikowany dla potrzeb kolejnych części ćwiczenia.

1. W pierwszej kolumnie przygotuj komórki do wprowadzania wartości parametrów zagadnienia (w nawiasach podano wartości domyślne i sugerowany zakres dopuszczalnych wartości):
  - amplitudy napięcia zmiennego  $\varepsilon_0$  (10 V, nie ma merytorycznej potrzeby zmieniania wartości tego parametru);
  - oporu R (10  $\Omega$ , od 0,1  $\Omega$  do 1000  $\Omega$ );
  - współczynnika samoindukcji cewki L (0,001 H, od  $10^{-6}$  H do 1 H);
  - pojemności kondensatora C ( $10^{-6}$  F, od  $10^{-9}$  F do  $10^{-3}$  F);
  - w kolejnej komórce program oblicza wartość częstotliwości rezonansowej obwodu  $\omega_0$  (wzór (9));

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad \text{A15: } ==1/\text{PIERWIASTEK}(A9*A13)$$

- pod nią przygotuj komórkę „krok  $\omega$ ”; będzie ona zawierała wielkość służącą do zmieniania wartości  $\omega$  dla potrzeb wykresu i będzie różna w różnych częściach ćwiczenia. W pierwszym arkuszu „krok  $\omega$ ” wynosi jedną dziesiątą wartości  $\omega_0$ .

$$\text{A18: } =A16/10$$

Do zmiany zakresów wartości R, L i C użyj pasków przewijania.

	A	B
1		
2	$\varepsilon_0$ [V]	
3	10	
4	R [ $\Omega$ ]	
5	188,9	
6		
7		
8	L [H]	
9	4,13E-01	
10		
11		
12	C [F]	
13	6,28E-07	
14		
15	$\omega_0$ [1/s]	
16	1,96E+03	
17	krok $\omega$ "+"	
18	1,96E+02	
19		

Ustawienie pasków przewijania.



Ponieważ parametry pasków mogą przyjmować tylko wartości całkowite dodatnie w celu uzyskania właściwych danych do rozwiązania zadania należy wykonać dodatkowe czynności.

W arkuszu „dane wejściowe” przygotuj tabelę:

	A	B	C	D	E
1					
2					
3		R [ $\Omega$ ]	L [H]	C [F]	
4	min	0,1	0,000001	0,000000001	
5	max	1000	1	0,001	
6	przyrost	0,1	0,001	0,000001	
7					
8					
9	Wartości ustawione w paskach przewijania				
10					
11	min	1	1	1	
12	max	10000	1000	1000	
13	przyrost	1	1	1	
14					
15					

Wartości maksymalne pasków obliczone są na podstawie wzoru  
 $(\max - \min) / \text{przyrost}$

i danych z komórek B4:D6

Ponieważ otrzymane wartości dla L i C nie są liczbami całkowitymi do wyników została dodana liczba 0,001.

Wielkość max dla R została powiększona o 1

2. Kolejne kolumny arkusza to tabela zawierająca obliczane wg wzorów wartości

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	$\varepsilon_0$ [V]		$\omega$ [1/s]	$Z_C$ [ $\Omega$ ]	$Z_L$ [ $\Omega$ ]	$Z_{RLC}$ [ $\Omega$ ]	$I_0(\omega)$ [A]
3	10						
4	R [ $\Omega$ ]						
5	10						
6							
7							
8	L [H]						
9	1,00E-03						
10							
11							
12	C [F]						
13	1,00E-06						
14							
15	$\omega_0$ [1/s]						
16	3,16E+04						
17	krok $\omega$ "+"						
18	3,16E+03						
19							
20							
21							
22							

$\omega$  [1/s] zawiera 20 wartości tej zmiennej. Rozmieść je według następującego przepisu:

- w wierszu 12. kolumny umieść wartość  $\omega_0$ ;

$$C12: =A16$$

- w dziewięciu komórkach wcześniejszych (do wiersza 2) umieść wartości coraz mniejsze od  $\omega_0$ , każdorazowo o „krok  $\omega$ ”;

$$C11: =C12- \$A\$18$$

- w dziesięciu komórkach późniejszych (do wiersza 21) umieść wartości coraz większe od  $\omega_0$ , każdorazowo o „krok  $\omega$ ”;

$$C13: =C12+ \$A\$18$$

- wiersz 11 tabeli warto wyróżnić (np. kolorem) - opisuje on stan rezonansowy obwodu.

Takie zorganizowanie kolumny  $\omega$  zapewnia, że bez względu na zmianę wartości parametrów L i C, najbardziej interesująca cecha krzywej rezonansowej - jej maksimum - zawsze znajdzie się wewnątrz dziedziny wykresu.

$Z_C$  [ $\Omega$ ]- kolumna (pomocnicza) zawady pojemnościowej  $Z_C$  wypełniona zgodnie ze wzorem (3);

$$D3: =1/(\$A\$13*C3)$$

$Z_L$  [ $\Omega$ ]- kolumna (pomocnicza) zawady indukcyjnej  $Z_L$  także wypełniona zgodnie ze wzorem (3);

$$E3: =\$A\$9*C3$$

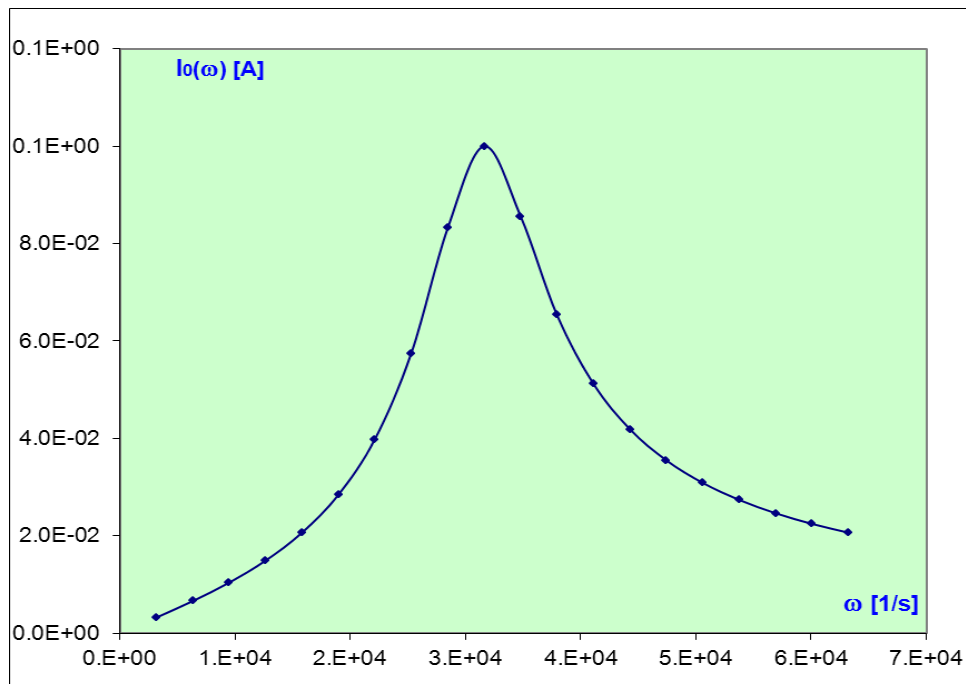
$Z_{RLC}$  [ $\Omega$ ] - kolumna (pomocnicza) zawady całkowitej ZRLC wypełniona zgodnie ze wzorem (4);

F3: =PIERWIASTEK(\$A\$5^2+(D3-E3)^2)

$I_0(\omega)$  [A]- kolumna amplitudy natężenia prądu  $I_0(\omega)$  wypełniona zgodnie ze wzorem (5).

G3: =\$A\$3/F3

3. Rozważ sformatowanie wszystkich komórek zawierających liczby jako komórki z kategorii „naukowe”, zachowując dwie (górną trzy) cyfry po przecinku. Dzięki temu ich wartości będą wyświetlane jako liczby typu  $x,yy \cdot 10^{uu}$  - ułatwia to ich odczyt.
4. Sporządź wykres zależności  $I_0(\omega)$ .

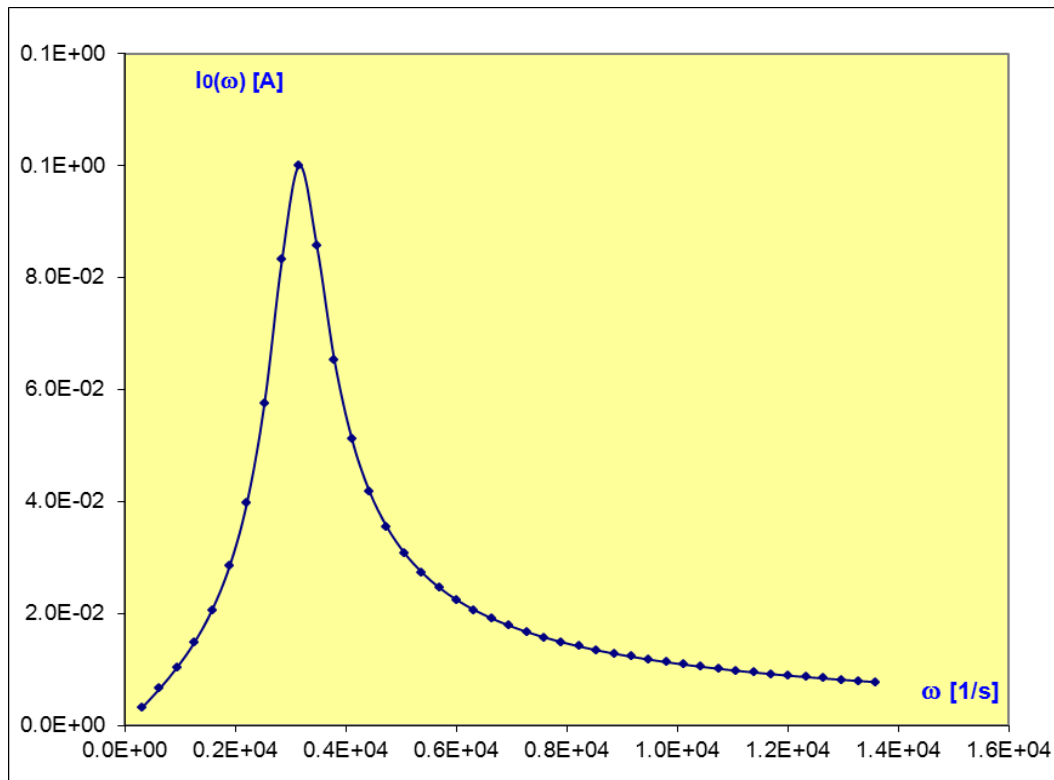


### **Część 1. Wykres w skali liniowej.**

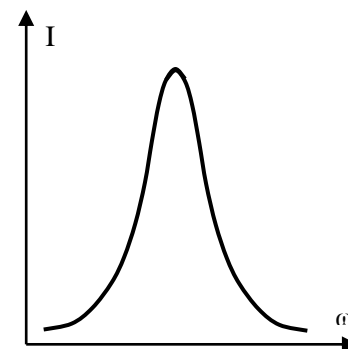
1.1. Pobieźny ogląd wykresu, uzyskanego na podstawie wartości domyślnych parametrów, pokazuje wprawdzie oczekiwany kształt krzywej rezonansowej, ale pozostawia pewien niedosyt. Zwróć uwagę, że maksimum natężenia prądu w punkcie  $\omega = \omega_0$  jest wyraźnie widoczne, ale malenie tego natężenia jest albo istotnie niesymetryczne w obu kierunkach albo „niedopracowane graficznie”. Nie da się też w sposób przekonujący określić zachowań tego natężenia na końcach dziedziny.

- Można sobie wyobrazić (na podstawie wykresu), że gdy  $\omega$  dąży do zera, to  $I_0(\omega)$  także zbiega do zera. Brakuje jednak punktu, który by o tym jednoznacznie przekonywał. Dostawienie w tabeli takiego punktu metodą kolejnego odjęcia „kroku  $\omega$ ” spowodowałoby osiągnięcie przez zmienną  $\omega$  wartości zero - ta jednak leży poza dziedziną funkcji (10).

- Trudno sobie wyobrazić jak przebiega  $I_0(\omega)$ , gdy  $\omega$  staje się dużo większe od  $\omega_0$ . Możesz spróbować uzupełnić tabelę o 10-20 punktów obliczonych metodą dodania „kroku  $\omega$ ”. Efekt nie będzie w pełni zadowalający: wraz ze wzrostem informacji o charakterze malenia  $I_0(\omega)$  przy dużych wartościach  $\omega$ , coraz mniej szczegółów widać w okolicach samego maksimum.



- 1.2. Powróć do ustawień domyślnych i zwiększaj wartość oporu  $R$  kolejno o  $10 \Omega$ . Przekonaj się, że wykres staje się coraz mniej wyrazisty, a dla wartości  $R$  powyżej  $50 \Omega$  nie można wręcz rozpoznać charakterystycznego kształtu krzywej rezonansowej (rys. 1). Tu nie pomaga nawet zabieg poszerzenia dziedziny opisany w poprzednim punkcie - nie da się w ten sposób odtworzyć charakterystycznego „wyplaszczenia” krzywej dla  $\omega < \omega_0$ .



rys. 1. Charakterystyczny „dzwonowy” kształt krzywej rezonansowej

## **Część 2. Alternatywne określanie dziedziny wykresu; od skali liniowej do logarytmicznej.**

- 2.1 Skopiuj poprzedni arkusz do nowego; przywróć ustawienia domyślne. W komórce „krok  $\omega$ ” wpisz liczbę 1,6 (lub zbliżoną, z okolic 1,2 - 2,0). Liczba ta posłuży do konstrukcji kolumny zmiennej niezależnej  $\omega$ . Tym razem jednak zastosujemy inną procedurę: zamiast odejmować „krok  $\omega$ ” (wyrażony jako ułamek  $\omega_0$ ) od  $\omega_0$ , będziemy tę ostatnią wielkość dzielić przez bezwymiarowy współczynnik „krok  $\omega$ ” tylekroć, ile chcemy wypełnić komórek w górę kolumny (w naszym przykładzie 9 komórek). Analogicznie, zamiast dodawać „krok  $\omega$ ” do  $\omega_0$ , będziemy tę ostatnią wielkość mnóżyc przez „krok  $\omega$ ” tylekroć, ile chcemy wypełnić komórek w dół kolumny (w naszym przykładzie 10 komórek). Wprowadź te zmiany do kolumny  $\omega$ .

C11: =C12/\$A\$18

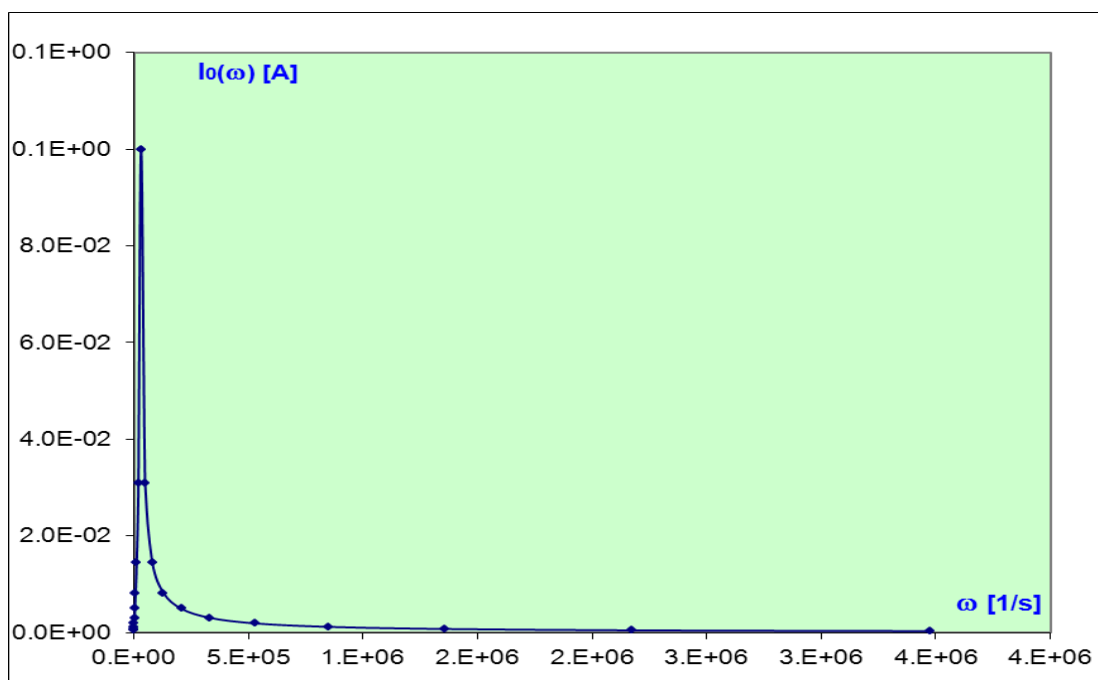


=A16

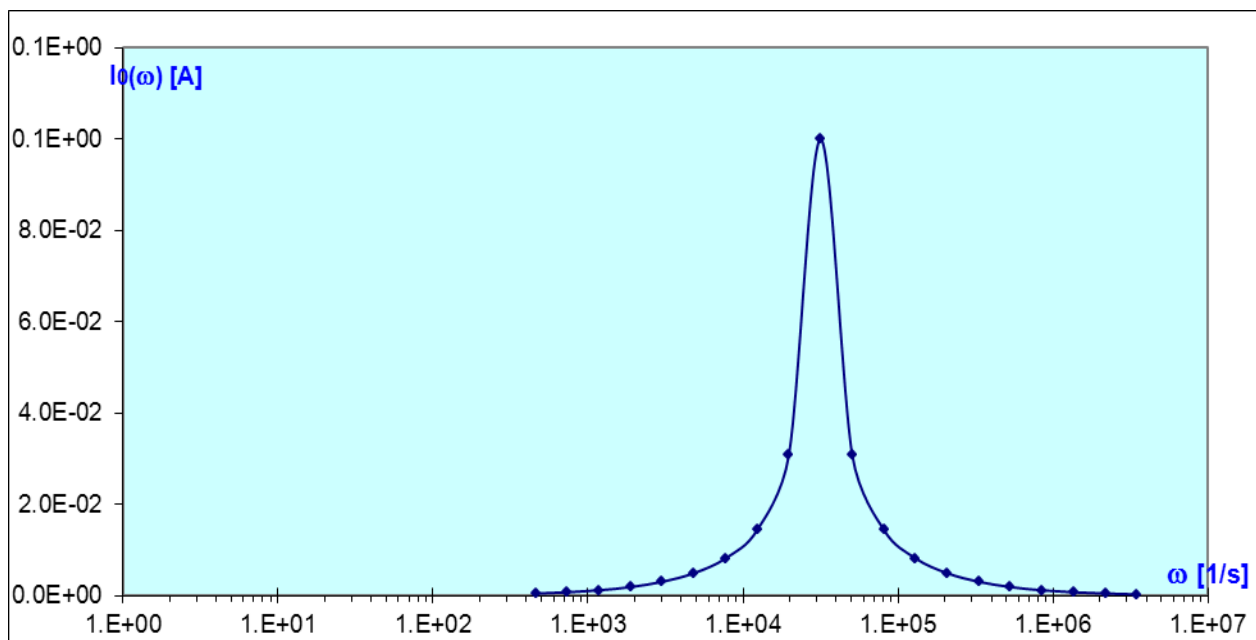
C13: =C12\*\$A\$18

W ten sposób definiujemy dziedzinę zmiennej  $\omega$  za pomocą ciągu geometrycznego o ilorazie „krok  $\omega$ ”. Dla dwudziestu wyrazów ciąg ten ma rozpiętość prawie czterech rzędów wielkości (to dla ilorazu 1,6 - możesz sprawdzić, że  $1,6^{19}$  to prawie osiem tysięcy). Nawet niewielkie zmiany wartości „krok  $\omega$ ” spowodują spore zmiany w rozmiarze dziedziny naszej funkcji - sprawdź to dla wartości 1,2 i dla 2,0.

- 2.2 Uzyskany efekt - w postaci wykresu - zdecydowanie nie jest zadowalający. Tak szeroka dziedzina  $\omega$ , określona za pomocą ciągu geometrycznego, nie nadaje się na oś zorganizowaną w skali liniowej.



W okienku „Formatowanie osi x”, w zakładce „skala” zaznacz „skala logarytmiczna”. Przyjrzyj się uważnie nowej organizacji osi x. Zasadnicza różnica (w porównaniu ze skalą liniową) sprowadza się do określenia, czemu odpowiadają jednakowe odstępki na tej osi (np. pomiędzy znacznikami). W przypadku skali liniowej odpowiadają one jednakowym **różnicom** pomiędzy wartościami na osi. W przypadku skali logarytmicznej odpowiadają one jednakowym **ilorazom** wartości na osi. Dzięki temu, wartości zmiennej ustawione są „co rząd wielkości” (do przeliczeń dla potrzeb skali logarytmicznej stosuje się na ogół logarytmy dziesiętne), a na osi może zmieścić się zakres odpowiadający kilku a nawet kilkunastu rzędom wielkości.



Skala logarytmiczna ma jednak poważne ograniczenie: możemy ją stosować tylko gdy wartości zmiennej są wszystkie dodatnie. Taka jest bowiem dziedzina funkcji logarytm - nie obejmuje ona zera ani liczb ujemnych. Więcej na temat tworzenia skali logarytmicznej znajdziesz w części 3. ćwiczenia.

- 2.3 Zbadaj wpływ zmian oporu  $R$  w takim samym zakresie jak w punkcie 1.2. Przekonaj się, że wykres w skali logarytmicznej jest bardziej stabilny i pozwala lepiej porównywać przebiegi dla różnych  $R$ . W razie potrzeby zmień nieco wartość parametru „krok  $\omega$ ”, by dopasować rozmiar dziedziny.
- 2.4 Zbadaj wpływ zmian wartości parametrów  $L$  i  $C$  na przebieg i kształt krzywej rezonansowej. Przeprowadź to badanie na obu wykresach: liniowym i logarytmicznym. Porównaj uzyskiwane efekty.

### **Część 3. (dla chętnych) Samodzielne tworzenie skali logarytmicznej.**

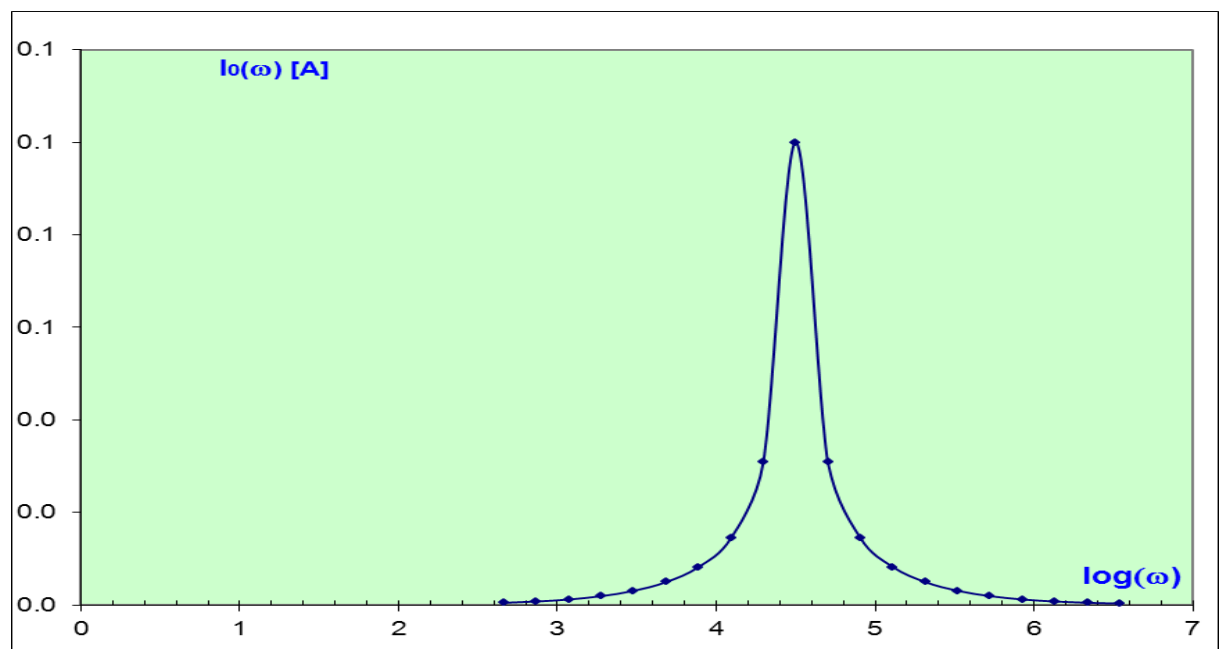
Skopiuj poprzedni arkusz do nowego; przywróć ustawienia domyślne. Przygotuj nową kolumnę, która posłuży jako zbiór wartości do osi odciętych wykresu w skali logarytmicznej. Pamiętaj jednak, że wartości funkcji  $I_0(\omega)$  pozostają obliczone na podstawie kolumny  $\omega$ . Nowa kolumna jest tylko podstawą do utworzenia wykresu. Wypełnij ją w dwóch wersjach.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2	$\varepsilon_0$ [V]		$\omega$ [1/s]	$Z_C$ [ $\Omega$ ]	$Z_L$ [ $\Omega$ ]	$Z_{RLC}$ [ $\Omega$ ]	$I_0(\omega)$ [A]	$\log(\omega)$	$\log(\omega/\omega_0)$
3	10								
4	R [ $\Omega$ ]								
5	10								
6									
7									
8	L [H]								
9	1,00E-03								
10									
11									
12	C [F]								
13	1,00E-06								
14									
15	$\omega_0$ [1/s]								
16	3,16E+04								
17	krok $\omega$ "razy"								
18	1,60E+00								
19									
20									
21									
22									

- 3.1. Wersja „bezpośrednia”. Do kolumny „log( $\omega$ )” wstaw logarytm dziesiętny (funkcja ta nazywa się LOG lub LOG10) wartości z kolumny zmiennej  $\omega$ .

H3: =LOG(C3)

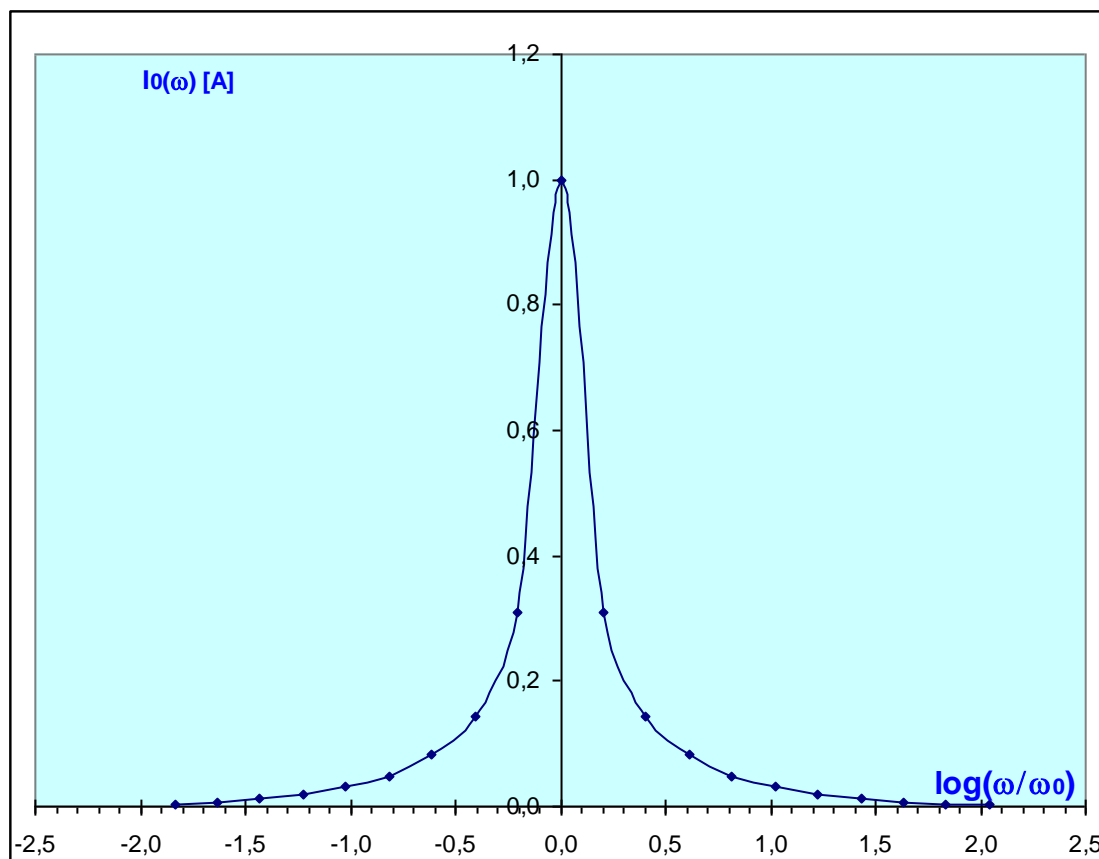
Sporządź wykres, w którym na osi odciętych („oś x”) odłożysz wartości „log( $\omega$ )” a na osi rzędnych wartości z kolumny „ $I_0(\omega)$ ”. Wybierz jednak, przy tworzeniu wykresu, wykres w skali liniowej (nie zaznaczaj skali logarytmicznej w okienku „Formatowanie osi”, zakładka „skala”) - logarytmiczny charakter skali zapewniony jest poprzez kolumnę „log( $\omega$ )”.



- 3.2. Wersja „rozbudowana”. Jeżeli w opisywanym zagadnieniu występuje wzorcowa wartość zmiennej, charakterystyczna dla samego zagadnienia, to można tę wartość wykorzystać do utworzenia skali logarytmicznej. W przypadku krzywej rezonansowej taką wzorcową wartością jest częstotliwość rezonansowa  $\omega_0$ . Utwórz za jej pomocą kolumnę „ $\log(\omega/\omega_0)$ ”.

G3: =LOG(C3/\$A\$16)

Sporządź wykres, w którym na osi odciętych odłożysz wartości z tej właśnie kolumny, a na osi rzędnych wartości z kolumny „ $I_0(\omega)$ ”. Zwróć uwagę na symetrię uzyskanego wykresu. Zaletą takiego postępowania jest wyraźne podzielenie dziedziny wykresu (w wersji „logarytmicznej”) na część „ujemną” oraz na część „dodatnią”. Pierwsza odpowiada wartościom  $\omega < \omega_0$  (wtedy iloraz  $\omega/\omega_0$  jest mniejszy od jedności, więc jego logarytm jest ujemny), a druga odpowiada wartościom  $\omega > \omega_0$  (wtedy logarytm z  $\omega/\omega_0$  jest dodatni).



- 3.3. Wykorzystaj jeden z wykresów logarytmicznych i zbadaj wpływ parametrów L i C na przebieg krzywej rezonansowej. Przekonaj się, że:
- wersja „3.1” lepiej nadaje się do opisywania przesunięć krzywej rezonansowej wzdłuż osi odciętych („w kierunku prawo-lewo”);
  - zmiany tych parametrów nie wpływają na wysokość rezonansu, czyli na wartość  $I_0(\omega = \omega_0)$ ;
  - zmiany tych parametrów wpływają na tzw. szerokość połówkową rezonansu (to pojęcie jest objaśnione w części III ćwiczenia).

### III. Do pracowni fizycznej.

**Zad. 1.** Na podstawie analizy wzorów (9) i (10) uzasadnij wyniki spostrzeżeń z poleceń 3.3.a) oraz 3.3.b) poprzedniej części ćwiczenia.

**Zad. 2.** Zbadaj zależność szerokości połówkowej ' $s_\omega$ ' rezonansu od wartości oporu R w obwodzie RLC. Wykorzystaj do tego tabele i wykresy przygotowane w części II tego ćwiczenia, odpowiednio je modyfikując.

Szerokość połówkowa krzywej rezonansowej (rys. 2.) to odległość pomiędzy dwiema wartościami częstości  $\omega_g$  i  $\omega_d$ :

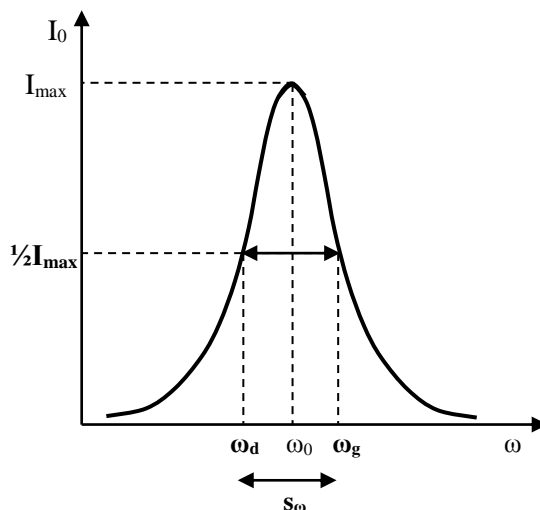
$$s_\omega = \omega_g - \omega_d,$$

które mają właściwości takie, że:

$$I_0(\omega_g) = I_0(\omega_d) = \frac{1}{2} \cdot I_{\max},$$

gdzie  $I_{\max}$  jest maksymalną wartością amplitudy natężenia prądu w obwodzie, osiąganą dla  $\omega = \omega_0$ .

Im większa szerokość połówkowa, tym obwód mniej precyzyjnie wyróżnia częstotliwość  $\omega_0$ . W radiokomunikacji i elektronice ogromne znaczenie ma konstruowanie obwodów o możliwie małej szerokości połówkowej.



Rys. 2. Szerokość połówkowa  $s_\omega = \omega_g - \omega_d$

W badaniu nastawiaj wartości R w zakresie od  $10 \Omega$  do około  $150 \Omega$  i dla każdej wartości R odczytaj z tabeli i wykresu częstości  $\omega_g$  i  $\omega_d$ , a następnie oblicz  $s_\omega$ . Postaraj się uzyskać dużą precyzję odczytu poprzez zagęszczenie wartości  $\omega$  w tabeli oraz wprowadzenie odpowiednich linii pomocniczych na wykresie. Uwzględnij także fakt, iż zmiana wartości R wpływa na wysokość krzywej rezonansowej, czyli na wartość  $I_{\max} = I_0(\omega = \omega_0)$ .

Badanie przeprowadź zarówno na wykresie o skali liniowej jak i na wykresie o skali logarytmicznej. Sporządź wykres zależności  $s_\omega(R)$ .

### Rozwiązania, wskazówki, komentarze

**Zad. 1.** Na podstawie analizy wzorów (9) i (10) uzasadnij wyniki spostrzeżeń z poleceń 3.3.a) oraz 3.3.b) poprzedniej części ćwiczenia.

**3.3a)** Wzór (9) pokazuje, że częstość  $\omega_0$  zależy zarówno od L ( $Z_L$ ), jak i od C ( $Z_C$ ). Maksimum wykresu przypada dla wartości  $\omega = \omega_0$ .

W wersji 3.1 wykres w skali logarytmicznej zawiera na osi odciętych logarytm z tzw. liczbowej wartości  $\omega$ , pozbawionej jednostek. Oznacza to, że położenie maksimum wykresu (czyli wartość  $\omega_0$ ) po prostu przesuwa się wzdłuż osi odciętych w miarę zmian wartości L bądź C. Przesunięcie to łatwo widać na wykresie.

W wersji 3.2 wykres zawiera na osi rzędnych logarytm **stosunku**  $\omega$  do  $\omega_0$ . Maksimum wykresu zawsze przypada na osi rzędnych (w punkcie „ $\log(\omega/\omega_0) = 0$ ”), gdyż  $\omega = \omega_0$  oznacza  $\omega/\omega_0 = 1$ , czyli właśnie  $\log(\omega/\omega_0) = 0$ . Zmiany wartości L bądź C nie powodują więc przesunięcia maksimum wykresu w prawo bądź w lewo, lecz jedynie niewielkie zmiany szerokości połówkowej tego wykresu.

**3.3b)** Wzór (10) pokazuje, że amplituda natężenia prądu  $I_0$  zależy od  $\omega$ , ale wśród parametrów zależności  $I_0(\omega)$  występują  $L$  oraz  $C$ :

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2}}$$

Maksymalną wartość  $I_{\max}$  amplituda prądu przyjmuje w stanie rezonansowym, gdy  $\omega = \omega_0$ . Zgodnie z rozumowaniem przeprowadzonym w punkcie 6. pierwszej części ćwiczenia, w stanie rezonansowym  $Z_L = Z_C$  (czyli  $L\omega = 1/C\omega$ ); powoduje to, że:

$$I_{\max} = I_0(\omega = \omega_0) = \frac{\varepsilon_0}{R}$$

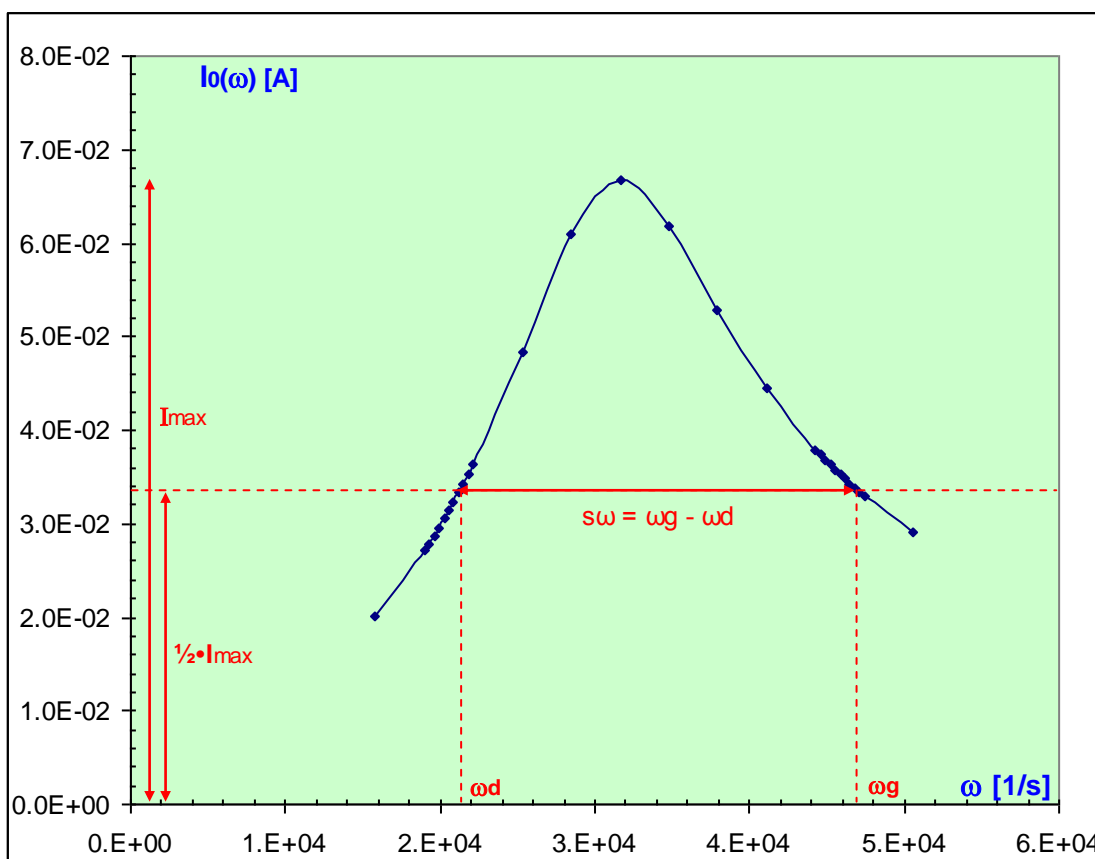
Wartość ta zależy jedynie od amplitudy napięcia zasilającego i od wartości oporu, więc zmiany wartości  $L$  oraz  $C$  nie mają na nią wpływu.

**Zad. 2.** Zbadaj zależność szerokości połówkowej 's<sub>ω</sub>' rezonansu od wartości oporu  $R$  w obwodzie RLC.

Wykorzystamy do tego tabele i wykresy przygotowane w części II tego ćwiczenia. Zmodyfikujemy je w ten sposób, że wyróżnimy dziedzinę tabeli i wykresu w okolicach  $\omega_g$  i  $\omega_d$ , po czym w tych okolicach zagęścimy próbkowanie częstotliwości - zmniejszymy „krok  $\omega$ ” 10-krotnie. W tych okolicach odnajdziemy - z określoną dokładnością - wartości  $\omega_d$  i  $\omega_g$ , które spełniają warunek:

$$I_0(\omega_g) = I_0(\omega_d) = \frac{1}{2} \cdot I_{\max}$$

Wartości te posłużą nam do wyznaczenia  $s_\omega$ . Przykład takiej modyfikacji, wykonanej dla wartości oporu  $R = 15 \Omega$ , przedstawiono poniżej w postaci wykresu i tabeli.



$\varepsilon_0$ [V]	$\omega$ [1/s]	$Z_C$ [ $\Omega$ ]	$Z_L$ [ $\Omega$ ]	$Z_{RLC}$ [ $\Omega$ ]	$I_0(\omega)$ [A]
10	1,58E+04	6,32E+01	1,58E+01	4,97E+01	2,01E-01
R [ $\Omega$ ]	1,90E+04	5,27E+01	1,90E+01	3,69E+01	2,71E-01
15	1,93E+04	5,18E+01	1,93E+01	3,58E+01	2,79E-01
	1,96E+04	5,10E+01	1,96E+01	3,48E+01	2,87E-01
	1,99E+04	5,02E+01	1,99E+01	3,38E+01	2,96E-01
L [H]	2,02E+04	4,94E+01	2,02E+01	3,28E+01	3,05E-01
1,00E-03	2,06E+04	4,87E+01	2,06E+01	3,18E+01	3,14E-01
	2,09E+04	4,79E+01	2,09E+01	3,09E+01	3,23E-01
	2,12E+04	4,72E+01	2,12E+01	3,00E+01	3,33E-01
C [F]	2,15E+04	4,65E+01	2,15E+01	2,92E+01	3,43E-01
1,00E-06	2,18E+04	4,58E+01	2,18E+01	2,83E+01	3,53E-01
	2,21E+04	4,52E+01	2,21E+01	2,75E+01	3,64E-01
$\omega_0$ [1/s]	2,53E+04	3,95E+01	2,53E+01	2,07E+01	4,84E-01
3,16E+04	2,85E+04	3,51E+01	2,85E+01	1,64E+01	6,09E-01
krok $\omega$ "+"	3,16E+04	3,16E+01	3,16E+01	1,50E+01	6,67E-01
3,16E+03	3,48E+04	2,87E+01	3,48E+01	1,62E+01	6,18E-01
	3,79E+04	2,64E+01	3,79E+01	1,90E+01	5,27E-01
krok $\omega$ "+" pomniejszony	4,11E+04	2,43E+01	4,11E+01	2,25E+01	4,44E-01
3,16E+02	4,43E+04	2,26E+01	4,43E+01	2,64E+01	3,79E-01
	4,46E+04	2,24E+01	4,46E+01	2,68E+01	3,74E-01
	4,49E+04	2,23E+01	4,49E+01	2,72E+01	3,68E-01
	4,52E+04	2,21E+01	4,52E+01	2,75E+01	3,63E-01
	4,55E+04	2,20E+01	4,55E+01	2,79E+01	3,58E-01
	4,59E+04	2,18E+01	4,59E+01	2,83E+01	3,53E-01
	4,62E+04	2,17E+01	4,62E+01	2,87E+01	3,48E-01
	4,65E+04	2,15E+01	4,65E+01	2,91E+01	3,43E-01
	4,68E+04	2,14E+01	4,68E+01	2,95E+01	3,39E-01
	4,71E+04	2,12E+01	4,71E+01	2,99E+01	3,34E-01
	4,74E+04	2,11E+01	4,74E+01	3,03E+01	3,30E-01
	5,06E+04	1,98E+01	5,06E+01	3,43E+01	2,92E-01

$I_{max}$  6,67E-01  
 $\frac{1}{2} \cdot I_{max}$  3,33E-01  
 $\omega_d$  2,12E+04  
 $\omega_g$  4,71E+04  
 $\Delta\omega = \omega_g - \omega_d$  2,59E+04

Nastawianie różnych wartości R prowadzi do wykresu zależności  $s_\omega(R)$ , która jest zależnością rosnącą: im większy opór R w obwodzie rezonansowym, tym szerokość połówkowa rezonansu jest większa.